Dirección Nacional de Información y Evaluación de la Calidad Educativa

Ministerio de Educación
Presidencia de la Nación

REFLEXIONES PARA DOCENTES DE MATEMÁTICA DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

INFORME DE ACITIVIDADES ABIERTAS ONE 2005

Evaluación EDUCATIVA

AUTORIDADES
PRESIDENTA DE LA NACION
DRA. CRISTINA FERNÁNDEZ DE KIRCHNER

MINISTRO DE EDUCACIÓN
PROF. JUAN CARLOS TEDESCO

SECRETARIO DE EDUCACIÓN
PROF. ALBERTO SILEONI

SECRETARIO DE POLÍTICAS UNIVERSITARIAS
DR. ALBERTO DIBBERN

SECRETARÍA DEL CONSEJO FEDERAL DE EDUCACIÓN
PROF. DOMINGO DE CARA

SUBSECRETARÍA DE EQUIDAD Y CALIDAD
PROF. SUSANA MONTALDO

SUBSECRETARIO DE PLANEAMIENTO EDUCATIVO
LIC. OSVALDO DEVRIES

SUBSECRETARIO DE COORDINACIÓN ADMINISTRATIVA
ARQ. DANIEL IGLESIAS

SECRETARIO GENERAL DEL CONSEJO FEDERAL DE EDUCACIÓN
PROF. DOMINGO DE CARA

DIRECTORA EJECUTIVA DEL INSTITUTO NACIONAL DE EDUCACIÓN TECNOLÓGICA
PROF. MARÍA ROSA ALMANDOZ

DIRECTORA EJECUTIVA DEL INSTITUTO NACIONAL DE FORMACIÓN DOCENTE
PROF. MARÍA INÉS ABRILE DE VOLLMER

DIRECTOR NACIONAL DE INFORMACIÓN Y EVALUACIÓN DE LA CALIDAD EDUCATIVA
LIC. EDUARDO ARAGUNDI

Coordinadora de Evaluación de la Calidad Educativa

Mg. Mariela Leones

Elaborado por equipo del área de ciencias naturales

Prof. Liliana Bronzina

Prof. Pilar Varela

Lic. Nora Burelli

Asistente Técnica

Natalia Rivas

Introducción

El operativo nacional de evaluación (ONE) 2005 evaluó cuatro áreas de conocimiento: matemática, lengua, ciencias naturales y ciencias sociales y cuatro años de escolaridad: tercero y sexto de Primaria y segundo y quinto de Educación Secundaria.

El objetivo del ONE es la generación de información significativa y específica de los aprendizajes que los alumnos han podido lograr a su paso por las instituciones educativas.

El análisis y el uso de la información generada suponen juicios de valor sobre las características distintivas del sistema educativo en su conjunto. En este caso los propósitos se asocian con la toma de decisiones a nivel macro y la definición de políticas educativas y líneas de acción a nivel nacional o jurisdiccional y no se refieren a situaciones particulares o individuales en ningún caso. Los requerimientos metodológicos son bien complejos e implican las decisiones respecto al alcance y los propósitos de la evaluación. Cualquier evaluación en este ámbito supone complejos dispositivos técnicos y logísticos a la vez que logran impactos en el conjunto de los actores involucrados en el sistema educativo y la opinión pública en general.

Las pruebas empleadas en el ONE presentan ítems con diferentes variaciones en el nivel de dificultad de desempeño de los alumnos.

Las evaluaciones en el ámbito del sistema educativo son muy diferentes a las evaluaciones de los aprendizajes que un docente toma a sus alumnos en el ámbito o espacio típico del aula. Difieren en sus propósitos, el conjunto de herramientas e instrumentos que por su adecuación se seleccionarán y el alcance y el marco metodológico a utilizar. Por lo tanto, no deben confundirse los escenarios y los diferentes y valiosos aportes de cada una de ellas.

La evaluación de los aprendizajes de los alumnos no sólo informa sobre los conocimientos de los alumnos sino que permite, entre otras cosas, poner de manifiesto aspectos o procesos que de otra manera permanecerían ocultos, posibilita una aproximación en forma más precisa, más fina a la naturaleza de ciertos procesos, las formas de organización de los mismos, los efectos, las consecuencias, los elementos intervinientes, y atribuye valor a esos procesos y a esos resultados. En este sentido contribuye a “dar cuenta” y a “darnos cuenta” de cambios y apropiaciones, de logros y carencias. La evaluación como tal significará un aporte relevante en términos de acciones de mejora de la enseñanza.

Este documento tiene como propósito principal que los docentes conozcan algunos ítems abiertos o de desarrollo que fueron objeto de evaluación en el ONE 2005.

Para ello, se presentan los aspectos esenciales de la estructura y especificaciones de cada prueba, los resultados alcanzados, así como ejemplos de respuestas escritas por los alumnos, que permitirán a los docentes familiarizarse tanto con los formatos de los enunciados como con la forma en que los alumnos producen sus respuestas o su modo de comunicar.

En el marco de las evaluaciones, los ítems abiertos cumplen un papel primordial porque aportan información valiosa sobre los conocimientos de los alumnos y la capacidad de poder aplicar estos conocimientos en un producto escrito.

El análisis de las producciones escritas de los alumnos puede orientarnos acerca de los problemas que surgen cuando intentan comunicar sus conocimientos e interpretaciones.

A partir de la identificación de los dominios conceptuales de los NAP (Núcleos de Aprendizajes Prioritarios) para 3º y 6º año de primaria y de los Contenidos Básicos Comunes para el 9º y 5º año del secundario y teniendo en cuenta los procesos cognitivos o capacidades se define una estructura de prueba por área y por año a evaluar.

En el área de Matemática dicha estructura de prueba permite evaluar la resolución de problemas de todos los alumnos que participan en el ONE.

Dado que la evaluación de Matemática debe centrarse tanto en los resultados como en los procedimientos utilizados en la resolución de problemas, las pruebas incluyeron dos tipos de ítems diferentes:

- Ítems de opción múltiple con un enunciado y cuatro opciones de respuesta.
- Ítems abiertos cuya respuesta es desarrollada por el alumno.

En los ítems de opción múltiple, el alumno debe responder la pregunta o resolver el enunciado que se le plantea seleccionando, de cuatro opciones, la que considera correcta.

La inclusión de los ítems abiertos permitió analizar los procedimientos utilizados por los alumnos al construir la respuesta.

La interpretación de los resultados de la evaluación de los ítems abiertos se realizó a través de un criterio externo previamente establecido, es decir, que no se compararon los resultados con los grupos de referencia.

Este criterio externo establece las características que deben respetar los resultados y permite valorar el desempeño de los alumnos, es decir, si alcanzaron el dominio del desempeño. Por ello la valoración criterial suele recibir el nombre de valoración de dominio o conocimiento.

La necesidad de definir los criterios para hacerlos operativos lleva a enunciar indicadores que son rasgos observables del criterio.

Para lograr la mayor objetividad posible la corrección se efectuó por docentes capacitados y con un instructivo o manual de corrección para cada pregunta. Con la guía de ese manual las respuestas de los alumnos fueron clasificadas en cuatro categorías: totalmente correcta, parcialmente correcta, incorrecta y omitida.

Manual de corrección

El Manual de corrección de los ítems abiertos de Matemática fue confeccionado por el equipo de Matemática de la DiNIECE. Se hizo una primera versión y con ella se corrigieron los ítems abiertos que fueron probados en la prueba piloto. A esa primera versión se le agregaron ejemplos de respuestas reales de alumnos para cada categoría y se le hicieron los ajustes pertinentes.

La etapa de corrección

Una vez aplicado el ONE 2005, los ítems fueron corregidos por 800 docentes de todo el país capacitados en el uso del Manual y seleccionados de todas las jurisdicciones. Con el objetivo de que los correctores tuvieran la posibilidad de consultar sus dudas con el equipo de la DiNIECE y, al mismo tiempo, supervisar la corrección se utilizó un sistema on line.

Análisis de los ítems de respuesta abierta

Se han elegido dos ítems representativos de respuesta abierta por cada año evaluado para analizarlos y comentar los resultados obtenidos. Porque consideramos que remiten a contenidos y capacidades cognitivas de resolución de problemas que los alumnos deberían dominar o conocer.

Análisis de los resultados de los Ítems Abiertos del ONE 2005

MATEMÁTICA

Prueba de 9° año de EGB o 3° año de Escuela Secundaria Básica

La prueba de matemática evaluó en el 2005 una muestra de los estudiantes que cursaban el 3° año de estudios de la Escuela Secundaria.

¿Cómo estuvo constituida la prueba?

La prueba estuvo constituida por seis cuadernillos con ítems cerrados o de opción múltiple con cuatro opciones de respuesta y seis ítems de respuesta abierta a desarrollar.

