

**ANALISIS DINAMIK MODEL *SEIRS* PENYEBARAN VIRUS
WORM PADA KOMPUTER**

SKRIPSI

oleh
HANESTY ASTINOV CIMI
145090400111011



JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018



**ANALISIS DINAMIK MODEL *SEIRS* PENYEBARAN VIRUS
WORM PADA KOMPUTER**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana
Matematika

oleh

HANESTY ASTINOV CIMI

145090400111011



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018**

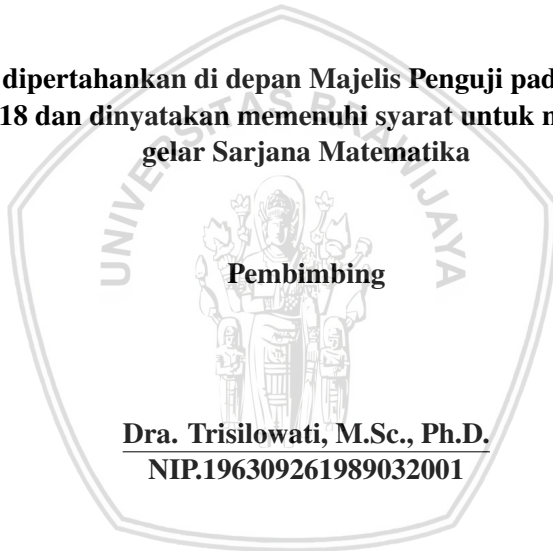


LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

ANALISIS DINAMIK MODEL *SEIRS* PENYEBARAN VIRUS *WORM* PADA KOMPUTER

oleh
HANESTY ASTINOV CIMI
145090400111011

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji pada tanggal 12
Juli 2018 dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh
gelar Sarjana Matematika



Pembimbing

Dra. Trisilowati, M.Sc., Ph.D.
NIP.196309261989032001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP.197509082000031003



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Hanesty Astinov Cimi
NIM : 145090400111011
Jurusan : Matematika
Penulis Skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model *SEIRS*
Penyebaran Virus *Worm* pada Komputer

dengan ini menyatakan bahwa:

1. Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.
2. Apabila di kemudian hari skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 12 Juli 2018
yang menyatakan,

Hanesty Astinov Cimi
NIM. 145090400111011





ANALISIS DINAMIK MODEL *SEIRS* PENYEBARAN VIRUS *WORM* PADA KOMPUTER

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas konstruksi dan analisis model *SEIRS* penyebaran virus *worm* pada komputer. Pada model diasumsikan terdapat sistem keamanan komputer yang hanya memberikan kekebalan sementara sehingga komputer dapat kembali menjadi rentan terkena virus *worm*. Analisis dinamik yang dilakukan pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar R_0 , analisis kestabilan lokal dan global titik kesetimbangan bebas virus *worm*, analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik, dan analisis sensitivitas. Berdasarkan hasil analisis diperoleh dua titik kesetimbangan model, yaitu titik kesetimbangan bebas virus *worm* dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas virus *worm* selalu eksis, sedangkan eksistensi titik kesetimbangan endemik bergantung pada angka reproduksi dasar (R_0). Kestabilan titik kesetimbangan bebas virus *worm* bergantung pada angka reproduksi dasar (R_0) dan kestabilan titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal tanpa syarat. Hasil analisis sensitivitas menunjukkan bahwa laju kontak antara populasi komputer rentan dengan komputer terinfeksi merupakan parameter yang paling sensitif. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis.

Kata kunci: *worm* komputer, angka reproduksi dasar, analisis kestabilan, analisis sensitivitas.





DYNAMICAL ANALYSIS OF SEIRS MODEL WORM PROPAGATION IN COMPUTER

ABSTRACT

In this final project, the construction and dynamical analysis of SEIRS model worm virus propagation in computer are discussed. In the model, it is assumed there is a computer security system which gives temporary immunity so the computer can back into a vulnerable. Dynamical analysis is performed by finding the equilibrium points, the basic reproduction number R_0 , local and global stability analysis of the worm virus-free equilibrium point, local stability analysis of the endemic equilibrium point, and sensitivity analysis. Based on the analysis results, two equilibrium points are obtained, namely worm virus-free equilibrium point and the endemic equilibrium point. Worm virus-free equilibrium point always exists, but the endemic equilibrium point depends on the basic reproduction number (R_0). The stability of worm virus-free equilibrium point depends on the basic reproduction number (R_0) and stability of the endemic equilibrium point is unconditional locally asymptotically stable. The result of sensitivity analysis shows that the contact rate between susceptible population and infected population is the most sensitive parameter. The numerical simulations show that the results are in accordance with analysis results.

Keywords: computer worm, basic reproduction number, stability analysis, sensitivity analysis.





KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Analisis Dinamik Model SEIRS Penyebaran Virus Worm pada Komputer* dengan lancar. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Rasulullah SAW sebagai suri teladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Dra. Trisilowati, M.Sc., Ph.D. selaku dosen pembimbing skripsi atas segala bimbingan, motivasi, dan saran yang diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan benar.
2. Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. dan Drs. Marsudi, MS selaku dosen penguji atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Dr. Sobri Abusini, MT selaku dosen penasihat akademik atas segala bimbingan selama proses perkuliahan.
4. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika, Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika, Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu kepada penulis, serta seluruh staf dan karyawan Tata Usaha Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan.
5. Ayah (Yosia Cimi), Ibu (Susilo Astuti), kakak (Maryo Yoastu), dan seluruh keluarga tercinta yang selalu mendoakan dan memberi dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Miftahul Firdaus, Rizqiyatul Ula, Purwaningtias Aprianti, Nungky Hendarti, dan Eka Yuliansyah atas ilmu, kritik, dan saran dalam penulisan skripsi ini.



7. Atikah Nindya Putri, Miftahul Firdaus, Yuzrina Dewi, Agus Dwi Aryati, dan Meza Hanafan atas waktu, dukungan, kesabaran dan doa yang diberikan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
8. Keluarga Besar Matematika 2014, Keluarga SOSMA BEM FMIPA 2015 dan 2016, serta teman-teman CCLUB atas kebersamaan selama menikmati proses perkuliahan.
9. Annisa Dini, Erike Oktaviyanti, Diyan Eka, Umi Habibah, Firdausi Nuzula, Hikmatul Balighah atas dukungan, doa, dan kebersamaan selama penulis tinggal di Malang.
10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan rasa syukur, anugerah, dan barakah kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan. Kritik dan saran dapat dikirim melalui email hanestyastinov@gmail.com untuk perbaikan pada penulisan selanjutnya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan.

Malang, Juli 2018

Penulis

DAFTAR ISI

| | Halaman |
|---|---------|
| JUDUL | i |
| LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI | iii |
| LEMBAR PERNYATAAN | v |
| ABSTRAK | vii |
| ABSTRACT | ix |
| KATA PENGANTAR | xi |
| DAFTAR ISI | xiii |
| DAFTAR GAMBAR | xv |
| DAFTAR TABEL | xvii |
| DAFTAR LAMPIRAN | xix |
| BAB I PENDAHULUAN | 1 |
| 1.1 Latar Belakang | 1 |
| 1.2 Rumusan Masalah | 2 |
| 1.3 Tujuan | 3 |
| BAB II DASAR TEORI | 5 |
| 2.1 Sistem Dinamik | 5 |
| 2.1.1 Sistem otonomus | 5 |
| 2.1.2 Sistem otonomus linear | 7 |
| 2.1.3 Kriteria Routh-Hurwitz | 8 |
| 2.1.4 Sistem otonomus nonlinear | 9 |
| 2.1.5 Kestabilan global | 11 |
| 2.2 Angka Reproduksi Dasar | 12 |
| 2.3 Analisis Sensitivitas | 12 |
| BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN | 15 |
| 3.1 Konstruksi Model | 15 |
| 3.1.1 Laju perubahan populasi komputer rentan (S) | 16 |
| 3.1.2 Laju perubahan populasi komputer laten (E) | 17 |
| 3.1.3 Laju perubahan populasi komputer terinfeksi (I) | 17 |
| 3.1.4 Laju perubahan populasi komputer yang bebas dari virus (R) | 18 |
| 3.2 Titik Keseimbangan | 20 |
| 3.3 Analisis Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan | 23 |

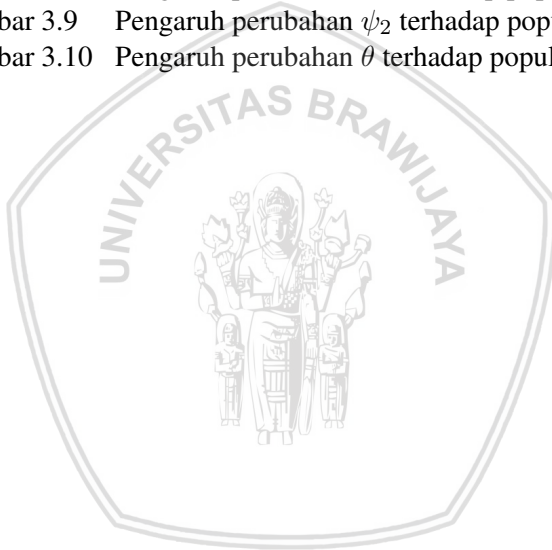


| | | |
|------------------------------------|--|----|
| 3.3.1 | Kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas virus <i>worm</i> | 23 |
| 3.3.2 | Kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik | 25 |
| 3.4 | Analisis Kestabilan Global Titik Kesetimbangan Bebas Virus <i>Worm</i> | 26 |
| 3.5 | Analisis Sensitivitas | 28 |
| 3.6 | Simulasi Numerik | 31 |
| 3.6.1 | Simulasi numerik untuk $R_0 < 1$ | 31 |
| 3.6.2 | Simulasi numerik untuk $R_0 > 1$ | 32 |
| 3.6.3 | Simulasi numerik perubahan nilai parameter | 33 |
| BAB IV KESIMPULAN | | 39 |
| DAFTAR PUSTAKA | | 41 |



DAFTAR GAMBAR

| | | |
|-------------|---|----|
| Gambar 3.1 | Diagram kompartemen model <i>SEIRS</i> penyebaran virus <i>worm</i> pada komputer | 15 |
| Gambar 3.2 | Potret fase solusi pada ruang <i>SEI</i> untuk $R_0 < 1$ | 32 |
| Gambar 3.3 | Potret fase solusi pada ruang <i>SEI</i> untuk $R_0 > 1$ | 33 |
| Gambar 3.4 | Pengaruh perubahan β terhadap populasi I . . | 34 |
| Gambar 3.5 | Pengaruh perubahan ϕ terhadap populasi I . . | 34 |
| Gambar 3.6 | Pengaruh perubahan α terhadap populasi I . . | 35 |
| Gambar 3.7 | Pengaruh perubahan γ terhadap populasi I . . | 35 |
| Gambar 3.8 | Pengaruh perubahan ψ_1 terhadap populasi I . | 36 |
| Gambar 3.9 | Pengaruh perubahan ψ_2 terhadap populasi I . | 36 |
| Gambar 3.10 | Pengaruh perubahan θ terhadap populasi I . . | 37 |





