

## LUCA PACIOLI E O SEU *DE VIRIBUS QUANTITATIS*

*Tiago Hirth*

Associação Ludus

e-mail: [xztiago@gmail.com](mailto:xztiago@gmail.com)

Luca Pacioli nasceu em meados da quinta década do séc. XIV, com registo de morte no Convento de *Santa Croce* em Florença, em 1517. É tradicionalmente conhecido por algumas das suas obras, entre as quais: a *Summa arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, livro de ensino que serviria de referência a matemáticos como Gerolamo Cardano, Tartaglia e Bombelli e obra pioneira na introdução da educação do método de dupla entrada, ainda hoje usado em contabilidade; a *Proportione: opera a tutti gliingegni perspicaci e curiosi necessaria ove ciascun studioso di philosophia: prospectiva pictura, sculptura, architectura, musica e altre mathematice: suavissima sottile e admirabile doctrina consequera: e delectarassi cõo varie questione de secretissima scientia*, ilustrada por Leonardo e utilizada na popularização da razão de ouro, posteriormente uma referência na geometria prática e no estudo das perspectivas; e, finalmente, uma versão dos *Elementos de Euclides*, baseada na de Campano e traduzida depois para *volgare*. Pacioli escreveu ainda diversas obras sobre temas matemáticos como *De Ludus Scachorum*, um livro sobre o Xadrez e outros jogos, e *De Virbus Quantitatis*, compêndio pioneiro de Matemática Recreativa e Ilusionismo acerca do qual se trata de seguida.

A vida de Pacioli chega-nos através de comentadores como Giorgio Vasari, da documentação institucional da Ordem Franciscana e das diversas universidades onde lecionou, e das suas anotações à obra.

Iniciou estudos na sua cidade natal, Borgo (hoje Borgo Sanselpolcro na província de Arrezo, Itália) onde terá contactado também com com Pierro dela Francesca. Seguindo a sua formação em Veneza na Escola do Rialto. Em Veneza ficou hospedado em casa de António Rompiansi, servindo, entre outras funções, de tutor dos filhos. Em Roma, em meados da década de 1470, entra nos Franciscanos onde trava amizade com o futuro Papa Sexto IV. É nomeado lente de Matemáticas na Universidade de Perúgia. Em 1481, é



Figura 1: *Ritratto di fra' Luca Pacioli con un allievo* por Barbari: 1495.

extraditado para Zara (hoje Zadar, Croácia) por motivos ainda hoje por esclarecer. No entanto, cinco anos depois, é convidado a reocupar o seu cargo. Até 1495, leciona também em diversas outras instituições como Florença, Aquila e Pisa. Em 1495, é empregado pela corte de Urbino sendo tutor de Guidobaldo da Montefeltro. É nesta corte que terá travado conhecimento com Albrecht Dürer. Segue em 1496 para a corte de Ludovico Sforza, em Milão. Aí conhece Leonardo da Vinci de quem se torna amigo e com quem partilhará casa em Florença, já depois da fuga às invasões francesas. Em 1505, é eleito Superior da provincia de Romagna. Em 1506, passa uma temporada a convite de Julio II em Roma. Finalmente, em 1508, já em Veneza, para onde fora para imprimir as suas obras, dá um sermão público acerca do quinto livro dos *Elementos*. Volta a ser convidado a dar aulas em Perugia em 1509. Um ano depois é apontado Comissário do Convento de Santa Croce. É chamado para Sapiencia por Leão X em 1514.

Só recentemente começaram a ser redescobertos alguns dos manuscritos de Pacioli. É o caso de *De Viribus Quantitatis* (traduzido livremente por *O Poder dos Números*). O manuscrito, da autoria de um amanuense desconhecido, é hoje preservado na Biblioteca Universitária de Bolonha (Códice 250), com origem possível numa coleção privada. Existe um fac-símile desta obra, do século XIX, na Biblioteca Casantena de Roma. O manuscrito de Bolonha divide-se em 614 fólhos, abrindo com um índice (13 fólhos) e uma dedicatória destinada a um futuro patrono. Os restantes fólhos compõem três livros evidenciando as virtudes Matemática. Todos os livros podem ser divididos em duas metades, uma primeira mais formal, ligada a conteúdos de sala de aula e uma segunda mais recreativa.

