43 Miniaturas Matemáticas

Assis Azevedo
Departamento de Matemática e Aplicações
Universidade do Minho
e-mail: `assis@math.uminho.pt`

43 Miniaturas Matemáticas
Gradiva, 2013
António Machiavelo, José Carlos Santos e João Nuno Tavares (orgs.)

A divulgação da matemática é uma tarefa importante, diria mesmo, uma obrigação de todos quantos gostam de matemática e a ensinam a um nível superior. Mostrar, pelo menos a algum público, que a matemática não é aquele edifício monstruoso que lhe foi dado a conhecer quando frequentava os bancos da escola, apresentando-a vista de um prisma lúdico e desmontando, com textos simples, as barreiras que se colocam à sua compreensão, é um serviço louvável que se presta a esse público e à matemática. Esta parece ter sido a corajosa intenção dos autores. No entanto, a tarefa não foi totalmente conseguida.

São vários os autores dos 43 pequenos textos, todos membros do Centro de Matemática da Universidade do Porto: Ana Cristina Oliveira, Carlos Correia de Sá e Maria do Céu Silva, António Machiavelo, Christian Lomp, Gabriela Chaves, João Nuno Tavares, José Carlos Santos, Lucinda Lima, Maria Pires de Carvalho, Paulo Ventura Araújo. Em consequência, é também diversa a fluência, a correcção matemática e a qualidade dos textos apresentados. Temos de ter em mente que os autores estão a escrever "textos curtos sobre alguns dos seus temas favoritos, de uma forma acessível a um público geral". E é tendo em mente este tipo de público que faço este comentário.

As miniaturas abordam diversos tópicos de matemática, alguns mais conhecidos do grande público: noção de conjunto, propriedades geométricas dos triângulos e das cónicas, distância geodésica, como medir o raio da Terra, números primos, algoritmo de Euclides, números de Fibonacci, o número π e o tão célebre problema da quadratura do círculo, sistemas dinâmicos e o conjunto de Mandelbrot. São também abordados alguns temas menos usuais: o conceito de infinito, as referências aos Elementos de Euclides, aos matemáticos portugueses Pedro Nunes e José Anastácio da Cunha e às Leis de Newton. Gostaria de realçar as miniaturas "Envolventes. Arte e matemática" e "Existe um hipercubo", que abrem a porta à imaginação do leitor e lhe permitem antever que, para além das ligações que existem entre a arte e a matemática, há na matemática harmonia e elegância. As "Curvas de perseguição" são um bom exemplo de como lidar com um problema concreto e como encontrar estratégias para a sua resolução parcial. A divulgação dos endereços web http://www.fc.up.pt/cmup/polyamat http://www.fc.up.pt/cmup/arte e a referência à Associação Atractor são uma forma excelente de conseguir que alguns leitores possam contactar com informação acessível, mas de qualidade, sobre matemática.

Com duas excepções, cada miniatura tem duas ou três páginas e os autores utilizam notas na margem do texto para introduzir algumas definições ou chamadas de atenção, bem como figuras de apoio ao texto. Algumas dessas notas são relevantes e ajudam na leitura dos textos. Outras pecam por serem ou redundantes ou demasiado complexas.

Escrever para um público generalista é uma responsabilidade muito maior que escrever para matemáticos, que sabem compreender que uma gralha é uma gralha e que não tomam como adquirido que o que está escrito está certo. Numa tentativa de tornar a leitura fácil, vários textos contêm erros formais ou de linguagem, dos quais citarei alguns. Por exemplo, frases do tipo "Liber Abaci. . . onde vinha o problema dos coelhos" (página 22), "Vai-se tendo então o seguinte número de casais" (página 23) e ". . . está associado exactamente um único . . . " (página 37) devem ser evitadas em textos escritos.

Ao longo do livro existem alguns abusos de linguagem, frases desconexas e frases sem verbo, como por exemplo: "Chama-se π." (página 62) ou "Por exemplo, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}+\sqrt{6}$ ou $\sqrt[3]{2}$." (página 67). Esta última frase, que pretendia dar exemplos de números algébricos, está também deslocada no texto, pois vem a seguir à definição de grau de um polinómio. Na afirmação ". . . nessa mesma circunferência é igual a $\alpha = \frac{s}{R} \Rightarrow R = \frac{s}{\alpha}$. . . " (página 80), para além de se utilizar linguagem formal em texto corrente, o símbolo "$\Rightarrow$" torna a frase incorrecta.