Para resolver los ítems de respuesta abierta los alumnos tuvieron que desarrollar un procedimiento, elegir una estrategia de resolución, redactar una respuesta.

Con el fin de atender al procedimiento de resolución y no solo al resultado, los ítems de respuesta abierta fueron corregidos por docentes debidamente capacitados. Para garantizar la objetividad en la corrección, los correctores utilizaron una guía elaborada para tal fin por el equipo pedagógico de la DINIECE y de esta manera, clasificaron las respuestas en cuatro categorías contempladas en la grilla de corrección: respuesta correcta, parcialmente correcta, incorrecta y omitida.

Cada uno de los ítems de respuesta abierta se incluyó en dos cuadernillos de manera que cada ítem fuera contestado por la tercera parte de los alumnos de la muestra.

Tuvimos la oportunidad de acceder a las respuestas dadas por los alumnos y de allí seleccionar las que nos parecieron que mejor representaban a las distintas categorías.

En este informe queremos compartir con ustedes docentes, dos de las situaciones que los alumnos que finalizaban su 3er año de la escuela secundaria (ex 9no de EGB) tuvieron que resolver. Además queremos hacerles llegar algunos comentarios sobre los conocimientos y habilidades matemáticas que están a la base de esas situaciones.

Ejemplos de Ítems de respuesta abierta a desarrollar

Ítem N° 17 de los Cuadernillos 4 y 5 de 2°/ 9° año/ 3° año de Escuela Secundaria. Nota a edición: el dibujo del ítem está incompleto. Falta la circunferencia. Se pide copiarlo de la prueba 2005

0

70º

X

En la figura anterior, **0** es el centro de la circunferencia

¿Cuál es el valor de $\hat{X}$?

Mostrá cómo lo resolvés.

Respuesta:

Datos técnicos

Contenido: Geometría

Capacidad: Resolución de problemas
Nivel de desempeño: Medio

¿Qué evalúa el ítem?

El ítem requiere que el alumno resuelva un problema que involucra propiedades de los triángulos, en especial, de un triángulo cuyos vértices son el centro y dos puntos que pertenecen a una circunferencia.

¿Qué puede hacer el alumno para resolver el ítem?

Para resolver el problema el alumno tiene que saber que una circunferencia es el lugar geométrico de los infinitos puntos que se encuentran a una misma distancia de otro llamado centro. Entonces, el triángulo que muestra el ítem tiene dos lados que son radios de una misma circunferencia, o sea, tiene dos lados congruentes, entonces es un triángulo isósceles.
También el alumno debe usar, para continuar la resolución del problema, propiedades de los triángulos relacionadas con los lados y sus ángulos interiores. Al ser éste un triángulo isósceles y habiendo identificado los lados congruentes, debe reconocer que los ángulos opuestos a esos lados, también son congruentes.
Por último, otra propiedad relacionada con los triángulos que necesita aplicar es la del valor de la suma de los ángulos interiores (180°). Teniendo en cuenta estas dos últimas propiedades de los triángulos, deberá operar para calcular el ángulo pedido: $x = \frac{180° - 70°}{2}$; $x = 55°$

¿Qué resultados se obtuvieron?

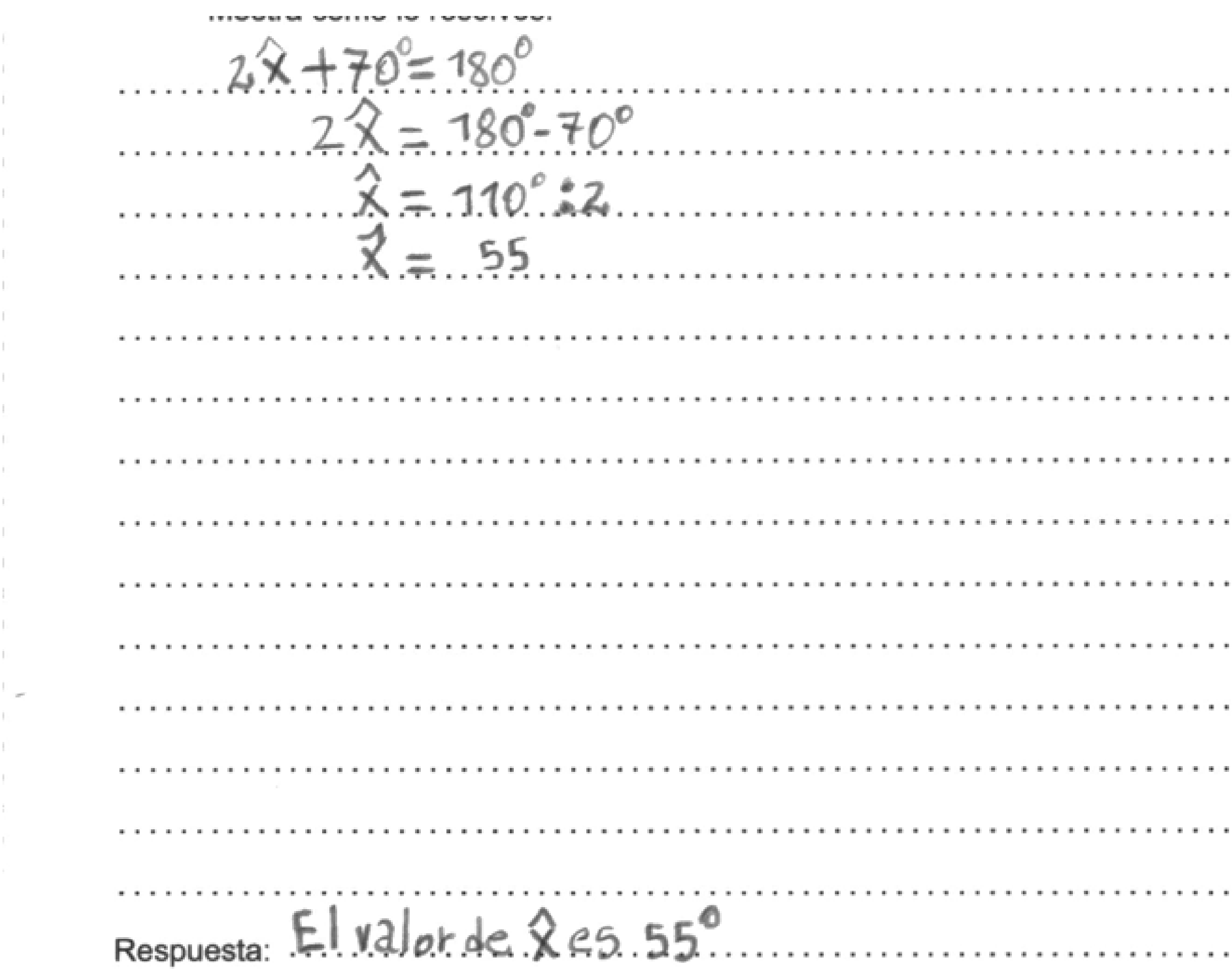
El ítem formó parte de la prueba de 2° año del Nivel Medio o 9° año de Educación General Básica en dos cuadernillos.
A continuación se muestran los porcentajes de respuestas obtenidos en las distintas categorías.

2° / 9° año	
Respuestas correctas	9,7%
Respuestas parcialmente correctas	0,8%
Respuestas incorrectas	10,7%
Respuestas omitidas	78,8%

Porcentajes de respuestas Ítem 17
de 2°/ 9° año de EGB/3° de Escuela Secundaria

La respuesta se consideró **correcta** si el alumno respondió $x=55°$ mostrando o no el procedimiento de resolución. Si el alumno respondió 55° y no mostró el procedimiento también se consideró correcta puesto que conociendo las propiedades requeridas para resolver el problema, el cálculo puede hacerse mentalmente.

Ejemplo 1 de respuesta correcta



$2\hat{x} + 70° = 180°$

$2\hat{x} = 180° - 70°$

$\hat{x} = 110° : 2$

$\hat{x} = 55$

Respuesta: El valor de $\hat{x}$ es 55°

La respuesta fue considerada **parcialmente correcta** si el alumno hizo un planteo correcto pero con error en los cálculos.

Ejemplo 1 de respuesta parcialmente correcta

TRIÁNGULO ISÓSCELES

$$180° - 70° = \frac{x}{2}$$

$$90° = \frac{x}{2}$$

$$\frac{90°}{2} = x$$

$$x = 45°$$

Respuesta: $\boxed{x = 45°}$

Ejemplo 2: $\frac{180° - 70°}{2} = 145°$

Ejemplo 3: 180° - 70° = 100° ; 100°÷2=50°

En los ejemplos anteriores se puede ver que los alumnos eligieron un procedimiento de resolución correcto, pero obtuvieron resultados equivocados por errores al operar. Puede haber respuestas con errores de arrastre pero, para ser codificada como parcialmente correcta, deben estar explícitas la sustracción y la división.