DAFTAR TABEL

| | | |
|-----------|--|----|
| Tabel 3.1 | Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan | 27 |
| Tabel 3.2 | Nilai parameter model | 29 |
| Tabel 3.3 | Nilai indeks sensitivitas angka reproduksi dasar | 30 |
| Tabel 3.4 | Pengaruh perubahan nilai parameter β, ϕ, α yang dinaikkan dan diturunkan sebesar 10% terhadap R_0 | 30 |
| Tabel 3.5 | Pengaruh perubahan nilai parameter $\gamma, \psi_1, \psi_2, \theta$ yang dinaikkan dan diturunkan sebesar 10% terhadap R_0 | 31 |





DAFTAR LAMPIRAN

| | | |
|------------|--|----|
| Lampiran 1 | Perhitungan Koefisien Persamaan Karakteristik Matriks $J(Q^*)$ | 43 |
| Lampiran 2 | Perhitungan $p_1p_2 - p_3$ | 46 |





BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Komputer adalah salah satu teknologi informasi yang digunakan untuk mempermudah semua aktivitas yang berkaitan dengan kehidupan manusia. Namun, disisi lain komputer dapat terpapar oleh program berbahaya. Menurut *Security Intelligence Report (SIR)* Microsoft Asia Pasifik, pada kuartal kedua tahun 2016, 45.2% komputer di Indonesia terserang malware, jumlah tersebut lebih tinggi dibandingkan angka rata-rata global yaitu 20.8%. Kemudian pada kuartal pertama tahun 2017, 25.6% komputer di Indonesia terserang malware. Angka ini lebih tinggi dibandingkan rata-rata global sebesar 7.8% (Pinandita, 2017).

Malware adalah perangkat lunak yang diciptakan untuk melakukan serangkaian aktivitas dalam sebuah perangkat (komputer, laptop, ponsel pintar, tablet, dan sebagainya) tanpa persetujuan dari pemiliknya. Konsekuensi dari adanya malware berpengaruh kepada perangkat tersebut baik secara fisik maupun struktur logikanya. Pada kenyataannya, malware adalah satu dari sekian ancaman terpenting dalam keamanan informasi. Perkiraan kerugian material yang timbul akibat dampak berbahaya keberadaan malware tersebut dapat melampaui jutaan dolar, sehingga hal tersebut dapat berpengaruh besar terhadap aspek sosial dan ekonomi (Anderson, dkk., 2013). Pada saat ini, terdapat berbagai macam malware, salah satunya adalah *worm*.

Worm adalah program komputer yang berdiri sendiri. Berbeda dengan virus komputer lainnya, *worm* tidak harus menyisipkan dirinya pada suatu program untuk menggandakan diri. *Worm* dapat menghapus *file*, mengubah *file*, mengirimkan *e-mail*, dan menimbulkan masalah melalui berbagai macam cara (McLeod dan Schell, 2008).

Beberapa penelitian yang terkait dengan model *SEIRS* (*Susceptible, Exposed, Infectious, Recovered, Susceptible*) untuk

penyebaran virus komputer telah dikembangkan oleh beberapa peneliti. Mishra dan Pandey (2011) melakukan penelitian model *SEIRS* untuk penyebaran virus *worm* dalam jaringan komputer dengan transmisi vertikal. Toutonji, dkk. (2012) memperkenalkan model *SEIRS* untuk menyimulasikan penyebaran *worm* pada komputer. Selain itu, Mishra dan Keshri (2013) memperkenalkan model *SEIRS* pada perangkat yang diberi kekebalan untuk menyimulasikan penyebaran *malware* dalam jaringan sensor nirkabel. Hosseini, dkk. (2016) melakukan penelitian model *SEIRS* menggunakan pendekatan waktu diskrit untuk mempelajari dinamika perilaku penyebaran *malware* dalam jaringan *scale-free*, dengan mempertimbangkan perbedaan kode biner yang digunakan dalam *software*. Kemudian Koonprasert dan Channgam (2017) melakukan pengembangan model penyebaran *worm* yang dapat menyerang *mobile* melalui internet dengan adanya karantina perangkat *mobile* yang terinfeksi, artikel ini telah dikaji kembali oleh Aprianti (2017). Guillen, dkk. (2017) mengembangkan model *SEIRS* berdasarkan artikel Toutonji, dkk. (2012) dengan mempertimbangkan peran perangkat yang terinfeksi (*Infectious*) sebagai bagian proses penyebaran *worm*.

Pada skripsi ini dibahas analisis dinamik model *SEIRS* yang mengkaji ulang artikel Guillen, dkk. (2017). Model ini dapat dikatakan analog dengan model penyebaran penyakit pada manusia, karena *worm* memiliki kemampuan menyebar dan menginfeksi komputer lain. Analisis dinamik model tersebut meliputi penentuan titik kesetimbangan dan angka reproduksi dasar, analisis kestabilan lokal dan global titik kesetimbangan, dan analisis sensitivitas model. Kemudian untuk mendukung hasil analisis, akan dilakukan simulasi numerik dengan metode Runge-Kutta.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, rumusan masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana konstruksi model *SEIRS* untuk penyebaran virus *worm* pada komputer?
2. Bagaimana titik kesetimbangan dan kestabilan titik

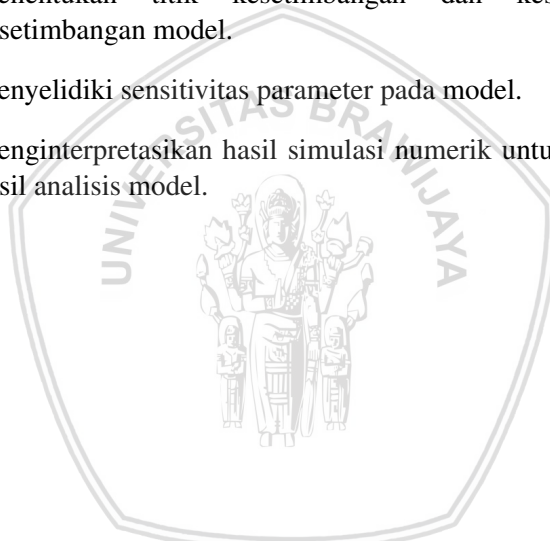
kesetimbangan model?

3. Bagaimana analisis sensitivitas model?
4. Bagaimana hasil simulasi numerik model?

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Mengonstruksi model *SEIRS* untuk penyebaran virus *worm* pada komputer.
2. Menentukan titik kesetimbangan dan kestabilan titik kesetimbangan model.
3. Menyelidiki sensitivitas parameter pada model.
4. Menginterpretasikan hasil simulasi numerik untuk mendukung hasil analisis model.





BAB II DASAR TEORI

Teori yang digunakan dalam skripsi ini antara lain sistem dinamik linear dan nonlinear, titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, kriteria Routh-Hurwitz, kestabilan lokal, kestabilan global, dan analisis sensitivitas.

2.1 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah sistem yang selalu berubah dan situasi di masa yang akan datang dapat diketahui apabila situasi saat ini atau di masa lalu diketahui. Sistem dinamik dibagi menjadi dua, yaitu sistem dinamik kontinu dengan bentuk umum

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t), t \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

dan sistem dinamik diskret dengan bentuk umum

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

(Alligood, dkk., 2000).

2.1.1 Sistem otonomus

Sistem otonomus adalah persamaan diferensial berdimensi n yang berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{2.1}$$

dengan fungsi F_1, F_2, \dots, F_n tidak bergantung secara eksplisit pada variabel bebas t , melainkan hanya bergantung pada variabel bebas \vec{x} dengan $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Sistem otonomus dibedakan menjadi sistem otonomus linear dan sistem otonomus nonlinear (Boyce dan DiPrima, 2012).



Definisi 2.1.1 (Titik kesetimbangan)

Titik $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ yang memenuhi kondisi

$$\begin{aligned} F_1(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) &= 0, \\ F_2(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) &= 0, \\ &\vdots \\ F_n(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) &= 0, \end{aligned}$$

disebut titik kritis sistem (2.1). Titik kritis \vec{x}^* merupakan solusi sistem (2.1). Titik kritis \vec{x}^* bernilai konstan karena $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$. Keadaan yang menyebabkan $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$ disebut keadaan setimbang dan titik yang memenuhi disebut titik kesetimbangan, sehingga titik kritis disebut juga titik kesetimbangan (Boyce dan DiPrima, 2012).

Definisi 2.1.2 (Kestabilan titik kesetimbangan)

Kestabilan titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ dikatakan:

1. stabil, jika $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\vec{x}(t)$ sistem (2.1) pada saat $t = 0$ memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$

untuk setiap $t > 0$ memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \epsilon,$$

2. stabil asimtotik, jika \vec{x}^* stabil dan $\exists \delta_0 > 0$ sedemikian sehingga jika terdapat suatu solusi $\vec{x}(t)$ sistem (2.1) yang memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta_0,$$

akan berlaku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*,$$

3. tidak stabil, apabila tidak memenuhi kriteria stabil (Boyce dan DiPrima, 2012).



2.1.2 Sistem otonomus linear

Diberikan sistem otonomus linear berdimensi n sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n,\end{aligned}\tag{2.2}$$

dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2, \dots, n$. Sistem persamaan (2.2) dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},\tag{2.3}$$

dengan $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ matriks konstan. Untuk

menentukan kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.2) dapat digunakan Teorema 2.1.1.

Teorema 2.1.1 (Kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus linear)

Misalkan $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, adalah nilai eigen matriks koefisien A sistem otonomus linear (2.2) dengan $|A| \neq 0$. Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = \vec{0}$ sistem (2.2) bersifat:

1. stabil, jika semua nilai eigen memiliki bagian real tak positif,
2. stabil asimtotik, jika semua nilai eigen memiliki bagian real negatif,
3. tidak stabil, jika terdapat nilai eigen yang memiliki bagian real positif (Finizio dan Ladas, 1982).

2.1.3 Kriteria Routh-Hurwitz

Akar-akar persamaan karakteristik matriks A pada sistem (2.2) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan karakteristik yang diperoleh dari $|A - \lambda I| = 0$. Sistem linear berdimensi n (2.2) memiliki persamaan karakteristik yang secara umum berbentuk

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0, \quad (2.4)$$

dengan koefisien $a_i, i = 1, \dots, n$ adalah bilangan real dan $a_n \neq 0$. Titik kesetimbangan sistem otonomus linear bersifat stabil asimtotik jika akar-akar persamaan karakteristiknya memiliki bagian real negatif. Dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz pada Teorema (2.1.2), dapat diperiksa apakah akar-akar persamaan karakteristik memiliki bagian real negatif, tanpa menentukan nilai eigennya.

