

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

А. А. Багдасарян

ОСНОВИ НАНОЕЛЕКТРОНІКИ

Навчальний посібник

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету



Суми
Сумський державний університет
2019

УДК 620.3-022.513.2(075.8)

Б14

Рецензенти:

О. С. Кривець – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри наноелектроніки Сумського державного університету;
В. Б. Тарельник – доктор технічних наук, професор, академік Української технологічної академії, завідувач кафедри технічного сервісу Сумського національного аграрного університету

*Рекомендовано до видання
вченою радою Сумського державного університету
як навчальний посібник
(протокол № 3 від 10 жовтня 2019 року)*

Багдасарян А. А.

Б14 Основи наноелектроніки : навчальний посібник /
А. А. Багдасарян. – Суми : Сумський державний
університет, 2019. – 133 с.
ISBN 978-966-657-783-5

Навчальний посібник містить теоретичні відомості принципів роботи базових елементів і пристроїв наноелектроніки та задачі й тести для самостійного розв'язування.

Для студентів інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів III–IV рівнів акредитації.

УДК 620.3-022.513.2(075.8)

ISBN 978-966-657-783-5

© Багдасарян А. А., 2019
© Сумський державний університет, 2019

ЗМІСТ

	С.
Вступ.....	5
1. Класифікація нанокластерів і наноструктур, методи їх отримання.....	7
2. Базові елементи наноелектроніки.....	29
2.1. Класичні та квантові закони руху електронів..	29
2.2. Густина квантових станів.....	35
2.2.1. Тривимірний об'єкт.....	36
2.2.2. Квантова яма.....	40
2.2.3. Квантовий дріт.....	42
2.2.4. Квантова точка.....	44
2.3. Квантування провідності.....	45
2.4. Квантовий ефект Холла.....	49
2.5. Застосування квантових напівпровідникових структур в електроніці.....	52
3. Транзистори.....	59
3.1. Теорія кулонівської блокади.....	59
3.2. Одноелектронна квантова яма.....	65
3.3. Одноелектронний транзистор.....	71
4. Основи квантової механіки.....	80
4.1. Вільна частинка.....	80
4.2. Частинка в одновимірній потенціальній ямі...	83

4.3. Рух частинки в потенціальній ямі кінцевої глибини.....	86
4.4. Розсіювання частинки на прямокутному потенціальному бар'єрі.....	92
Питання та завдання для самоперевірки.....	99
Тестові завдання.....	106

Вступ

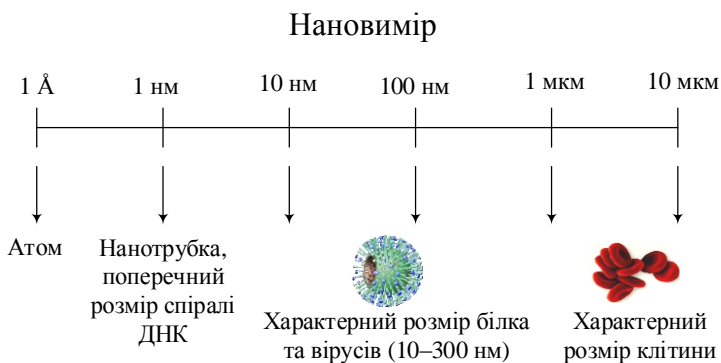
Навчальний посібник призначений для організації самостійної роботи студентів із вивчення курсу «Основи наноелектроніки» напряму підготовки бакалаврів 153 «Мікро- та наносистемна техніка».

Навчальний посібник складається з чотирьох розділів. У першому розділі охарактеризовані різні типи нанокластерів і наноструктур та методи їх отримання. У другому розділі увага студентів акцентована на квантово-механічних принципах роботи базових елементів наноелектроніки, на основі яких побудовані пристрої нанометрових розмірів, наведених у третьому розділі. В останньому розділі подані основні відомості з квантової механіки та проаналізована поведінка частинки під час проходження через потенціальний бар'єр різної висоти. Для самостійної підготовки в кінці посібника наведені контрольні й тестові питання з курсу.

Усі розділи та підрозділи навчального посібника містять детальний перелік посилань на літературні джерела.

Вступ

«**Нано**» (від грец. nanos – карлик) означає одна мільярдна частка або 10^{-9} частина чого-небудь, наприклад, 1 нм = 10^{-9} м.



Коротка історична довідка:

2000 р. до н. е. – фарбування волосся наночастинками галеніту (PbS), Єгипет;

1000 р. до н. е. – додавання наночастинок золота до складу скла – вітражі;

1959 р. – лауреат Нобелівської премії з фізики Річард Фейнман прочитав лекцію з алегоричною назвою «**There is plenty of rooms at the bottom. In minituarization**»;

1974 р. – Н. Танігучі запропонував термін «нанотехнології для процесів створення матеріалів»:

«Nano-technology mainly consist of the processing of separation, consolidation, and deformation of materials by one atom or one molecule»;

1981 р. – Г. Біннінг і Г. Рорер винайшли сканувальний тунельний мікроскоп для спостереження наноструктур;

1985 р. – відкриття квантового ефекту Холла та фулерену;

1991 р. – винахід вуглецевих нанотрубок (S. Iijima);

2000 р. – створення напівпровідникових гетероструктур та розроблення напівпровідникових інтегральних схем;

2004 р. – відкриття графену (А. Гейм, К. Новосьолов)

1. Класифікація нанокластерів і наноструктур, методи їх отримання

Нанотехнологія – сукупність методів, які забезпечують отримання та вдосконалення об'єктів, що містять елементи розміром менше ніж 100 нм хоча б в одному напрямку.

Наноматеріали – це матеріали або система, розміри яких хоча б в одному напрямку змінюються від декількох до сотень нанометрів та мають кращі порівняно з традиційними матеріалами фізичні, хімічні, механічні й

біологічні властивості, функціональні та експлуатаційні характеристики.

Наносистема – об'єкт, який складається із зв'язаних між собою нанорозмірних елементів, що забезпечують виникнення в об'єкта якісно нових властивостей.

Нанокристалічні (нанофазні) матеріали – це матеріали, в яких розмір окремих кристалітів або фаз, що складають структурну основу, не перевищує 100 нм хоча б в одному вимірі.

Об'ємні, або масивні, наноматеріали – це наноматеріали, що складаються з великої кількості елементів (кристалітів) нанорозмірного масштабу (наприклад, полікристалічні матеріали з розміром зерна від 1 до 100 нм).

Наноструктурні (нанопокриття) покриття – покриття з нанометровим розміром кристалітів (нанокристалічні покриття) товщиною від 100 нанометрів до декількох мікрометрів.

Нанокompозити – композиційні матеріали, що складаються з металевої, полімерної або керамічної матриць і наповнювача у вигляді наночастинок, нановолокон, наночарів.

Нанокластери (атомні кластери, наночастинки) – низьковимірні структури, що мають розміри менше ніж 100 нм (1–100 нм) і складаються з десятків, сотень або тисяч атомів.

Умовно всі нанотехнології можна поділити на два класи:

- 1) top down – «зверху вниз»;
- 2) bottom up – «знизу вгору».

Принцип підходу «зверху вниз» полягає в створенні об'ємної структури з подальшим її зменшенням до наноструктурних розмірів за допомогою процесів механічного здрібнювання, інтенсивної пластичної деформації, оптичних і ультразвукових методів, імплантації іонів, локальної епітаксії. Найбільш продуктивною технологією створення елементів мікро- та наноелектроніки є променева літографія (10–100 нм). Ця технологія базується на впливі випромінювання на напівпровідникову заготовку і формуванні заданої конфігурації мікросхеми.

Ідея підходу «знизу вгору» полягає в збиранні, маніпулюванні або самоорганізації окремих атомів у більшій утворення (наноприлади або нанопристрої). Серед методів цього напрямку можна виділити хімічні методи

(нанотрубки), атомну силову та сканувальну мікроскопію, молекулярно-променевою епітаксією (квантові дроти, точки), осадження з газової суміші металоорганічних сполук (квантові листи, надгратки), каталітичні реакції тощо.

Існує декілька способів класифікувати нанокластери та наноструктури. Класифікація наноматеріалів за розмірністю структурних елементів включає: нульвимірні 0D (фулерени, нанокластери), одновимірні 1D (нановолокна, нанодроти, органічні макромолекули, нанотрубки), двовимірні 2D (плівки Ленгмюраа – Блоджета, нанопластили, гетероструктури), тривимірні 3D (наногранули, нанопори).

У навчальному посібнику ми будемо додержуватися класифікації наноструктур за методами виготовлення. До ізольованих нанокластерів відносять такі: молекулярні кластери, газові безлігандні та колоїдні кластери. Серед безлігандних кластерів розрізняють: кластери рідкоземельних та перехідних металів, вуглецеві нанотрубки, фулерени та ван-дер-ваальсові кластери. До наноструктур відносять твердотільні, матричні, супрамолекулярні, фулерити, нанокompозити, наноплівки та нанотрубки.

Молекулярні та газові безлігандні кластери

Здебільшого молекулярні кристали являють собою сполуки, що складаються з атомів перехідних металів та безпосередньо зв'язаних із ними лігандів, які мають стабілізаційний ефект (одно-, дво- та багатоатомні іони, молекули). Молекулярні кластери отримують із металокомплексних сполук шляхом хімічних реакцій у розчині. Подібні кластери зазвичай містять від 12 (малі кластери) до 150 атомів металу (великі). Найбільш великі молекулярні кластери синтезуються на основі благородних металів, паладію і платини.

Газові безлігандні кластери є метастабільними кластерами, а тому для підвищення стабільності їх додатково поміщають в інертну матрицю (наприклад, фулерен). Існує декілька способів отримання газових безлігандних кластерів: за допомогою надзвукового сопла, газової агрегації, кріохімічним методом та випаровуванням із поверхні твердого тіла. Розмір кластерів може змінюватись у широкому діапазоні – від декількох атомів до тисяч атомів металу. Так, наприклад, надзвукове сопло дозволяє отримувати кластери масою декілька сотень атомів металу, синтез великих кластерів досягається шляхом випаровування твердого тіла або рідини у

охолоджений газ та подальшої конденсації атомів в кластери.

Колоїдні кластери

Колоїдні кластери формуються в результаті хімічних реакцій у розчині. Щодо рідкої фази, можна виділити ліофільні та ліофобні кластери. Перші кластери на відміну від других можуть сорбувати молекули розчинника з довкілля й утворювати з ним міцні сольватні комплекси. Прикладами ліофільних кластерів є кластери металів, окислів. До колоїдних наносистем також відносять міцели та мікроемульсії. Міцели, або асоціати молекул ПАВ (поверхнево-активні речовини), є окремою частинкою високодисперсної колоїдної системи з рідким дисперсійним середовищем, що складається з ядра і поверхневої стабілізуючої оболонки. Міцели можуть формувати нано- та мікроемульсії.

Твердотільні нанокластери та наноструктури

Твердотільні кластери та наноструктурні матеріали формуються в результаті різних перетворень у твердій фазі: хімічні реакції (наприклад, реакції термічного розкладання солей), методи порошкової металургії, кристалізація аморфної фази, мартенситні перетворення, спінодальний розпад, формування магнітних доменів та ін.

Найбільш універсальним серед усіх методів є методи порошкової металургії. За допомогою такого методу можна отримати різні групи нанокристалічних матеріалів: нанопористі матеріали, наноструктурні покриття та плівки (нітриди, бориди і карбіди перехідних металів), наноструктурну кераміку (Al_2O_3 , ZrO_2), матеріали для електричних контактів, композиційні матеріали.

Формування нанокристалічного стану також можливе у результаті переходу матеріалу з аморфного стану в нанокристалічний унаслідок швидкого охолодження (10^7 К/с) розплаву. Такий процес призводить до виникнення великої кількості центрів кристалізації, які мають малу швидкість росту, що й сприяє формуванню нанокристалічного стану.

Матричні нанокластери та супрамолекулярні структури

Прикладами матричних кластерів є кластери металів у неорганічній матриці, супрамолекулярні наноструктури, ультрамалі кластери в цеолітах та ін. Властивості таких кластерів обумовлені типом матриці й твердого середовища, що є матричною ізоляцією. Таке середовище повинно бути хімічно інертним щодо ізольованих об'єктів та достатньо жорстким для

запобігання коагуляції частинок. Цей тип кластерів отримують шляхом різних хімічних реакцій у розчині з подальшим утворенням сполук. Наприклад, пропускання розчину через пористу матрицю дозволяє синтезувати ультрамалі кластери металів та їх оксидів у порах цеолітів (1–2 нм).

До полімерних наноккомпозитів відносять супрамолекулярні структури, в яких основну роль відіграють ансамблі молекул, пов'язані завдяки ван-дер-ваальсовим та електростатичним силам. На сьогодні існує декілька видів супрамолекулярної структури: двовимірні, лінійні полімерні супрамолекули, дендримери та ін. Одним із найпростіших прикладів супрамолекулярної структури є комплекс «господар – гість». Прикладом «господаря» є велика молекула з порожниною всередині (фермент), а «гість» – більш проста молекула або іон. Наприклад, ДНК являє собою два полінуклеотидні ланцюги, що комплементарно пов'язані один з одним водневими зв'язками та є одночасно і господарем, і гостем.

Кластерні кристали та фулерити

Одним з основних хімічних елементів у сфері нанотехнологій є вуглець. До недавнього часу вважали, що вуглець має три алотропні форми, а саме: аморфний

вуглець, графіт та алмаз. Однак у 1985 р. Р. Керл, Г. Крото, та Р. Смоллі вперше синтезували сферичну молекулу C_{60} (фулерен) під час дослідження мас-спектра парів графіту після лазерного опромінення твердого тіла. Вона має 12 пентагональних і 20 гексагональних симетрично розміщених граней та нагадує форму футбольного м'яча. Пізніше були виявлені інші фулерени з різною кількістю атомів вуглецю та різною формою: C_{32} , C_{192} та ін. Фулерени з кількістю атомів вуглецю > 60 виявилися нестабільними.

Усі алотропні форми (графіт, фулерен, алмаз та ін.) вуглецю складаються з однакових атомів вуглецю. Однак алмаз є найтвердішим матеріалом, а графіт – дуже м'яким. Справа у тому, що в алмазі кожний атом вуглецю розміщений у центрі тетраедра і зв'язаний із чотирма атомами ковалентним зв'язком, тоді як у графіті – лише з трьома. Кристали графіту складаються з паралельних площин (шарувата структура), в яких атоми розміщені у вершинах правильних шестикутників. Між атомами, розміщеними в різних площинах, формується слабкий ван-дер-ваальсовий зв'язок. Така структура визначає специфічні властивості графіту, а саме низьку твердість,

пластичність, здатність легко розшаруватися навіть за малих навантажень та високої теплопровідності.

Щодо фулеренів, атоми вуглецю, які утворюють сферу, зв'язані сильним ковалентним зв'язком. Товщина сферичної оболонки – 0,1 нм, а радіус молекули C_{60} становить 0,357 нм. Атоми вуглецю в молекулі C_{60} утворюють 12 правильних п'ятикутників і 20 правильних шестикутників. Фулерени є дуже стійкими до інертного середовища з температурою ~ 1700 °С, однак мають окисну здатність уже за $t = 500$ °С. Ураховуючи їх властивості, фулерени широко використовують: конструкційні сплави високої міцності; радіозахисні матеріали на основі графіту, модифікованого фулеренами; антифрикційні покриття; як ефективні добавки до масел; матеріали мікросенсорів та ін. Оскільки розміри фулеренів – нанометрові діапазони, вони легко проходять кровоносною системою, а тому їх можна використовувати для доставлення необхідних лікувальних матеріалів.

Твердофазні структури (кристали) на основі фулеренів називаються фулеритами. Такий кристал має кубічну структуру з ГЦК-граткою. Враховуючи те, що ГЦК-гратка містить 8 тетраедричних та 4 октаедричні порожнини фулерити можуть бути заповнені атомами металів

та утворювати так звані фулериди (M_1C_{60} , M_3C_{60}). Унаслідок легування фулериди можуть мати як напівпровідникові, так і металічні властивості. Наприклад: фулериди рідкоземельних металів (M_3C_{60} , $M = K, Rb, Cs$) мають надпровідникові властивості.

На сьогодні існує декілька методів отримання фулеренів:

- 1) термічне випаровування графіту з подальшим переходом із газового стану у твердий стан;
- 2) розкладання за високих температур вуглеводнів.

Суть першого методу полягає у виділенні фулеренів із графітової сажі, утворюваної з часу термічного розкладання графіту в результаті нагрівання плазмовим струменем, електричною дугою, лазерного впливу та використання дугового розряду між стрижнями з графіту (фулеренова дуга). Існує декілька способів виділення фулеренів із графітової сажі, наприклад, шляхом розчинення сажі в органічній рідині (зокрема, бензолі) й подальшого випаровування під час нагрівання з формуванням кристалічного осаду – фулерену.

Другий метод полягає в піролізі вуглеводнів за допомогою мікрохвильової плазми та лазерного

випромінювання. Такий підхід дозволяє отримувати фулерени в промисловому масштабі.

Основну увагу останнім десятиліттям приділяли спробам отримати замкнені фулереноподібні структури, що складаються не лише з вуглецевих атомів, а й з атомів інших елементів. Так, наприклад, у 2006 році вперше синтезований фулерен, що складається з 16 атомів золота. Завдяки дуже сильним каталітичним властивостям такі матеріали можна використовувати в процесах перетворення парів метану на водень та ін. Кремнієві фулерени можна застосовувати як компоненти квантових комп'ютерів та надпровідників.