Las respuestas que entraron en la categoría de **incorrectas** fueron otras respuestas, la respuesta “no sé”, la ilegible o respuestas no pertinentes.

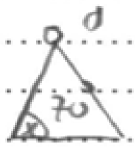
Ejemplo 1 de respuesta incorrecta

EL VALOR de X es 35°

AL VER QUE X y el otro angulo eran iguales y que tenia un angulo que era 0, dividí 70° a la mitad y así me dio el valor de X.

Ejemplo 2 de respuesta incorrecta

EL VALOR de la X 140



$$\begin{array}{r} 180 \\ -\ 70 \\ \hline 140 \end{array}$$

Respuesta: ES DE 140 C°

Ejemplo 3: 180°- 140° = 40°

Un alto porcentaje de alumnos duplicó el ángulo de 70°, es decir, reconocieron que se trataba de un triángulo isósceles pero no identificaron los lados y ángulos que son congruentes.

Ejemplo 4 de respuesta incorrecta

Si el triangulo es equilatero x mide 70°

Respuesta: x = 70°

La respuesta se consideró **omitida** cuando estuvo en blanco, es decir, cuando no hubo respuesta.

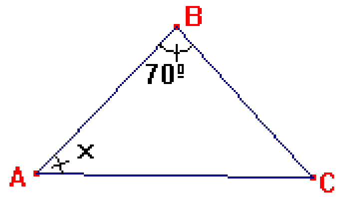
Reflexiones Pedagógicas:

El ítem requiere conocimientos geométricos que deberían poder usar los alumnos para resolver esta situación nueva.

El 89,5% de los alumnos respondieron incorrectamente u omitieron resolver este problema.
La resolución de esta situación requiere de un encadenamiento deductivo, propio del quehacer geométrico que no siempre está disponible en nuestros alumnos.
El gráfico que representa el problema no está hecho a escala, lo que implica que no se puede medir y esto está claro para los alumnos. En el diagrama no

se muestran las relaciones entre los elementos y es tarea de los estudiantes encontrarlas. Sin ellas, el problema no puede ser resuelto.
Una práctica muy difundida entre los alumnos es la observación, o sea, obtener relaciones a partir de mirar un dibujo de una figura. Pero la observación solo puede permitir establecer una conjetura, no alcanza con que el triángulo parezca ser isósceles sino que es necesario encontrar razones que permitan afirmarlo. En este caso, parece serlo, pero el hecho de que dos de sus vértices pertenezcan a la misma circunferencia explica por qué es isósceles.
Un problema similar al propuesto es el siguiente:

El triángulo de la figura es isósceles, con $\overline{AB} = \overline{BC}$*. Encontrar la medida del ángulo x.*



En este caso, a diferencia del anterior, se da la información que el triángulo es isósceles. Se libera al alumno de tener que encontrar por sí mismo esta propiedad, lo cual simplifica el trabajo matemático a realizar. Tiene que identificar cuáles son los ángulos congruentes para luego usar que la suma de los ángulos interiores del triángulo es 180º.
La mayor dificultad radica en darse cuenta cuáles son los ángulos congruentes.
Claramente, el trabajo matemático involucrado en esta situación es menor que en el problema original.

Los alumnos del tercer ciclo de EGB han copiado figuras bidimensionales durante su educación. También han comparado y descripto figuras y cuerpos según sus características para reconocerlos y dibujarlos. Han identificado propiedades de las figuras. Saben operar en los distintos sistemas de medidas. Logran plantear y resolver ecuaciones con una incógnita sin mayores dificultades.
Los resultados tanto de 2°/ 9° año/ 3° de Enseñanza Secundaria muestran que ante el desafío de una nueva situación, no han podido abordarla, o lo hicieron incorrectamente y solamente un porcentaje muy pequeño lo resolvió correctamente. Ante el obstáculo a vencer propuesto por la situación, no han logrado buscar alguna estrategia de resolución a partir de lo que saben y decidir qué es lo más apropiado.

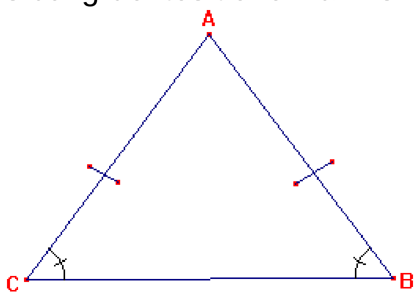
El ítem en cuestión remite a contenidos que seguramente han sido trabajados. Sin embargo, pareciera que los alumnos no tienen experiencia en resolver problemas donde esos conocimientos aparecen entrelazados. No alcanza con conocer las partes para trabajar con sus relaciones. La resolución de problemas complejos se aprende y, para ello, los docentes tenemos que enseñarlo. ¿Cómo? Presentando problemas complejos que permitan el debate. Luego, las discusiones en torno a las situaciones no solo deberían centrarse sobre cómo resolverlas sino también en por qué se resuelven de esa manera. Se trata de un trabajo a largo plazo y sostenido.

Situaciones como ésta, que ofrecen un obstáculo a superar con los conocimientos que tiene y con un modo de resolución que implica la toma de decisiones, es lo que hace que la actividad matemática no sea repetitiva y ayuda al alumno a crecer y avanzar en sus conocimientos.

Sugerencias para la enseñanza

Uno de las dificultades que hemos observado en las resoluciones de los alumnos consiste en identificar cuáles son los ángulos congruentes en el triángulo isósceles. Creemos que muchos de ellos recuerdan o aprendieron de memoria la ubicación de estos ángulos, pero no saben por qué son esos y no otros.
Por lo tanto, creemos que sería conveniente hacer un trabajo donde los alumnos tengan la oportunidad de construir razones, explicaciones.

Para hallar las medidas de los ángulos de la figura del ejemplo anteriormente descripto usamos que en un triángulo isósceles los ángulos adyacentes a los lados congruentes tienen la misma medida:

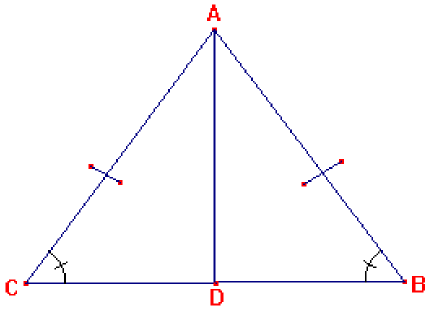


Sin embargo, la definición que generalmente se utiliza es que un triángulo es isósceles si tiene dos lados congruentes, que nada dice sobre sus ángulos.
En realidad, los ángulos son iguales como consecuencia de tener dos lados congruentes. Y dos lados son congruentes como consecuencia de tener dos ángulos iguales[1].
Esto significa que partiendo de que un triángulo tiene dos lados congruentes puede demostrarse que los ángulos adyacentes a esos lados son iguales.
Si se parte de que un triángulo tiene dos ángulos congruentes puede demostrarse que es isósceles.
No queremos decir con esto que todo debe demostrarse, sino que es interesante ver de dónde surgen algunas propiedades que muchas veces son consideradas como verdades incuestionables. Y, a su vez, ilustrar –aunque sea a grandes trazos, por ahora- un aspecto esencial del funcionamiento de la Geometría: se tienen datos que se dan por verdaderos (porque forman parte de la definición de, por ejemplo, una figura o porque es una propiedad que ya se sabe que es cierta) y se utilizan para alcanzar nuevas certezas.
Por ejemplo, supongamos que un triángulo tiene dos lados iguales, es decir que es isósceles. Vamos a demostrar que los ángulos adyacentes a esos lados tienen la misma medida.

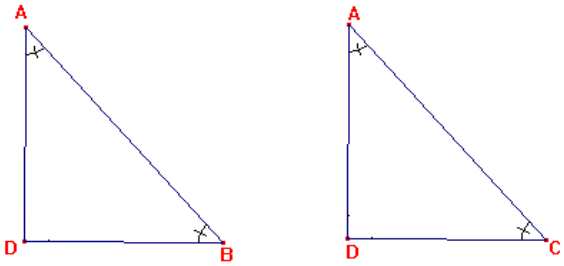
---

[1] Si bien en Geometría se utiliza la noción de congruencia, en este escrito a veces usaremos la palabra "igualdad", entendiendo que se trata de una igualdad en términos geométricos. Por ejemplo, dos figuras son iguales si una coincide con la otra a través de una composición de movimientos (traslaciones, simetrías, rotaciones).