Teorema 2.1.2 (Kriteria Routh-Hurwitz)

Akar persamaan karakteristik (2.4) memiliki bagian real negatif jika $a_n > 0$ dan matriks Hurwitz didefinisikan sebagai

$$H_1 = |a_1| > 0, H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$H_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & a_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Sebagai contoh, jika persamaan karakteristik berderajat tiga

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad (2.5)$$

maka akar persamaan (2.5) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika,

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1a_2 - a_3 > 0$$

(Murray, 2002).



2.1.4 Sistem otonomus nonlinear

Misalkan sistem otonomus (2.1) adalah sistem nonlinear dan fungsi F_i dengan $i = 1, 2, \dots, n$ mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik \vec{x}^* . Sistem (2.1) dapat didekati dengan sistem otonomus linear di setiap titik kesetimbangan \vec{x}^* dengan melakukan ekspansi Taylor terhadap F_i di sekitar titik kesetimbangan \vec{x}^* , yaitu

$$F_i(\vec{x}) = F_i(\vec{x}^*) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i(\vec{x}^*)}{\partial x_j} (x_j - x_j^*) + \eta_i(\vec{x}), \quad (2.6)$$

dengan $\eta_i(\vec{x})$ adalah suku sisa, $i = 1, 2, \dots, n$. Hampiran orde satu terhadap F_i menghasilkan suku sisa yang memenuhi sifat

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\eta_i(\vec{x})}{\|\vec{u}\|} = 0,$$

dengan $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ dan $u_i = x_i - x_i^*, i = 1, 2, \dots, n$.

Dengan menggunakan persamaan (2.6) dan mengingat

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt},$$

maka persamaan (2.1) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_1(\vec{x}^*) \\ F_2(\vec{x}^*) \\ \vdots \\ F_n(\vec{x}^*) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \eta_2(\vec{x}) \\ \dots \\ \eta_n(\vec{x}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Karena $F_i(\vec{x}^*) = 0$, maka persamaan (2.7) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \eta_2(\vec{x}) \\ \dots \\ \eta_n(\vec{x}) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Jika $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ maka persamaan (2.8) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = J\vec{u} + \vec{\eta},$$

dan J disebut matriks Jacobi sistem (2.1). Jika \vec{x} berada dekat dengan \vec{x}^* , maka $\vec{\eta}$ bernilai kecil, sehingga $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem nonlinear (2.1) dapat dihampiri oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = J\vec{u}. \quad (2.9)$$

Untuk $\vec{x} = \vec{x}^*$ diperoleh $\vec{u} = \vec{0}$ sehingga sistem linear (2.9) memiliki titik kesetimbangan $\vec{u} = \vec{0}$. Selanjutnya titik kesetimbangan sistem nonlinear (2.1) akan bergantung pada kestabilan titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi (2.9) yang diberikan pada Teorema 2.1.3 (Boyce dan DiPrima, 2012).

Teorema 2.1.3 (Kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear)

Titik kesetimbangan \vec{x}^* sistem otonomus nonlinear (2.1) bersifat:



1. stabil asimtotik, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi (2.9) stabil asimtotik,
2. tak stabil, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi (2.9) tak stabil (Finizio dan Ladas, 1982).

2.1.5 Kestabilan global

Kestabilan suatu titik kesetimbangan dibedakan menjadi kestabilan lokal dan global. Pada subab 2.1.4 dijelaskan bahwa kestabilan titik kesetimbangan sistem nonlinear (2.1) dapat didekati dengan sistem otonomus linear di sekitar titik kesetimbangan \vec{x}^* , sehingga kestabilan yang diperoleh hanya bersifat lokal. Pada subab ini, akan dijelaskan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menentukan kestabilan global titik kesetimbangan yaitu dengan menggunakan fungsi Lyapunov.

Definisi 2.1.3 (Fungsi Lyapunov lemah)

Misalkan \vec{x}^* adalah suatu titik kesetimbangan sistem persamaan (2.1). Suatu fungsi $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ disebut fungsi Lyapunov lemah untuk \vec{x}^* jika terdapat suatu persekitaran $W \subseteq \mathbb{R}^n$ dari \vec{x}^* sehingga kondisi berikut terpenuhi.

1. $L(\vec{x}^*) = 0$ dan $L(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$,
2. $L'(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \in W$

(Alligood, dkk., 2000).

Definisi 2.1.4 (Fungsi Lyapunov kuat)

Fungsi L disebut fungsi Lyapunov kuat untuk \vec{x}^* jika terdapat suatu persekitaran W pada \vec{x}^* yang memenuhi kondisi berikut.

1. $L(\vec{x}^*) = 0$ dan $L(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$,
2. $L'(\vec{x}) < 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^*, \vec{x} \in W$

(Alligood, dkk., 2000).



Teorema 2.1.4 (Kestabilan global dengan fungsi Lyapunov)

Misalkan \bar{x}^* adalah suatu titik kesetimbangan sistem persamaan (2.1). Titik kesetimbangan \bar{x}^* bersifat:

1. stabil global, jika terdapat suatu fungsi Lyapunov lemah untuk \bar{x}^* ,
2. stabil asimtotik global, jika terdapat suatu fungsi Lyapunov kuat untuk \bar{x}^*

(Alligood, dkk., 2000).

2.2 Angka Reproduksi Dasar

Angka reproduksi dasar R_0 merupakan angka yang menyatakan rata-rata banyaknya komputer baru yang terinfeksi karena tertular oleh satu komputer yang telah terinfeksi sebelumnya dalam populasi komputer rentan. Angka tersebut merupakan parameter yang digunakan untuk mengetahui terjadinya penyebaran suatu virus di suatu populasi komputer. Jika $R_0 < 1$ maka banyaknya komputer yang tertular oleh satu komputer yang terinfeksi virus berjumlah kurang dari satu komputer, sehingga virus secara perlahan akan menghilang dan tidak akan terjadi endemi. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$ maka banyaknya komputer yang tertular oleh satu komputer yang terinfeksi virus berjumlah lebih dari satu komputer, sehingga akan terjadi endemi

(Heffernan, dkk., 2005).

2.3 Analisis Sensitivitas

Analisis sensitivitas dilakukan untuk mengetahui pengaruh setiap parameter dalam penyebaran penyakit. Indeks sensitivitas dapat digunakan untuk membantu mengukur perubahan R_0 ketika suatu nilai parameter berubah.

Definisi 2.3.1 (Indeks Sensitivitas Ternormalisasi)

Indeks sensitivitas ternormalisasi maju (\mathcal{I}) dalam R_0 yang bergantung pada diferensial parameter p , didefinisikan sebagai

$$\mathcal{I}_p^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial p} \frac{p}{R_0}. \quad (2.10)$$

Indeks sensitivitas pada setiap parameter yang berdampak tinggi pada R_0 dijadikan sasaran untuk dilakukan strategi intervensi dalam mengendalikan penyebaran penyakit.

(Chitnis, dkk., 2008).

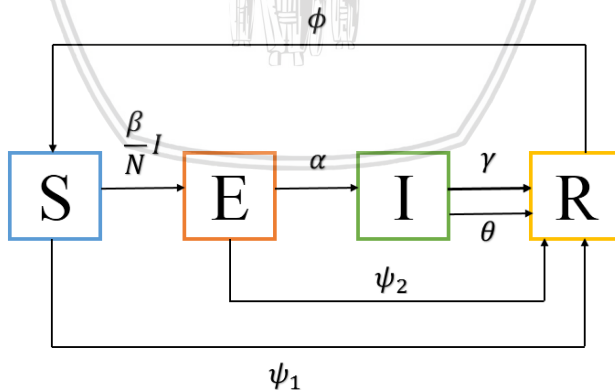




BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Konstruksi Model

Pada skripsi ini, model yang dibahas adalah model *SEIRS* penyebaran virus *worm* pada komputer yang mengkaji ulang artikel Guillen, dkk. (2017). Model *SEIRS* terdiri dari empat populasi, yaitu populasi komputer rentan (*S*), populasi komputer laten (*E*), populasi komputer terinfeksi (*I*), dan populasi komputer yang bebas dari virus (*R*). Model ini menggunakan tingkat kejadian standar dengan laju infeksi bergantung pada interaksi antara komputer rentan dengan komputer terinfeksi terhadap jumlah total komputer. Pada model ini terdapat sistem keamanan untuk mencegah dan melindungi komputer terhadap virus *worm*. Namun, sistem keamanan ini hanya memberikan kekebalan sementara pada komputer sehingga komputer kembali menjadi rentan terkena virus *worm*. Model *SEIRS* penyebaran virus *worm* digambarkan dalam diagram kompartemen pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1: Diagram kompartemen model *SEIRS* penyebaran virus *worm* pada komputer

Nilai parameter yang digunakan yaitu

β : Laju kontak antara komputer rentan (S) dengan komputer terinfeksi (I)

α : Laju perpindahan dari E ke I

γ : Laju perpindahan dari I ke R dengan adanya sistem keamanan komputer

θ : Laju perpindahan dari I ke R dengan penggantian perangkat

ψ_1 : Laju perpindahan dari S ke R dengan adanya sistem keamanan komputer

ψ_2 : Laju perpindahan dari E ke R dengan adanya sistem keamanan komputer

ϕ : Laju perpindahan dari R ke S

3.1.1 Laju perubahan populasi komputer rentan (S)

Komputer rentan akan terinfeksi virus *worm* jika terdapat interaksi antara komputer rentan dengan komputer yang telah terinfeksi virus *worm* sehingga menyebabkan populasi komputer rentan berkurang dengan laju kontak β atau dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N}$$

dengan N adalah jumlah total komputer.