Нанокompозитні системи

Прикладом нанотехнологій є матеріали, що після термічного оброблення (загартування та подальше старіння) мають нанокompозитну структуру. Зазвичай це гетерогенні системи, що складаються з декількох фаз, причому одна з них повинна містити структурні елементи розміром менше ніж 100 нм, а інша – бути аморфною або твердою (наприклад, матриця). Нанокompозитні системи за рахунок значної ролі граничних областей, що оточують зерна, характеризуються особливими механічними властивостями. Так, наприклад, TiSiN нанокompозитне

покриття має твердість > 50 ГПа за рахунок формування твердих нанокристалітів (3–10 нм), розділених м'якою аморфною фазою (1–3 нм). Також ці матеріали мають гарні високотемпературну стійкість до окиснення та термічну стабільність властивостей. Оскільки наноконпозиційний матеріал – це поєднання окремих фаз, то підбір складу матеріалу та легувального елемента дозволяє забезпечувати необхідні властивості.

Тонкі наноструктурні плівки

Тонкі наноструктурні плівки та покриття належать до 2D-нанооб'єктів, тобто до тих матеріалів, які мають нанометровий розмір лише в одному напрямку. Такі системи використовують як надтверді, зносостійкі, антикорозійні покриття, основи для розроблення елементів мікро- і наноелектроніки та ін. Властивості таких матеріалів регулюють завдяки зміні розміру зерен та їх кристалографічної орієнтації. На сьогодні існує декілька методів та підходів для формування нанокристалічних плівок і покриттів: 1) додаткове легування елементів в основний матеріал; 2) іонне бомбардування; 3) осадження багат шарових плівок та покриттів, що містять шари нанометрової товщини; 4) наноконпозитні структури; 5) осадження багатоконпонентних плівок та покриттів (так

звані високоентропійні сплави), що містять не менше ніж п'ять елементів із концентрацією від 5 % до 35 %.

Основними методами отримання наноструктурних плівок та покриттів є PVD-технології (Physical Vapor Deposition) і CVD-технології (Chemical Vapor Deposition). Методи PVD є більш поширеними завдяки: а) можливості селективного нанесення покриття на різні ділянки підкладки; б) зміні елементного і структурно-фазового складів, напружено-деформованого стану, мікроструктури та властивостей унаслідок регулювання параметрів осадження (тиск робочого газу, потенціал підкладки, температура осадження); в) можливості отримання багатошарових покриттів; г) отриманню рівномірних шарів покриття з товщиною в широкому діапазоні від 1 нм до 200 мкм. Найпоширенішими методами PVD-технології є магнетронне розпилення та вакуумно-дугове осадження.

У методах CVD наноструктурні покриття та плівки формуються в результаті хімічних реакцій між матеріалом і парогазовими сумішами. Основним недоліком цієї технології є висока температура осадження (800–1 800 K), що згубно впливає на механічні характеристики виробів.

Найбільш цікавими наноструктурами з точки зору практичного застосування є вуглецеві нанотрубки, що

були вперше синтезовані в 1991 р. Вуглецеві нанотрубки можна уявити як згорнутий лист графену з віссю, розміщеною під різними кутами, діаметром від одного до декількох десятків нанометрів і завдовжки декілька мікронів. На рисунку 1.1 показані можливі структури вуглецевих нанотрубок залежно від кута осі.

Традиційними методами отримання вуглецевих нанотрубок є лазерна абляція графіту, хімічне осадження та електродуговий синтез. Випаровування вуглецю з мішені під дією високоінтенсивного пучка лазера дозволяє отримувати нанотрубки діаметром 10–20 нм та довжиною 100 мікронів. У результаті електродугового методу синтезу можна отримати одношарові (діаметр 1–5 нм та довжина 1 мкм) і багатшарові нанотрубки. Метод хімічного осадження є найбільш перспективним із точки зору промислового виробництва нанотрубок, оскільки внаслідок розкладання газоподібного вуглеводню можна неперервно отримувати кінцевий продукт. Використання різних підкладок дозволяє отримувати окремо напівпровідникові та металеві нанотрубки.

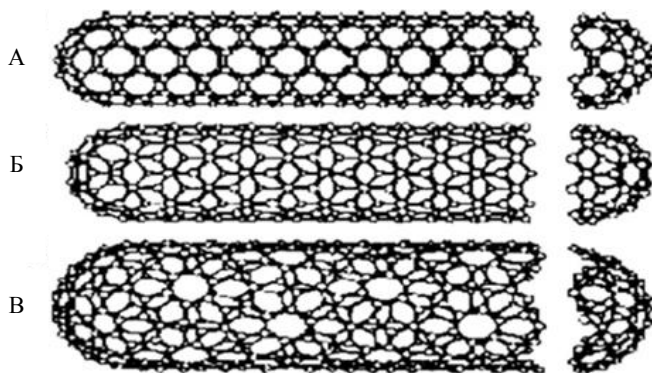


Рисунок 1.1 – Вуглецеві наноструктури з різною структурою: А – крісельна структура; Б – структура типу «зиг-заг»; В – хіральна структура [5]

Унікальні властивості нанотрубок визначаються не лише їх особливою структурою, а й відсутністю структурних дефектів. Залежно від геометрії отриманої структури нанотрубки можуть виявляти як металеві, так і напівпровідникові властивості. Так, наприклад, крісельні нанотрубки мають металевий тип провідності, а нанотрубки зі структурами типів Б і В (рис. 1.1) залежно від діаметра та вектора хіральності мають металеві або напівпровідникові властивості. Найбільш цікавим щодо фізичних властивостей нанотрубок є їх висока міцність. Так, модуль Юнга коливається від 1,2 ГПа до 1,8 ГПа (для порівняння високоміцна сталь – 0,2 ГПа), а межа міцності

на розтягування – від 30 ГПа до 100 ГПа (сталеві сплави руйнуються при 1–2 ГПа). За рахунок унікальних властивостей вуглецеві нанотрубки набули застосування як надлегкі і надміцні композиційні матеріали, елементи моніторів із плоским екраном, голок сканувального мікроскопа, напівпровідникових гетероструктур та ін. Більш детально класифікація нанотехнологій розглянута в [14].

Раніше ми зазначали, що основним елементом наноелектроніки є неоднорідні гетерогенні структури. Вони поєднують у собі контакт напівпровідників із вузькою та широкою забороненими зонами. Найбільш популярним матеріалом сучасної наноелектроніки є арсенід галію (ширина забороненої зони (ЗЗ) – 1,5 еВ). Для збільшення ширини ЗЗ AsGa додатково легують Al (ширина ЗЗ AlAs становить 2,2 еВ). Зобразимо вид зонної структури AsGa з AlGaAs (рис. 1.2).

З рисунка 1.2 бачимо, що для електронів, які рухаються в напівпровіднику з вузькою ЗЗ і мають меншу енергію, межа буде відігравати роль потенціального бар'єра. У результаті два контакти з різною шириною ЗЗ обмежують рух електрона з двох боків, утворюючи потенціальну яму. В такій квантовій структурі можуть

виникати локалізовані рівні, причому кількість таких рівнів кінцева. Характерною особливістю квантових структур є те, що хоч рух електронів на рівнях E_1 і E_2 обмежений, існує ймовірність їх проникнення в область ЗЗ – тунельний ефект. Подібним чином можна отримати структуру, що містить квантовий бар'єр, для цього необхідно помістити тонкий шар напівпровідника з широкою ЗЗ між двома напівпровідниками з вузькою ЗЗ.

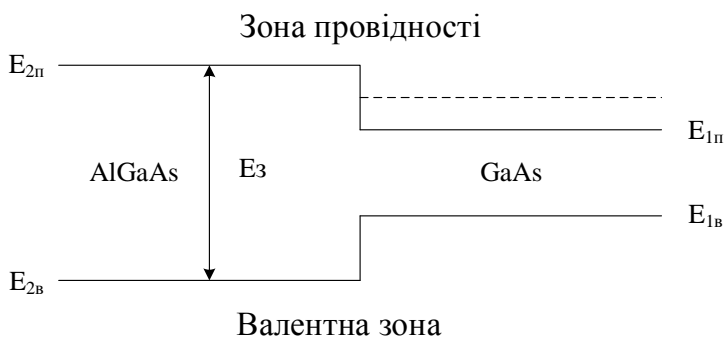


Рисунок 1.2 – Енергетичні зони гетероструктури:

$E_{п}$ та $E_{в}$ – межі зони провідності та валентної зони, відповідно; E_3 – ширина забороненої зони

На цей час найбільш успішним методом вирощування якісних тонких плівок та створення гетероструктур є молекулярно-променева епітаксія. За

рахунок осадження в надвисокому вакуумі цей метод дозволяє отримувати монокристали високої чистоти. Унікальною властивістю молекулярно-променевої епітаксії є можливість отримання гетероструктури з двох напівпровідників з атомарно гладкою межею. Більше того, така методика дозволяє отримувати квантові структури зі складним профілем складу. Так, наприклад, якщо на поверхню GaAs (001) осадити чотири моношари InAs, можна отримати щільний масив острівців із розміром ~ 14 нм. Якщо зверху осадити шар напівпровідника з широкою ЗЗ (наприклад, GaAs), отримаємо масив квантових точок у GaAs-матриці.

Крім природної властивості матеріалу формувати острівці під час росту, існує ще декілька способів отримати квантові точки й дроти. Так, наприклад, якщо нанести додаткові потенціальні бар'єри на контакт двох напівпровідникових структур, що будуть обмежувати рух електронів ще в одному або двох напрямках, то можна отримати або квантову точку, або дріт відповідно. Інша методика полягає у використанні масок різної форми (коло, смуга). Процес формування квантових структур полягає в нанесенні масок на поверхню AlGaAs та подальшому глибокому травленні. Внаслідок цього

електрони стають запертими в циліндрах або дротах відповідно.

Список літератури

1. Наноматеріали і нанотехнології : навчальний посібник / М. О. Азаренков, І. М. Неклюдов, В. М. Береснєв та ін. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2014. – 316 с.
2. Субмікронні та нанорозмірні структури електроніки : підручник / З. Ю. Готра, І. І. Григорчак, Б. А. Лукіянець та ін. – Чернівці : Видавництво та друкарня «Технологічний центр», 2014. – 839 с.
3. Поплавко Ю. М. Нанофізика, наноматеріали, наноелектроніка : навчальний посібник / Ю. М. Поплавко, О. В. Борисов, Ю. І. Якименко. – Вінниця : ВНТУ, 2016. – 199 с.
4. Заячук Д. М. Нанотехнології і наноструктури / Д. М. Заячук. – Львів : Львівська політехніка, 2009. – 580 с.
5. Carbon nanotubes, science and technology part (I) structure, synthesis and characterization / A. Aqel, K. M. M. El-Nour, R. A. A. Ammar, A. Al-Warthan Arabian // Journal of Chemisty. – 2012. – Vol. 5. – P. 1–23.

6. Елисеев А. А. Функциональные наноматериалы / А. А. Елисеев, А. В. Лукашин ; под ред. Ю. Д. Третьякова. – Москва : ФИЗМАЛИТ, 2010. – 456 с.
7. Poole C. Introduction to Nanotechnology / C. Poole, F. J. Owens. – Published by John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2003. – 388 p.
8. Верещагина Я. А. Физическая химия наноматериалов [Электронный курс] : учеб. пособие / Я. А. Верещагина. – Казань : Казан. ун-т, 2016. – 120 с.
9. Поздняков В. А. Физическое материаловедение наноструктурных материалов : учеб. пособие / В. А. Поздняков. – Москва : МГИУ, 2007. – 424 с.
10. Куцова В. З. Наноматеріали та нанотехнології: навчальний посібник / В. З. Куцова, Т. В. Котова, Т. А. Аюпова. – Дніпропетровськ : НМетАУ, 2013. – 103 с.
11. Уильямс Л. Нанотехнологии без тайн / Л. Уильямс, У. Адамс. – Москва : McGraw-Hill (перевод), 2010. – 365 с.
12. Рамбиди Н. Г. Физические и химические основы нанотехнологий / Н. Г. Рамбиди, А. В. Березкин. – Москва : ФИЗМАЛИТ, 2008. – 456 с.
13. Демиховський В. Я. Квантові ями, нити, точки. Що це таке? / В. Я. Демиховський // Соровський освітній журнал. – 1997. – № 5. – С. 80–86.

14. Грабченко А. И. Введение в нанотехнологии : текст лекций / А. И. Грабченко, Л. И. Пупань, Л. Л. Товажнянский. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2012. – 288 с.

2. Базові елементи наноелектроніки

2.1. Класичні та квантові закони руху електронів

Основною особливістю класичної фізики є те, що вона повністю детермінована (визначена): якщо відомо положення матеріальної точки на даний час та визначені сили, що діють на неї, то її рух є цілком передбаченим. Зокрема, це означає, що всі класичні об'єкти рухаються траєкторіями. Іншими словами, матеріальна точка не може потрапити відразу у два стани з початкового.

Ситуація кардинально змінюється в квантовій механіці, де діє співвідношення невизначеностей:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq h, \quad (2.1)$$

де Δp_x та Δx – невизначеність імпульсу та координати відповідно. Співвідношення (2.1) є суто експериментальним фактом. Воно означає, що чим менша невизначеність координати Δx , тим більша невизначеність імпульсу Δp_x . Зв'язані ці невизначеності сталою Планка (або квантом дії). Оскільки ця величина є мікроскопічною ($h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$), то мікроскопічними є й невизначеності імпульсу та координати, а тому для макроскопічних об'єктів вони не відіграють принципової

ролі. Згідно з (2.1) чим точніше ми локалізуємо об'єкт, тим більшим буде розкид швидкостей, з якими він буде рухатися. Іншими словами, мікроскопічний об'єкт буде рухатися за пучком траєкторій. Відсутність траєкторії у квантовій частинці можна змоделювати замінюючи одну частинку набором (ансамблем) класичних частинок. Однак необхідно пам'ятати, що класичні частинки не однакові, а мають розкид швидкостей Δv .

Для адекватного опису випадкового ансамблю необхідно визначити функцію розподілу макрочастинок за координатами та швидкостями (імпульсами). З теорії ймовірності відомо, що якщо випадкова величина змінюється неперервно, то зручно використовувати не саму ймовірність, а її густину. Припустимо, що густина ймовірності частинки з координатою x є величина $p(x)$, тоді величина $p(x) dx$ визначає ймовірність потрапляння частинки в інтервал $[x; x + dx]$.

Основний постулат квантової механіки полягає в такому:

$$p(x) = |\psi(x)|^2, \quad (2.2)$$

де $\psi(x)$ є математичною конструкцією і називається хвильовою функцією. Згідно (2.2) густина ймовірності

виявлення квантового об'єкта в т. x дорівнює квадрату модуля (інтенсивності) хвильової функції, взятій у цій точці.

Принципова важливість визначення (2.2) пов'язана з тим, що у квантовій механіці постулюється рівняння руху не для густини ймовірності $p(x)$, а для хвильової функції $\psi(x)$. Це так зване рівняння Шредінгера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \quad (2.3)$$

де t – час; $\psi(x)$ – хвильова функція; \hat{H} – оператор Гамільтона. Згідно з (2.3) швидкість зміни хвильової функції з часом являє собою хвильову функцію, лінійно змінену за допомогою оператора Гамільтона.

Характерна особливість рівняння Шредінгера полягає в тому, що воно лінійне за хвильовою функцією. Ця властивість відображає принцип суперпозиції. Однак необхідно зазначити, що цей принцип виконується лише для хвильової функції, а не для її густини ймовірності. Оскільки $\psi(x)$ є математичною конструкцією, а $p(x)$ – вимірювана величина, то в реальності під час експерименту принцип суперпозиції набирає більш складного характеру.

Для пояснення явища дифракції розглянемо систему з двох частинок із хвильовими функціями $\psi_1(x)$ та $\psi_2(x)$. Принцип квантової суперпозиції стверджує, що хвильова функція для всієї системи буде виражена таким чином:

$$\Psi = a\psi_1(x) + b\psi_2(x), \quad (2.4)$$

де a і b – фіксовані числа. Виходячи з (2.4), стає зрозумілим явище формування інтерференційної картини, що відповідає розподілу густини ймовірності потрапляння частинок у різні частини детектора.

Згідно (2.2) густина ймовірності всієї системи буде набирати більш складного характеру:

$$p_{1,2} = (|a|^2 p_1 + |b|^2 p_2) + (a^* b \psi_1^* \psi_2 + b^* a \psi_2^* \psi_1). \quad (2.5)$$

Відповідно до (2.5) густина ймовірності двох частинок подається двома доданками різної фізичної природи: перший доданок – лінійна комбінація густин кожної частинки (має такий самий вигляд як і в класичній механіці, – ймовірності незалежних подій додають); другий доданок має інтерференційну природу (перемножують хвильові функції різних частинок).

Розглянемо іншу особливість квантової механіки, а саме дискретні спектри. Спостережувані величини, що визначають фізичний об'єкт (наприклад електрон) не

завжди зводяться в квантовій механіці до скалярних величин. Наприклад, якщо координата електрона визначена скаляром, то її імпульс буде подаватися оператором. Як відомо з лінійної алгебри, будь-який оператор має спектр власних значень. Наприклад, стоячі коливні хвилі на фізичних об'єктах містять ціле число півхвиль. У квантовій механіці хвильова функція поводить себе подібним чином. Покажемо, як змінюється хвильова функція електрона, який поміщено в потенціальну яму (рис. 2.1).