Vamos a trazar un segmento que une el vértice A con el punto medio del lado BC, que llamaremos D:



El segmento AD determina dos triángulos: ACD y ADB.
Como D es el punto medio del segmento CB, resulta que $\overline{CD} = \overline{DB}$. Además, los lados AC y AB tienen la misma medida y el lado AD es común a los dos triángulos.
Resulta que los triángulos analizados tienen sus tres lados iguales, por lo cual los triángulos son iguales. Una consecuencia de esto es que las medidas de los ángulos de los dos triángulos son iguales. Para comparar cuáles son los ángulos que coinciden podemos pensar en los dos triángulos en la misma posición:



Resulta entonces que:

1) $D\hat{A}B = D\hat{A}C$
2) $A\hat{B}D = A\hat{C}D$
3) $A\hat{D}B = A\hat{D}C$

La relación 1) nos dice que el segmento $\overline{AD}$ divide al ángulo $C\hat{A}B$ en dos ángulos iguales, es decir que es bisectriz del ángulo.
La igualdad 2) muestra que los ángulos adyacentes a los lados iguales son iguales, que es lo que buscábamos demostrar.
La tercera relación dice que los dos ángulos con vértice en D son iguales y como $\overline{CD}$ es un segmento, estos ángulos tienen que sumar 180º. Por lo tanto, cada uno de ellos tiene que medir 90º. Luego, el segmento que une al vértice A con el punto medio de lado $\overline{BC}$ **siempre** es perpendicular a dicho lado, es decir que además de ser su mediana es su altura.
A partir de un razonamiento, de un encadenamiento deductivo, se llegó a mostrar cuáles **tienen** que ser los ángulos iguales en un triángulo isósceles, que la mediana del lado $\overline{BC}$ es bisectriz del ángulo $C\hat{A}B$ y es, además, la altura del lado $\overline{BC}$.

Todo pudo hacerse comparando triángulos y analizando cuáles eran congruentes. La congruencia de triángulos no solo es un contenido en sí mismo, sino que además se constituye en una herramienta para demostrar otras propiedades geométricas.

Una vez que los alumnos han comprendido la relación entre los lados y ángulos en los triángulos isósceles, es importante que tengan oportunidades de ponerla en juego, por ejemplo, resolviendo problemas donde sea necesario reconocer esta relación. Una cuestión a tener en cuenta es que los triángulos deberían presentarse en diferentes posiciones, para que los estudiantes no relacionen la posición de los ángulos congruentes solamente a una figura estereotipada.

Ítem N° 17 de los Cuadernillos 1 y 6 de 2°/ 9° año

17 Los 40 alumnos de 2º año de una escuela están planeando un viaje de estudios a Mendoza. Hay dos empresas de turismo que hacen diferentes ofertas:

Empresa Sol
$540 (por Persona)

Incluye

-Ida y vuelta en ómnibus
-Hotel con desayuno y cena
-6 excursiones
-8 días y 7 noches

Empresa Don Rafael
$505 (por Persona)

Incluye

-Ida y vuelta en ómnibus
-Hotel con desayuno
-6 excursiones
-8 días y 7 noches

Cena: $6 por día.

¿Cuál de las ofertas les resulta más económica a los alumnos si quieren cenar todas las noches en el hotel?

Mostrá cómo lo resolvés.

....

....

....

....

Respuesta: ....

Datos técnicos

Contenido: Números y operaciones
Capacidad: Resolución de problemas
Nivel de desempeño: Medio

¿Qué evalúa el ítem?

El ítem requiere que el alumno resuelva un problema que involucra operar con números naturales y enteros y que compare resultados para dar la respuesta pedida.

¿Qué puede hacer el alumno para resolver el ítem?

El ítem presenta una situación contextualizada. Para resolver el problema planteado el alumno tiene que analizar dos situaciones que tienen puntos en común y otros diferentes. Esto requiere una lectura muy detenida, un análisis de la situación, la elección del procedimiento a seguir y una vez obtenidos los dos resultados, decidir cuál es la opción más conveniente. Las operaciones involucradas son multiplicación y suma y se opera en el campo de los números naturales.
El alumno debe mostrar el procedimiento de resolución seguido o, en su defecto, dar una explicación de por qué elige una opción y no la otra.

¿Qué resultados se obtuvieron?

El ítem formó parte de la prueba en dos cuadernillos de la prueba de 2° año del Nivel Medio o 9° año de Educación General Básica.
A continuación se muestran los porcentajes de respuestas obtenidos en las distintas categorías.

Finalización del Nivel Medio	
Respuestas correctas	22,0%
Respuestas parcialmente correctas	12,0%
Respuestas incorrectas	12,2%
Respuestas omitidas	53,8%

Porcentajes de respuestas Ítem 17 de 2°/ 9° año.

La respuesta se consideró **correcta** si el alumno respondió Empresa Sol y la acompañó de una explicación correcta y/o mostró un procedimiento de resolución correcto.

Ejemplo de respuesta correcta

Mostrá cómo lo resolvés.

505 + 7.6 =

505 + 42 = 547

Respuesta: la empresa Sol porque cuesta $7 menos

La respuesta fue considerada **parcialmente correcta** si el alumno contestó Empresa Sol, sin mostrar el procedimiento o sin escribir una explicación sobre el mismo.

Ejemplo de respuesta parcialmente correcta

¿Cuál de las ofertas les resulta más económica a los alumnos si quieren cenar todas las noches en el hotel?

Mostrá cómo lo resolvés.

EMPRESA SOL

$540

Respuesta:

Las respuestas que entraron en la categoría de **incorrectas** fueron otras respuestas, la respuesta “no sé”, la ilegible o respuestas no pertinentes.

Por ejemplo algunos alumnos respondieron Empresa Sol pero dieron una explicación evidentemente inconsistente o mostraron un procedimiento incorrecto.

Otros, en cambio, respondieron Empresa San Rafael, con o sin explicación o con un procedimiento incorrecto.

Ejemplo 1 de respuesta incorrecta

¿Cuál de las ofertas les resulta más económica a los alumnos si quieren cenar todas las noches en el hotel?

Mostrá cómo lo resolvés.

Los alumnos prefieren en la empresa Sol porque pagan $540 (más caro que la Empresa Don Rafael) pero cenan en el hotel

Respuesta:

Ejemplo 2 de respuesta incorrecta

¿Cuál de las ofertas les resulta más económica a los alumnos si quieren cenar todas las noches en el hotel?

Mostrá cómo lo resolvés.

La que le resulta mas economila la empresa "de Don Rafael" pero esa no tiene cena y ello quieren cenar entonses se quedan con la empresa "Sol" que vale $540 y tiene cena

Respuesta: se queda con la enpreza "Sol" que vale $35 mas que la otra vale $540

La respuesta **omitida** fue en blanco, es decir, cuando no hubo respuesta.

Reflexión Pedagógica:

El ítem requiere que el alumno compare dos situaciones, que elija una y argumente su elección. Tal vez sean situaciones problemáticas nuevas para el alumno, pero hay que considerar que debería disponer de todas las estrategias y manejar todos los cálculos requeridos por el problema, para resolverlo, comparando los valores obtenidos en uno y otro caso y haciendo una elección.

Al expresar los procedimientos que lo conducen a un resultado, a una afirmación, el alumno elabora argumentaciones y pruebas para demostrar su validez.

Esta situación, que puede interpretarse desde una lógica de lo cotidiano, hace que algunos alumnos produzcan soluciones alejadas de lo esperable desde la matemática. No sería raro que alguno dijera que "sería mejor elegir el hotel más barato y comprar comida en un almacén, que sale más barata", lo cual seguramente es cierto pero no sirve para responder al problema. Creemos que esta confusión, junto a los posibles errores que los alumnos pueden cometer al tener que resolver una situación que involucra varios pasos es lo que provocó el bajo porcentaje de aprobados.

Sugerencias para la enseñanza

Las situaciones contextualizadas en matemática son **modelos** de la realidad, y así deberían entenderse. Muchas veces los docentes naturalizamos las condiciones ideales bajo las cuales un modelo es válido y nos sorprendemos frente a respuestas como la anteriormente relatada. Cuando trabajamos problemas de proporcionalidad y decimos que “10 obreros pintan una pared en 5 días, ¿cuánto tardarán 4 obreros en pintar la misma pared?” tenemos que suponer que todos los pintores trabajan a exactamente el mismo ritmo, lo cual es imposible. Pero, ¿lo discutimos con nuestros alumnos? ¿les queda claro que solo obtendremos una respuesta aproximada porque estamos modelizando la situación?
Creemos que se impone una reflexión sobre la naturaleza de los problemas matemáticos, los modelos y las suposiciones que subyacen a ellos.

Como dice Charnay (1994),”Las producciones de los alumnos son información sobre su estado de saber”.
No se aprende matemática solo resolviendo problemas. El conocimiento permite decidir qué hacer para resolver un problema. Pero además, el conocimiento debe permitir comunicar los procedimientos elegidos, y en situaciones de aula, confrontarlos y compararlos con los de otros compañeros.
El debate y la reflexión constituyen modos de aprender a resolver problemas, siempre que el docente lo tenga como objetivo. De la misma manera que se aprenden contenidos matemáticos también se aprende a resolver problemas.