Sistem keamanan komputer dilakukan pada komputer rentan agar menjadi komputer yang bebas dari virus dengan laju ψ_1 sehingga menyebabkan populasi komputer rentan berkurang atau dapat ditulis sebagai

$$\frac{dS}{dt} = -\psi_1 S.$$

Sistem keamanan ini hanya memberikan kekebalan sementara pada komputer terhadap virus *worm* sehingga komputer yang bebas dari virus dapat kembali menjadi komputer rentan dengan laju ϕ . Hal ini menyebabkan populasi komputer rentan bertambah atau dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dS}{dt} = \phi R.$$

Dengan demikian, laju perubahan populasi komputer rentan per satuan waktu t adalah

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N} - \psi_1 S + \phi R. \quad (3.1)$$

3.1.2 Laju perubahan populasi komputer laten (E)

Interaksi antara komputer rentan dengan komputer yang telah terinfeksi virus *worm* menyebabkan populasi komputer laten bertambah atau dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N}.$$

Sistem keamanan komputer dilakukan pada komputer laten menjadi komputer yang bebas dari virus dengan laju ψ_2 sehingga menyebabkan populasi komputer laten berkurang atau dapat ditulis sebagai

$$\frac{dE}{dt} = -\psi_2 E.$$

Perubahan komputer laten menjadi komputer terinfeksi dengan laju α menyebabkan populasi komputer laten berkurang atau dapat ditulis sebagai

$$\frac{dE}{dt} = -\alpha E.$$

Dengan demikian, laju perubahan populasi komputer laten per satuan waktu t adalah

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - (\alpha + \psi_2) E. \quad (3.2)$$

3.1.3 Laju perubahan populasi komputer terinfeksi (I)

Perubahan komputer laten menjadi komputer terinfeksi menyebabkan populasi komputer terinfeksi bertambah atau dapat ditulis sebagai

$$\frac{dI}{dt} = \alpha E.$$

Komputer terinfeksi akan menjadi komputer yang bebas dari virus dengan dilakukan sistem keamanan pada komputer terinfeksi. Hal ini

menyebabkan populasi komputer terinfeksi berkurang dengan laju γ atau dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dI}{dt} = -\gamma I.$$

Selain itu, komputer terinfeksi yang mengalami kerusakan perangkat akibat virus *worm* akan menjadi komputer yang bebas dari virus dengan dilakukan penggantian perangkat. Hal ini menyebabkan populasi komputer terinfeksi berkurang dengan laju θ atau dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dI}{dt} = -\theta I.$$

Dengan demikian, laju perubahan populasi komputer terinfeksi per satuan waktu t adalah

$$\frac{dI}{dt} = \alpha E - (\gamma + \theta)I. \quad (3.3)$$

3.1.4 Laju perubahan populasi komputer yang bebas dari virus (R)

Perubahan komputer terinfeksi menjadi komputer yang bebas dari virus dengan dilakukan sistem keamanan pada komputer terinfeksi menyebabkan populasi komputer yang bebas dari virus bertambah atau dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I.$$

Perubahan komputer terinfeksi yang mengalami kerusakan perangkat akibat virus *worm* menjadi komputer yang bebas dari virus dilakukan dengan penggantian perangkat. Hal ini menyebabkan populasi komputer yang bebas dari virus bertambah atau dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dR}{dt} = \theta I.$$

Sistem keamanan komputer yang dilakukan pada komputer rentan agar menjadi komputer yang bebas dari virus menyebabkan populasi

komputer yang bebas dari virus bertambah atau dapat ditulis sebagai

$$\frac{dR}{dt} = \psi_1 S.$$

Sistem keamanan komputer yang dilakukan pada komputer laten menjadi komputer yang bebas dari virus menyebabkan populasi komputer yang bebas dari virus bertambah atau dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dR}{dt} = \psi_2 E.$$

Sistem keamanan ini hanya memberikan kekebalan sementara pada komputer yang bebas dari virus sehingga komputer dapat kembali menjadi komputer rentan. Hal ini menyebabkan populasi komputer yang bebas dari virus berkurang atau dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dR}{dt} = -\phi R.$$

Dengan demikian, laju perubahan populasi komputer yang bebas dari virus per satuan waktu t adalah

$$\frac{dR}{dt} = (\gamma + \theta)I + \psi_1 S + \psi_2 E - \phi R. \quad (3.4)$$

Berdasarkan uraian (3.1)-(3.4), model *SEIRS* penyebaran virus *worm* pada komputer adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta SI}{N} - \psi_1 S + \phi R, \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - (\alpha + \psi_2)E, \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha E - (\gamma + \theta)I, \\ \frac{dR}{dt} &= (\gamma + \theta)I + \psi_1 S + \psi_2 E - \phi R, \end{aligned} \quad (3.5)$$

dengan $N = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$, yang terdefinisi pada

$$\Omega = \{(S, E, I, R) \in \mathbb{R}^4 \mid 0 \leq S, E, I, R \leq N, S + E + I + R = N\}.$$

Oleh karena $S + E + I + R = N$, maka pada laju perubahan populasi komputer rentan, populasi komputer yang bebas dari virus dapat disubstitusikan dengan $R = N - S - E - I$ sehingga sistem (3.5) dapat diubah menjadi sistem persamaan diferensial tiga dimensi dengan mereduksi laju perubahan populasi komputer yang bebas dari virus (R). Dengan demikian, sistem persamaan menjadi sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \phi N - \frac{\beta SI}{N} - (\psi_1 + \phi)S - \phi E - \phi I, \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - (\alpha + \psi_2)E, \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha E - (\gamma + \theta)I. \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.2 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan sistem (3.6) diperoleh ketika $\frac{dS}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dI}{dt} = 0$, sehingga diperoleh

$$\phi N - \frac{\beta SI}{N} - (\psi_1 + \phi)S - \phi E - \phi I = 0, \tag{3.7a}$$

$$\frac{\beta SI}{N} - (\alpha + \psi_2)E = 0, \tag{3.7b}$$

$$\alpha E - (\gamma + \theta)I = 0. \tag{3.7c}$$

Dari persamaan (3.7c) diperoleh

$$\begin{aligned} \alpha E - (\gamma + \theta)I &= 0, \\ \alpha E &= (\gamma + \theta)I, \\ E &= \frac{\gamma + \theta}{\alpha} I. \end{aligned} \tag{3.8}$$



Selanjutnya, persamaan (3.8) disubstitusikan pada persamaan (3.7b), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\beta SI}{N} - (\alpha + \psi_2)E &= 0, \\ \frac{\beta SI}{N} - (\alpha + \psi_2) \left(\frac{\gamma + \theta}{\alpha} \right) I &= 0, \\ \left(\frac{\beta S}{N} - \left(\frac{(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)}{\alpha} \right) \right) I &= 0.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Terdapat dua kemungkinan solusi untuk persamaan (3.9), yaitu $I = 0$ atau $I \neq 0$. Jika $I = 0$ maka dari persamaan (3.8) diperoleh $E = 0$. Dengan demikian, dari persamaan (3.7a) diperoleh

$$\begin{aligned}\phi N - \frac{\beta SI}{N} - (\psi_1 + \phi)S - \phi E - \phi I &= 0, \\ \phi N - (\psi_1 + \phi)S &= 0, \\ \phi N &= (\psi_1 + \phi)S, \\ S &= \frac{\phi N}{(\psi_1 + \phi)}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh titik kesetimbangan bebas virus *worm* $Q_f = (S_f, E_f, I_f) = \left(\frac{\phi N}{(\psi_1 + \phi)}, 0, 0 \right)$, yaitu tidak terdapat populasi komputer yang terinfeksi virus *worm*.

Jika $I \neq 0$ maka dari persamaan (3.9) diperoleh

$$\begin{aligned}\left(\frac{\beta S^*}{N} - \left(\frac{(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)}{\alpha} \right) \right) I^* &= 0, \\ \frac{\beta S^*}{N} - \left(\frac{(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)}{\alpha} \right) &= 0, \\ \frac{\beta S^*}{N} &= \left(\frac{(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)}{\alpha} \right), \\ S^* &= \frac{(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)N}{\alpha\beta}.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Selanjutnya E^* diperoleh dari persamaan (3.8) sebagai berikut

$$E^* = \frac{(\gamma + \theta)I^*}{\alpha}.\tag{3.12}$$

Substitusikan persamaan (3.11) dan (3.12) pada persamaan (3.7a), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \phi N - \frac{\beta S^* I^*}{N} - (\psi_1 + \phi) S^* - \phi E^* - \phi I^* &= 0, \\
 \phi N - \frac{\beta(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta) N}{N\alpha\beta} I^* - \frac{(\psi_1 + \phi)(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta) N}{\alpha\beta} - \frac{\phi(\gamma + \theta) I^*}{\alpha} - \phi I^* &= 0, \\
 \phi N - \left(\frac{(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)}{\alpha} + \frac{\phi(\gamma + \theta)}{\alpha} + \phi \right) I^* - \frac{(\psi_1 + \phi)(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta) N}{\alpha\beta} &= 0, \\
 \phi N - \frac{(\psi_1 + \phi)(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta) N}{\alpha\beta} = \left(\frac{(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)}{\alpha} + \frac{\phi(\gamma + \theta)}{\alpha} + \phi \right) I^*, \\
 \frac{\phi\alpha\beta N - (\psi_1 + \phi)(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta) N}{\alpha\beta} = \left(\frac{(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta) + \phi(\gamma + \theta) + \phi\alpha}{\alpha} \right) I^*, \\
 \frac{(\phi\alpha\beta - (\psi_1 + \phi)(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)) N}{\beta} = ((\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta) + \phi(\gamma + \theta) + \phi\alpha) I^*, \\
 I^* = \frac{N(\phi\alpha\beta - (\psi_1 + \phi)(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta))}{\beta(\alpha(\gamma + \theta + \phi) + (\psi_2 + \phi)(\gamma + \theta))}. \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

Titik kesetimbangan endemik menunjukkan bahwa terdapat komputer terinfeksi dalam populasi komputer, atau dengan kata lain $I^* > 0$. Dengan demikian

$$\begin{aligned}
 \frac{N(\phi\alpha\beta - (\psi_1 + \phi)(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta))}{\beta(\alpha(\gamma + \theta + \phi) + (\psi_2 + \phi)(\gamma + \theta))} &> 0, \\
 \phi\alpha\beta - (\psi_1 + \phi)(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta) &> 0, \\
 \phi\alpha\beta &> (\psi_1 + \phi)(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta), \\
 \frac{\phi\alpha\beta}{(\psi_1 + \phi)(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)} &> 1, \\
 R_0 &> 1.
 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa eksistensi I^* ditentukan oleh

$$R_0 = \frac{\phi\alpha\beta}{(\psi_1 + \phi)(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)}, \tag{3.14}$$

yang disebut sebagai angka reproduksi dasar. Persamaan (3.13) dapat ditulis sebagai berikut

$$I^* = \frac{N(R_0 - 1)(\psi_1 + \phi)(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)}{\beta(\alpha(\gamma + \theta + \phi) + (\psi_2 + \phi)(\gamma + \theta))}. \tag{3.15}$$



Berdasarkan hasil perhitungan tersebut, diperoleh titik kesetimbangan endemik $Q^* = (S^*, E^*, I^*)$ dengan

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)N}{\alpha\beta}, \\ E^* &= \frac{(\gamma + \theta)I^*}{\alpha}, \\ I^* &= \frac{N(R_0 - 1)(\psi_1 + \phi)(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)}{\beta(\alpha(\gamma + \theta + \phi) + (\psi_2 + \phi)(\gamma + \theta))}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.3 Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan