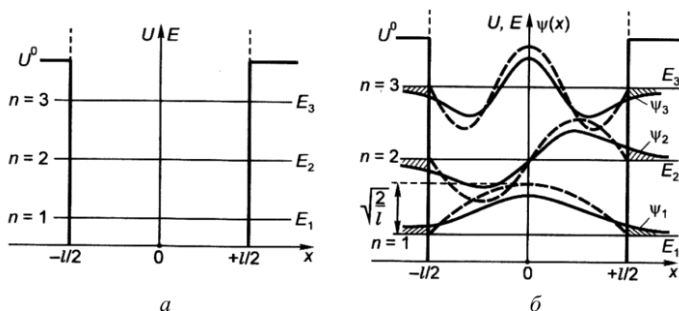


Рисунок 2.1 – Одновимірна потенціальна яма:

а – енергетичний спектр частинки в потенціальній ямі (наведені три енергетичних рівні: E_1, E_2, E_3); б – хвильові функції ψ_n для трьох станів ($n = 1, 2, 3$) частинки в потенціальній ямі

Якщо використати рівняння Шредінгера (2.3) й таку умову: по довжині всього об'єкта укладається кратне число довжин півхвиль, то хвильова функція матиме вигляд

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a} n\right), \quad (2.6)$$

де a – розмір області локалізації квантової частинки; n – номер квантового стану. Як бачимо з наведеного рисунка 2.1 (б), густина у квантовій ямі розподіляється нерівномірно, оскільки наявні максимуми та мінімуми. З формули (2.6) бачимо, що довжини хвиль, які описують електронні стани, повинні задовольнити таку умову:

$$n \left(\frac{\lambda_n}{2} \right) = a. \quad (2.7)$$

Згідно із (2.7) у квантовій ямі повинно укладатися ціле число півхвиль де Бройля. У 1924–1925 роках де Бройль висунув припущення, що мікрочастинки (наприклад, електрон) мають хвильові властивості. Наступне завдання полягає в знаходженні дозволених рівнів енергій. Для цього використаємо правило квантування Бора в інтерпретації де Бройля – у квантовій ямі дозволені лише ті траєкторії, для яких координата та імпульс пов'язані таким співвідношенням:

$$p_n a = \pi \hbar n. \quad (2.8)$$

З умови (2.8) знаходимо остаточний вираз для власних значень енергії рівнів у ямі:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2. \quad (2.9)$$

Як бачимо з рисунка 2.1 (а) та формули (2.9) мінімальна енергія частинки в потенціальній ямі є ненульовою і задається виразом $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$. Таку енергію називають енергією нульових коливань. Характерне її значення становить $\approx 0,02$ еВ. Це і є принципово важливою відмінністю квантової механіки від класичної фізики, де існує мінімальна нульова енергія.

2.2. Густина квантових станів

У двовимірних об'єктах рух електронів обмежений лише в одному напрямку, тоді як у квантових дротах електрони можуть рухатися лише вздовж дроту (одновимірні об'єкти). Виникає запитання: чим можуть бути корисними такі об'єкти в прикладних цілях? Відповідь: чим нижча розмірність об'єкта, тим більше електронів можна помістити в нього. Кількісною

характеристикою ємності електронних об'єктів є густина квантових станів, що являє собою кількість електронів в одиничному інтервалі енергій. Обчислимо густину квантових станів для основних квантових об'єктів.

2.2.1. Тривимірний об'єкт

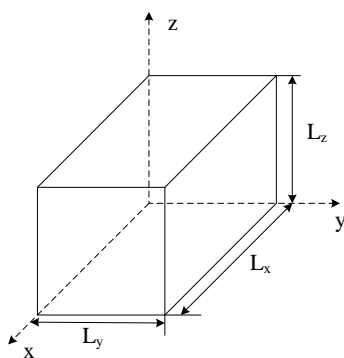


Рисунок 2.2 – Тривимірний об'єкт

Зручно рахувати спочатку не саму густину квантових станів, а повне число таких станів у даному тривимірному об'єкті. Нехай уздовж осі X імпульс електрона має невизначеність Δp_x , а в інших напрямках – Δp_y та Δp_z . Очевидно, що чим більше електронів можна помістити в квантовий об'єкт, тим більшою буде наведена невизначеність імпульсу. Такий самий внесок роблять і розміри куба: L_x , L_y та L_z .

Величина

$$\Omega = (\Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p_z) \cdot L_x \cdot L_y \cdot L_z \quad (2.10)$$

визначає об'єм фазового простору, в якому існують квантові стани електронів. Чим більший цей об'єм, тим більше електронів можна розмістити в ньому. Величина (2.10) дасть повну кількість станів, якщо ми визначимо, який об'єм фазового простору припадає на 1 електрон. Об'єм квантового стану можна визначити, використовуючи співвідношення невизначеностей (2.1). Згідно з формулою (2.1) електрон у квантовому стані має невизначеність імпульсу та координати вздовж кожної осі, а їх добуток дорівнює сталій Планка. Виходячи з цього, повний об'єм квантового стану буде визначений як

$$\omega = h_x \cdot h_y \cdot h_z = h^3. \quad (2.11)$$

Поділимо об'єм фазового простору (2.10) на об'єм одного квантового стану (2.11) та одержимо повну кількість станів:

$$G = \frac{(\Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p_z) \cdot L_x \cdot L_y \cdot L_z}{h^3}. \quad (2.12)$$

Для зручності будемо використовувати об'єм куба через

$$V = L_x \cdot L_y \cdot L_z, \quad (2.13)$$

а об'єм імпульсного простору – через

$$V_p = \Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p_z. \quad (2.14)$$

Тоді формула (2.12) буде мати такий вигляд:

$$G = (V_p \cdot V) / h^3. \quad (2.15)$$

Наступне наше завдання полягає у визначенні об'єму імпульсного простору. Для визначення цього об'єму використаємо закон дисперсії електрона:

$$E = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2), \quad (2.16)$$

де m – маса електрона. Для визначення V_p необхідно знайти радіус сфери вздовж кожної осі імпульсу. Цей радіус визначаємо за такою формулою:

$$p = \sqrt{2mE}. \quad (2.17)$$

Із геометрії відомо, що

$$V_p = \frac{4\pi}{3} p^3 = \frac{4\pi}{3} (2mE)^{\frac{3}{2}}. \quad (2.18)$$

Використовуючи формули (2.15) та (2.18), визначимо число електронних станів:

$$G = \frac{4\pi}{3h^3} (2mE)^{\frac{3}{2}} \cdot L_x \cdot L_y \cdot L_z. \quad (2.19)$$

Знайдемо густину станів, тобто число станів, що припадають на одиничний інтервал енергії:

$$\tilde{g} = \frac{dG}{dE} = \frac{2\pi(2m)^{3/2} V}{h^3} \sqrt{E}. \quad (2.20)$$

Згідно з (2.20) густина станів у тривимірному об'єкті збільшується з енергією кореневим чином. Зазвичай прийнято вимірювати цю густину відносно одиничного об'єму V :

$$g_3 = \frac{\tilde{g}}{V} = \frac{2\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \sqrt{E}. \quad (2.21)$$

Зобразимо залежність густини станів від енергії для тривимірного об'єкта.

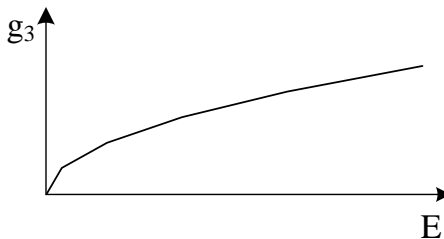


Рисунок 2.3 – Залежність густини станів від енергії для тривимірного об'єкта

Принципово важливо, що за малих енергій густина станів набуває нескінченно малих значень. Оскільки реальні значення енергії електрона завжди невеликі, то

тривимірний провідник буде мало вміщувати електронних станів.

2.2.2. Квантова яма

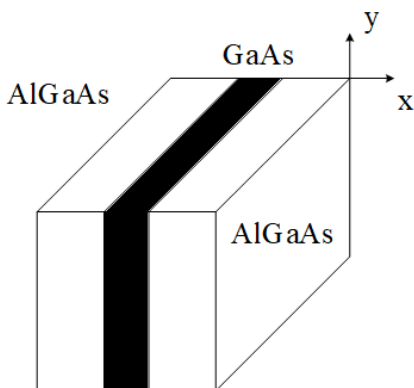


Рисунок 2.4 – Квантова яма

Використовуючи подібний підхід, як і у випадку з тривимірним об'єктом, визначимо спочатку кількість електронних станів:

$$G = (S_p \cdot S) / h^2 . \quad (2.22)$$

Для знаходження площі імпульсного простору використаємо такий закон дисперсії:

$$E = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + E_N , \quad (2.23)$$

де E_N – енергія n -го квантового рівня (початок відліку).

У разі квантової ями радіус p буде виражатися через

$$p = \sqrt{2m(E - E_N)}. \quad (2.24)$$

З врахуванням (2.24) площа імпульсного простору

$$S_p = \pi p^2 = 2\pi m(E - E_N). \quad (2.25)$$

Густина станів квантової ями з урахуванням формул (2.22) та (2.25) і того, що в кожному квантовому стані можуть перебувати два електрони з протилежними спінами, буде мати такий вигляд:

$$g_2 = 2 \cdot \frac{dG}{dE} \cdot \frac{1}{S} = 4\pi \frac{m}{h^2}. \quad (2.26)$$

Густина станів у вигляді (2.26) правильна лише за умови, якщо $E > E_N$. Якщо квантова яма містить не один квантовий рівень, а N , то кожен із них зробить внесок у (2.26). Унаслідок цього повна густина станів матиме вигляд

$$g_2 = 4\pi m / h^2 \cdot N. \quad (2.27)$$

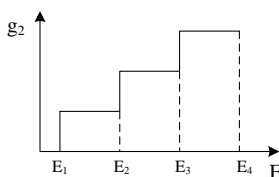


Рисунок 2.5 – Залежність густини станів від енергії для квантової ями

З рисунка 2.5 бачимо, що в гранично малій квантовій ямі, в якій немає жодного рівня, густина квантових рівнів дорівнює нулю. В інтервалі від E_1 до E_2 міститься один рівень, і густина задається формулою (2.26). При $E > E_2$ густина зростає вдвічі.

Якщо у разі тривимірного об'єкта зростання енергії приводить до плавного збільшення густини, то у двовимірному випадку – до стрибкоподібного. Це й обумовлює ефективність роботи квантової ями.

2.2.3. Квантовий дріт

Закон дисперсії у разі квантового дроту буде мати вигляд

$$E = \frac{1}{2m} p_x^2 + E_N. \quad (2.28)$$

Густина станів квантового дроту

$$g = 2 \cdot \frac{dG}{dE} \cdot \frac{1}{L} = \frac{\sqrt{2m}}{h} \frac{1}{\sqrt{E - E_N}}. \quad (2.29)$$

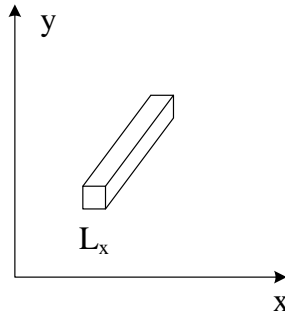


Рисунок 2.6 – Квантовий дріт

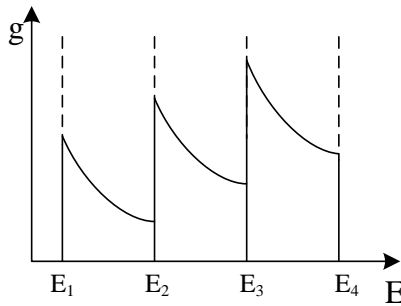


Рисунок 2.7 – Залежність густини станів від енергії
для квантового дроту

У проведеному обчисленні бачимо, що квантовий дріт може містити за деякого значення енергії нескінченну кількість квантових станів. Із фізичної точки зору це пов'язано з тим, що електрон не може рухатися відразу в

обох напрямках, і в квантовому дроті залишається безліч електронних станів.

2.2.4. Квантова точка

Оскільки у квантовій точці рух електрона обмежений в усіх трьох напрямках, то закон дисперсії набирає тривіального вигляду:

$$E = E_i, \quad (2.30)$$

де E_i – енергії електронних станів. Завдяки умові (2.30) у квантовій точці реалізується нескінченна кількість квантових станів.

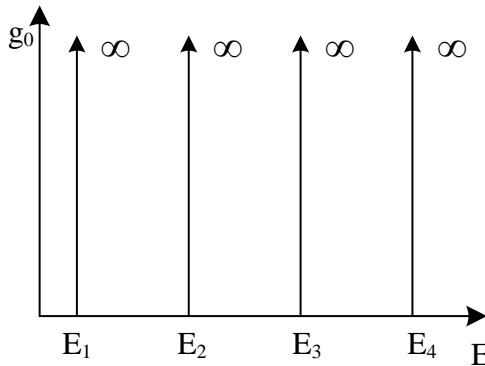


Рисунок 2.8 – Залежність густини станів від енергії для квантової точки

2.3. Квантування провідності

Вище ми з'ясували основну особливість квантової механіки – динамічні змінні мікрооб'єктів набувають дискретних значень. Наприклад: динамічними змінними є координата, імпульс, енергія, момент імпульсу та ін. Динамічним змінним властиво розбиватися на пари спряжених змінних: координата – імпульс, момент імпульсу – кут повороту та ін. Квантова механіка доводить, що якщо квантується одна із спряжених величин (енергія), то інша змінюється неперервно (час). Однак якщо обидві змінні набувають неперервних значень, то ці змінні підпорядковуються співвідношенню невизначеностей:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar, \quad (2.31)$$

У цьому підрозділі ми розглянемо випадок, коли дискретних значень набуває не динамічна змінна, а інженерна характеристика – провідність.

Визначимо провідність квантового дроту, довжина якого L менша від довжини вільного пробігу електронів. Це означає, що рух електрона відбувається без розсіювання (зіткнень), а перенесення набирає балістичного характеру. Розглянемо одновимірну балістичну структуру, між контактами якої прикладено

напругу V . Якщо лівий контакт має енергію Фермі μ_1 , а правий – має більше значення μ_2 , то внесок у провідність будуть робити лише електрони, енергія яких буде задовольняти таку умову:

$$\mu_1 < E < \mu_2. \quad (2.32)$$

Дійсно, якщо $E < \mu_1$, то всі квантові стани як у лівому, так і в правому контактах будуть заповнені, а отже, струм буде відсутній. У протилежному разі ($E > \mu_2$) усі стани будуть вільними, і прикладена напруга не приводить до збуджень.

Обчислимо струм від одного електрона з імпульсом p_x уздовж квантового дроту. Швидкість електрона буде дорівнювати

$$v_x = p_x / m. \quad (2.33)$$

Із класичної фізики добре відомо, що внесок одного електрона в струм задається таким чином:

$$I_1 = env_x, \quad (2.34)$$

де e – абсолютне значення заряду електрона, n – густина електронів у квантовому дроті. З урахуванням (2.33) та (2.35) маємо

$$n = \frac{1}{L}. \quad (2.35)$$

$$I_1 = e/mL \cdot p_x \quad (2.36)$$

Вираз для повного струму буде мати вигляд

$$I = \sum I_1 = \frac{e}{mL} \sum p_x. \quad (2.37)$$

Наступне завдання полягає у визначенні імпульсу електрона p_x . Для цього врахуємо, що різниця енергій Фермі $\mu_2 - \mu_1$ буде значно меншою, ніж самі значення μ_2 та μ_1 , а тому імпульс p_x буде перебувати в інтервалі Δp . Для визначення цього інтервалу врахуємо, що зміна енергії електрона

$$\Delta E = eV. \quad (2.38)$$

Згідно з (2.38) добуток заряду електрона на прикладену напругу призводить до зміни енергії ΔE . Підставимо в ліву частину закону дисперсії для квантового дроту (2.28):

$$\Delta E = \Delta \left(\frac{p_x^2}{2m} + E_N \right) \approx \frac{\Delta p_x^2}{2m} + \Delta E_N \approx \frac{p_x \Delta p_x}{m}. \quad (2.39)$$

З урахуванням (2.38):

$$\Delta p_x = emV / p_x. \quad (2.40)$$

Формула (2.40) визначає інтервал імпульсу електрона за яким необхідно проводити підсумування в

(2.37). Однак якщо використовувати теорему про середнє значення інтеграла (суми), то

$$\sum p_x = p_x \cdot G, \quad (2.41)$$

де G – число квантових станів у дроті,

$$G = (\Delta p_x L) / \pi \hbar \cdot N \quad (2.42)$$

Підставимо (2.40) у (2.42), потім – у (2.41) та (2.34) і одержимо:

$$I = \frac{e^2}{\pi \hbar} V N. \quad (2.43)$$

У результаті одержимо провідність:

$$\sigma = \frac{I}{V} = \frac{e^2}{\pi \hbar} N. \quad (2.44)$$

Формула (2.44) приводить до провідності квантового дроту залежно від прикладеної напруги. Зазвичай провідність за законом Ома не залежить від напруги, однак у квантовій механіці ця умова виконується, поки енергія електрона не перевищує один із його рівнів ($N = I$). А тому величину $\frac{e^2}{\pi \hbar}$ називають квантом провідності. Зі збільшенням прикладеної напруги число рівнів, що знаходяться під енергією електрона, зростає, і провідність стрибкоподібно збільшується.

2.4. Квантовий ефект Холла

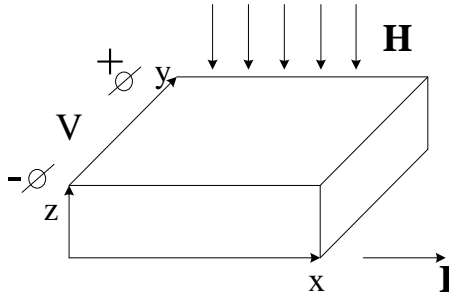


Рисунок 2.9 – Схематичне зображення ефекту Холла

З курсу фізики відомо, що ефект Холла – це явище, що виникає в напівпровідниках під одночасною дією електричного та магнітного полів. Помістимо напівпровідник, по якому проходить струм, у зовнішнє магнітне поле \mathbf{H} . У результаті дії сили Лоренца (перпендикулярно до магнітного поля) електрони будуть відхилятися від свого початкового напрямку руху та накопичуватися на пластинках, утворюючи при цьому різницю потенціалів. Таке явище буде відбуватися до того часу, поки не виникне поперечне електричне поле, що повністю компенсує силу Лоренца:

$$F_{\text{лор}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}], \quad (2.45)$$

де e – заряд електрона; c – швидкість світла; E – напруженість прикладеного магнітного поля. Якщо в загальному випадку закону Ома струм проходить у напрямку Y , в якому прикладена напруга, то причини виникнення струму Холла такі: електрична напруга V та магнітне поле H . Найбільш сильно ефект Холла виявляється, якщо їх напрямки перпендикулярні.