Por lo tanto, pensamos que la enseñanza, en estos casos, debería centrarse en cómo resolver problemas, discutiendo diferentes formas de hacerlo y dando argumentos para ello. De esta forma, los alumnos irán aumentando su bagage de herramientas matemáticas, cada una con un conjunto de situaciones que pueden resolverse con ellas.
A partir de la resolución de estos problemas, de su discusión, de reflexionar cómo escribir la solución y su explicación, esperamos que los alumnos vayan formándose una representación de qué significa hacer matemática en la escuela.

Análisis de los resultados de los Ítems Abiertos del ONE 2005

MATEMÁTICA

Prueba de Finalización de la Educación Secundaria

La prueba de matemática evaluó en el 2005 una muestra de estudiantes que finalizaban la Educación Secundaria.

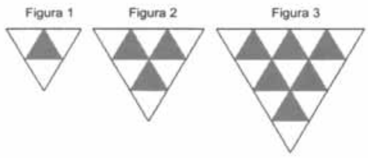
¿Cómo estuvo constituida la prueba?

La prueba de Finalización de la Educación Secundaria estuvo constituida por seis cuadernillos con ítems cerrados o de opción múltiple con cuatro opciones de respuesta y seis ítems de respuesta abierta a desarrollar.
Para resolver los ítems de respuesta abierta los alumnos tuvieron que desarrollar un procedimiento, elegir una estrategia de resolución, redactar una respuesta.
Con el fin de atender al procedimiento de resolución y no solo al resultado, los ítems de respuesta abierta fueron corregidos por docentes debidamente capacitados. Para garantizar la objetividad en la corrección, los correctores utilizaron una guía elaborada para tal fin por el equipo pedagógico de la DINIECE, y de esta manera, clasificaron las respuestas en cuatro categorías contempladas en la grilla de corrección: respuesta correcta, parcialmente correcta, incorrecta y omitida.
Cada uno de los ítems de respuesta abierta se incluyó en dos cuadernillos de manera que cada ítem fuera contestado por la tercera parte de los alumnos de la muestra.
Tuvimos la oportunidad de acceder a las respuestas dadas por los alumnos y de allí seleccionar las que nos parecieron que mejor representaban a las distintas categorías.
En este informe queremos compartir con ustedes dos de las situaciones que los alumnos que finalizaban su Educación Secundaria tuvieron que resolver y hacer algunos comentarios sobre los conocimientos y los procesos cognitivos que están a la base de las mismas.

Ejemplos de Ítems de respuesta abierta a desarrollar

- **Ejemplo 1: Ítem N° 12 de los Cuadernillos 3 y 4 de Fin de la Educación Secundaria**

12



El diagrama muestra los primeros tres triángulos de una serie de triángulos equiláteros que va aumentando su tamaño.
Cada uno está formado por pequeños triángulos blancos y grises de 1 cm de lado.

A) Completá la tabla hasta la línea de la figura número 7.

Figura número	Nº de pequeños triángulos blancos	Nº de pequeños triángulos Grises	Nº total de pequeños triángulos
1	3	1	4
2			
3			
4			
5			
6			
7			
...	...	...	...
...	...	...	...
n			

B) Expresá mediante una fórmula el número total de pequeños triángulos que tendrá una figura que ocupe el lugar ***n***.

....

Respuesta: ....

Datos técnicos

Contenido: Números Reales, sucesiones y producción de fórmulas.
Capacidad: Resolución de problemas
Nivel de desempeño: Alto

¿Qué evalúa el ítem?

El ítem requiere que el alumno identifique alguna ley de formación de una secuencia dada en forma gráfica para poder continuarla y obtener una fórmula general. Estuvo conformado por dos preguntas. La primera demanda que el alumno identifique una regla de formación de una secuencia gráfica y que la pueda continuar completando espacios vacíos en una tabla. La segunda pregunta requiere que el estudiante escriba una fórmula que permita generar un elemento de una columna determinada.

¿Qué puede hacer el alumno para resolver el ítem?

El alumno, en primer lugar, puede contar los triángulos blancos y grises de las figuras 2 y 3 y completar las filas correspondientes del cuadro. Luego necesita identificar la regla de formación de la secuencia gráfica, es decir, analizar cómo va aumentando el número de triángulos blancos y grises para poder generar los triángulos que siguen en la secuencia, sin necesidad de dibujarlos.

No existe una única forma de generar la variación de triángulos blancos y grises en la secuencia. Una forma consiste en analizarlo gráficamente, es decir, se puede pasar de una figura a otra agregando "un piso horizontal" que contiene un triángulo blanco y un triángulo gris más que el piso anterior.

Otra forma es estrictamente numérica en la que es necesario analizar cómo varía la cantidad de triángulos de una figura a otra sin tener en cuenta la figura que lo generó. Por ejemplo, los blancos varían según la sucesión 3 – 6 – 10…. y la diferencia entre ellos es 3 – 4 - ….. Generalizando se puede continuar agregando 5 – 6 – 7 y 8 triangulitos para obtener los elementos siguientes. La segunda columna se puede completar de manera análoga mientras que la tercera se obtiene sumando las otras dos.

Una vez completado el cuadro hasta la fila 7 el alumno tiene que analizar los valores de la última columna y escribir una fórmula general para el número total de triángulos que tiene la figura que ocupa el lugar "n". Para ello puede identificar que todos esos números son cuadrados y que resultan de elevar al cuadrado un número que es el siguiente del número de fila, es decir, el siguiente de "n".

¿Qué resultados se obtuvieron?

En la primera parte, 12.A, se le pidió al alumno que complete el cuadro hasta la fila 7.

A continuación se muestran los porcentajes de respuestas obtenidos en las distintas categorías.

Respuestas correctas	23,2%
Respuestas parcialmente correctas	9,5%
Respuestas incorrectas	43,9%
Respuestas omitidas	23,4%

Porcentajes de respuestas Ítem 12.A

La respuesta se consideró **correcta** si el alumno completó correctamente hasta la figura 7 del cuadro.

Ejemplo de respuesta correcta:

A) Completá la tabla hasta la línea de la figura número 7.

Figura número	Nº de pequeños triángulos blancos	Nº de pequeños triángulos Grises	Nº total de pequeños triángulos
1	3	1	4
2	6	3	9
3	10	6	16
4	15	10	25
5	21	15	36
6	28	21	49
7	36	28	64

La respuesta se consideró **parcialmente correcta** cuando el alumno completó correctamente la fila correspondiente a la figura 4 y 5 del cuadro y las demás filas con errores o si las omitió o también aquellos casos en los que completó correctamente dos de las tres columnas (hasta la fila 7).

Ejemplo de respuesta parcialmente correcta: El estudiante completó correctamente solamente hasta la fila 5 de la tabla.

A) Completá la tabla hasta la línea de la figura número 7.

Figura número	Nº de pequeños triángulos blancos	Nº de pequeños triángulos Grises	Nº total de pequeños triángulos
1	3	1	4
2	6	3	9
3	10	6	16
4	15	10	25
5	21	15	36
6	28	18	46
7	32		
...	...	...	...
...	...	...	...
n			

Las respuestas que entran en la categoría de **incorrectas** son otras respuestas o la respuesta "no sé" o ilegible o respuestas no pertinentes.

Ejemplo de respuesta incorrecta:

La respuesta que se muestra es incorrecta porque tuvo un error en la segunda fila y además porque no logró avanzar más allá de la tercera fila en su intento de completar la tabla.

A) Completá la tabla hasta la línea de la figura número 7.

Figura número	Nº de pequeños triángulos blancos	Nº de pequeños triángulos Grises	Nº total de pequeños triángulos
1	3	1	4
2	6	3	16
3	10	6	16
4			
5			
6			
7			
...	...	...	...
...	...	...	...
n			

La respuesta **omitida** es en blanco, es decir, cuando no hay respuesta.

Puede llamar la atención que solo el 23,2% de los alumnos haya respondido correctamente esta parte de la pregunta porque no es necesario aplicar demasiados conocimientos matemáticos, alcanza con buen sentido común. Es posible analizar cómo se van formando las distintas figuras, que además pueden dibujarse, y contar en ellas la cantidad de triángulos de cada color. Justamente esto puede resultarles sorprendente a los estudiantes y llevarlos a descreer de su solución, descartándola. Otros, creyendo que no puede ser simple, buscan formas más complejas de resolución que terminan siendo erróneas.
Los alumnos, en función de la práctica a la que están habituados, van constituyendo una imagen de qué constituye un problema matemático adecuado. Cuando encuentran uno que no responde a esta imagen, se desconciertan y no saben si las estrategias de las que disponen son “correctas”. Esto ocurre cuando las situaciones que se les presentan a los estudiantes son predecibles por ellos, cuando se trabaja con “tipos” de problemas para trabajar en su identificación sin profundizar en las razones por las cuales una herramienta es adecuada para resolverlo, etc.
Por lo tanto, es importante que los problemas que se trabajen en las situaciones de enseñanza sean desafiantes, complejos y variados, de manera que se pueda debatir acerca de ellos con el objetivo de buscar explicaciones basadas en conocimientos.