O primeiro livro (que dá nome ao manuscrito) com 80 capítulos, trata dos números, i.e. do discreto, da álgebra e da aritmética. Começa com capítulos baseados em igualdades e em proposições do segundo livro dos *Elementos de Euclides*, entre os quais efeitos mágicos. A título de exemplo, vejamos o Livro 1, Capítulo 7º, “Adivinhar um número inteiro em que alguém pensou”.

**Efeito:** Um participante pensa em segredo num número inteiro. É-lhe pedido para somar ao número metade desse e dizer se resulta num número inteiro. Caso não, deve arredondar para o número inteiro seguinte. É-lhe de novo pedido para somar metade deste novo número ao mesmo e partilhar se o resultado é inteiro, arredondando caso não o seja. De seguida, deve comunicar o resultado da divisão inteira por nove. O matemático adivinha de imediato o número original.

Supondo que o participante pensou no número 6. Após o primeiro pedido terá em mente o número  $6 + \frac{6}{2} = 9$ . De seguida, repete o processo ficando

com  $9 + \frac{9}{2} = 13.5$ . É-lhe pedido para arredondar e fica com 14 em mente. Finalmente transmite ao matemático que o 9 cabe uma vez no seu número final. O número é de seguida adivinhado sem informação adicional.

**Matemática:** Este efeito baseia-se na seguinte igualdade:

$$\frac{[[n + \frac{n}{2}] + \frac{[n + \frac{n}{2}]]}{2}}{9} = \frac{n}{4} + r,$$

$$r = \begin{cases} 1, & n + \frac{n}{2} \notin N \text{ (i.)} \\ 2, & n + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \notin N \text{ (ii.)} \\ 3, & \text{(i.) and (ii.)} \\ \text{otherwise} & \end{cases} = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \pmod{4} \\ 1, & n \equiv 1 \pmod{4} \\ 2, & n \equiv 2 \pmod{4} \\ 3, & n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

O matemático precisa então apenas de tomar atenção ao resto,  $r$ , sendo-lhe transmitido  $\frac{n}{4}$  no final. No exemplo do número 6, sabe que se arredondou ao segundo pedido, logo o resto é 2. Basta-lhe então somar  $4 + 2 = 6$  para descobrir o número.

Na parte formal do primeiro livro do *De Viribus Quantitatis*, destaca-se ainda problemas tendo por base o Teorema Chinês dos Restos, magia com base em Dactilonómia, cálculo de Repdigitos e a discussão de um jogo subtrativo. A parte recreativa remete para Problemas: de Jeep como o Borgo-Perugia ou as 100 pérolas (em que um veículo tem de atravessar uma distância perdendo unidades de carga com visto a otimizar a travessia); de Enchimento de Jarros (em que uma quantia de líquido tem que ser medida com uso de jarros de volumes distintos); de Josephus (em que várias pessoas são postas em círculo e removidas segundo a mesma contagem sendo o objectivo ser o último a sair); e, de Travessia (em que um conjunto de pessoas ou objectos têm que atravessar um obstáculo não podendo ocorrer certas configurações desses mesmo objectos). São também de mencionar a discussão de quadrados latinos até ordem 9.

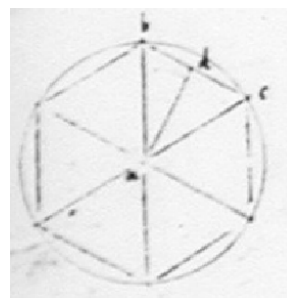


Figura 2: Construção aproximada do heptágono, F.145v, II.21

O segundo livro, intitulado *Della virtu et forza geometrica con dignissimi documenti*, debruça-se sobre a linha, i.e. o contínuo, a geometria. Na sua primeira parte, a mais formal, várias construções oriundas dos *Elementos de Euclides* e a aplicação prática das mesmas, ou como executá-las com materiais físicos em situações diversas, nas palavras de Pacioli, para o geometra prático, são descri-

tas. Nestas construções, salientam-se a aproximação feita ao heptágono e nonágono regulares, a discussão da razão de ouro em diversos contextos, e o uso das propriedades de segmentos de recta num círculo para medição de alturas de edifícios.