У разі якщо розміри провідника дуже малі, то ефект Холла має квантовий характер.

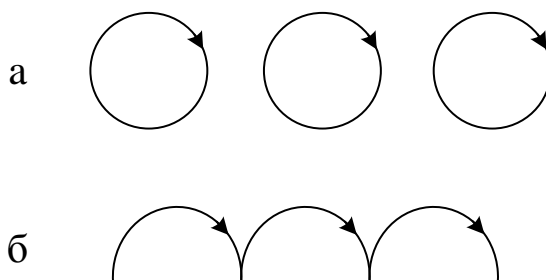


Рисунок 2.10 – Траєкторія руху електронів у магнітному полі: а – в глибині об’єкта; б – поблизу його межі

На рисунку 2.10 (а) показана траєкторія електронів, поміщених у магнітне поле, перпендикулярне до площини, зображеної на рисунку. Відомо, що в такому полі на

електрони діє магнітна складова сили Лоренца (2.45). Під дією цієї сили електрони здійснюють обертальний рух у площині перпендикулярно до магнітного поля з циклотронною частотою:

$$\omega_c = eH/mc. \quad (2.46)$$

Якщо колова орбіта електрона повністю вміщується в напівпровідник, то таке обертання на робить внесок у провідність. Об'єкти квантової електроніки мають малі розміри, а тому більшість електронів здійснюють рух поблизу поверхні. З рисунка 2.10 (б) бачимо, що такі електрони, циклічно відбиваючись від поверхні, рухаються перпендикулярно до напрямку магнітного поля, причому провідність такого руху виражається формулою (2.44). Таким чином, провідність квантується, а, отже, ефект Холла називається квантовим.

Якщо квантові структури містять багато дефектів, то з їх урахуванням ефективна кількість енергетичних рівнів у (2.44) може бути не лише цілим, а й раціональним. Іншими словами, в неідеальних квантових структурах має місце дробовий ефект Холла. Більш детально це питання можна розглянути в [1, 3].

2.5. Застосування квантових напівпровідникових структур в електроніці

У цьому підпункті ми розглянемо резонансний тунельний діод та лазери на квантових ямах. Спочатку нагадаємо, в чому полягає ефект тунелювання у квантовій механіці.

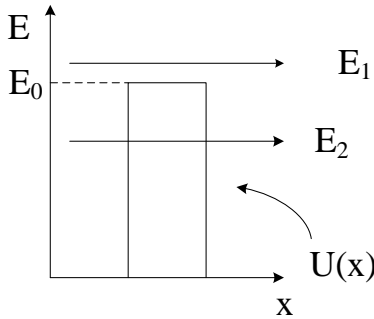


Рисунок 2.11 – Схематичне зображення тунельного ефекту

Якщо енергія E електрона вища від потенціального бар'єра E_0 , то класичний і квантовий рух не відрізняється. У разі $E_2 < E_0$, класичний рух неможливий у принципі, а квантовий об'єкт може проникати через бар'єр із такою ймовірністю:

$$\exp(-(E_0 - E_2)/D) \quad (2.47)$$

де D – проникність квантового бар'єра.

Резонансний тунельний діод являє собою подвійний потенціальний бар'єр, в якого зліва та справа знаходяться металічні контакти. Технологічно бар'єр отримується у вигляді AlGaAs, що має більш широку заборонену зону, ніж GaAs. Оскільки AlGaAs має більш широку заборонену зону, то за певної концентрації носіїв квантова яма між бар'єрами буде містити лише один енергетичний рівень. Якщо енергія електрона відрізняється від енергії цього рівня, то дія обох бар'єрів буде такою: спочатку електронна хвиля буде загасати на лівому бар'єрі, а потім – на правому (рис. 2.12 а). У результаті струм, що проходить через подвійний шар, є слабким.

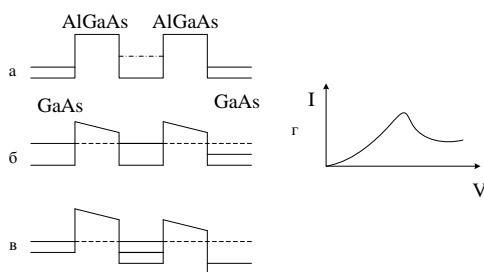


Рисунок 2.12 – Резонансно-тунельний діод:

а – нерезонансна ситуація; б – завдяки поданій зовнішній напрузі проходить максимальний струм; в – резонанс відсутній; г – вольт-амперна характеристика

У разі якщо енергія електрона збігається з енергією енергетичного рівня, то хвиля, що пройшла лівий бар'єр, багатократно відбивається від стінок усередині квантової ями. Унаслідок проходження через правий бар'єр хвиля багатократно підсилюється, і струм через подвійний бар'єр значно зростає (рис. 2.12 б). Із подальшим збільшенням енергії електрона струм знову слабшає, оскільки проходить руйнування резонансної ситуації у квантовій ямі (рис. 2.12 в). Вольт-амперна характеристика (ВАХ) такого діода показана на рисунку 2.12 г. Добре бачимо, що резонансна ситуація відповідає максимуму. Якщо б у квантовій ямі існував другий енергетичний рівень, то на ВАХ з'являвся б другий максимум. Характерно, що ВАХ містить ділянку, на якій диференціальна провідність σ від'ємною (рис. 2.12, в, г):

$$\sigma = \frac{dI}{dV} \quad (2.48)$$

На ділянці $\sigma < 0$ збільшення напруги приводить до зменшення струму. Іншими словами, на цій ділянці прилад може не лише пасивно проводити струм, й генерувати електричні коливання. Якщо до квантової ями прикласти напругу, яка б змінювала енергію локалізованого рівня, то такий прилад працюватиме як транзистор.

Добре відомо, що для роботи лазера необхідне виконання двох умов: 1) створення інверсної заселеності на енергетичних рівнях (на квантові рівні з більшою енергією необхідно накачати більше електронів, ніж на нижчі рівні); 2) створення оптичного резонатора, який з усіх квантів світла, випущених електронів, відбирає лише когерентні.

На відміну від резонансного тунельного діода легування напівпровідника відбувається не Al, а In, який сильно звужує заборонену зону. В результаті формуються квантова яма в зоні провідності та квантовий бар'єр у валентній зоні. При цьому кожна з цих зон містить по одному локалізованому енергетичному рівню.

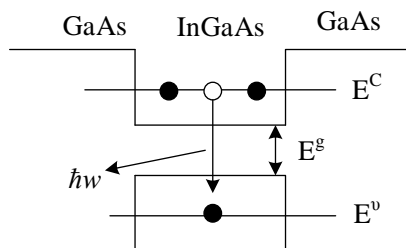


Рисунок 2.13 – Енергетична схема роботи лазера на квантовій ямі

Якщо прикласти до лазера напругу, що буде забезпечувати енергію електрона E^c , то в області лівого та

правого контактів цей електрон буде перебувати в забороненій зоні, в InGaAs він потрапить до зони провідності. У результаті співзіткнень електрон може перейти в валентну зона, випускаючи при цьому квант світла (фотон), частота якого визначається наступним рівнянням:

$$\hbar\omega = E_g + E^c + E^v. \quad (2.49)$$

З наведеної схеми лазера на квантових ямах бачимо, що інверсна заселеність створюється завдяки природі напівпровідників (наявність електронів у зоні провідності). Умова наявності оптичного резонатора виконується завдяки малій ширині забороненої зони, що має більшу провідність і діелектричну проникність, а отже, коефіцієнт переломлення буде вище.

$$\eta \sim \sqrt{\epsilon\mu} \quad (2.50)$$

За рахунок того, що, прикладаючи напругу до квантової ями, можемо змінювати енергію локалізованих рівнів і відповідно частоту випромінювання, лазери на квантових ямах є дуже ефективними порівняно з масивними.

Більш детально це питання можна розглянути в [2, 4].

Список літератури

1. Осадчук В. С. Основи наноелектроніки : навчальний посіб. / В. С. Осадчук, О. В. Осадчук. – Вінниця : ВНТУ, 2016. – 199 с.
2. Наноелектроніка / за ред. З. Ю. Готри. – Львів : Ліга-Прес, 2009.– 342 с.
3. Поплавко Ю. М. Нанофізика, наноматеріали, наноелектроніка : навчальний посібник / Ю. М. Поплавко, О. В. Борисов, Ю. І. Якименко. – Вінниця : ВНТУ, 2016. – 199 с.
4. Заячук Д. М. Нанотехнології і наноструктури / Д. М. Заячук. – Львів : Львівська політехніка, 2009. – 580 с.
5. Заячук Д. М. Нанорозмірні структури і надгратки / Д. М. Заячук. – Львів : Львівська політехніка, 2006. – 220 с.
6. Осадчук В. С. Фізична наноелектроніка : навчальний посібник / В. С. Осадчук, О. В. Осадчук. – Вінниця : ВНТУ, 2015. – 146 с.
7. Основы физики твердого тела : учебное пособие / О. Ю. Шевченко. – Санкт-Петербург : СПбГУ ИТМО, 2010. – 76 с.
8. Висоцький В. І. Квантова механіка та її використання у прикладній фізиці : підручник / В. І. Висоцький. – Київ :

Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет»,
2008. – 367 с.

9. Вакарчук І. О. Квантова механіка : підручник /
І. О. Вакарчук. – 4-те вид., допов. – Львів : ЛНУ імені Івана
Франка, 2012. – 872 с.

3. Транзистори

3.1. Теорія кулонівської блокади

Суть явища кулонівської блокади покажемо на ситуації, зображеній на рисунку 3.1.

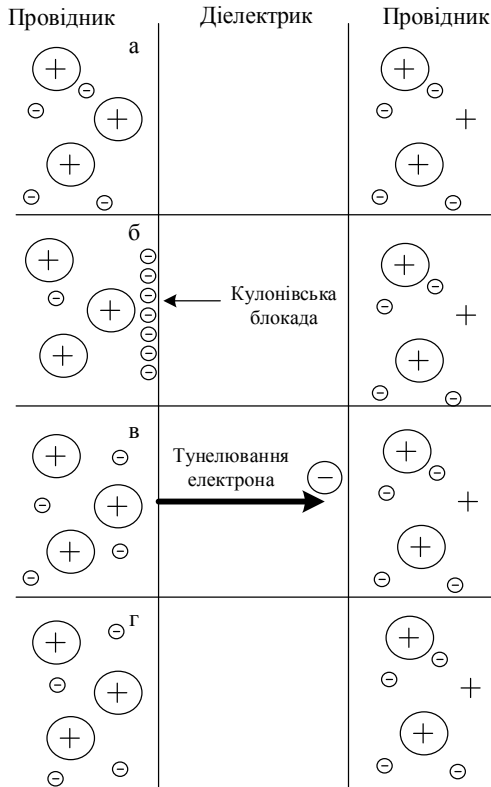


Рисунок 3.1 – Принцип кулонівської блокади

На рисунку 3.1 а показана ситуація, коли провідники зліва та справа є електронейтральними (число іонів збігається з числом електронів). Під дією прикладеної напруги (зліва «-», справа «+») електрони в лівому шарі накопичуються поблизу бар'єра. У деякий момент часу один з електронів тунелює через бар'єр, і провідники знову становляться електронейтральними (рис. 3.1 в, г). Це накопичення електронів називаються кулонівською блокадою бар'єра.

Технологічно легше за все потенціальний бар'єр отримати шляхом нанесення тонкого шару діелектрика Al_2O_3 між двома металами (Al). Якщо прикласти до такої конструкції напругу, то вона буде працювати як конденсатор.

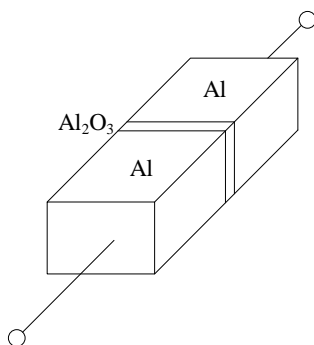


Рисунок 3.2 – Зображення потенціального бар'єра

Ємність конденсатора дорівнює

$$C = \varepsilon A / d, \quad (3.1)$$

де ε – діелектрична проникність; A – площа обкладинок конденсатора; d – товщина діелектрика.

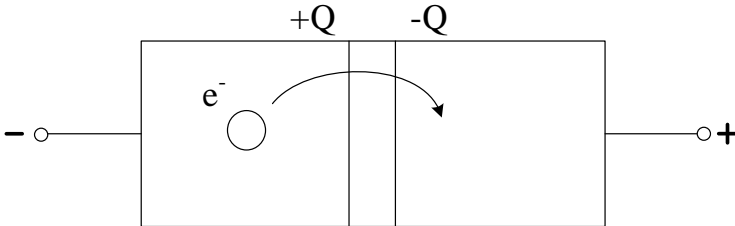


Рисунок 3.3 – Одноелектронне тунелювання через бар'єр

Припустимо, що до тунелювання з одного боку бар'єра зосередився позитивний заряд іонів $+Q$, а з іншого – від'ємний заряд $-Q$, тоді енергія такого конденсатора буде задаватися виразом

$$E_0 = Q^2 / 2C, \quad (3.2)$$

$$Q = C \times V. \quad (3.3)$$

Якщо відбудеться тунелювання електрона до правого електрода, то заряд Q зменшиться на величину e :

$$E = (Q - e)^2 / 2C. \quad (3.4)$$

Унаслідок тунелювання формула бар'єра виражається формулою (4). Визначимо різницю між початковою енергією E_0 та енергією після тунелювання:

$$\Delta E = E - E_0 = e\left(\frac{e}{2} - Q\right) / C. \quad (3.5)$$

Бачимо, що зміна енергії в результаті тунельного ефекту визначається співвідношенням між зарядом Q , що згідно (3.3) задається зовнішньою напругою та зарядом електрона. Тунельний ефект буде проходити лише в тому разі, якщо кінцева енергія (3.5) буде меншою, ніж початкова (в іншому випадку тунелювання енергетично не вигідне):

$$\Delta E = E - E_0 < 0. \quad (3.6)$$

Підставивши (3.5) у (3.6), одержимо умову реалізації тунельного ефекту:

$$|Q| > e/2 \quad (3.7)$$

Необхідно відзначити, що співвідношення (3.7) ураховує абсолютне значення заряду, а не його знак. Згідно (3.7) електрон проходить через потенціальний бар'єр лише в тому разі, якщо з одного боку бар'єра накопичується заряд, що перевищує $e/2$. Підставивши (3.3) в (3.7) одержимо умову через прикладену напругу:

$$|V| > e/2C. \quad (3.8)$$

Умова (3.8) має більш зручну умову та означає, що тунельний струм пройде через бар'єр у разі, якщо напруга буде перевищувати значення $e/2C$. Остаточна умова кулонівської блокади (струм не проходить) має вигляд:

$$-e/2C < V < e/2C \quad (3.9)$$

Розглянемо, як кулонівська блокада впливає на основну вольт-амперну характеристику тунельного контакту.

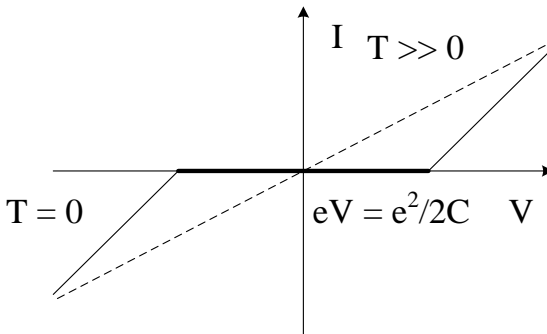


Рисунок 3.4 – Вольт-амперна характеристика тунельного контакту

Якщо б не явище кулонівської блокади, то вольт-амперна характеристика контакту зводилася б до закону Ома – штрихова лінія. Згідно з умовою (3.9) за малих

напруг V струму не повинно бути і це виражається наявністю полички на початку координат. Ширину її задано співвідношенням:

$$eV = e^2 / 2C. \quad (3.10)$$

Чим менша ємність бар'єра, тим ширшою буде поличка кулонівської блокади. Наведена картина блокади реалізується за нульової температури. Якщо температура буде мати кінцеве значення, то електрони будуть проходити через бар'єр не лише завдяки тунельному ефекту, а й за рахунок термічної активації. За $T > 0$ термічні процеси починають конкурувати з тунельним ефектом і пригнічують його, лише якщо характерна енергія e^2/C буде меншою, ніж термічна енергія kT (k – стала Больцмана):

$$e^2 / C < kT. \quad (3.11)$$

Крім термічного впливу, необхідно враховувати квантові ефекти кулонівської блокади. Припустимо, що тунельний ефект проходить настільки інтенсивно, що ймовірність появи залишкового електрона стає однаковою з обох боків потенціального бар'єра. Очевидно, що в такому разі зникає рушійна сила тунельного ефекту. Щоб цього не відбувалося необхідне виконання такої умови:

$$R_t > h/e^2. \quad (3.12)$$

Ця умова впливає із порівняння електроопору тунельного контакту R_t і зворотної провідності:

$$\sigma = e^2/h. \quad (3.13)$$

Зі зменшенням R_t частота проникнення електронів через бар'єр зростає і концентрація електронів з обох боків контакту зрівнюється.