- ✓ La segunda parte del ítem, 12.B, requiere que el alumno escriba una fórmula general para el número total de triángulos que tiene la figura que ocupa el lugar “n”.

El cuadro muestra los porcentajes obtenidos en las distintas categorías de respuestas.

Respuestas	1,4%

correctas	
Respuestas parcialmente correctas	0,9%
Respuestas incorrectas	15,1%
Respuestas omitidas	82,6%

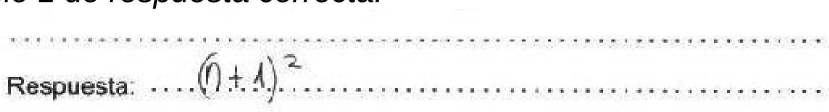
Porcentajes de respuestas Ítem 12.B

La respuesta fue considerada **totalmente correcta** si el alumno contestó $(n + 1)^2$ o una expresión equivalente o si lo comunicó en un texto de forma correcta.

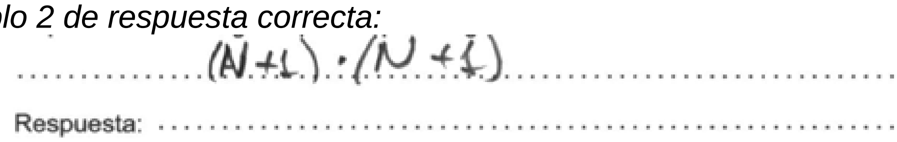
Ejemplos:

- ✓ "El cuadrado del siguiente de n"
- ✓ n+1 al cuadrado.
- ✓ "El número total de triángulos es igual al lado al cuadrado"
- ✓ "Cantidad de triángulos de un costado al cuadrado"

Ejemplo 1 de respuesta correcta:



Ejemplo 2 de respuesta correcta:



Fue considerada **parcialmente correcta** si el alumno dio una respuesta parcial en símbolos o expresada en forma coloquial.

Ejemplos:

- ✓ n+1
- ✓ n^2
- ✓ El siguiente del número de la figura.
- ✓ El número de la figura al cuadrado.

Ejemplo de respuesta parcialmente correcta:

En la categoría de respuestas **incorrectas** entraron otras respuestas, "no sé", respuesta ilegible o respuestas no pertinentes.

Ejemplo 1 de respuesta incorrecta:

Algunas respuestas incorrectas muestran un intento fallido de expresar la relación mediante una fórmula en la que interviene n.

Respuesta: $(m-1)+d=m$

Ejemplo 2 de respuesta incorrecta:
Otras respuestas incorrectas usan números. No hay en estos casos un intento de comunicar usando una fórmula la relación pedida, sino un esfuerzo por calcular el número total de triángulos de una fila determinada.

Respuesta: $m = 66+55$

La respuesta **omitida** es en blanco.

Reflexiones pedagógicas:
El ítem muestra una secuencia a partir de una figura geométrica que hay que continuar. Los alumnos trabajan con secuencias desde el primer ciclo de la escuela primaria, continúan en el tercer ciclo y en los últimos años de la Educación Secundaria, con el paulatino aumento de dificultad en las mismas. En esta última etapa el alumno, además de poder continuar la secuencia, debe encontrar una fórmula matemática que permita generar cada término de la misma.
Es muy notorio que solo el 1,4% de los alumnos haya encontrado una respuesta correcta y 0,9% una parcialmente correcta. Son porcentajes demasiado bajos, que merecen ser interpretados.

Entender que el número total de triángulos de cada término de la secuencia responde a la misma relación y se puede calcular con una misma fórmula, implica que el alumno ha logrado una generalización. Y para saber generalizar hay saber qué mirar y cómo mirarlo. Hay muchas características generalizables en estas figuras, pero solo algunas permiten obtener una fórmula. Por ejemplo, es posible afirmar que todos los elementos de la secuencia son triángulos, que están formados por triangulitos blancos y grises, se puede indicar cómo van aumentando los triángulos de cada color y decir que la cantidad total de triángulos es la suma de los triángulos blancos y grises. Todas estas afirmaciones son verdaderas, implican generalizaciones, pero no son muy útiles a la hora de encontrar la fórmula pedida.
Como docentes, muchas veces naturalizamos qué es lo que hay que generalizar. No se nos ocurriría decir que todas las figuras están formadas por triangulitos blancos y grises, a pesar de que es verdadero y general. Sabemos que no es eso lo que tenemos que mirar. Y esto es justamente lo que los alumnos no saben. Como no saben cuál de todas las generalidades deberían tener en cuenta, analizan todas, alguna o ninguna.
Los alumnos tienen que aprender a generalizar y nosotros tenemos que enseñarles a hacerlo. El problema con el que nos enfrentamos es que no se

trata de un contenido que pueda ser enseñado directamente, del mismo modo que, por ejemplo, las funciones.
La generalización solo puede enseñarse de forma indirecta, seleccionando situaciones que lleven a los alumnos a generalizar y proponiendo luego reflexiones sobre lo desarrollado.

Enseñar matemática es enseñar un cierto modo de pensar y producir.
Y una forma de hacer matemática, para este tipo de problemas, consiste en realizar varios ensayos numéricos (dibujar triángulos de la secuencia y contar los triangulitos de cada color) con un proyecto de generalización.
"La producción de un modo de representación requiere, en numerosas ocasiones, de un trabajo exploratorio que puede involucrar el uso de ejemplos, los ensayos con ciertos valores que permitan ver los efectos o resultados que tienen" (Itzcovich, 2007).

En la búsqueda de esta generalidad, en estos ensayos numéricos los números se usan como si fueran variables, buscando qué hay de general en ellos. Es decir, no siempre es necesario basar un trabajo general, algebraico en el uso de letras.

Al analizar las producciones de los alumnos que terminan su escolaridad secundaria se puede observar que esta tarea exploratoria se ha presentado en muy pocos casos. Esto es probable que se deba a que no han tenido oportunidad de enfrentarse a problemas que los obligue a tomar decisiones, a hacer matemática en el sentido que hemos descripto anteriormente.

Sugerencias para la enseñanza
La enseñanza de la generalidad abarca toda la escolaridad. Es necesario que haya un trabajo sostenido en este sentido para lograr que los alumnos construyan herramientas para trabajar sobre la generalidad.
Los casos en los que se solicita producir una fórmula, como en el caso presentado aquí, constituyen una clase de problemas que requieren trabajar sobre la generalidad. Hay también otras situaciones que permiten trabajar sobre generalizaciones que es interesante trabajar y analizar en clase con nuestros alumnos.
Presentamos algunas, que no están secuenciadas.

> *1) Sin hacer divisiones, encuentren el resto de dividir al número $25\times7\times9 + 23$ por: a) 25 b) 9 c) 35*

Al no permitir hacer los cálculos de las divisiones, solo es posible analizar la expresión del número dado como dato y, eventualmente, reescribirlo. El objetivo de problemas como éste es, por un lado, trabajar sobre la lectura de la información que porta una escritura y, por el otro, mostrar como una reescritura de esa información revela información que la escritura inicial no permitía ver.
En este caso, $25\times7\times9$ es lo mismo que $25\times(7\times9)$, que puede leerse como un múltiplo de 25 y, por lo tanto, $25\times7\times9 + 23 = 25\times(7\times9) + 23$, es un múltiplo de 25 más 23. Luego, el número dado es 23 unidades mayor que un múltiplo de 25, lo que implica que su resto al dividirlo por 25 es 23.

Como $25\times7\times9 + 23 = 9\times(7\times25) + 23$, el número es 23 unidades mayor que un múltiplo de 9, pero 23 no puede ser el resto de dividirlo por 9. Una reescritura permite observar otras propiedades de este número:

$25\times7\times9 + 23 = 9\times(7\times25) + 23$
$= 9\times(7\times25) + 18 + 5$

Los dos primeros términos son múltiplos de 9, luego, el resto al dividirlo por 9 es 5.

Para analizar cuál es el resto al dividir al número en cuestión por 35 es necesario saber cuántas unidades se pasa de un múltiplo de 35. Para esto es necesario reescribirlo para que su expresión "muestre" una suma entre un múltiplo de 35 y un número natural menor que 35:

$25\times7\times9 + 23 = 5\times5\times7\times9 + 23$
$= 35\times(5\times9) + 23$

Por lo tanto, el resto de la división es 23.