Kestabilan lokal titik kesetimbangan sistem (3.5) dapat ditentukan dengan melakukan linearisasi sistem (3.5) di sekitar titik kesetimbangan. Berdasarkan proses linearisasi sistem (3.5), diperoleh matriks Jacobi sebagai

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta I}{N} - \psi_1 - \phi & -\phi & -\frac{\beta S}{N} - \phi \\ \frac{\beta I}{N} & -\alpha - \psi_2 & \frac{\beta S}{N} \\ 0 & \alpha & -\gamma - \theta \end{pmatrix}.$$

3.3.1 Kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas virus *worm*

Matriks Jacobi pada titik kesetimbangan bebas virus *worm* $Q_f = (\frac{\phi N}{\psi_1 + \phi}, 0, 0)$ adalah

$$J(Q_f) = \begin{pmatrix} -\psi_1 - \phi & -\phi & -\frac{\beta\phi}{\psi_1 + \phi} - \phi \\ 0 & -\alpha - \psi_2 & \frac{\beta\phi}{\psi_1 + \phi} \\ 0 & \alpha & -\gamma - \theta \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya persamaan karakteristik matriks $J(Q_f)$ dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|\lambda I - J(Q_f)| = 0$, yaitu

$$\begin{vmatrix} \lambda + \psi_1 + \phi & \phi & \frac{\beta\phi}{\psi_1 + \phi} + \phi \\ 0 & \lambda + \alpha + \psi_2 & -\frac{\beta\phi}{\psi_1 + \phi} \\ 0 & -\alpha & \lambda + \gamma + \theta \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\lambda + \psi_1 + \phi) \left((\lambda + \alpha + \psi_2)(\lambda + \gamma + \theta) - \frac{\alpha\beta\phi}{\psi_1 + \phi} \right) = 0,$$

$$(\lambda + \psi_1 + \phi) \left(\lambda^2 + \lambda(\gamma + \theta + \alpha + \psi_2) + (\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta) - \frac{\alpha\beta\phi}{\psi_1 + \phi} \right) = 0.$$

Diperoleh nilai eigen persamaan karakteristik matriks $J(Q_f)$, yaitu $\lambda_1 = -\psi_1 - \phi = -(\psi_1 + \phi)$ dan λ_2, λ_3 yang memenuhi persamaan kuadrat

$$\lambda^2 + \lambda(\gamma + \theta + \alpha + \psi_2) + (\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta) - \frac{\alpha\beta\phi}{\psi_1 + \phi} = 0. \quad (3.17)$$

Dari persamaan (3.17), dapat diperoleh λ_2, λ_3 sebagai berikut

$$\begin{aligned} \lambda_{2,3} &= \frac{-\gamma + \theta + \alpha + \psi_2 \pm \sqrt{(\gamma + \theta + \alpha + \psi_2)^2 - 4(1)((\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta) - \frac{\alpha\beta\phi}{\psi_1 + \phi})}}{2}, \\ &= \frac{-\gamma + \theta + \alpha + \psi_2 \pm \sqrt{(\gamma + \theta)^2 - 2(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta) + (\alpha + \psi_2)^2 + \frac{4\alpha\beta\phi}{\psi_1 + \phi}}}{2}, \\ &= \frac{-\gamma + \theta + \alpha + \psi_2 \pm \sqrt{(\alpha + \psi_2 - \gamma - \theta)^2 + \frac{4\alpha\beta\phi}{\psi_1 + \phi}}}{2}, \end{aligned}$$

yaitu

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{-\gamma + \theta + \alpha + \psi_2 - \sqrt{(\alpha + \psi_2 - \gamma - \theta)^2 + \frac{4\alpha\beta\phi}{\psi_1 + \phi}}}{2}, \\ \lambda_3 &= \frac{-\gamma + \theta + \alpha + \psi_2 + \sqrt{(\alpha + \psi_2 - \gamma - \theta)^2 + \frac{4\alpha\beta\phi}{\psi_1 + \phi}}}{2}, \end{aligned}$$

Misal $A = \alpha + \psi_2, B = \gamma + \theta, \lambda_3$ dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \frac{-(A + B) + \sqrt{(A - B)^2 + \frac{4\alpha\beta\phi}{\psi_1 + \phi}}}{2}, \\ &= \frac{-(A + B) + \sqrt{(A - B)^2 + \frac{4\alpha\beta\phi AB}{(\psi_1 + \phi)(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)}}}{2}, \\ &= \frac{-(A + B) + \sqrt{(A - B)^2 + 4ABR_0}}{2}. \end{aligned}$$

Oleh karena nilai $A > 0, B > 0$ maka $\lambda_3 < 0$ jika dan hanya jika

$$\left(-(A + B) + \sqrt{(A - B)^2 + 4ABR_0} \right) < 0,$$

$$(A - B)^2 + 4ABR_0 < (A + B)^2,$$

$$4ABR_0 < (A + B)^2 - (A - B)^2,$$

$$4ABR_0 < 4AB,$$

$$R_0 < 1.$$



Dengan demikian, jelas bahwa λ_1 dan λ_2 bernilai negatif dan λ_3 bernilai negatif jika dan hanya jika $R_0 < 1$. Jadi, titik kesetimbangan bebas virus *worm* Q_f stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan bebas virus *worm* Q_f tidak stabil dan titik kesetimbangan endemik Q^* eksis.

3.3.2 Kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik

Matriks Jacobi pada titik kesetimbangan endemik $Q^* = (S^*, E^*, I^*)$ adalah

$$J(Q^*) = \begin{pmatrix} -\left(\frac{\beta I^*}{N} + \psi_1 + \phi\right) & -\phi & -\frac{\beta S^*}{N} - \phi \\ \frac{\beta I^*}{N} & -\alpha - \psi_2 & \frac{\beta S^*}{N} \\ 0 & \alpha & -\gamma - \theta \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan perhitungan pada Lampiran 1 diperoleh persamaan karakteristik yaitu

$$\lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3 = 0,$$

dengan

$$\begin{aligned} p_1 &= \gamma + \theta + \alpha + \psi_2 + \psi_1 + \phi \\ &+ \frac{\beta}{N} \left(\frac{N(R_0 - 1)(\psi_1 + \phi)(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)}{\beta(\alpha(\gamma + \theta + \phi) + (\psi_2 + \phi)(\gamma + \theta))} \right), \\ p_2 &= \frac{\beta}{N} \left(\frac{N(R_0 - 1)(\psi_1 + \phi)(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)}{\beta(\alpha(\gamma + \theta + \phi) + (\psi_2 + \phi)(\gamma + \theta))} \right) (\gamma + \theta + \alpha + \psi_2 + \phi) \\ &+ (\psi_1 + \phi)(\gamma + \theta + \alpha + \psi_2), \\ p_3 &= \frac{\beta}{N} \left(\frac{N(R_0 - 1)(\psi_1 + \phi)(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)}{\beta(\alpha(\gamma + \theta + \phi) + (\psi_2 + \phi)(\gamma + \theta))} \right) ((\gamma + \theta)(\alpha + \psi_2 + \phi) \\ &+ \phi\alpha). \end{aligned}$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, akar-akar persamaan karakteristik matriks $J(Q^*)$ mempunyai bagian real negatif jika $p_1 > 0$, $p_3 > 0$, dan $p_1p_2 - p_3 > 0$. Selanjutnya ditunjukkan akar-akar persamaan karakteristik matriks $J(Q^*)$ memenuhi kriteria Routh-Hurwitz sebagai berikut

1. $p_1 > 0$

$$p_1 = \gamma + \theta + \alpha + \psi_2 + \psi_1 + \phi + \frac{\beta}{N} \left(\frac{N(R_0 - 1)(\psi_1 + \phi)(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)}{\beta(\alpha(\gamma + \theta + \phi) + (\psi_2 + \phi)(\gamma + \theta))} \right),$$



oleh karena setiap parameter bernilai positif dan syarat eksistensi I^* yaitu $R_0 > 1$, maka $p_1 > 0$.

2. $p_3 > 0$

$$p_3 = \frac{\beta}{N} \left(\frac{N(R_0-1)(\psi_1+\phi)(\alpha+\psi_2)(\gamma+\theta)}{\beta(\alpha(\gamma+\theta+\phi)+(\psi_2+\phi)(\gamma+\theta))} \right) ((\gamma+\theta)(\alpha+\psi_2+\phi)+\phi\alpha),$$
 oleh karena setiap parameter bernilai positif dan syarat eksistensi I^* yaitu $R_0 > 1$, maka $p_3 > 0$.

3. $p_1 p_2 - p_3 > 0$

Berdasarkan perhitungan $p_1 p_2 - p_3$ pada Lampiran 2, oleh karena setiap parameter bernilai positif dan syarat eksistensi I^* yaitu $R_0 > 1$, maka $p_1 p_2 - p_3 > 0$.

Berdasarkan uraian tersebut maka titik kesetimbangan endemik Q^* bersifat stabil asimtotik lokal.

3.4 Analisis Kestabilan Global Titik Kesetimbangan Bebas Virus Worm

Sifat kestabilan lokal titik kesetimbangan Q_f dan Q^* diperoleh berdasarkan analisis pada subbab 3.3. Selanjutnya pada subbab ini dilakukan analisis kestabilan global titik kesetimbangan bebas virus worm Q_f .

Didefinisikan fungsi Lyapunov

$$L(S, E, I) = \alpha E + (\alpha + \psi_2)I,$$

pada Ω .

Selanjutnya untuk memeriksa apakah fungsi tersebut merupakan fungsi Lyapunov kuat untuk Q_f , ditunjukkan fungsi $L(S, E, I)$ memenuhi Definisi 2.1.4, yaitu

1. $L(\vec{x}^*) = 0$.

Jelas bahwa $L(Q_f) = L\left(\frac{N\phi}{\psi_1+\phi}, 0, 0\right) = 0$

2. $L(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in \Omega$.

Oleh karena S, E , dan I bernilai positif, maka diperoleh

$$L(S, E, I) = \alpha E + (\alpha + \psi_2)I > 0, \forall (S, E, I) \neq \left(\frac{N\phi}{\psi_1+\phi}, 0, 0\right).$$



Dengan demikian, $L(S, E, I)$ memenuhi kondisi 1 pada Definisi 2.1.4.