Останній аспект тунельного ефекту виникає, якщо струм є не постійним, а змінним. У цьому разі в умові (3.12) необхідно замість квантової величини h/e^2 використовувати імпеданс від частоти:

$$R_t > Z(\omega). \quad (3.14)$$

Така умова порушується практично на всіх частотах < 10 Гц.

3.2. Одноелектронна квантова яма

Основою квантового ящика (ями) є два тунельних бар'єри, що відділяють острівець (гранулу) від масивних електродів. До цих електродів прикладають напругу V , в

результаті цього струм проходить зліва направо, а потік електронів спрямований назустріч йому.

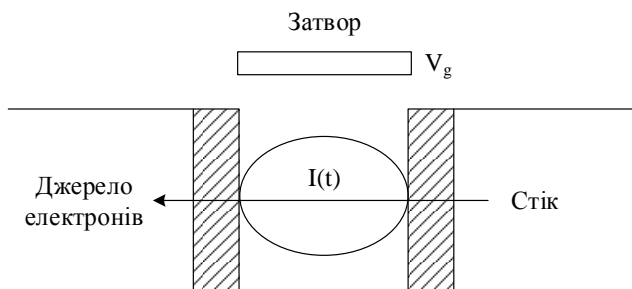


Рисунок 3.5 – Гранула-острівець, пов’язаний із двома масивними електродами тунельними контактами

Подібний прилад ми розглянули в попередньому параграфі, описуючи кулонівську блокаду. В цьому підрозділі ми додаємо керувальний електрод-затвор, на який подається зовнішня напруга. Наше завдання полягає в дослідженні проходження струму через гранулу та два бар’єри залежно від напруги V_g .

Характерна особливість при кулонівській блокаді (рис. 3.6 а): напруга V настільки мала, що енергія електрона в джерелі μ_1 хоча й перевищує величину μ_2 , але нижча від значення μ_{N+1} . Електрон не може переходити з джерела в гранулу, що й забезпечує кулонівську блокаду. На рисунку 3.6 б енергія eV настільки велика, що підвищує

рівень μ_1 більше ніж μ_{N+1} в квантовій ямі. У результаті лише один електрон проходить через обидва тунельних контакти. Завдяки цьому всі прилади, що працюють на подібних ефектах, називають одноелектронними.

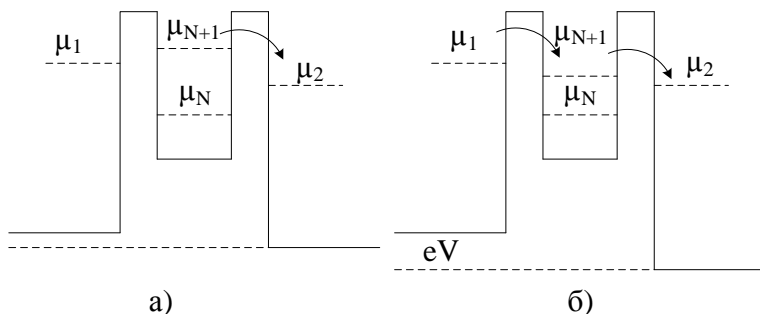


Рисунок 3.6 – Кулонівська блокада (а); одноелектронне тунелювання (б)

Розглянемо одноелектронний ящик, який являє собою квантову яму.

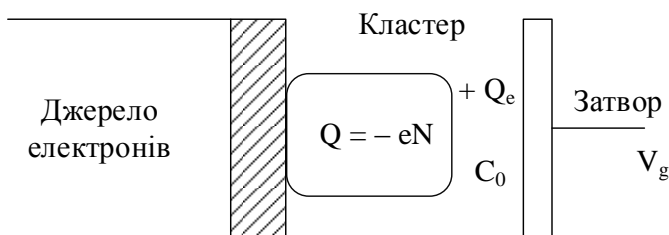


Рисунок 3.7 – Одноелектронний ящик

Цей прилад складається з одного кластера чи острівця, відділеного від джерела електронів тунельним бар'єром. Зовнішнє поле подається на острівець через затвор, відділений від нього товстим шаром ізолятора (наприклад, повітря). Ізолятор разом з острівцем створює ємність C_0 та індукує поляризаційний заряд Q_e . Локалізація N електронів на острівці створює надлишок реального заряду $-eN$. Завдяки такому розподілу заряду повний заряд на острівці + товстий шар ізолятора буде дорівнювати $-eN + Q_e$, де

$$Q_e = C_0 \cdot V_g . \quad (3.15)$$

Формула (3.15) свідчить на те, що Q_e є нереальним зарядом, а зарядом поляризації конденсатора C_0 під дією напруги V_g . У результаті зміна енергії виражається величиною

$$\Delta E = (-eN + C_0 V_g)^2 / 2C , \quad (3.16)$$

де C – сумарна ємність зазору між масивним електродом зліва та керуючим електродом справа. Згідно із формулою (3.16) зі збільшенням напруги зміна енергії ΔE зменшується і, починаючи з деякої величини, виконується умова $\Delta E < 0$. Іншими словами, відбудеться зміна заряду (3.15) на заряд електрона:

$$\Delta Q_e = e. \quad (3.17)$$

Використовуючи (3.17) в (3.15) одержимо

$$\Delta V_g = \frac{e}{C_0}. \quad (3.18)$$

Фізичний сенс співвідношення (3.18) полягає в тому, що за зміни напруги V_g на величину (3.18) кількість електронів, які перейшли в гранулу, є незмінною, оскільки електрон лише один. Із перевищенням величини (3.18) рівень наступного електрона в гранулі стає нижчим, ніж у джерелі, а тому переходить два електрони. У результаті одержуємо так звану кулонівську сходинку.

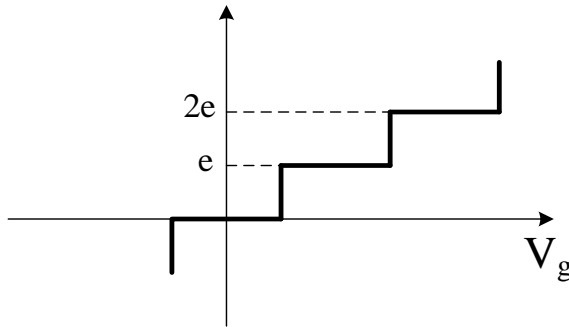


Рисунок 3.8 – Кулонівська сходинка

Таким чином, одноелектронний ящик дозволяє квантувати заряд і напругу на затворі. Однак такий ящик

практично неможливо використовувати як прилад нанoeлектроніки, оскільки:

1. Ящик не має внутрішньої пам'яті, тому що кількість електронів у гранулі хоч і квантовано, але не запам'ятовується.
2. Якщо ящик містить товстий шар ізолятора, то він не може пропускати постійний струм, а для зміни заряду необхідно використовувати надчутливі елементи.
3. Застосування ящика також обмежено ефектами, описаними в попередньому підрозділі, а саме: термічним, квантовим та високочастотним.

Однак одноелектронний ящик широко використовують як генератор високочастотних коливань. У разі прикладення напруги на одноелектронний ящик через нього проходить змінний струм із частотою

$$\omega = 2\pi I/e. \quad (3.19)$$

Для того щоб такий струм спостерігався в реальному експерименті, необхідно щоб опір ізолятора задовольняв таку умову:

$$R_t \gg R \gg R_a, \quad (3.20)$$

де R_t – опір тунельного контакту; $R_a = \pi\hbar/2e^2 \sim 6\text{кОм}$.

Зручність такого генератора полягає в тому, що, змінюючи силу струму під дією напруги, ми можемо змінювати період коливань.

3.3. Одноелектронний транзистор

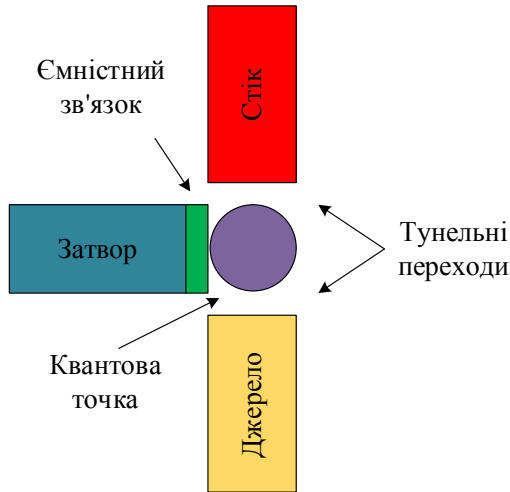


Рисунок 3.9 – Схематичне зображення одноелектронного транзистора

Основним елементом одноелектронного транзистора є смужка Al, яка має нанометровий поперечник. У цій смужці проведено окиснення в двох тонких ділянках, завдяки чому оксиди відіграють роль тунельних контактів (джерело та стік), а на розміщений між ними острівець (квантова точка) діє потенціал затвору.

Зобразимо еквівалентну електричну схему одноелектронного транзистора.

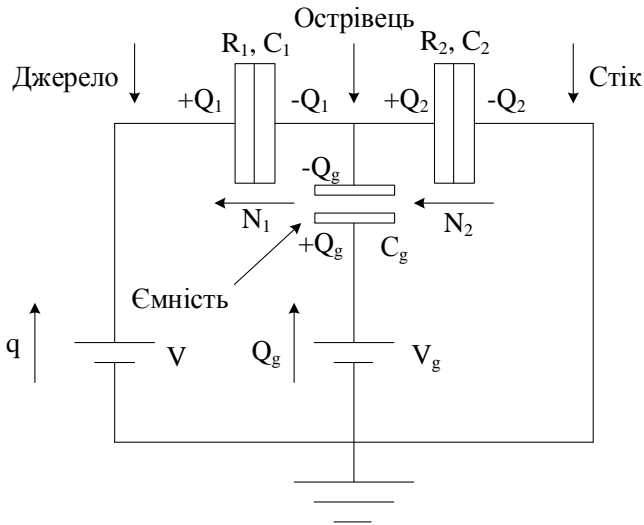


Рисунок 3.10 – Електрична схема одноелектронного транзистора

З рисунка 3.10 бачимо, що електрична схема має три контури (оскільки один із них визначиться двома іншими, то доцільно розглянути лише два): *зовнішній контур* містить генератор напруги V , конденсатори C_1 і C_2 , на яких накопичуються заряди Q_1 і Q_2 завдяки числу N_1 і N_2 електронів, які проходять через конденсатори; *правий контур* – джерело затвора V_g , через який проходить заряд Q_g , конденсатор C_g , який формується завдяки

діелектричному шару між керувальним електродом та острівцем. Закон Кірхгофа для цих контурів буде мати такий вигляд:

$$Q_1/C_1 + Q_2/C_2 = V, \quad (3.21)$$

$$Q_g/C_g + Q_2/C_2 = V_g. \quad (3.22)$$

Згідно з (3.21) напруга генератора V розподіляється між конденсаторами C_1 і C_2 . Віднімаючи від рівняння (3.21) рівняння (3.22) одержимо таке співвідношення:

$$Q_1/C_1 + Q_g/C_g = V - V_g. \quad (3.23)$$

Очевидно рівняння (3.23) описує розподіл зарядів у лівому контурі, де батареї увімкнені назустріч одна одній (завдяки цьому їх напруги віднімаються), а дія конденсатора C_g є протилежною до C_1 (якщо один буде заряджатися, то інший – розряджатися).

У рівняннях (3.21) та (3.22) ємності подані заданими величинами, а заряди Q_1 і Q_2 необхідно виразити числом електронів, які проходять через конденсатори. Острівцевий електрод переносить заряд

$$Q = -Q_1 + Q_2 - Q_g = -e(N_1 - N_2). \quad (3.24)$$

Рівняння (3.24) означає, що цей баланс забезпечується числом електронів N_1 через перший

конденсатор і N_2 – через другий. Заряд через генератор визначається рівнянням

$$q = Q_1 + eN_1. \quad (3.25)$$

Для того щоб визначити, чи буде працювати транзистор, необхідно знайти його електростатичну енергію:

$$F(N_1, N_2) = \left(\frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} + \frac{Q_g^2}{2C_g} \right) - qV - Q_g V_g. \quad (3.26)$$

Перші три доданки визначають енергії конденсаторів C_1 , C_2 і C_g . Два останніх визначають зменшення електростатичної енергії завдяки дії напружень V і V_g . Крім зарядів (3.24) і (3.25), необхідно зазначити заряд на керувальному електроді:

$$Q_g = C_g V_g - e(N_2 - N_1). \quad (3.27)$$

Розв'язок рівнянь (3.21), (3.22) і (3.24) дозволяє одержати заряди на бар'єрах та електроді в такому вигляді:

$$Q_1 = C_1 / C [V(C_2 + C_g) - (Q + C_g V_g)], \quad (3.28)$$

$$Q_2 = C_2 / C [VC_1 + (Q + C_g V_g)], \quad (3.29)$$

$$Q_g = C_g / C [(CV_g - C_1 V) - (Q + C_g V_g)], \quad (3.30)$$

де $C = C_1 + C_2 + C_g$ – сумарна ємність.

Енергія зарядів, які зосереджені на конденсаторах C_1 , C_2 і C_g , визначається співвідношенням

$$E = Q_1^2/2C_1 + Q_2^2/2C_2 + Q_g^2/2C_g \quad (3.31)$$

Підставивши значення зарядів (3.28–3.30) в (3.31) одержуємо

$$E = Q^2/2C + const, \quad (3.32)$$

де до *const* входять усі величини, що не залежать від заряду острівця. Для знаходження електростатичної енергії необхідно також урахувати доданки в правій частині (3.26). В результаті вільна енергія буде мати такий вигляд:

$$F = \frac{Q}{2C} - (Q_1 + eN_1) - Q_g V_g, \quad (3.33)$$

$$F = \frac{e^2}{2C} (N_2 - N_1)^2 - e \frac{C_1 V + C_g V_g}{C} (N_2 - N_1) - e V N_1. \quad (3.34)$$

Для визначення умов проходження електронів через тунельні контакти необхідно порівняти енергію (3.34) за різних величин N_1 і N_2 .

$$F(N_1 \pm 1, N_2) > F(N_1, N_2), \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{C_2 + C_g} (Q_g - e/2) < V < \frac{1}{C_2 + C_g} (Q_g + e/2). \quad (3.36)$$

Подібно запишемо умову кулонівської блокади контакту 2:

$$F(N_1, N_2 \pm 1) > F(N_1, N_2), \quad (3.37)$$

$$-\frac{1}{C_1}(Q_g + e/2) < V < \frac{1}{C_1}(Q_g - e/2). \quad (3.38)$$

За виконання умов (3.36) і (3.38) струм не проходить через контакти. На рисунку 3.11 зображений кулонівський алмаз за умови $N_1 = N_2$. Для т. А транзистор буде закритим для проходження струму, а в разі зміщення в т. В контакт 2 відкривається і відбудеться перехід електрона з правого електрода на острівця, розміщений між двома електродами. Рисунок 3.12 є продовженням рисунка 3.11 по осі абсцис.

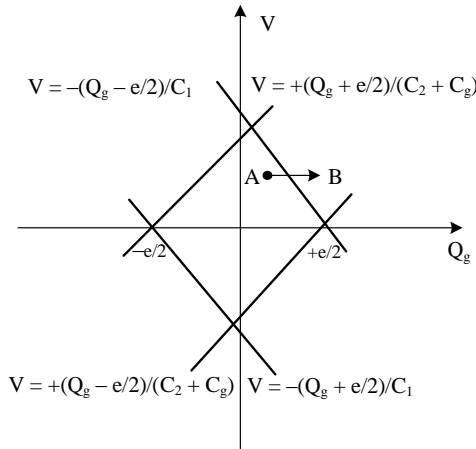


Рисунок 3.11 – Кулонівський алмаз

Якщо на рисунку 3.11 зображено лише один алмаз, де кількість електронів через обидва контакти однакова ($N_1 = N_2$), то на рисунку 3.12 ця умова виконується лише для центрального ромба, а зі зміщенням вправо різниця $N_1 - N_2$ зростає з кожним наступним ромбом. У разі зміщення вліво ця різниця навпаки зменшується. Отже, в разі зміни напруги V_g на визначену величину кількість електронів в острівці зростає на 1.

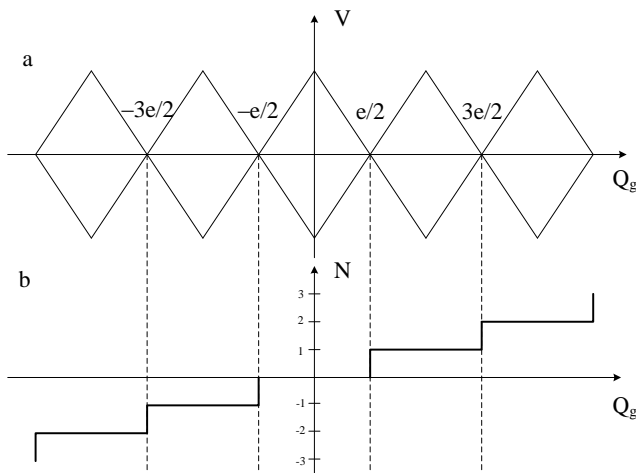


Рисунок 3.12 – Періодичний кулонівський алмаз (а), кількість електронів на острівці (б)

Знайдемо інтервал напруги, за якого транзистор не пропускає струм. У центральному ромбіку напруга V_g обмежена умовами

$$e/2 < C_g V_g < e/2,$$

$$\Delta V_g = e/C_g. \quad (3.39)$$

Таким чином, зі збільшенням напруги на затворі на величину (3.39) транзистор пропускає лише один електрон, що схематично подано кулонівською сходиною (рис. 3.12 б).