Existem referências a conceitos matemáticos escritas de forma pouco cuidada. Por exemplo, quando se lê, na página 18, "Funções lineares: são funções definidas em espaços vectoriais, que enviam pontos de uma qualquer reta que passa na origem em pontos de uma mesma reta.", um leigo pode ser levado a pensar que se está a definir função linear. No entanto, qualquer função real de variável real ou qualquer função que seja o produto de uma função linear por uma função escalar satisfaz esta condição. Na página 64, a definição dada para polígono é, de facto, a de linha poligonal.

Há também alguma descoordenação na sequência dos textos.

- O texto 11 intitula-se "Teorema de Pitágoras", mas no texto 3 fala-se de uma generalização deste teorema, a Lei dos Cossenos.
- O texto 23, "Fracções e dízimas", deveria estar colocado antes do texto 13, no qual se utiliza a notação em dízima para mostrar que $]0,1[$ não é numerável.
- A primeira figura do texto 9, que pretende ilustrar o cálculo do máximo divisor comum de 82 e 48, usa o algoritmo de Euclides, que é explicado no texto seguinte.
- No texto 11, página 33, define-se triângulo, figura geométrica estudada nos textos 3 e 5, "Trigonometria" e "Pontos notáveis do triângulo".
- Seria preferível que o texto 30, que descreve as cónicas, surgisse antes do 18, que as refere.

Passo a referir-me aos textos por autor.

Os dois primeiros capítulos, da autoria de Lucinda Lima, "O que é um conjunto?" e "O zero e o vazio", abordam, de uma forma muito clara, conceitos matemáticos que exigem uma abstracção elevada e cumprem o objectivo de esclarecer o leitor sobre temas complexos sem que a utilização de linguagem corrente conduza a imprecisões. Em particular, fala-se, de forma simples, nas dificuldades em definir conjunto, no paradoxo de Russell, em conjuntos infinitos e no modo de construir conjuntos partindo do conjunto vazio.

O segundo autor, Paulo Ventura, escreveu os textos 3, 4, 5, 30 e 31, os três primeiros sobre trigonometria, os dois últimos sobre cónicas. Os textos estão, de um modo geral, bem escritos mas são densos. No segundo parágrafo da miniatura 5 surge a demonstração informal de que as três medianas de um triângulo se intersectam num mesmo ponto, o *circuncentro*. Esta prova é difícil de seguir sem o apoio de figuras.

António Machiavelo, um excelente comunicador, escreveu os textos 6, 7 e 11, sobre funções, números primos e o Teorema de Pitágoras. Os textos 7 e 11 estão bem escritos mas ambos têm imprecisões. No terceiro parágrafo do texto 7, receio que não seja claro qual o quociente a que se está a referir. No texto 11 há três referências sobre o conhecimento do teorema de Pitágoras pelos babilónios: uma peremptória ("era já conhecido") e duas com alguma incerteza ("há fortes evidências", "muito provavelmente").

Os textos 8, 20, 23 e 24 são da autoria de José Carlos Santos. O primeiro foca um tema habitual da matemática lúdica, os números de Fibonacci, não indo além da explicação da definição recursiva destes números. Parece-me muito forçada a argumentação (habitual) de que os números de Fibonacci aparecem em muitos fenómenos biológicos, quando o único exemplo apresentado é o da camomila, em que o número de espirais que rodam num sentido é 13 e no outro é 21. Além disso, a figura foi mal escolhida pois ilustra apenas as espirais que rodam num dos sentidos. As miniaturas 23 e 24, sobre dízimas e os quaterniões estão bem escritas, são interessantes e acessíveis e estão acompanhadas de breves notas históricas.

Os textos 9, 10, 21, 22, 35, 36, 37, 38, 39, 40 e 41 são da responsabilidade de Maria Pires de Carvalho, versando temáticas variadas: máximo divisor comum entre dois números, quadratura do círculo, diferentes tipos de médias e sistemas dinâmicos. A maioria dos textos é interessante mas há diversos erros nas figuras e há partes de textos que explicam conceitos já utilizados anteriormente.

A utilização de um bilhar rectangular para calcular o máximo divisor comum entre dois números (página 27) é curiosa mas a explicação dada não é clara. No exemplo ilustrado na segunda figura da página 64 não se percebe a relação entre o elevado teor alcoólico de certas bebidas e a colocação de três esferas no interior de um cilindro. Na figura da página 67 pretende-se exemplificar que se pode quadrar uma parábola sem se ter definido em que consiste esta quadratura. Não é explicada qual a relação entre a figura da página 107, que ilustra a igualdade $e^{i\pi} = -1$, com o texto da miniatura onde está inserida, que fala de médias. A figura de apoio ao método de Newton (página 122) não é explicada no texto.