Selanjutnya, ditunjukkan $L(S, E, I)$ memenuhi kondisi 2 pada Definisi 2.1.4, yaitu $L'(\vec{x}) < 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^*$.

$$\begin{aligned} L'(S, E, I) &= \alpha \frac{dE}{dt} + (\alpha + \psi_2) \frac{dI}{dt}, \\ &= \alpha \left[\frac{\beta SI}{N} - (\alpha + \psi_2)E \right] + (\alpha + \psi_2) [\alpha E - (\gamma + \theta)I], \\ &= \frac{\alpha \beta SI}{N} - \alpha(\alpha + \psi_2)E + (\alpha + \psi_2)(\alpha E) - (\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)I, \\ &= \left[\frac{\alpha \beta S}{N} - (\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta) \right] I, \end{aligned}$$

karena $S < \frac{N\phi}{\psi_1 + \phi}$ pada daerah Ω maka

$$\begin{aligned} L'(S, E, I) &< \left[\frac{\alpha \beta}{N} \left(\frac{N\phi}{\psi_1 + \phi} \right) - (\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta) \right] I, \\ &= \left[\frac{\alpha \beta \phi - (\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)(\psi_1 + \phi)}{(\psi_1 + \phi)} \right] I, \\ &= \left[\frac{\alpha \beta \phi - (\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)(\psi_1 + \phi)}{(\psi_1 + \phi)(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)} \right] (\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)I, \\ &= (R_0 - 1)(\alpha + \psi_2)(\gamma + \theta)I. \end{aligned}$$

Oleh karena $I > 0$ dan setiap parameter bernilai positif, maka $L'(S, E, I) < 0$ pada Ω apabila $R_0 - 1 < 0$ atau $R_0 < 1$, untuk setiap $(S, E, I) \neq \left(\frac{N\phi}{\psi_1 + \phi}, 0, 0 \right)$. Jadi $L'(S, E, I)$ memenuhi Definisi 2.1.4 dan fungsi $L(S, E, I)$ merupakan fungsi Lyapunov kuat untuk Q_f , sehingga titik kesetimbangan bebas virus *worm* (Q_f) bersifat stabil asimtotik global jika $R_0 < 1$.

Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan sistem persamaan (3.6) dirangkum dalam Tabel 3.1.

Tabel 3.1: Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan

| Titik Keseimbangan | Syarat Eksistensi | Kestabilan | Syarat Kestabilan |
|--------------------|-------------------|-----------------------------------|-------------------|
| Q_f | Tidak ada | Stabil Asimtotik Lokal dan Global | $R_0 < 1$ |
| Q^* | $R_0 > 1$ | Stabil Asimtotik Lokal | Tidak ada |



3.5 Analisis Sensitivitas

Setelah dilakukan analisis kestabilan terhadap titik kesetimbangan, maka selanjutnya dilakukan analisis sensitivitas untuk mengetahui parameter yang memengaruhi penyebaran virus *worm*. Indeks sensitivitas R_0 bergantung pada diferensiasi parameter yang terdapat pada R_0 , yaitu $\alpha, \beta, \gamma, \phi, \theta, \psi_1$, dan ψ_2 . Oleh karena

$$R_0 = \frac{\alpha\beta\phi}{(\gamma+\theta)(\phi+\psi_1)(\alpha+\psi_2)}, \text{ diperoleh}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\alpha}^{R_0} &= \frac{\partial R_0}{\partial \alpha} \frac{\alpha}{R_0} \\ &= \frac{-\beta\phi\psi_2}{(\psi_1 + \phi)(\gamma + \theta)(\alpha + \psi_2)^2} \frac{\alpha(\psi_1 + \phi)(\gamma + \theta)(\alpha + \psi_2)}{\alpha\beta\phi} \\ &= \frac{\psi_2}{\alpha + \psi_2} > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\beta}^{R_0} &= \frac{\partial R_0}{\partial \beta} \frac{\beta}{R_0} \\ &= \frac{\alpha\phi}{(\psi_1 + \phi)(\gamma + \theta)(\alpha + \psi_2)} \frac{\beta(\psi_1 + \phi)(\gamma + \theta)(\alpha + \psi_2)}{\alpha\beta\phi} \\ &= 1 > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\gamma}^{R_0} &= \frac{\partial R_0}{\partial \gamma} \frac{\gamma}{R_0} \\ &= \frac{-\alpha\beta\phi}{(\psi_1 + \phi)(\gamma + \theta)^2(\alpha + \psi_2)} \frac{\gamma(\psi_1 + \phi)(\gamma + \theta)(\alpha + \psi_2)}{\alpha\beta\phi} \\ &= \frac{-\gamma}{\gamma + \theta} < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\phi}^{R_0} &= \frac{\partial R_0}{\partial \phi} \frac{\phi}{R_0} \\ &= \frac{-\alpha\beta\psi_1}{(\psi_1 + \phi)^2(\gamma + \theta)(\alpha + \psi_2)} \frac{\phi(\psi_1 + \phi)(\gamma + \theta)(\alpha + \psi_2)}{\alpha\beta\phi} \\ &= \frac{\psi_1}{\psi_1 + \phi} > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\psi_1}^{R_0} &= \frac{\partial R_0}{\partial \psi_1} \frac{\psi_1}{R_0} \\ &= \frac{-\alpha\beta\phi}{(\psi_1 + \phi)^2(\gamma + \theta)(\alpha + \psi_2)} \frac{\psi_1(\psi_1 + \phi)(\gamma + \theta)(\alpha + \psi_2)}{\alpha\beta\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-\psi_1}{\psi_1 + \phi} < 0, \\
 \Upsilon_{\psi_2}^{R_0} &= \frac{\partial R_0}{\partial \psi_2} \frac{\psi_2}{R_0} \\
 &= \frac{-\alpha\beta\phi}{(\psi_1 + \phi)(\gamma + \theta)(\alpha + \psi_2)^2} \frac{\psi_2(\psi_1 + \phi)(\gamma + \theta)(\alpha + \psi_2)}{\alpha\beta\phi} \\
 &= \frac{-\psi_2}{\alpha + \psi_2} < 0.
 \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian tersebut, indeks sensitivitas parameter yang bernilai positif adalah $\Upsilon_{\alpha}^{R_0}$, $\Upsilon_{\beta}^{R_0}$, dan $\Upsilon_{\phi}^{R_0}$. Hal ini menunjukkan jika salah satu parameter α, β , dan ϕ ditingkatkan sementara parameter lainnya konstan maka nilai R_0 meningkat dan akibatnya endemisitas *worm* meningkat. Indeks sensitivitas parameter $\Upsilon_{\gamma}^{R_0}$, $\Upsilon_{\theta}^{R_0}$, $\Upsilon_{\psi_1}^{R_0}$, dan $\Upsilon_{\psi_2}^{R_0}$ bernilai negatif. Hal ini menunjukkan jika salah satu parameter γ, θ, ψ_1 , dan ψ_2 ditingkatkan sementara parameter lainnya konstan maka nilai R_0 menurun dan akibatnya endemisitas *worm* menurun.

Misal diberikan ilustrasi dengan nilai parameter seperti pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2: Nilai parameter model

| Parameter | Nilai Parameter |
|-----------|-----------------|
| α | 0.3 |
| β | 0.5 |
| γ | 0.05 |
| ϕ | 0.015 |
| θ | 0.003 |
| ψ_1 | 0.05 |
| ψ_2 | 0.075 |

Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 3.2, diperoleh angka reproduksi dasar R_0 sebesar 1.7417 dan indeks sensitivitas parameter yang terdapat pada R_0 ditunjukkan pada Tabel 3.3.

Pada Tabel 3.3, urutan parameter menunjukkan tingkat sensitivitas dari parameter yang paling sensitif sampai dengan parameter yang kurang sensitif. Jadi, parameter yang paling sensitif adalah laju



Tabel 3.3: Nilai indeks sensitivitas angka reproduksi dasar

| No. | Parameter | Indeks Sensitivitas R_0 |
|-----|-----------|---------------------------|
| 1 | β | 1 |
| 2 | γ | -0.9434 |
| 3 | ϕ | 0.7692 |
| 3 | ψ_1 | -0.7692 |
| 4 | α | 0.2000 |
| 4 | ψ_2 | -0.2000- |
| 5 | θ | -0.0566 |

kontak antara populasi komputer rentan dengan populasi komputer terinfeksi (β), kemudian laju populasi komputer terinfeksi menjadi komputer yang bebas dari virus dengan sistem keamanan komputer (γ), laju populasi komputer yang bebas dari virus menjadi rentan (ϕ), laju populasi komputer rentan menjadi komputer yang bebas dari virus dengan sistem keamanan komputer (ψ_1), laju populasi komputer laten menjadi terinfeksi (α), laju populasi komputer laten menjadi komputer yang bebas dari virus dengan sistem keamanan komputer (ψ_2), dan parameter yang kurang sensitif adalah laju populasi komputer terinfeksi menjadi komputer yang bebas dari virus dengan penggantian perangkat (θ).

Selanjutnya, untuk mengetahui pengaruh perubahan nilai parameter terhadap R_0 , nilai setiap parameter dinaikkan dan diturunkan sebesar 10 %. Pengaruh perubahan nilai parameter yang dinaikkan dan diturunkan sebesar 10% terhadap R_0 ditunjukkan pada Tabel 3.4 dan Tabel 3.5.

Tabel 3.4: Pengaruh perubahan nilai parameter β, ϕ, α yang dinaikkan dan diturunkan sebesar 10% terhadap R_0

| No. | Parameter | R_0 | |
|-----|-----------|------------|------------|
| | | $p + 10\%$ | $p - 10\%$ |
| 1 | β | 1.9158 | 1.5675 |
| 2 | ϕ | 1.8726 | 1.6045 |
| 3 | α | 1.7739 | 1.7038 |

Tabel 3.5: Pengaruh perubahan nilai parameter $\gamma, \psi_1, \psi_2, \theta$ yang dinaikkan dan diturunkan sebesar 10% terhadap R_0

| No. | Parameter | R_0 | |
|-----|-----------|------------|------------|
| | | $p + 10\%$ | $p - 10\%$ |
| 1 | γ | 1.5915 | 1.9231 |
| 2 | ψ_1 | 1.6172 | 1.8868 |
| 3 | ψ_2 | 1.7075 | 1.7772 |
| 4 | θ | 1.7318 | 1.7515 |

Berdasarkan hasil perhitungan pada Tabel 3.4 dan Tabel 3.5, hasil perhitungan menunjukkan bahwa jika salah satu nilai parameter $\beta, \phi,$ dan α dinaikkan sebesar 10%, maka R_0 akan naik sebesar 10% dari nilai indeks sensitivitas parameter $\beta, \phi,$ dan α . Hal ini mengakibatkan endemisitas *worm* meningkat. Sebaliknya, jika salah satu nilai parameter tersebut diturunkan sebesar 10%, maka R_0 juga akan turun sebesar 10% dari nilai indeks sensitivitas parameter tersebut dan menyebabkan endemisitas *worm* menurun. Selanjutnya, untuk parameter yang bernilai negatif, jika salah satu nilai parameter $\gamma, \psi_1, \psi_2,$ dan θ dinaikkan sebesar 10%, maka R_0 akan turun sebesar 10% dari nilai indeks sensitivitas parameter $\gamma, \psi_1, \psi_2,$ dan $\theta,$ sehingga menyebabkan endemisitas *worm* juga menurun. Sebaliknya, jika salah satu nilai parameter tersebut diturunkan sebesar 10%, maka R_0 akan naik sebesar 10% dari nilai indeks sensitivitas parameter tersebut dan menyebabkan endemisitas *worm* meningkat.

