Problemas

Editor:
Jorge Nuno Silva

Notas sobre o Problema anterior e *Como aumentar os seus rublos*

Jorge Nuno Silva

Os leitores são convidados a enviar, para eventual publicação, soluções, comentários, propostas de problemas, etc. Essa correspondência deve ser enviada para a SPM, ao cuidado do editor desta secção. Há livros da Gradiva para sortear entre as soluções recebidas em cada número.

Relembremos o problema do número anterior.

Os Problemas Infantis de Arnold

Esta pequena colecção, *Problemas para crianças dos 5 aos 15*, foi coligida por V.I. Arnold em 2004. Várias vezes publicada em russo, esgotou sempre. Existem agora versões electrónicas, também em inglês, disponíveis online. Da pequena introdução do autor retiramos estas linhas, que nos dão uma ideia das suas intenções:

> Publiquei estes problemas em Paris em 2004, quando alguns parisienses, oriundos da Rússia, me pediram que ajudasse os seus filhos a ganhar a cultura de pensamento tradicional nesse país. Estou profundamente convencido de que essa cultura deve ser cultivada desde cedo mediante reflexão independente sobre questões simples, mas difíceis.

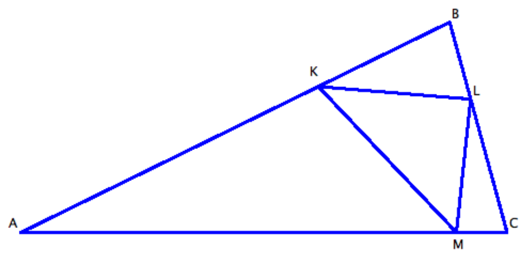
Os problemas estão numerados de 1 a 77, por ordem crescente de escalão etário a que se destinam. Entre eles encontramos clássicos da Matemática Recreativa que podemos já encontrar em Alcuíno ou Fibonacci. Alguns são teoremas importantes, como a identidade de Euler para a função ζ. Entre fracções continuadas e aproximações de integrais, os leitores não me levarão a mal ter seleccionado três questões de índole muito elementar: a primeira, a sexta e a sexagésima quarta.

1. O António e a Beatriz querem comprar um lápis. Ao António faltam 7 cêntimos, à Beatriz falta um cêntimo. Se juntarem o dinheiro que têm também não conseguem comprar um lápis para partilhar. Quanto custa o lápis?

6. A hipotenusa de um triângulo rectângulo mede 10cm e altura baixada sobre si mede 6cm. Qual é a área do triângulo?

   Arnold conta que este problema, durante dez anos usado regularmente nos USA em testes, não conseguia ser resolvido pelos estudantes que chegavam de Moscovo. Isto é, estes não obtinham o mesmo resultado. Porquê?

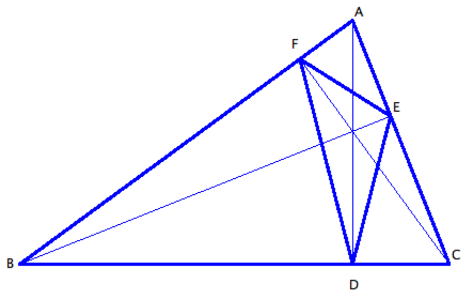
64. Dado um triângulo acutângulo, inscreva nele um triângulo de perímetro mínimo (K em AB, L em BC, M em AC).



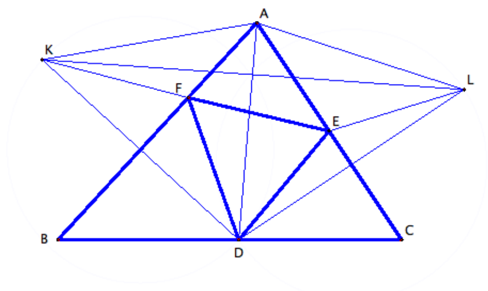
1. O lápis custa 7 cêntimos.

6. Tal triângulo não existe. Um triângulo rectângulo pode inscrever-se numa semi-circunferência, com a hipotenusa como diâmetro. Neste caso o raio seria 5, que é o valor máximo para a altura sobre a hipotenusa.

64. Os vértices do triângulo pretendido são os pés das alturas.



Dado D em BC, construam-se as suas reflexões em AB (obtendo K) e em AC (obtendo L). O perímetro de △EFD é igual à soma dos comprimentos de KF, FE e EL. Assim, F e E devem ser escolhidos como os pontos de intersecção de KL com os lados AB e AC, respectivamente (para ficarem colineares com K e L).



Para concluir sobre a posição de D consideremos o △KAL. É isósceles, com os comprimentos de KA e AL iguais ao de AD. Tem-se $\angle KAL = 2\angle BAC$, que independe da posição de D.

O menor comprimento da base de △KAL será obtido quando os comprimentos dos outros dois lados forem também o menor possível. Mas isto sucede quando se minimiza AD, isto é, quando $AD \perp BC$.

Como aumentar os seus rublos

Vladimir Arnold é autor de um famoso livro de problemas de nível avançado, *Arnold's Problems*, Springer 2004. Inspirado nos seminários que dirigiu em Moscovo nos anos 1960, primeiro, e em Paris após 1990, a obra contém problemas que têm norteado muito trabalho de investigação.

Hoje proponho o primeiro desses problemas. Na sua versão original, Arnold pergunta se é possível, por dobragens, aumentar o perímetro de uma nota de um rublo. Refraseando: pode, por dobagens sucessivas a partir de um rectângulo, obter-se um polígono de maior perímetro?

O conceito de dobragem, no nosso contexto, diz respeito a uma linha recta que intersecte a figura original.

A pergunta pode enunciar-se para um polígono geral, não necessariamente convexo. Por exemplo, para o "rectângulo defectivo" da figura.