Список літератури

1. Осадчук В. С. Основи наноелектроніки : навчальний посібник / В. С. Осадчук, О. В. Осадчук. – Вінниця : ВНТУ, 2016. – 199 с.
2. Наноелектроніка / за ред. З. Ю. Готри. – Львів : Ліга-прес, 2009. – 342 с.
3. Поплавко Ю. М. Нанофізика, наноматеріали, наноелектроніка : навчальний посібник / Ю. М. Поплавко, О. В. Борисов, Ю. І. Якименко. – Вінниця : ВНТУ, 2016. – 199 с.
4. Заячук Д. М. Нанотехнології і наноструктури / Д. М. Заячук. – Львів : Львівська політехніка, 2009. – 580 с.
5. Драгунов В. П. Основы нанозлектроники : учеб. пособие / В. П. Драгунов, И. Г. Неизвестный,

В. А. Гридчин. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2000. – 332 с.

б. Осадчук В. С. Фізична наноелектроніка : навчальний посібник / В. С. Осадчук, О. В. Осадчук. – Вінниця : ВНТУ, 2015. – 146 с.

4. Основи квантової механіки

4.1. Вільна частинка

Подібно до того, як у класичній механіці діють закони Ньютона, квантова механіка ґрунтується на хвильовому рівнянні:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi . \quad (4.1)$$

Оскільки гамільтоніан діє лише на координатну залежність хвильової функції, а зліва є часткова похідна за часом, то (4.1) – це диференціальне рівняння. Зазвичай його розв’язок не є можливим, а всі обчислення проводять чисельно. Розглянемо стаціонарний випадок, коли залежність хвильової функції від часу має вигляд

$$\Psi = \psi(\vec{r}) e^{-i\omega t} . \quad (4.2)$$

Підставимо (4.2) в (4.1):

$$(\hbar\omega)\psi = \hat{H}\psi . \quad (4.3)$$

Рівняння (4.3) набирає канонічної форми рівняння Шредінгера:

$$\hat{H}\psi = E\psi , \quad (4.4)$$

якщо енергія визначається формулою Ейнштейна:

$$E = \hbar\omega. \quad (4.5)$$

Операторне рівняння (4.4) називають стаціонарним рівнянням Шредінгера. Подальше завдання полягає в тому, щоб знайти явний вид оператора \hat{H} і розв'язати відповідне рівняння Шредінгера.

Особливість квантової механіки полягає в тому, що вона може переходити в класичну фізику, а тому повинна задовольнити принцип відповідності:

$$E = K + V, \quad (4.6)$$

$$K = p^2/2m. \quad (4.7)$$

Формула (4.7) визначає кінетичну енергію, а V являє собою потенціальну. При переході до квантових об'єктів потенціальна енергія не змінює своєї природи, тоді як кінетична енергія трансформується в оператор:

$$\hat{K} = \hat{p}^2/2m. \quad (4.8)$$

Явний вид оператора імпульсу встановлюється з умови інваріантності хвильової функції відносно зміщення на постійний вектор:

$$\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} + \vec{a}). \quad (4.9)$$

Розкладаючи праву частину (4.9) за \vec{a} , можна визначити, що

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla, \quad \nabla = \partial/\partial r. \quad (4.10)$$

Згідно з (4.10) оператор імпульсу є пропорційним першій похідній за координаті. Підставивши (4.10) в (4.8) отримаємо вид оператора кінетичної енергії:

$$\hat{K} = -\hbar^2/2m \cdot \nabla^2. \quad (4.11)$$

У результаті гамільтоніан набере вигляду

$$\hat{H} = -\hbar^2/2m \cdot \nabla^2 + V(\vec{r}). \quad (4.12)$$

Подальше наше завдання полягає в розв'язуванні рівняння Шредінгера (4.5) з гамільтоніаном (4.12) для різних випадків потенціальної енергії. Розглянемо випадок частинки, яка вільно рухається вздовж осі x та для якої $V(\vec{r})=0$. У результаті (4.5) набирає вигляду

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vec{r}^2} = E\psi. \quad (4.13)$$

Диференціальне рівняння (4.13) збігається з рівнянням хвилі, і його розв'язок шукають у вигляді плоскої хвилі:

$$\psi = e^{i\vec{k}\vec{r}}. \quad (4.14)$$

Підставимо (4.14) у (4.13):

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi = E\psi. \quad (4.15)$$

У результаті плоска хвиля (4.14) описує вільну частинку, енергія якої визначається рівнянням

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (4.16)$$

Необхідно відзначити, що в показнику експоненти (4.14) можна брати знак « \leftarrow ». Таким чином, (4.13) має два часткових розв'язки $e^{\pm i\vec{k}\vec{r}}$ (визначає напрямок руху хвилі). У результаті повний розв'язок (4.13) буде мати вигляд

$$\psi = Ae^{i\vec{k}\vec{r}} + Be^{-i\vec{k}\vec{r}}. \quad (4.17)$$

Формула (4.17) являє собою суперпозицію двох плоских хвиль однакової частоти, які поширюються в протилежних напрямках. Таким чином, вільній частинці відповідає монохроматична плоска хвиля де Бройля.

4.2. Частинка в одновимірній потенціальній ямі

У попередньому підрозділі ми розглянули тривіальний випадок, коли потенціальна енергія набувала нульових значень. Розглянемо поведінку частинки в нескінченно глибокій потенціальній ямі. У цьому разі $V(x)$ може набувати таких значень:

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ 0, & 0 < x < l, \\ \infty, & x > 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

Запишемо рівняння Шредінгера:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\psi = 0. \quad (4.19)$$

У разі нескінченно глибокої потенціальної ями частинка не може вийти за її межі, оскільки стінки є непроникними.

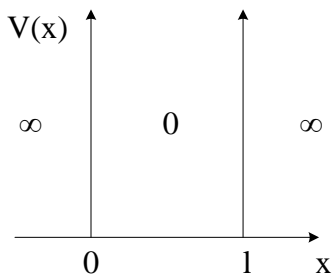


Рисунок 4.1 – Одновимірна потенціальна яма з нескінченно глибокими стінками

Через неперервність хвильова функція повинна перетворюватись на нуль і на межах ями за таких граничних умов $\psi(x)=0, \psi(l)=0$. У результаті наше завдання полягає у знаходженні розв'язку в інтервалі $0 < x < l$:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0. \quad (4.20)$$

Формула (4.20) являє собою диференціальне рівняння другого порядку, і для його розв'язку для зручності введемо позначення:

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}. \quad (4.21)$$

У результаті одержимо:

$$\psi'' + k^2 \psi = 0. \quad (4.22)$$

Розв'язком диференціального рівняння (4.22) є

$$\psi(x) = A \sin kx. \quad (4.23)$$

Використаємо наведені раніше граничні умови:

$$\psi(l) = 0 \rightarrow A \sin kl = 0 \rightarrow kl = \pm \pi n, n = 1, 2, 3 \dots \quad (4.24)$$

Підставивши умову (4.24) в (4.21) одержимо

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2. \quad (4.25)$$

Кінетична енергія в потенціальній ямі набуває лише квантових значень (4.25). Бачимо, що чим ширша яма, тим нижчим буде перший енергетичний рівень E_1 (основний стан). Наступний енергетичний рівень буде в чотири рази вищим ($E_2 = 4E_1$). Стала інтегрування A у формулі (4.23) визначається умовою нормування. Оскільки наявна лише одна частинка, то повинна виконуватися така умова:

$$\int_0^l |\psi|^2 dx = 1. \quad (4.26)$$

Підставимо (4.23) в (4.26) та знайдемо A :

$$\int_0^l |\psi|^2 dx = 4A \int_0^l \sin^2 kx dx = 1 \rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{l}}. \quad (4.27)$$

Вище ми розглянули нескінченно глибоку яму, в якій рівняння Шредінгера (4.4) має гамільтоніан (4.12) з нульовою потенціальною енергією. У цьому разі хвильова функція описується співвідношенням

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin kx. \quad (4.28)$$

У дійсності в реальній потенціальній ямі стінки не нескінченно високі, а тому необхідно розв'язувати задачу за частинкою в ямі кінцевої глибини.

4.3. Рух частинки в потенціальній ямі кінцевої глибини

Як бачимо з рисунка 4.2, потенціальна енергія змінюється стрибкоподібно на межі ями (в т. $x = 0$):

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ V_0, & x > 0. \end{cases} \quad (4.29)$$

Запишемо рівняння Шредингера для (I) та (II) областей:

$$(I): \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi_1 = 0, \quad (4.30)$$

$$(II): \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)\psi_2 = 0. \quad (4.31)$$

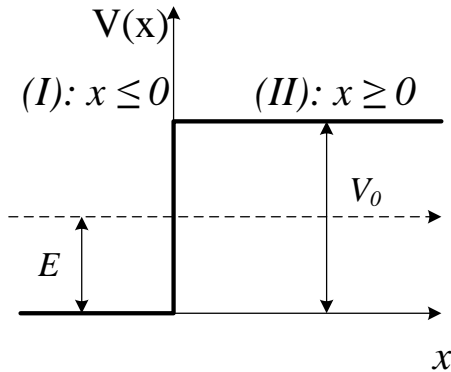


Рисунок 4.2 – Розсіювання частинки на бар'єрі кінцевої висоти

Спочатку розглянемо випадок високого бар'єра, зображений на рисунку 4.2 ($E < V_0$). Проведем подібні математичні операції, як і у разі потенціальної ями з нескінченно глибокими стінками.

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}, k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)}, \quad (4.32)$$

$$\psi_1'' + k_1^2 \psi_1 = 0, \quad (4.33)$$

$$\psi_2'' - k_2^2 \psi_2 = 0. \quad (4.34)$$

Величини (4.32) залежать від співвідношення енергії і висоти бар'єра: за $E > V_0$ – частинка пролітає над бар'єром, однак її амплітуда в області (II) менша, ніж в області (I) (частина хвилі відбивається від бар'єра), за $E < V_0$ – хвиля майже повністю відбивається від стінки бар'єра, однак деяка її частина може проникати під бар'єр і затухати зі збільшенням x . Опишемо цю картину кількісно, розв'язуючи рівняння (4.33) та (4.34) в кожній з областей. Розв'язок диференціальних рівнянь (4.33) і (4.34) будемо шукати в такому вигляді:

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}, \quad (4.35)$$

$$\psi_2(x) = A_2 e^{k_2 x} + B_2 e^{-k_2 x}, \quad (4.36)$$

де A_1 – амплітуда падаючої хвилі; B_2 – хвиля, яка пройшла через бар'єр; B_1 – хвиля, яка відбилася від бар'єра. Візьмемо, що на бар'єр летить лише одна частинка, а отже $A_1 = 1$. Оскільки хвильова функція повинна бути

обмеженою, а за $x \rightarrow \infty$ $\psi_2(x) \rightarrow \infty$, то $A_2 = 0$. У результаті рівняння (4.35) та (4.36) набирають вигляду

$$\psi_1(x) = e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x}, \quad (4.37)$$

$$\psi_2(x) = B_2 e^{-k_2x}. \quad (4.38)$$

Для подальшого розв'язку скористаємося граничними умовами:

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= \psi_2(0), \\ \psi_1'(0) &= \psi_2'(0). \end{aligned} \quad (4.39)$$

У результаті система рівнянь (4.37) та (4.38) матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} 1 + B_1 &= B_2, \\ ik_1 A_1 - ik_1 B_1 &= -k_2 B_2. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Звідси

$$B_1 = \frac{k_1 - ik_2}{k_1 + ik_2}, \quad B_2 = \frac{2k_1}{k_1 + ik_2}. \quad (4.41)$$

З урахуванням (4.41) система рівнянь (4.37) та (4.38) має вигляд

$$\psi_1(x) = e^{ik_1x} + \frac{k_1 - ik_2}{k_1 + ik_2} e^{-ik_1x}, \quad (4.42)$$

$$\psi_2(x) = \frac{2k_1}{k_1 + ik_2} e^{-k_2x}. \quad (4.43)$$

Потенціальний бар'єр характеризується двома величинами: R – коефіцієнт відбиття та D – коефіцієнт проходження. Причому

$$R + D = 1. \quad (4.44)$$

Згідно з визначенням коефіцієнт відбиття дорівнює відношенню густини відбитої хвилі до густини падаючої, а оскільки $A_I = 1$, то

$$R = |B_1|^2 = \left| \frac{k_1 - ik_2}{k_1 + ik_2} \right|^2 = 1. \quad (4.45)$$

Хоча $R = 1$, існує ймовірність проходження частинки з області (I) в область (II). Визначимо густину ймовірності знаходження частинки в області (II):

$$p_2(x) = |\psi_2(x)|^2 = \left| \frac{2k_1}{k_1 + ik_2} \right|^2 e^{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}x} \quad (4.46)$$

Як бачимо з формули (4.46), ймовірність знаходження частинки в товщі бар'єра експоненціально зменшується, однак зі збільшенням енергії частинки коефіцієнт відбиття зменшується та ймовірність знаходження частинки в області (II) зростає.

Розглянемо випадок, коли енергія частинки перевищує висоту потенціального бар'єра ($E > V_0$).

У цьому разі вид диференціальних рівнянь (4.30) та (4.31) не змінюється. Введемо такі позначення:

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}; k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_o)}, \quad (4.47)$$

$$\psi_1'' + k_1^2 \psi_1 = 0, \quad (4.48)$$

$$\psi_2'' + k_2^2 \psi_2 = 0. \quad (4.49)$$

Розв'язок диференціальних рівнянь (4.48) та (4.49) будемо шукати у вигляді

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}, \quad (4.50)$$

$$\psi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x}. \quad (4.51)$$

Як і у випадку високого потенціального порогу, кожна хвильова функція описує хвилю, яка пройшла через бар'єр та відбилася від нього. Оскільки після проходження бар'єра відбита хвиля відсутня, то припустимо, що $B_2 = 0$. Застосуємо умови, що накладаються на хвильові функції (4.39), та обчислимо значення коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} 1 + B_1 &= A_2, \\ k_1 A_1 - k_1 B_1 &= k_2 B_2, \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$B_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, A_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}. \quad (4.53)$$

У цьому разі коефіцієнти відбиття та проходження будуть дорівнювати:

$$R = B_1^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{E - V_0}}{1 + \sqrt{E + V_0}} \right)^2, \quad (4.54)$$

$$D = A_2^2 = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2} = 4 \frac{\sqrt{E - V_0}}{(1 + \sqrt{E - V_0})^2}. \quad (4.55)$$

Цікаво відзначити, що в разі, якщо частинка має енергію, вищу за висоту потенціального бар'єра, у квантовій механіці існує відмінна від нуля ймовірність коефіцієнта відбиття. Виходячи з формул (4.54) та (4.55), бачимо, що коефіцієнти проходження та відбиття залежать лише від енергії частинки та висоти потенціального бар'єра.

4.4. Розсіювання частинки на прямокутному потенціальному бар'єрі

Розглянемо випадок, коли частинка налітає на прямокутний потенціальний бар'єр висотою V_0 та шириною l . Водночас потенціальна енергія змінюється так:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ V_0, & 0 \leq x \leq l, \\ 0, & x > l. \end{cases} \quad (4.56)$$

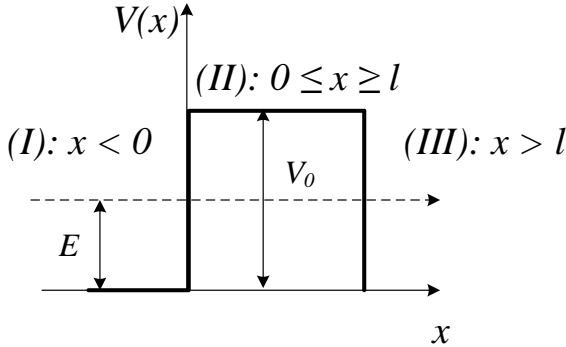


Рисунок 4.3 – Розсіювання частинки на прямокутному бар’єрі кінцевої ширини

За аналогією ситуацій, розглянутих у попередніх підрозділах, оскільки на бар’єр зліва падає лише одна частинка, то в області (I):

$$\psi_1(x) = e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x}. \quad (4.57)$$

В області (II) хвиля рухається в обидва боки:

$$\psi_2(x) = A_2 e^{ik_2x} + B_2 e^{-ik_2x}. \quad (4.58)$$

В області (III) хвиля рухається лише в бік осі x , а тому

$$\psi_3(x) = A_3 e^{ik_1 x}. \quad (4.59)$$

Використаємо умову неперервності для хвильових функцій:

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= \psi_2(0), \\ \psi_2(l) &= \psi_3(l), \\ \psi_1'(0) &= \psi_2'(0), \\ \psi_2'(l) &= \psi_3'(l). \end{aligned} \quad (4.60)$$

З урахуванням (4.59) одержуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1 + B_1 = A_2 + B_2, \\ ik_1 - ik_1 B_1 = ik_2 A_2 - ik_2 B_2, \\ A_2 e^{ik_2 l} + B_2 e^{-ik_2 l} = A_3 e^{ik_1 l}, \\ ik_2 A_2 e^{ik_2 l} - ik_2 B_2 e^{-ik_2 l} = ik_1 A_3 e^{ik_1 l}. \end{cases} \quad (4.61)$$

У результаті коефіцієнти будуть мати такі співвідношення:

$$A_2 = \frac{2k_1(k_1 + k_2)}{(k_1 + k_2)^2 - (k_2 - k_1)^2 e^{2ik_2 l}}, \quad (4.62)$$

$$B_2 = \frac{2k_1(k_2 - k_1)e^{2ik_2 l}}{(k_1 + k_2)^2 - (k_2 - k_1)^2 e^{2ik_2 l}}, \quad (4.63)$$

$$B_1 = \frac{(k_1^2 - k_2^2)(1 - e^{2ik_2 l})}{(k_1 + k_2)^2 - (k_2 - k_1)^2 e^{2ik_2 l}}, \quad (4.64)$$

$$A_3 = \frac{4k_1 k_2 e^{i(k_2 - k_1)l}}{(k_1 + k_2)^2 - (k_2 - k_1)^2 e^{2ik_2 l}}. \quad (4.65)$$

Для аналізу коефіцієнтів необхідно розглянути два випадки:

1. Низький бар'єр ($E > V_0$).