3.6 Simulasi Numerik

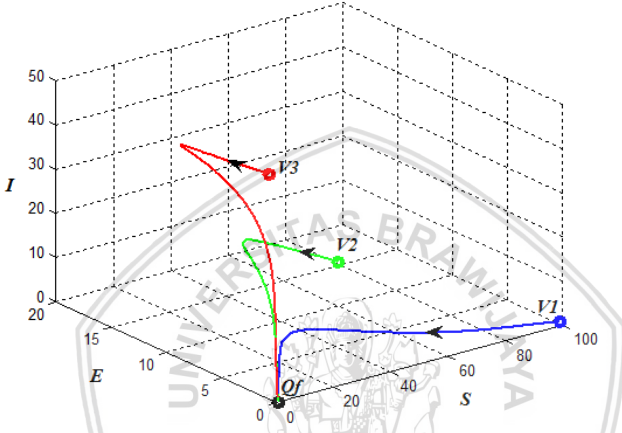
Pada subbab ini, ditunjukkan simulasi numerik solusi pada model untuk menyimulasikan hasil analisis yang diperoleh pada subbab sebelumnya. Simulasi dilakukan dengan metode Runga Kutta orde empat menggunakan *software* Matlab.

3.6.1 Simulasi numerik untuk $R_0 < 1$

Pada simulasi numerik dengan kondisi $R_0 < 1,$ nilai parameter yang digunakan yaitu $\alpha = 0.3, \beta = 0.5, \psi_1 = 0.05, \psi_2 = 0.075, \theta = 0.003, \gamma = 0.05, \phi = 0.0005,$ dan $N = 100$ sehingga diperoleh

$$R_0 = \frac{\alpha\beta\phi}{(\gamma + \theta)(\phi + \psi_1)(\alpha + \psi_2)} = 0.0747 < 1.$$

Berdasarkan nilai parameter tersebut, titik kesetimbangan bebas virus *worm* dapat diperoleh, yaitu $Q_f = (0.99, 0, 0)$. Gambar 3.2 menunjukkan potret fase solusi pada ruang tiga dimensi (S, E, I) dengan tiga nilai awal berbeda, yaitu $V1 = (99, 0, 1)$, $V2 = (60, 10, 10)$, dan $V3 = (55, 15, 25)$.



Gambar 3.2: Potret fase solusi pada ruang SEI untuk $R_0 < 1$

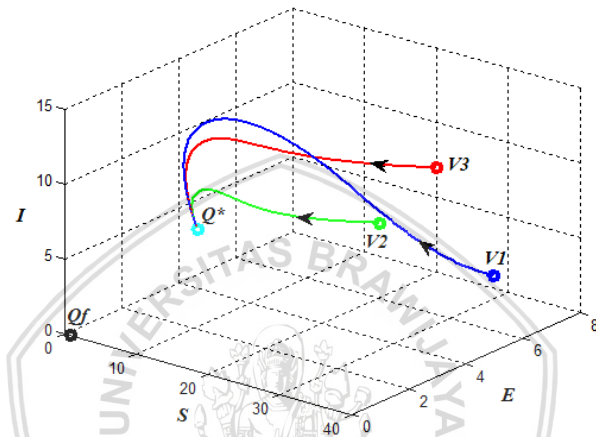
Hasil simulasi numerik pada Gambar 3.2 menunjukkan bahwa dengan tiga nilai awal berbeda, orbit-orbit pada ruang SEI menuju titik kesetimbangan bebas virus *worm* $Q_f = (0.99, 0, 0)$. Hasil simulasi numerik ini sesuai dengan hasil analisis bahwa jika $R_0 < 1$ maka hanya terdapat titik kesetimbangan bebas *worm* $Q_f = (S_f, E_f, I_f) = (0.99, 0, 0)$ yang bersifat stabil asimtotik global.

3.6.2 Simulasi numerik untuk $R_0 > 1$

Pada simulasi numerik dengan kondisi $R_0 > 1$, nilai parameter yang digunakan yaitu $\alpha = 0.3, \beta = 0.5, \psi_1 = 0.05, \psi_2 = 0.075, \theta = 0.003, \gamma = 0.05, \phi = 0.015$, dan $N = 100$ sehingga diperoleh

$$R_0 = \frac{\alpha\beta\phi}{(\gamma + \theta)(\phi + \psi_1)(\alpha + \psi_2)} = 1.7417 > 1.$$

Berdasarkan nilai parameter tersebut, titik kesetimbangan bebas virus *worm* dan titik kesetimbangan endemik dapat diperoleh, yaitu $Q_f = (0.99, 0, 0)$ dan $Q^* = (13.25, 1.345, 7.613)$. Gambar 3.3 menunjukkan potret fase solusi pada ruang tiga dimensi (S, E, I) dengan tiga nilai awal berbeda, yaitu $V1 = (40, 5, 5)$, $V2 = (20, 6, 5)$, dan $V3 = (20, 8, 7)$.



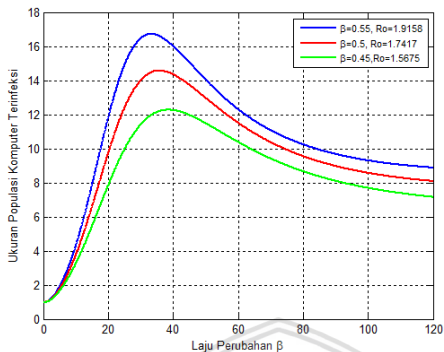
Gambar 3.3: Potret fase solusi pada ruang SEI untuk $R_0 > 1$

Hasil simulasi numerik pada Gambar 3.3 menunjukkan bahwa dengan tiga nilai awal berbeda, orbit-orbit di sekitar titik kesetimbangan endemik Q^* pada ruang SEI menuju titik kesetimbangan endemik $Q^* = (13.25, 1.345, 7.613)$. Hasil simulasi numerik ini sesuai dengan hasil analisis bahwa titik kesetimbangan endemik $Q^* = (S^*, E^*, I^*) = (13.25, 1.345, 7.613)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

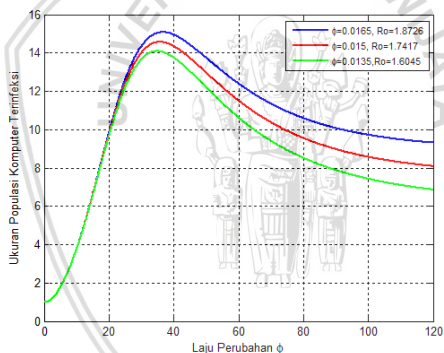
3.6.3 Simulasi numerik perubahan nilai parameter

Dalam melakukan analisis sensitivitas, maka perlu memasukkan nilai yang berbeda dari setiap parameter yang memengaruhi penyebaran penyakit. Pada subbab sebelumnya, telah dilakukan analisis dengan parameter yang dinaikkan atau diturunkan sebesar 10%. Pada subbab ini, simulasi numerik pengaruh naik atau turunnya

parameter yang memengaruhi penyebaran virus *worm* ditunjukkan pada Gambar 3.4 sampai dengan Gambar 3.10.



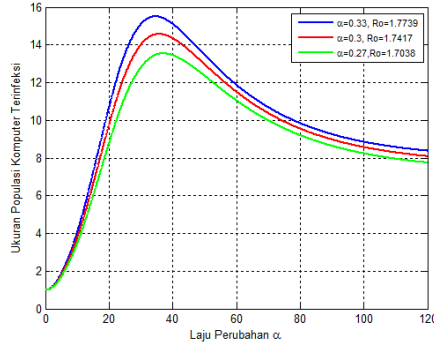
Gambar 3.4: Pengaruh perubahan β terhadap populasi I



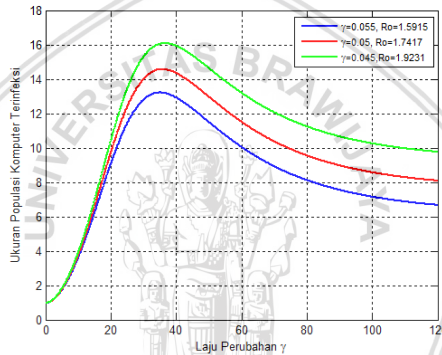
Gambar 3.5: Pengaruh perubahan ϕ terhadap populasi I

Gambar 3.4 menunjukkan bahwa laju kontak dengan populasi komputer terinfeksi sangat berpengaruh dalam penyebaran virus *worm* pada komputer. Jika nilai parameter β dinaikkan sebesar 10% sedangkan nilai parameter lainnya tetap, maka R_0 meningkat. Hal ini mengakibatkan jumlah populasi komputer yang terinfeksi meningkat sehingga endemisitas *worm* meningkat. Sebaliknya, jika nilai parameter β diturunkan sebesar 10% sedangkan nilai parameter lainnya tetap, maka R_0 menurun. Hal ini mengakibatkan jumlah





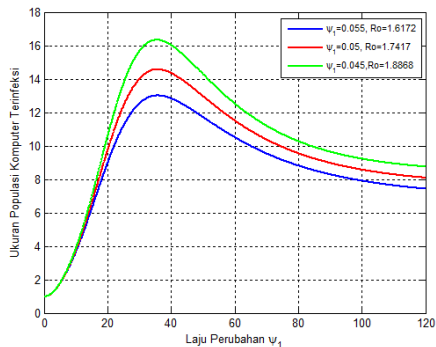
Gambar 3.6: Pengaruh perubahan α terhadap populasi I



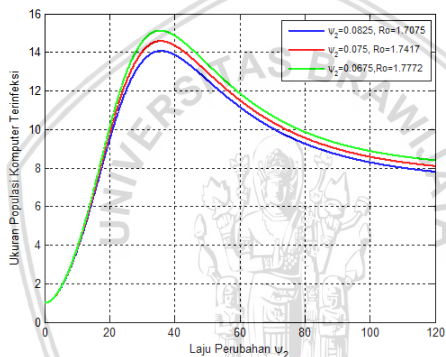
Gambar 3.7: Pengaruh perubahan γ terhadap populasi I

populasi komputer yang terinfeksi menurun sehingga endemisitas *worm* menurun.