Figura 3: Puzzle Topológico, DVQ., F.206r, II.100

Na parte recreativa, encontramos diversos puzzles de alinhamento, a descrição da Ponte de Leonardo, a descrição de diversos fenômenos físicos, como o funcionamento de um cifão ou engenhos de equilíbrio devido ao centro de massa e uma seção dedicada a puzzles topológicos como o Cadeado de Salomão. Destas, sublinhe-se do Livro 2, Capítulo 100, “Livrar um pedaço de madeira de uma corda”. Um pedaço de madeira tem três buracos, *c*, *d*, *e*. Através desses três buracos está atada uma corda dobrada sobre si a meio. O engenho deve ser montado da seguinte maneira:

Passa-se o laço *f*, pelo buraco *d*. De seguida passa-se primeiro as pontas da corda pelo buraco, *e*, e depois pelo laço *f*. Finalmente passam-se as pontas pelo buraco que falta. Segurando nas pontas da corda, ou atando as mesmas a um objeto suficientemente grande para o laço *f* não poder passar à volta, o desafio é remover o pedaço de madeira da corda. O puzzle pode também ser montado usando a solução inversa do desafio.

O terceiro livro, *Documenti et proverbii mercanteschi utilissime*, de teor mais generalista, foca-se em provérbios e efeitos naturais, desmistifica truques não matemáticos de magia e apresenta vários jogos de palavras e piadas. Esta parte contém ainda a discussão de mensagens secretas, usando química, códigos e cifras; mezinhas para o fabrico de tintas, cola, incenso, pólvora, etc.; do efeito de Leidenfrost para fins mágicos; de Magnetismo, para orientação e auxílio ao Ilusionismo, e Pirotecnia.

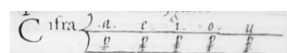


Figura 4: Cifra dos ‘p’, F.241r, III.iii.12.

Concluindo, sublinhando a actualidade desta obra fechemos com dois Jogos de Palavras apresentados por Pacioli:

- “‘Salve nepos frater’ dixit filio suo matter.” (“‘Viva sobrinho e irmão.’ diz a mãe ao seu filho”). Será possível?
- “Dimme confessore como se despera luomo: Dirai montando insu nun

---

pero et lasciarse cascare quello se chiama desperare.” (“Diga-me padre, como se desespera o homem? Dir-lhe-á: sobe a uma pereira e deixa-te cair, a isso chama-se desperar.”)

## Referências

- [1] Agostini, Amedeo (1924). “De Viribus Quantitatis di Luca Pacioli” in *Periodico di Matematiche* Vol. IV, pp. 165 – 192
- [2] Bossi, Vani et al. (2012). *Mate-Magica I Giochi di Prestifio di Luca Pacioli*, Aboca Edizioni
- [3] Giusti, E., Maccagni, C., (Eds.) (1998). *Luca Pacioli e la matematica del Rinascimento*, Sansepolcro, Atti del convegno internazionale di studi, Petrucci Editore
- [4] Hirth, Tiago (2015), “Luca Pacioli and his 1500 Book De Viribus Quantitatis”, Dissertação MSc FCUL
- [5] Pacioli, Luca (ca.1509). *De Viribus Quantitatis*, in Biblioteca Universitaria Bologna codice nr. 250
- [6] Staigmüller, Hermann Christian Otto (1889). “Lucas Paciolo. Eine biographische Skizze” in *Zeitschrift für Mathematik un Physik*, hist.-lit Abth.,34, pp. 91-102, 121-128