A propósito de la lectura de la información que portan las expresiones, Abraham Arcavi cita:

> *"El resolver las ecuaciones algebraicas simples no requiere más que manipulaciones estándares a fin de lograr el resultado deseado, y la única "lectura" significativa requerida es darle sentido a la respuesta en la forma de x =..............*
> *En realidad, desde un punto de vista, esta es una de las fuerzas de los símbolos - nos permiten separarnos, e inclusive olvidarnos, de sus referentes a fin de producir resultados eficientemente.*
> *(…)*
> *Sin embargo, pensamos que es posible que Whitehead estuviera de acuerdo con Freudenthal (1983)*
> *"He observado, y no solo en otras personas sino también en mí... que las fuentes del discernimiento o el conocimiento profundo pueden llegar a estar muy obstaculizadas por los automatismos. Una persona termina realizando una tarea u actividad tan perfectamente que ya no existe, uno no se plantea la pregunta de cómo y por qué, ya no se la formula ni puede ser formulada, y ya ni siquiera es entendida como una pregunta relevante y significativa, llena de sentido."*
> *Interrumpir un procedimiento simbólico mecánico a fin de inspeccionar y reconectarse con los significados subyacentes podría ser un ejercicio útil para quitar obstáculos o trabas, llamémosle desobstaculizador, para usar el lenguaje de Freudenthal."*[2]

Creemos entonces que la lectura de la información debe acompañar al aprendizaje de las técnicas, dándose sentido mutuamente.

2) Si b es un número natural, ¿cuáles son los valores de b para los cuales el número 3.(2b - 1) es un número par?

Este problema también aborda la lectura de la información a partir de una expresión. Al intervenir una letra, es posible hacer ensayos numéricos:

b	3.(2b – 1)
1	3
2	9

[2] Arcavi, A., 1994.

3	15
4	21
5	27

Analizando los resultados obtenidos, los alumnos podrán observar que todos son impares, lo que los puede llevar a suponer que no es posible obtener un número par. Sin embargo, es necesario encontrar una explicación basada en conocimientos matemáticos que valide o refute la conjetura anterior.
Se espera que, luego de un trabajo en este sentido, se llegue a un razonamiento similar al siguiente:

- 3 es un número impar.
- 2b es un número par porque es el producto entre 2, que es par, y un número natural, b.
- 2b – 1 es impar porque es el anterior de un número par.
- 3.(2b – 1) es el producto de dos números impares, entonces es impar.

La última afirmación indica que <u>sin importar cuál sea el valor de b</u>, el resultado de 3.(2b – 1) es siempre un número impar.

3) Encuentren un número entero de manera que al dividirlo por 25 se obtenga un resto de 22.
a) ¿Cuántas soluciones hay?
b) Pablo dice que todos los números que encontró terminan en 2 o en 7 y que no es casual. ¿Están de acuerdo con él? ¿Por qué?

Si bien se pide *un* número que tenga resto 22 al ser dividido por 25, la pregunta a) plantea una discusión sobre la cantidad de soluciones, lo que lleva a la producción de una fórmula que verifican todos los números buscados:

Hay infinitas soluciones porque hay infinitos cocientes posibles y, para cada uno de ellos se obtiene un dividendo diferente a partir del cálculo D=25.c + 22.

Una exploración para algunos valores de c muestra que los dividendos que se obtienen terminan en 2 o en 7. Nuevamente, estos ensayos son útiles para formular una conjetura que tiene que ser validada.
¿Cuáles son los conocimientos en los que los alumnos pueden apoyarse para explicar por qué los valores obtenidos siempre terminan en 2 o en 7?
Como ya hemos señalado, las diferentes maneras de responder dependen de muchos factores y de la experiencia matemática de los alumnos, pero una posibilidad es:

- 25c es un múltiplo de 25, que también es un múltiplo de 5, por lo tanto es un número que seguro termina en 0 ó en 5 y no hay otras posibilidades.
  Si este número termina en 0, al sumarle 22 se obtiene un resultado que termina en 2.
  Si 25c termina en 5, al sumarle 22 se obtiene un resultado que termina en 7.

En este problema, la lectura de la expresión, junto con conocimientos de múltiplos y factores, permiten obtener una expresión general que verifican todos los números que tienen un resto particular al ser divididos por otro para luego validar por qué tienen cierta regularidad.

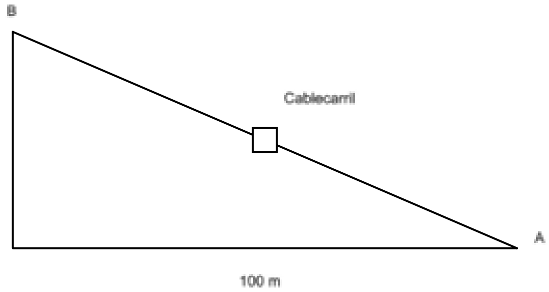
> *4) ¿Es cierto que si a, b y c son tres números enteros que tienen el mismo resto al ser divididos por 3, entonces a + b + c es múltiplo de 3?*

En este caso, la exploración con ejemplos sirve para que los alumnos se convenzan de que la afirmación es verdadera. Decimos que se convencen porque sabemos que les alcanza con unos ejemplos para tomar una decisión, por lo que es preciso que planteemos otras afirmaciones que solo sean válidas para un conjunto de valores. La discusión y reflexión sobre ellas abre la puerta hacia la necesidad de una validación.
Surge así un nuevo problema: cómo hacer para explicar por qué a + b + c es múltiplo de 3. Hay varias formas de hacerlo. Por ejemplo:

- Los restos posibles al dividir un número por 3 son 0, 1 y 2.
  Si los tres números tienen resto 0, entonces son múltiplos de 3, por lo tanto su suma también es múltiplo de 3.
  Si los tres números tienen resto 1, cada uno de ellos puede escribirse como un múltiplo de 3 más 1. Entonces, por ejemplo, a=3n+1, b=3m+1 y c=3p+1. Luego,
  $$\begin{aligned} a + b + c &= 3n + 1 + 3m + 1 + 3p + 1 \\ &= 3n + 3m + 3p + 3 \end{aligned}$$
  Como a + b + c de los tres números pudo expresarse como una suma de múltiplos de 3, entonces es múltiplo de 3.
  De manera análoga puede demostrarse que si los tres números tienen resto 2, entonces a + b + c también es múltiplo de 3.

A modo de conclusión podemos decir que la enseñanza de la generalidad requiere de un proyecto a largo plazo, de una elección minuciosa de problemas y una reflexión posterior sobre su resolución.

- ✓ **Ejemplo 2: Ítem N° 12 de los Cuadernillos 5 y 6 de Fin de la Educación Secundaria**



Un cablecarril va desde la estación A hasta la estación B y tarda 2 minutos.

El promedio de velocidad del cablecarril es de 1 metro por segundo y se mueve en línea recta.

¿A qué altura está la estación B?

Mostrá cómo lo resolvés

....

....

....

....

....

....

Respuesta: ....

Datos técnicos

Contenido: Geometría, teorema de Pitágoras, velocidad.
Capacidad: Resolución de problemas
Nivel de desempeño: Alto

¿Qué evalúa el ítem?

El ítem requiere que el alumno resuelva un problema que involucra la noción de velocidad de un móvil, la equivalencia entre medidas de tiempo y la relación entre los lados de un triángulo rectángulo enunciada por el teorema de Pitágoras.

¿Qué puede hacer el alumno para resolver el ítem?

El alumno que se enfrenta a la situación planteada tiene que, en primer lugar, calcular la distancia entre el punto de partida A y el punto de llegada B. Como conoce la velocidad del cablecarril, puede aplicar una proporción: si en un segundo recorre un metro, en 120 segundos (2 minutos) va a recorrer 120 metros. Por lo tanto conoce la longitud del segmento AB.
En segundo lugar debe identificar que se trata de un triángulo rectángulo y puede recurrir al teorema de Pitágoras para calcular el cateto desconocido, teniendo como datos un cateto y la hipotenusa.

$$120^2 = 100^2 + x^2$$
$$14400 - 10000 = x^2$$
$$\sqrt{4400} = x$$
$$x \cong 66{,}3m$$

¿Qué resultados se obtuvieron?

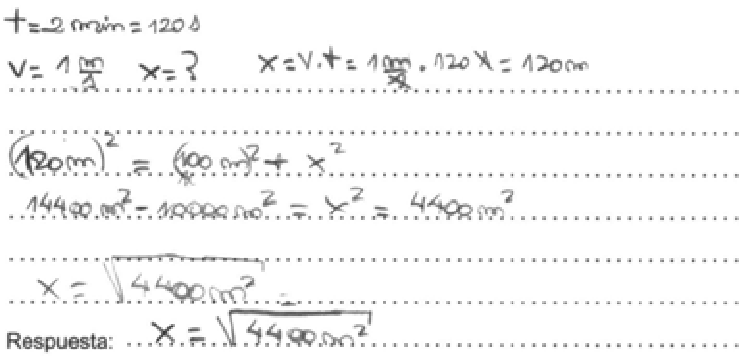
A continuación se muestran los porcentajes de respuestas obtenidos en las distintas categorías.