У цьому випадку коефіцієнти проходження та відбиття будуть дорівнювати таким співвідношенням:

$$D = |A_3|^2 = \left[\frac{(k_1 - k_2)^2 \sin^2 k_2 l}{4k_1^2 k_2^2} + 1 \right]^{-1} = \quad (4.66)$$

$$\left\{ k_1^2 = 2mE/\hbar^2; k_2^2 = 2m(E - V_0)/\hbar^2 \right\} = \left[\frac{V_0^2 \sin^2 k_2 l}{4E(E - V_0)} + 1 \right]^{-1}.$$

$$R = |B_1|^2 = \left[\frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2 k_2 l} + 1 \right]^{-1}. \quad (4.67)$$

Бачимо, що повне проходження частинок через потенціальний бар'єр ($D = 1$) є можливим лише за $k_2 l = \pi n, n = 1, 2, 3, \dots$

2. Високий бар'єр ($E < V_0$).

У разі, якщо енергія частинки менша, ніж висота потенціального бар'єра, хвильовий вектор k_2 стає уявною величиною. Для зручності позначимо:

$$k_2 = ik, k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}. \quad (4.68)$$

З урахуванням формули (4.68) коефіцієнт проходження дорівнює

$$D = |A_3|^2 = \frac{4}{(k_1/k)sh^2kl + 4} = \left\{ sh^2kl \approx \frac{1}{4} e^{2kl} \right\} = \\ = D_0 e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}l}. \quad (4.69)$$

Здебільшого довжина бар'єра становить близько 1 \AA , а різниця між висотою бар'єра та енергією частинки \sim декілька електрон-вольт, а тому можна знехтувати другим доданком у знаменнику формули (4.69) та застосувати наближення до гіперболічного синуса. Аналізуючи формулу (4.69), бачимо, що на відміну від класичних уявлень у квантовій механіці можливе проходження частинки через потенціальний бар'єр за $(E < V_0)$. Такий ефект називають тунельним ефектом. Це явище є суто квантовим і не має аналогів у класичній фізиці. Коефіцієнт проходження залежить виключно від енергії частинки і ширини бар'єра. Так, за збільшення ширини вдвічі коефіцієнт зменшується в 100 разів.

Список літератури

1. Осадчук В. С. Основи наноелектроніки: навчальний посібник / В. С. Осадчук, О. В. Осадчук. – Вінниця : ВНТУ, 2016. – 199 с.
2. Наноелектроніка / за ред. З. Ю. Готри. – Львів : Ліга-прес, 2009. – 342 с.
3. Парфенов П. С. Квантовая механика : Методическое пособие к практикуму по квантовой физике / П. С. Парфенов. – Санкт-Петербург : НИУ ИТМО, 2012. – 133 с.
4. Мартинсон Л. К. Квантовая физика : учеб. пособие / Л. К. Мартинсон, Е. В. Смирнов. – 4-е изд. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012. – 527 с.
5. Венгер Є. Ф. Збірник задач з квантової механіки / Є. Ф. Венгер, В. М. Грибань, О. В. Мельничук. – Київ : Вища школа, 2003. – 230 с.
6. Осадчук В. С. Фізична наноелектроніка : навчальний посібник / В. С. Осадчук, О. В. Осадчук. – Вінниця : ВНТУ, 2015. – 146 с.
7. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічного завдання з дисципліни «Фізика низькорозмірних систем» для студентів спеціальності 6.050801 «Мікро- та наноелектроніка» денної й заочної

форм навчання / уклад.: А. В. Коротун, А. В. Бабіч. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2014. – 42 с.

8. Збірник запитань, завдань та тестів з курсу загальної фізики : навчальний посібник / Д. І. Вадець, М. В. Мороз, В. Ф. Орленко, А. В. Рибалко. – Рівне : НУВГП, 2014. – 226 с.

Питання та завдання для самоперевірки

Питання та завдання для самоперевірки до розділу 1
«Класифікація нанокластерів і наноструктур, методи їх
отримання»

1. Що таке нанотехнологія, наноматеріали та наноструктура?
2. У чому полягає принцип підходів «top down» та «bottom up»? Які відмінності?
3. Наведіть приклади наноматеріалів із різною розмірністю їх структурного елемента.
4. У чому відмінність між газовими безлігандними та колоїдними кластерами?
5. Наведіть приклади матричних нанокластерів.
6. Які алотропні форми має вуглець?
7. Яка відмінність між фулереном та фулеритом?
8. Які існують методи отримання вуглецевих нанотрубок? У чому полягають відмінності існуючих методів?
9. Які існують методи отримання наноструктур?
10. Які матеріали використовують для отримання квантових дротів та точок?

Питання та завдання для самоперевірки до розділу 2
«Базові елементи наноелектроніки»

1. У чому полягає принципова відмінність між класичними та квантовими законами руху електронів?
2. У чому полягає співвідношення невизначеностей?
3. Обчисліть невизначеність швидкості для кульки розміром 1 мм, масою 1 г, використовуючи формулу (2.1).
4. Сформулюйте основний постулат квантової механіки.
5. Як називають рівняння руху в квантовій механіці?
6. Яка різниця між принципом суперпозиції для густини ймовірності та хвильової функції?
7. Покажіть, що густина ймовірності для системи з двох частинок буде задаватися формулою (2.5).
8. Як змінюється хвильова функція електрона, який поміщено в потенціальну квантову яму?
9. Доведіть, що в квантовій ямі укладається ціле число півхвиль.
10. Знайдіть характерне значення енергії електрона в квантовій ямі розміром 5 нм, використовуючи формулу (2.9).
11. Виведіть густину станів для тривимірного об'єкта, квантової ями та дроту.

12. Чому у квантовій точці реалізується нескінченна кількість квантових станів?
13. Що таке балістичне розсіювання?
14. Яку величину називають квантом провідності?
15. Яка сила діє на електрон із боку магнітного та електричного полів? У чому полягає відмінність?
16. Які фізичні фактори обумовлюють виникнення ефекту Холла?
17. У чому полягає квантовий ефект Холла?
18. У чому полягає явище тунелювання?
19. Опишіть принцип дії резонансно-тунельного діода.
20. Які умови потрібні для роботи лазера?
21. Опишіть принцип дії лазера на квантових ямах.

Питання та завдання для самоперевірки до розділу 3
«Транзистори»

1. Поясніть явище кулонівської блокади.
2. Як кулонівська блокада впливає на вольт-амперну характеристику тунельного контакту?
3. Як впливає температура на тунельний ефект?
4. Які умови необхідні для існування тунельного ефекту?
5. Що являє собою одноелектронна квантова яма?
6. Які умови кулонівської блокади для одноелектронного ящика?
7. У чому полягає відмінність між квантовою ямою та квантовим ящиком?
8. Поясніть принцип дії одноелектронного квантового ящика?
9. Який фізичний зміст кулонівської сходинки?
10. Як працює одноелектронний транзистор?
11. З яких причин одноелектронний ящик не використовують як прилад наноелектроніки?
12. Зобразіть електричну схему одноелектронного транзистора та запишіть рівняння Кірхгофа.
13. Накресліть та поясніть залежність струму одноелектронного транзистора від напруги на затворі.

14. Використовуючи формули (3.21), (3.22) та (3.24), виведіть рівняння для Q_1 , Q_2 та Q_g .
15. Визначте умови кулонівської блокади для одноелектронного транзистора.
16. Виведіть формулу (3.32).
17. З яких основних елементів складається одноелектронний транзистор?

Питання та завдання для самоперевірки до розділу 4
«Основи квантової механіки»

1. Чому дорівнює оператор імпульсу?
2. Якого вигляду набирає гамільтоніан? Виведіть формулу (4.12).
3. Знайдіть енергію вільної частинки, що рухається вздовж осі x та поясніть фізичний зміст.
4. Виведіть співвідношення для хвильової функції частинки, яка перебуває в нескінченно глибокій потенціальній ямі.
5. Обчисліть сталу A у формулі (4.23).
6. Проаналізуйте поведінку частинки на низькому бар'єрі. Розрахуйте коефіцієнти відбиття та проходження.
7. Проаналізуйте поведінку частинки на високому бар'єрі. Розрахуйте коефіцієнти відбиття та проходження.
8. Використовуючи рівняння (4.57), (4.58) та (4.59) і граничні умови (4.60) визначте вид коефіцієнтів A_2 , B_2 , A_3 , B_1 . Поясніть їх фізичний зміст.
9. Проаналізуйте розсіювання частинки на низькому та високому прямокутних потенціальних бар'єрах.
10. Оцініть різницю енергій двох енергетичних сусідніх рівнів у потенціальній ямі розміром (10^{-2} нм). Визначте

довжину хвилі випромінювання між 5-м і 6-м рівнями та колір.

11. Знайти масу частинки, яка вільно рухається вздовж осі x .

12. Електрон перебуває в основному стані в потенціальній ямі та має енергію $E = 1,5$ еВ. Ширина ями становить $d = 5 \times 10^{-8}$ см. Розрахуйте висоту потенціального бар'єра U та його проникність.

13. Обчисліть імовірність того, що електрон, який перебуває в збудженому стані ($n = 3$), буде знайдено в першій третині потенціального ящика шириною l .

14. За якої шириною потенціального бар'єра ймовірність проходження електрона буде 0,01. Енергія електрона становить 5,5 еВ, висота бар'єра – 6 еВ.

15. Глибина потенціальної ями становить 3 еВ. Яка частина електронів вилетить із неї, якщо їх енергія становить 3,5 еВ?

Тестові завдання

Тестові завдання до розділу 1

«Класифікація нанокластерів і наноструктур, методи їх створення»

1. Що означає термін «нано»?

- а) нано (грецькою nanos) означає карлик;
- б) нано (давньогерманською nanog) означає гном;
- в) нано (італійською nano) означає маленька людина;
- г) нано (іспанською nanos) означає маленьку тварину?

2. Наночастинки мають такий характерний розмір:

- а) < 100 нм;
- б) приблизно $100 \cdot 10^{-9}$ см та менше;
- в) приблизно $100 \cdot 10^{-9}$ нм та більше;
- г) ~ 100 мкм.

3. Який характерний розмір атома:

- а) < 100 нм;
- б) приблизно $100 \cdot 10^{-9}$ м та більше;
- в) приблизно $100 \cdot 10^{-9}$ нм та більше;
- г) $\sim 10^{-10}$ м?

4. Прикладом біологічних нанооб'єктів є:

- а) клітина;
- б) ДНК;
- в) клітинне ядро;

г) мітохондрія.

5. Що таке розмірний ефект у технології наноматеріалів:

а) зміна властивостей наноб'єктів залежно від розміру елементів їх структури;

б) зміна розміру наноб'єктів залежно від зовнішніх умов;

в) зміна властивостей наноб'єктів залежно від зовнішніх умов;

г) зміна розміру наноб'єктів залежно від хімічного складу.

6. Технологічна парадигма «знизу вгору» для нанотехнології означає, що:

а) наноб'єкти можуть формуватися лише послідовним нарощуванням матеріалу в напрямку – підкладка (нижній стан) і «далі вгору»;

б) умовним «низом» називають не сформований ще наноб'єкт, під «верхом» розуміють частинку, яка має розміри 100 або менше нм;

в) наноб'єкти можуть формуватися з молекулярних джерел, існувати незалежно від середовища і технологічно використовуватись нарівні з мікро- та макрооб'єктами;

г) чим менша частинка, тим менший її питомий заряд, а чим більша частинка, тим більший її питомий заряд;

д) чим менша частинка, тим більше її питомий заряд, а чим більша частинка, тим менший її питомий заряд.

7. Що означає термін «Top down», який відноситься до створення нанооб'єктів:

- а) диспергування, зменшення розміру об'єкта;
- б) структуроутворення, створення наноструктур з атомів і молекул;
- в) створення наноструктурного шару на нижній поверхні об'єкта;
- г) створення наноструктурного шару осаджувальними методами?

8. Що означає термін «Bottom up», який належить до створення нанооб'єктів:

- а) створення наноструктурованого шару на поверхні об'єкта;
- б) структуроутворення, створення наноструктур з атомів і молекул;
- в) диспергування, зменшення розміру об'єкта;
- г) створення наноструктурованого шару шляхом сублімації речовини.

9. Виберіть найбільш практичний спосіб формування наноструктури за концепцією «знизу вгору»:

- а) сукупність атомних послідовностей із використанням сканувального тунельного мікроскопа;
- б) молекулярно-пучкова епітаксія;
- в) рідиннофазова епітаксія;
- г) газофазова гомоепітаксія.

10. Виберіть із запропонованих варіантів спосіб отримання газового безлігандного кластера:

- а) надзвукове сопло;
- б) механохімічні реакції під дією високих тисків із зсувом;
- в) осадження в порах несучої матриці;
- г) пресування з подальшим спіканням.

11. Що таке нанотрубки:

- а) протяжні структури, що складаються зі згорнутих гексагональних сіток з атомами вуглецю у вузлах;
- б) сім'я кулеподібних порожнистих молекул із загальною формулою C_n ;
- в) протяжні структури з вуглецевих переплетених ланцюгів;
- г) металоорганічні кручені полімери?

12. Що таке фулерен:

- а) залізовмісна наноструктура, яку застосовують у медицині;
- б) вуглецева нанотрубка;

в) сім'я кулеподібних порожнистих молекул загальною формулою C_n ;

г) плоский лист графіту мономолекулярної товщини?

13. Який із фулеренів є найбільш стійким:

а) C_{60} ;

б) C_{70} ;

в) C_{80} ;

г) C_{50} ?

14. У 1985 р. вперше була синтезована нова алотропна форма вуглецю, яка мала назву:

а) рідкоземельний метал;

б) фулерен;

в) інертний газ;

г) лантанід.

Тестові завдання до розділу 2
«Базові елементи наноелектроніки»

1. Якщо координата частинки відома з точністю Δx , то її імпульс можна визначити не точніше ніж:

а) $\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x}$;

б) $\Delta p \leq \frac{\hbar}{\Delta x}$;

в) $\Delta p \geq \frac{\Delta x}{\hbar}$;

г) $\Delta p \geq \hbar \cdot \Delta x$.

2. Співвідношення невизначеностей означає таке:

а) чим менша невизначеність координати частинки, тим менша невизначеність її імпульсу;

б) чим менша невизначеність координати частинки, тим більша невизначеність її імпульсу;

в) чим більша невизначеність координати частинки, тим менша невизначеність її імпульсу;

г) свій варіант відповіді.

3. Яка невизначеність швидкості становить для кульки розміром 1 мм і масою 1 г:

- а) 10^{-26} м/с;
- б) 10^{-10} см/с;
- в) 10^{-26} см/с;
- г) 1 см/с?

4. Основний постулат квантової фізики має такий вигляд:

- а) $p(x) = |\psi(x)|^2$;
- б) $p(x) = |\psi(x)|$;
- в) $p(x) = \sqrt{\psi(x)}$;
- г) свій варіант відповіді.

5. Формулювання основного постулату квантової фізики полягає в такому:

- а) густина ймовірності виявити квантовий об'єкт у деякій точці дорівнює квадрату модуля (інтенсивності) хвильової функції в цій точці;
- б) густина ймовірності виявити квантовий об'єкт у деякій точці дорівнює хвильовій функції в цій точці;
- в) ймовірність виявити квантовий об'єкт у деякій точці дорівнює квадрату модуля (інтенсивності) хвильової функції в цій точці;
- г) свій варіант відповіді.

6. Квадрат модуля хвильової функції в деякій точці фазового простору задає:

- а) координату частинки відносно певної точки;
- б) імпульс частинки, якщо рух частинки не доступний із класичної точки зору;
- г) густину ймовірності знаходження частинки в цій точці;
- д) середню координату частинки, якщо рух частинки не доступний із класичної точки зору.

7. Чому дорівнює густина ймовірності квантової системи, що складається з 2 частинок:

- а) свій варіант відповіді;
- б) $|a|^2 p_1 + a^* b \psi_1^* \psi_2 + a b^* \psi_1 \psi_2^* + |b|^2 p_2$;
- в) $p_1 + p_2$;
- г) $|a|^2 p_1 + 2ab\psi_1\psi_2 + |b|^2 p_2$?

8. Чому дорівнює хвильова функція квантової системи, що складається з 2 частинок:

- а) $a^2\psi_1^2 + 2ab\psi_1\psi_2 + b^2\psi_2^2$;
- б) свій варіант відповіді;
- в) $a\psi_1 + b\psi_2$;
- г) $|a|^* \psi_1 + |b|^* \psi_2$?

9. Хвильова функція, що описує електронні стани в ямі, задається таким виразом:

а) $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{xa} n\right);$

б) $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a} n\right);$

в) $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{a}{2}} \sin\left(\frac{x}{\pi a} n\right);$

г) $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin(\pi x a n).$

10. У потенціальній ямі дозволені лише ті траєкторії, для яких імпульс частинки p_n і ширина ями a пов'язані співвідношенням:

а) $p_n a = \pi \hbar n;$

б) $p_n a = \frac{\pi \hbar}{n};$

в) $p_n \hbar = \pi a n;$

г) $n a = \pi \hbar p_n.$

11. Виберіть правильну формулу, що відповідає за енергію нульових коливань у квантовій механіці:

а) $2\pi^2 \hbar^2 / m a^2;$

б) $\pi^2 \hbar^2 / 2ma$;

в) $\pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$;

г) $\pi^2 \hbar^2 / 4m^2 a^2$.