No texto 22, a frase "$\sqrt[3]{2}$ é um número não construível porque, apesar de ser zero do polinómio com coeficientes inteiros $x^3 - 2$, não anula nenhum polinómio com coeficientes inteiros e grau 1 ou 2" pode induzir o leitor em erro, se não for dada uma justificação.

Ana Cristina Oliveira escreveu os textos 12 e 43. O primeiro, sobre a geometria da Terra, explica, à luz da geometria, alguns factos do nosso quotidiano de uma forma clara. É pena não haver no texto uma explicação das três figuras colocadas no final da miniatura. A miniatura 43 é muito interessante e contém uma demonstração pouco conhecida de que o intervalo $[0, 1]$ não é numerável. Não me parece bem que no final da última miniatura se redefina, sem qualquer referência ou explicação, o que se entende por conjunto finito. Recorde-se que, desde a miniatura 1, se fala em conjuntos finitos.

A miniatura 13 da autoria de Christian Lomp refere-se à cardinalidade de conjuntos. Para além de algumas imprecisões de linguagem, a demonstração de que $]0, 1[$ não é numerável tem duas incorrecções: há números que não têm representação em dízima utilizando um número finito de zeros; o argumento utilizado não funciona se, com as notações do livro, $a_{nn} = 8$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Não me parece também que a referência aos axiomas de Zermelo-Fraenkel, sem qualquer explicação, tenha alguma utilidade para o leitor.

As miniaturas 14 a 19 são da autoria de Carlos Correia de Sá e Maria do Céu Silva. São textos muito bem escritos, com caixas de texto que fornecem informação relevante. Os autores tentam explicar ao leitor os métodos utilizados e as dificuldades sentidas por matemáticos antigos como consequência do uso de notações não eficientes. Dão a conhecer os Elementos de Euclides, a primeira grande obra matemática que se preservou, datada de 300 anos a.C.. Falam-nos de dois matemáticos portugueses, Pedro Nunes e José Anastácio da Cunha e como a utilização de notação adequada permitiu que Anastácio da Cunha simplificasse a escrita de um resultado de Pedro Nunes. Os textos 17 e 18, sobre geometria analítica e projectiva conciliam notas históricas com uma explicação cuidada dos métodos matemáticos envolvidos.

João Nuno Tavares contribui para este livro com as miniaturas 25 a 29 e 32 a 34, que tocam aspectos da Geometria Diferencial: curvas de perseguição; envolventes; como medir o raio da Terra; cubos a 4 dimensões; fórmula de Descartes-Gauss-Bonnet; leis de Newton e Teorema de Pick. A forma como Eratóstenes calculou o raio da Terra é descrita na miniatura

27, mostrando ao público, de forma clara, a matemática em acção num problema concreto. A afirmação de que Eratóstenes foi o primeiro a efectuar esse cálculo parece-me demasiado peremptória. Por outro lado, se Eratóstenes viveu entre 276 e 194 a.C. (página 79) então não se compreende a frase "...terá vivido no século III a.C." (página 81).

A fórmula de Descartes-Gauss-Bonnet, que generaliza a fórmula de Euler, bem conhecida dos alunos que têm matemática no Ensino Secundário, permite introduzir, de uma forma simples, a noção de curvatura total de uma superfície.

Os textos 32 e 33 são dedicados ao trabalho que Newton universalizou, na sua obra *Principia Mathematica*, sobre atracção universal e sobre as órbitas dos planetas em torno do Sol. No texto 34 o autor explica, numa linguagem clara, o Teorema de Pick, reduzindo sucessivamente o que se pretende provar para qualquer polígono a polígonos mais simples.

Gabriela Chaves escreve o penúltimo texto, sobre simetrias. O texto apresenta apenas o tipo de simetrias que existem e faz uma breve referência a frisos e padrões, bem como à simetria na arte e na cristalografia.

Em jeito de conclusão, considero este livro e a generalidade dos temas por ele abordados muito interessante para o público ("curioso em saber mais e sem aversão a experimentar um pouco do sabor da matemática") a que se dirige. É pena que a revisão final do livro tenha deixado escapar diversas gralhas e incorrecções que serão, certamente, corrigidas numa nova edição.