Respuestas correctas	5,5%
Respuestas parcialmente correctas	6,9%
Respuestas incorrectas	33,4%
Respuestas omitidas	54,2%

Porcentajes de respuestas Ítem 12.A

La respuesta se consideró **correcta** si el alumno calculó la altura de la estación B con valores aproximados a 66 metros o dejó indicada la raíz. Hay que recordar que la prueba fue resuelta sin usar calculadora.

Ejemplo de respuesta correcta:

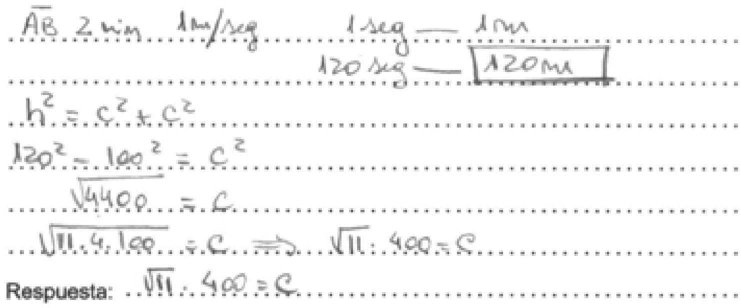


Las respuestas que se clasificaron como **parcialmente correctas** son aquellas en las que el alumno desarrolla un procedimiento de resolución correcto y completo pero con errores en los cálculos.

Por ejemplo si el alumno calcula que la distancia AB es 120 metros y luego plantea la relación pitagórica para calcular la altura de la estación B, pero comete error en algún cálculo o en la resolución de la ecuación. También se consideraron parcialmente correctas aquellas en las que los estudiantes se equivocaron en el cálculo de AB pero usaron ese valor para calcular la altura por el teorema de Pitágoras.

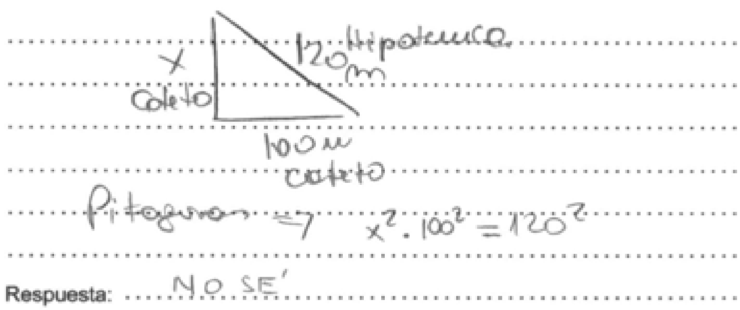
Ejemplo 1 de respuesta parcialmente correcta:

Algunos estudiantes solamente tuvieron errores en los cálculos



Ejemplo 2 de respuesta parcialmente correcta:

Otros estudiantes averiguaron la distancia AB e intentaron calcular la altura aplicando el teorema de Pitágoras, pero plantearon una relación equivocada.



Las respuestas que entran en la categoría de **incorrectas** son otras respuestas, incluyendo las de los alumnos que solamente obtuvieron 120 metros y lo dieron como resultado final. También la respuesta “no sé” o ilegible o respuestas no pertinentes.

Ejemplo de respuesta incorrecta:

Un número importante de respuestas dan como resultado final 120 metros. Es posible que estos estudiantes no hayan entendido que tenían que calcular la altura de la estación B hasta el piso, puesto que han calculado la distancia entre A y B.

Tarda 2 minutos
1 metro x seg

1 metro —— 1 seg
x mts —— 120 seg

Respuesta: x = 120 mts

La respuesta **omitida** es en blanco, es decir, cuando no hay respuesta.

Reflexión Pedagógica:
El ítem presenta una situación que requiere organizar una secuencia de dos pasos en su resolución: el cálculo de la longitud de un segmento aplicando una proporción y el cálculo de la longitud de otro segmento recurriendo a la relación pitagórica entre los lados de un triángulo rectángulo.
Es deseable que los alumnos que finalizan el Nivel Medio estén en condiciones de resolver situaciones como ésta. A lo largo de sus estudios se han enfrentado a situaciones de proporcionalidad y de equivalencia de tiempo. Estos son conocimientos básicos que trascienden el ámbito escolar.
La noción de altura de un objeto, de altura de un edificio, de altura o estatura de una persona, de altura a la que está la estación B, está íntimamente relacionada con la de perpendicularidad y despegada, en este caso, de la de camino recorrido. Asimismo, los alumnos reconocen con facilidad la altura de un triángulo cuando ésta es perpendicular a la base. Cabe preguntarnos ¿dónde estuvo la dificultad? ¿en la noción de altura? ¿en reconocer al cateto como altura? ¿en la lectura comprensiva de la propuesta?
Por otro lado, el teorema de Pitágoras enuncia la relación entre los lados de un triángulo rectángulo y es una propiedad que se enseña y aprende en los primeros años del secundario y a la que se recurre en muchas oportunidades. Es uno de los conocimientos base de otros tales como vectores, números complejos, distancia entre dos puntos, etc. Volvemos a preguntarnos por qué este problema ha resultado difícil para los alumnos. Los problemas en los que tienen que recurrir a diferentes conceptos, establecer relaciones entre ellos, diseñar un plan de resolución y ejecutarlo resultan difíciles.
El ítem pone al alumno ante el desafío de usar e integrar esos conocimientos para resolver una situación nueva. Solamente el 5,5% de los alumnos evaluados lo ha resuelto correctamente. Pero más de la mitad no ha hecho ni siquiera el intento de abordarlo, dejando en blanco el lugar destinado a la solución.
Sabemos que la mayoría de los alumnos pueden aplicar el teorema de Pitágoras para encontrar alguno de los lados de un triángulo rectángulo. Tienen claro que sirve para eso. De hecho, es uno de los teoremas que “mejor”

aplican, incluso de manera abusiva, por ejemplo a triángulos que no son rectángulos.
El problema que se les presentó requiere del uso de este teorema, pero solo se destaca el dato de la medida de uno de los catetos del triángulo. Los alumnos saben que necesitan dos datos y necesitan encontrar otro. Creemos que aquí se encuentra la fuente de la dificultad que los estudiantes han encontrado.
La relación entre la velocidad, el tiempo que se tarda en recorrerla una distancia, esa distancia y la medida de un lado de un triángulo no es inmediata, aunque el cálculo matemático necesario para encontrar esa medida sea simple.

La práctica matemática a la que los alumnos están habituados hace que adquieran soltura para resolver cierto tipo de problemas. Si es variada, los estudiantes elaborarán diversas estrategias para resolver situaciones que involucren ensayos y reformulaciones. Si no lo es, sus resoluciones serán más estandarizadas y tenderán a identificar “de qué es el problema” para aplicar la fórmula que corresponde.

El ítem que estamos analizando no es un problema estándar. No se resuelve a través de la aplicación directa de una fórmula, entonces es muy probable que los alumnos que no tengan práctica en la resolución reflexionada de problemas no sepan cómo empezar.

En cuanto a las sugerencias para la enseñanza, no creemos que haya que profundizar en los contenidos, sino en la resolución de problemas del modo que mencionamos más arriba.

Bibliografía

- Arcavi, A., "Symbol sense: Informal sense-making in Formal Mathematics", en For the Learning of Mathematics, 1994.
- Bressan, A, Bogisic, B, Crego, K, Razones para enseñar geometría en la educación básica, Ediciones Novedades Educativas, 2006.
- Charnay, R, Aprender por medio de la resolución de problemas en Didáctica de la matemática, Aportes y reflexiones, Parra, C y Saiz, I, Paidós, 1994.
- Itzcovich, H., (coord.), Ressia de Moreno, Beatriz, Novembre, Andrea, Becerril, María Mónica, La matemática escolar, Aique, 2007.
- Matemática, Serie Cuadernos para el aula, Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología, 2006.
- Moreno, M y Sastre, G, Las escrituras aritméticas, Barcelona, IMIPAE, 1986.

- Novembre A. y Ponce, H. Coordinación general: Crippa A. "Estudiar geometría y pensar su enseñanza". CePA a Distancia. Buenos Aires, 2007.

- Ressia, B., en Enseñar matemática en el Nivel Inicial y en el Primer Ciclo de la EGB, Panizza, M, Compiladora, Paidós, 2003.

- Sadovsky, P., Enseñar matemática hoy, Libros del Zorzal, 2005.