12. Заборонена зона – це:

а) енергетична область, в якій можуть вільно поширюватися електрони;

б) енергетична область, в якій можуть вільно поширюватися дірки;

в) енергетична область, в якій не можуть вільно поширюватися ні електрони, ні дірки.

13. Як називають найвищу енергетичну зону в енергетичному спектрі напівпровідників:

а) зоною провідності;

б) забороненою зоною;

в) валентною зоною;

г) квантовою зоною?

14. Які технології використовують для створення гетеропереходів:

а) іонну імплантацію;

б) молекулярно-променеву епітаксію;

в) хімічне осадження з парової фази;

г) термічне випаровування у вакуумі?

15. Як створюються квантові ями:

- а) тонкий шар напівпровідника з вузькою забороненою зоною між шарами матеріалу із широкою і вузькою забороненими зонами;
- б) тонкий шар діелектрика із широкою забороненою зоною між двома шарами матеріалу з більш вузькою забороненою зоною;
- в) тонкий шар напівпровідника з вузькою забороненою зоною між двома шарами матеріалу з більш широкою забороненою зоною;
- г) тонкий шар діелектрика з вузькою забороненою зоною між шарами матеріалу з широкою і вузькою забороненими зонами?

16. Якщо помістити тонкий шар напівпровідника з широкою забороненою зоною між двома напівпровідниками з вузькою забороненою зоною, то одержимо:

- а) квантову точку;
- б) квантову яму;
- в) квантовий бар'єр;
- г) квантову голку.

17. Квантовий дріт – це:

- а) напівпровідниковий матеріал, в якому рух носіїв заряду обмежений в одному напрямі;
- б) напівпровідниковий матеріал, в якому рух носіїв заряду обмежений у двох напрямках;
- в) напівпровідниковий матеріал, в якому рух носіїв заряду обмежений у трьох напрямках.

18. Квантова яма – це...

- а) канавка травлення в приповерхневому шарі напівпровідника після маскового плазмохімічного травлення, що спостерігається лише за допомогою сканувального тунельного мікроскопа;
- б) одновимірна потенціальна яма для квантової частинки, розміри якої співрозмірні з довжиною хвилі де Бройля квантової частинки;
- в) одновимірна потенціальна яма для квантової частинки, розміри якої набагато менші від довжини хвилі де Бройля квантової частинки;
- г) механічне ушкодження структури напівпровідника в межах довжини вільного пробігу носіїв зарядів.

19. Квантова точка – це...

- а) потенціальна яма для квантової частинки, що обмежує рух останньої в трьох напрямках, і має розміри порядку довжини хвилі де Бройля квантової частинки;
- б) умовна назва квантової частинки, рух якої обмежується потенціалом структури на поверхні;
- в) потенціальна яма для квантової частинки, що обмежує рух останньої і має розміри зони провідності структури за умови, що рівень Фермі знаходиться поблизу стелі зони провідності;
- г) точка на поверхні будь-якого об'єкта, рівновіддалена від його меж.

20. Чому квантові точки називають штучними атомами:

- а) квантова точка, як і атом, має ядро;
- б) квантова точка може вступати в хімічні реакції подібно до атомів;
- в) квантова точка має розміри атома;
- г) у квантовій точці рух обмежений у трьох напрямках і енергетичний спектр повністю дискретний, як в атомі?

21. Хвильові властивості електрона проявляються, якщо його рух обмежений областю простору, лінійні

розміри якої відносно довжини хвилі де Бройля електрона:

- а) набагато менші;
- б) співрозмірні;
- в) набагато більші.

22. Густина станів у тривимірному електронному газі змінюється залежно від енергії електрона за законом:

а) \sqrt{E} ;

б) $\Theta(E - E_i)$;

в) $\frac{1}{\sqrt{E}}$;

г) від E взагалі не залежить.

23. Закон дисперсії, що описує двовимірні структури, має вигляд:

а) $E = (p_x^2 + p_y^2)/2m$;

б) $E = \sqrt{(p_x^2 + p_y^2)}/m$;

в) $E = E_N + (p_x^2 + p_y^2)/m$;

г) $E = E_N + (p_x^2 + p_y^2)/2m$.

24. Закон дисперсії, що описує одновимірні структури, має вигляд:

а) $E = E_i + p_x^2 n/2m$;

$$\text{б) } E = E_i + \sqrt{p_x^2/2m};$$

$$\text{в) } E = E_i + p_x^2/2m;$$

$$\text{г) } E = p_x^2/2m.$$

25. Закон дисперсії, що описує тривимірні структури, має вигляд:

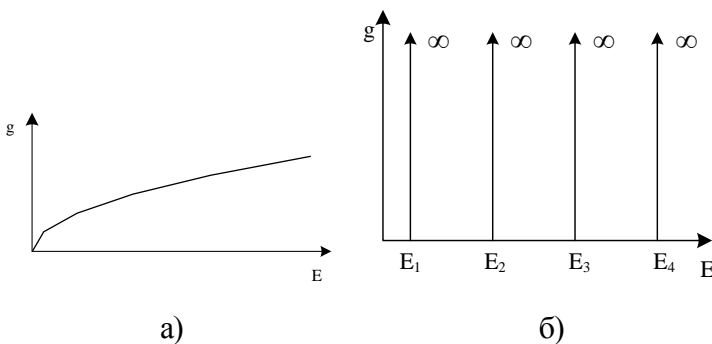
$$\text{а) } E = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m;$$

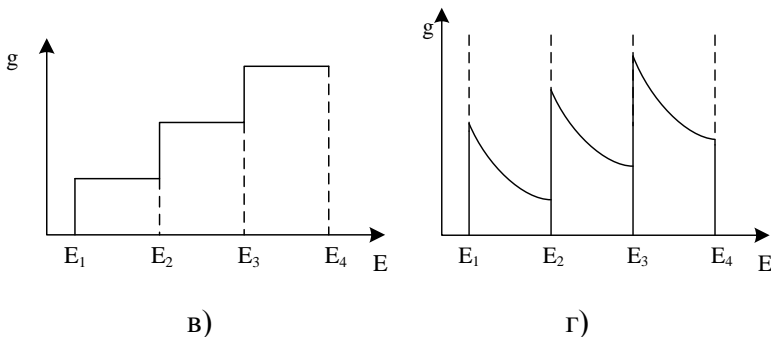
$$\text{б) } E = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/m;$$

$$\text{в) } E = E_i + (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m;$$

$$\text{г) } E = \sqrt{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m}.$$

26. Якому рисунку відповідає густина станів для одновимірного об'єкта?





27. Густина станів зонних електронів у квантовій точці біля краю зони має вигляд:

- а) набору дельта-функцій Дірака;
- б) набору кореневих гіперболічних функцій;
- в) набору ступінчастих функцій;
- г) кореневої параболи.

28. Густина станів зонних електронів в об'ємному матеріалі біля краю зони має вигляд:

- а) набору дельта-функцій Дірака;
- б) набору кореневих гіперболічних функцій;
- в) набору ступінчастих функцій;
- г) кореневої параболи.

29. Густина станів зонних електронів у квантовому дроті біля краю зони має вигляд:

- а) набору дельта-функцій Дірака;
- б) набору кореневих гіперболічних функцій;

- в) набору ступінчастих функцій;
- г) кореневої параболи.

30. Енергія Фермі E_F електрона в металі – це:

- а) енергія, нижче від якої всі одноелектронні рівні заповнені за кімнатної температури;
- б) максимальна енергія електрона в основному стані за $T = 0 \text{ K}$;
- в) максимальна енергія електрона в металі за кімнатної температури;
- г) енергія, яка необхідна електрону для виходу з поверхні твердого тіла.

31. Провідність квантового дроту дорівнює:

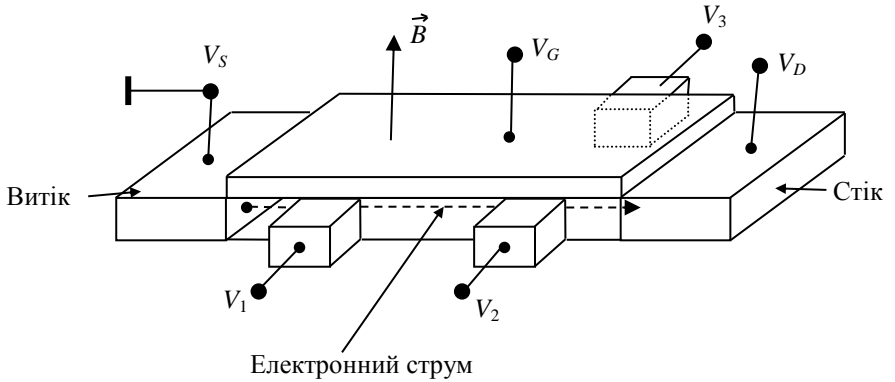
а) $\sigma = \frac{e^2}{2\pi\hbar} N$;

б) $\sigma = \frac{e^2}{\pi\hbar} N$;

в) $\sigma = \frac{e}{2\pi\hbar} N$;

г) $\sigma = \frac{e}{\pi\hbar} N$.

32. Квантовий ефект Холла полягає у встановленні залежності (див. рис. нижче):

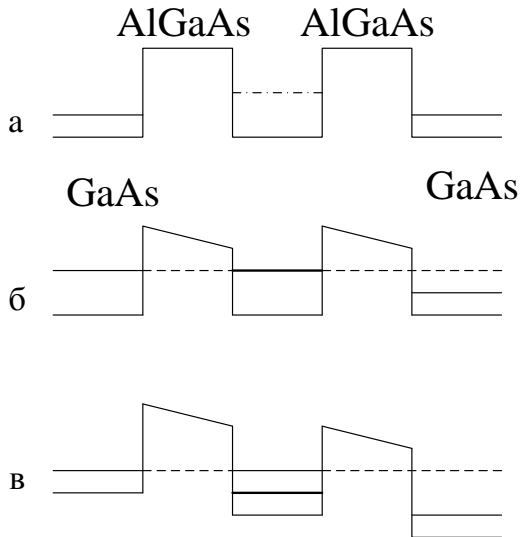


- а) $V_2 - V_1 = f(V_G)$;
- б) $V_2 - V_1 = f(V_D)$;
- в) $V_3 - V_2 = f(V_G)$;
- г) $V_3 - V_2 = f(V_D)$.

33. Електрон проходить над симетричним бар'єром з енергією, більшою від висоти бар'єра. Яка подія більш імовірна:

- а) електрон відіб'ється від бар'єра та полетить назад;
- б) електрон зупиниться над бар'єром;
- в) електрон полетить далі за бар'єр, але з меншою швидкістю;
- г) електрон полетить далі за бар'єр із тією самою швидкістю?

34. На якому рисунку показаний механізм резонансного тунелювання в резонансному тунельному діоді?



35. Яка умова необхідна для роботи будь-якого лазера:

- а) кількість електронів на всіх енергетичних рівнях повинна бути однаковою;
- б) на більш високому рівні повинно перебувати менше електронів, ніж на низькому;
- в) на більш низькому рівні повинно перебувати більше електронів, ніж на високому;
- г) на більш високому рівні повинно перебувати більше електронів, ніж на низькому.

Тестові завдання до розділу 3

«Транзистори»

1. Яке рівняння використовують для знаходження ємності конденсатора:

а) $C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$;

б) $C = A \cdot \frac{d}{\varepsilon}$;

в) $C = \sqrt{\varepsilon} \cdot \frac{A}{d}$;

г) свій варіант відповіді?

2. Напряга кулонівської блокади, що визначає одноелектронний транспорт, дорівнює:

а) $U = \frac{e}{2C}$;

б) $U = \frac{2e}{C}$;

в) $U = \frac{C}{2e}$;

г) $U = \frac{2C}{e}$.

3. Умова кулонівської блокади:

а) $-\frac{e}{2C} < V < \frac{e}{2C}$;

б) $-\frac{2e}{C} < V < \frac{2e}{C}$;

в) $-\frac{C}{2e} < V < \frac{C}{2e}$;

г) $\frac{2e}{C} < V < -\frac{2e}{C}$.

4. За якої умови термічні процеси пригнічують тунелювання електрона через бар'єр:

а) $\frac{e^2}{C} < kT$;

б) $\frac{e^2}{C} > kT$;

в) $\frac{e^2}{C} < \frac{1}{2}kT$;

г) $\frac{e^2}{C} > 2kT$?

5. За якої умови квантові ефекти не пригнічують тунелювання?

а) $R_T < \frac{e^2}{h}$;

б) $R_T > \frac{h}{2e^2}$;

в) $R_T < \frac{h}{e^2}$;

г) $R_T > \frac{h}{e^2}$?

6. Що таке кулонівська осциляція:

а) за зміни напруги затвора V_g одноелектронного транзистора провідність змінюється періодично;

б) за зміни напруги генератора одноелектронного транзистора провідність змінюється періодично;

в) за зміни напруги затвора V_g одноелектронного транзистора енергія електронів змінюється періодично;

г) за постійної напруги затвора V_g одноелектронного транзистора провідність змінюється періодично?

7. На яку величину повинна збільшитися напруга на затворі одноелектронного транзистора, щоб він пропускав один електрон:

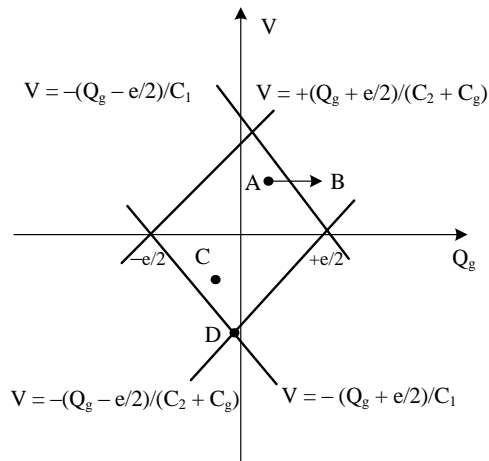
а) $\Delta V_g = \frac{C_g}{e}$;

$$\text{б) } \Delta V_g = \frac{e}{2C_g};$$

$$\text{в) } \Delta V_g = \frac{e}{C_g};$$

$$\text{г) } \Delta V_g = C_g \cdot e?$$

8. Яка точка кулонівського алмазу відповідає за проходження струму в одноелектронному транзисторі:



a) A;

б) B;

в) C;

г) D?

Тестові завдання до розділу 4
«Основи квантової механіки»

1. Чому дорівнює оператор імпульсу \hat{p} :

а) $\hat{p} = i\hbar \frac{\partial^2}{\partial r^2}$;

б) $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial^2}{\partial r^2}$;

в) $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$;

г) $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial r}$?

2. Доповніть математичний вираз $\psi = E\psi$:

а) $H\psi = E\psi$;

б) $-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = E\psi$;

в) $U(x, y, z, t)\psi = E\psi$;

г) $\hat{H}\psi = E\psi$.

3. Який вигляд має гамільтоніан:

а) $\hat{H} = -\hbar^2/2m \cdot \nabla^2 + V(\vec{r})$;

б) $\hat{H} = \hbar^2/2m \cdot \nabla^2 + V(\vec{r})$;

в) $\hat{H} = -\hbar^2/2m \cdot \Delta^2 + V(\vec{r})$;

г) $\hat{H} = \hbar^2/2m \cdot \Delta^2 + V(\vec{r})$?

4. Яка з наведених хвильових функцій може бути розв'язком рівняння Шредінгера, що описує рух вільної частинки вздовж осі x :

а) $\psi = Ae^{i\vec{k}\vec{r}}$;

б) $\psi = Ae^{i\vec{k}\vec{r}} + Be^{-i\vec{k}\vec{r}}$,

в) $\psi = Be^{-i\vec{k}\vec{r}}$;

г) свій варіант відповіді?

5. Зазначте формулу для обчислення енергії вільної частинки:

а) $E = \frac{2m}{\hbar^2 k^2}$;

б) $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$;

в) $E = 2\hbar^2 k^2 m$;

г) свій варіант відповіді.

6. Що таке коефіцієнт відбиття потенціального бар'єра:

а) відношення амплітуд падаючих і відбитих хвиль;

б) відношення квадратів амплітуд падаючих і відбитих хвиль;

- в) відношення амплітуд падаючих та хвиль, які проходять;
- г) відношення квадратів амплітуд падаючих та хвиль, які проходять?

7. Що таке коефіцієнт проходження потенціального бар'єра:

- а) відношення амплітуд падаючих і відбитих хвиль;
- б) відношення квадратів амплітуд падаючих і відбитих хвиль;
- в) відношення амплітуд падаючих та хвиль, які проходять;
- г) відношення квадратів амплітуд падаючих та хвиль, які проходять?

8. Який фізичний зміст має коефіцієнт A_1 :

- а) амплітуда падаючої хвилі;
- б) амплітуда хвилі, яка пройшла через потенціальний бар'єр;
- в) амплітуда хвилі, яка відбилася від потенціального бар'єра;
- г) свій варіант відповіді?

9. Якою формулою визначається коефіцієнт проходження прямокутного потенціального бар'єра:

а) $D = D_0 e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{(V_0 - E)}}$;

$$\text{б) } D = D_0 e^{(2m(V_0 - E)l)^2} ;$$

$$\text{в) } D = D_0 e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)l}} ;$$

$$\text{г) } D = D_0 e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2mEl}} ?$$

Навчальне видання

Багдасарян Артем Анатолійович

ОСНОВИ НАНОЕЛЕКТРОНІКИ

Навчальний посібник

Художнє оформлення обкладинки А. А. Багдасаряна
Редактори: Н. З. Клочко, С. М. Симоненко
Комп'ютерне верстання А. А. Багдасаряна

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 7,90. Обл.-вид. арк. 5,95. Тираж 300 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.