Gambar 3.5 menunjukkan bahwa jika nilai parameter ϕ dinaikkan sebesar 10% sedangkan nilai parameter lainnya tetap, maka R_0 meningkat. Hal ini mengakibatkan jumlah populasi komputer yang terinfeksi meningkat sehingga endemisitas *worm* meningkat. Sebaliknya, jika nilai parameter ϕ diturunkan sebesar 10% sedangkan nilai parameter lainnya tetap, maka R_0 menurun. Hal ini mengakibatkan jumlah populasi komputer yang terinfeksi menurun sehingga endemisitas *worm* menurun. Dengan demikian, apabila



Gambar 3.8: Pengaruh perubahan ψ_1 terhadap populasi I

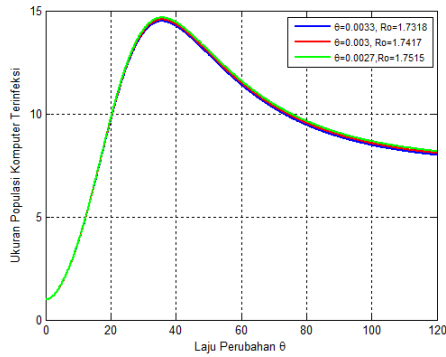


Gambar 3.9: Pengaruh perubahan ψ_2 terhadap populasi I

masa kekebalan sementara yang diberikan sistem keamanan komputer ditingkatkan maka akan menurunkan endemisitas *worm*.

Gambar 3.6 menunjukkan bahwa jika nilai parameter α dinaikkan sebesar 10% sedangkan nilai parameter lainnya tetap, maka R_0 meningkat. Hal ini mengakibatkan jumlah populasi komputer yang terinfeksi meningkat sehingga endemisitas *worm* meningkat. Sebaliknya, jika nilai parameter α diturunkan sebesar 10% sedangkan nilai parameter lainnya tetap, maka R_0 menurun. Hal ini mengakibatkan jumlah populasi komputer yang terinfeksi menurun sehingga endemisitas *worm* menurun.





Gambar 3.10: Pengaruh perubahan θ terhadap populasi I

Gambar 3.7 menunjukkan bahwa jika nilai parameter γ dinaikkan sebesar 10% sedangkan nilai parameter lainnya tetap, maka R_0 menurun. Hal ini mengakibatkan jumlah populasi komputer yang terinfeksi menurun sehingga endemisitas *worm* menurun. Sebaliknya, jika nilai parameter γ diturunkan sebesar 10% sedangkan nilai parameter lainnya tetap, maka R_0 meningkat. Hal ini mengakibatkan jumlah populasi komputer yang terinfeksi meningkat sehingga endemisitas *worm* meningkat. Dengan demikian, hal ini menunjukkan bahwa dengan meningkatkan sistem keamanan pada komputer akan menurunkan endemisitas *worm*.

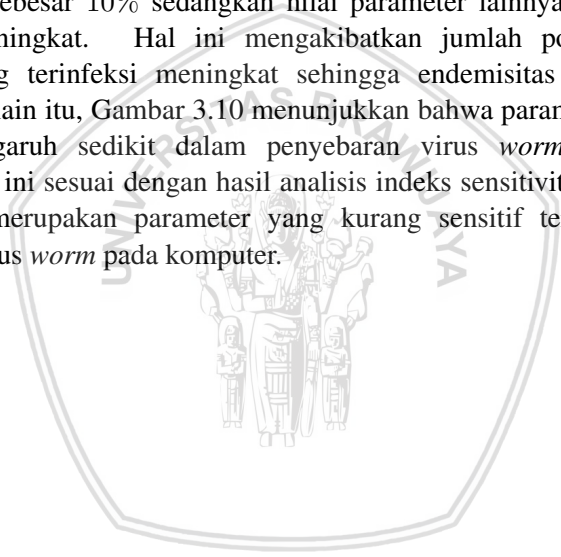
Gambar 3.8 menunjukkan bahwa jika nilai parameter ψ_1 dinaikkan sebesar 10% sedangkan nilai parameter lainnya tetap, maka R_0 menurun. Hal ini mengakibatkan jumlah populasi komputer yang terinfeksi menurun sehingga endemisitas *worm* menurun. Sebaliknya, jika nilai parameter ψ_1 diturunkan sebesar 10% sedangkan nilai parameter lainnya tetap, maka R_0 meningkat. Hal ini mengakibatkan jumlah populasi komputer yang terinfeksi meningkat sehingga endemisitas *worm* meningkat. Dengan demikian, hal ini menunjukkan bahwa dengan meningkatkan sistem keamanan pada komputer akan menurunkan endemisitas *worm*.

Gambar 3.9 menunjukkan bahwa jika nilai parameter ψ_2 dinaikkan sebesar 10% sedangkan nilai parameter lainnya tetap, maka R_0 menurun. Hal ini mengakibatkan jumlah populasi komputer yang



terinfeksi menurun sehingga endemisitas *worm* menurun. Sebaliknya, jika nilai parameter ψ_2 diturunkan sebesar 10% sedangkan nilai parameter lainnya tetap, maka R_0 meningkat. Hal ini mengakibatkan jumlah populasi komputer yang terinfeksi meningkat sehingga endemisitas *worm* meningkat. Dengan demikian, apabila sistem keamanan pada komputer ditingkatkan maka akan menurunkan endemisitas *worm*.

Pada Gambar 3.10, jika nilai parameter θ dinaikkan sebesar 10% sedangkan nilai parameter lainnya tetap, maka R_0 menurun. Hal ini mengakibatkan jumlah populasi komputer yang terinfeksi menurun sehingga endemisitas *worm* menurun. Sebaliknya, jika nilai parameter θ diturunkan sebesar 10% sedangkan nilai parameter lainnya tetap, maka R_0 meningkat. Hal ini mengakibatkan jumlah populasi komputer yang terinfeksi meningkat sehingga endemisitas *worm* meningkat. Selain itu, Gambar 3.10 menunjukkan bahwa parameter θ hanya berpengaruh sedikit dalam penyebaran virus *worm* pada komputer. Hal ini sesuai dengan hasil analisis indeks sensitivitas R_0 , parameter θ merupakan parameter yang kurang sensitif terhadap penyebaran virus *worm* pada komputer.



BAB IV KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan skripsi ini, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut

1. Model *SEIRS* penyebaran virus *worm* pada komputer berbentuk sistem otonomus nonlinear yang terdiri dari empat populasi, yaitu populasi komputer rentan (*S*), populasi komputer laten (*E*), populasi komputer terinfeksi (*I*), dan populasi komputer yang bebas dari virus (*R*).
2. Model *SEIRS* penyebaran virus *worm* pada komputer memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas virus *worm* dan titik kesetimbangan endemik. Jika $R_0 < 1$, maka titik kesetimbangan yang eksis hanya titik kesetimbangan bebas virus *worm*. Jika $R_0 > 1$, maka terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik kesetimbangan bebas virus *worm* dan titik kesetimbangan endemik. Kestabilan titik kesetimbangan bebas virus *worm* bersifat stabil asimtotik lokal dan global apabila $R_0 < 1$. Kestabilan titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal tanpa syarat.
3. Hasil analisis sensitivitas menunjukkan bahwa urutan parameter yang paling sensitif hingga kurang sensitif, yaitu $\beta, \gamma, \phi, \psi_1, \alpha, \psi_2$, dan θ . Jika indeks sensitivitas parameter bernilai positif, yaitu β, ϕ, α , dinaikkan (diturunkan), maka R_0 meningkat (menurun). Jika indeks sensitivitas parameter bernilai negatif, yaitu $\gamma, \psi_1, \psi_2, \theta$, dinaikkan (diturunkan), maka R_0 menurun (meningkat). Pengaruh perubahan parameter yang dinaikkan (diturunkan) terhadap R_0 bergantung pada nilai indeks sensitivitas parameter tersebut.
4. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa apabila $R_0 < 1$ maka dalam waktu yang lama penyebaran virus *worm* pada komputer semakin menurun kemudian dapat dimungkinkan

tidak terdapat penyebaran dan apabila $R_0 > 1$ maka selalu terdapat penyebaran virus *worm* pada komputer. Hasil simulasi numerik menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis.



DAFTAR PUSTAKA

- Alligood, K. T., T. D. Sauer, dan J. A. Yorke. 2000. *CHAOS: An Introduction to Dynamical System*. Springer-Verlag. New York.
- Anderson, R., C. Barton, R. Bohme, R. Clayton, M. J. G. van Eeten, M. Levi, T. Moore, S. Savage. 2013. *The Economics of Information Security and Privacy*. Springer. Berlin.
- Aprianti, P. 2017. *Analisis Dinamik Model Penyebaran Worm SEIQR pada Internet Mobile*. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Brawijaya. Malang.
- Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 2012. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems*. Tenth Edition. John Wiley and Sons, Inc. United State of America.
- Chitnis, N., J. M. Hyman, dan J. M. Cushing. 2008. Determining Important Parameters in the Spread of Malaria Through the Sensitivity Analysis of a Mathematical Model. *Bulletin of Mathematical Biology*. 70:1272-1296.
- Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. *An Introduction to Differential Equations with Difference Equation, Fourier Series, and Partial Differential Equations*. Wadsworth Publishing Company Belmont. California.
- Guillen, J. D. H., A. M. del Rey, dan L. H. Encinas. 2017. Study of the Stability of a SEIRS Model for Computer Worm Propagation. *Physica A*. 479:411-421.
- Heffernan, J. M., R. J. Smith, dan L.M. Whal. 2005. Perspectives on the Basic Reproductive Ratio. *Journal of the Royal Society Interface*. 2:281-293
- Hosseini, S., M. A. Azgomi, dan A. T. Rahmani. 2016. Malware

Propagation Modeling Considering Software Diversity and Immunization. *Journal of Computational Science*. 13:49-67.

Koonprasert, S. dan N. Channgam. 2017. Global Stability and Sensitivity Analysis of SEIQR Worm Virus Propagation Model with Quarantined State in Mobile Internet. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. 13:3833-3850.

McLeod, R. dan G. P. Schell. 2008. *Sistem Informasi Manajemen*. Edisi Kesepuluh. Salemba Empat. Indonesia.

Mishra, B. K. dan N. Keshri. 2013. Mathematical Model on The Transmission of Worms in Wireless Sensor Networks. *Applied Mathematical Modelling*. 37:4103-4111.

Mishra, B. K. dan S. K. Pandey. 2011. Dynamic Model of Worms with Vertical Transmission in Computer Network. *Applied Mathematics and Computation*. 217:8438-8446.

Murray, J. D. 2002. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. Third Edition. Spinger-Verlag. New York.

Pinandita, S. 2017. Negara Berkembang di Asia Pasifik Mendominasi Laporan Microsoft CyberSecurity Terbaru, dengan Tingkat Serangan Malware Tertinggi di Dunia. <https://news.microsoft.com/id-id/2017/09/04/negara-berkembang-di-asia-pasifik-mendominasi-laporan-microsoft-cybersecurity-terbaru-dengan-tingkat-serangan-malware-tertinggi-di-dunia/> (tanggal akses: 1 April 2018).