Projeções e distâncias em $\mathbb{R}^7$, duplo produto vetorial e hiperplanos associados

Paula Catarino
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, UTAD
Departamento de Matemática
Quinta de Prados
5000 - 801 Vila Real, Portugal
e-mail: pcatarin@utad.pt

José Vitória
Universidade de Coimbra
Departamento de Matemática
Apartado 3008, EC Santa Cruz
3001 - 501 Coimbra, Portugal
e-mail: jvitoria@mat.uc.pt

Resumo: A distância entre duas retas enviesadas em $\mathbb{R}^7$, bem como o melhor par aproximante de duas retas enviesadas, são expressos quer em termos do produto interno quer envolvendo o duplo produto vetorial. As fórmulas dadas usando o duplo produto vetorial não são válidas para $\mathbb{R}^n$, quando $n \neq 3, 7$. Também se mostra que a distância de um ponto a uma reta e a distância entre duas retas enviesadas são, essencialmente, instâncias da distância de um ponto a um hiperplano.

Abstract The distance between two skew lines in $\mathbb{R}^7$ is expressed both in terms of a inner product and in terms of a double vector cross product. The best approximation pair of two skew lines in $\mathbb{R}^7$ is expressed with inner product and double vector cross product, as well. The obtained formulas using a double vector cross product are not valid for $\mathbb{R}^n$, with $n \neq 3, 7$. Another feature of this paper is to show that the distance from a point to a line and the distance between skew lines are essentially the distance from a point to a hyperplane.

palavras-chave: projeção; distância; produto interno; duplo produto vetorial; hiperplano associado a um ponto e uma reta; hiperplano associado a duas retas; melhor par aproximante.

keywords: projection; distance; inner product; double vector cross product; hyperplane associated to a point and a line; hyperplane associated to two skew lines; best approximation pair.

1 Introdução

Um objetivo deste artigo é apresentar uma fómula original que inclui o duplo produto vetorial em $\mathbb{R}^7$, para a distância de duas retas enviesadas em $\mathbb{R}^7$. O espaço $\mathbb{R}^7$ está munido com o produto interno habitual e com a correspondente norma euclidiana. Também apresentamos, usando o produto interno, o melhor par aproximante de duas retas enviesadas em $\mathbb{R}^7$, particularizando o que será muito provavelmente conhecido em $\mathbb{R}^n$, mas de que não encontrámos referências. Pensamos ser original a formulação que daremos, em termos do duplo produto vetorial, do melhor par aproximante de duas retas enviesadas em $\mathbb{R}^7$.

Todos os resultados em que intervém o produto interno foram inspirados em [12], tendo os autores apenas formalizado e estendido os resultados aí implícitos. No que respeita ao duplo produto vetorial, este estudo é baseado no que foi apresentado em [4] e de que constitui uma extensão.

Fazemos uso de três instrumentos fundamentais: o duplo produto vetorial em $\mathbb{R}^7$; o hiperplano associado a um ponto e uma reta; e o hiperplano associado a duas retas.

Neste texto, há algum abuso de notações, permitido por isomorfismos adequados. A base canónica em $\mathbb{R}^7$ é $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_7})$. Para pontos e vetores em $\mathbb{R}^7$, usamos $\overrightarrow{p} := (p_1, p_2, \cdots, p_7) := \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdots \\ p_7 \end{bmatrix}$.

Temos, para o produto interno $\bullet$ de dois vetores, $\overrightarrow{p} \bullet \overrightarrow{q} = \sum_{i=1}^{7} p_i q_i$, sendo $||\overrightarrow{p}|| = \sqrt{\overrightarrow{p} \bullet \overrightarrow{q}}$ a norma euclidiana associada.

O determinante de Gram é usado várias vezes neste texto. Definimos o determinante de Gram de dois vetores $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q} \in \mathbb{R}^7$ como sendo

$$g(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) := det \begin{bmatrix} \overrightarrow{p} \bullet \overrightarrow{p} & \overrightarrow{p} \bullet \overrightarrow{q} \\ \overrightarrow{q} \bullet \overrightarrow{p} & \overrightarrow{q} \bullet \overrightarrow{q} \end{bmatrix}.$$

O símbolo := indica: "por definição", "por notação", "por identificação".

O determinante de Gram assume o valor zero quando e só quando os vetores $\overrightarrow{p}$ e $\overrightarrow{q}$ são linearmente dependentes ([6], página 129, Lemma 7.5).

A ortogonalidade aparece em várias partes deste texto. Dois vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ são ditos ortogonais, $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$, se $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = 0$. Um vetor $\overrightarrow{a}$ é dito ortogonal a um conjunto $\mathcal{M}$, $\overrightarrow{a} \perp \mathcal{M}$, se $\overrightarrow{a}$ for ortogonal a todo o vetor $\overrightarrow{m}$ de $\mathcal{M}$. Dizemos que um conjunto $\mathcal{A}$ é ortogonal a um conjunto $\mathcal{B}$ se todo o vetor $\overrightarrow{a}$ de $\mathcal{A}$ for ortogonal a todo o vetor $\overrightarrow{b}$ de $\mathcal{B}$.

O conceito de projeção ortogonal desempenha um papel importante neste estudo. Considere-se, em $\mathbb{R}^n$, uma variedade linear $V = \overrightarrow{v} + N$ em que $\overrightarrow{v}$ é um vetor de posição e N é o subespaço diretor. Dada a variedade linear $V = \overrightarrow{v} + N$, o vetor $\overrightarrow{v}$ não é único, mas N é único.
O vetor $\overrightarrow{s} \in V$ é a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{q} \in \mathbb{R}^n$ sobre a variedade V — escrito $\overrightarrow{s} := \mathbb{P}_V(\overrightarrow{q})$ — se e só se o vetor $\overrightarrow{q} - \overrightarrow{s}$ for ortogonal ao subespaço diretor N ([6], página 215, Theorem 9.26). Note-se que o vetor $\overrightarrow{q} - \overrightarrow{s}$ não é ortogonal à variedade V.

Usamos a distância $d(\overrightarrow{p}, \mathcal{A})$ de um ponto $\overrightarrow{p}$ a um conjunto fechado $\mathcal{A}$

$$d(\overrightarrow{p}, \mathcal{A}) := \min\{d(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{a}) : \overrightarrow{a} \in \mathcal{A}\} := \min\{||\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}|| : \overrightarrow{a} \in \mathcal{A}\}.$$

A inversa generalizada de Moore-Penrose M^ψ de uma matriz qualquer real M também é aqui utilizada. M^ψ é a única matriz que satisfaz às quatro condições ([3], página 9)

$$MM^\psi M = M,\ M^\psi MM^\psi = M^\psi,\ (MM^\psi)^T = MM^\psi, (M^\psi M)^T = M^\psi M,$$

em que T indica a transposição de matrizes.
No caso que aqui tratamos, M é de característica máxima por colunas — vindo assim de uma fórmula atribuída a MacDuffee ([3], página 14, Theorem 1.3.2) a seguinte expressão

$$M^\psi = (M^T M)^{-1} M^T.$$

A organização deste artigo é como segue. Na Secção 2 apresentamos: o produto vetorial de dois vetores em $\mathbb{R}^7$; o duplo produto vetorial de três vetores em $\mathbb{R}^7$; o hiperplano associado a um ponto e uma reta; o hiperplano associado a duas retas enviesadas. Na Secção 3 tratamos de projeções e de distâncias: a projeção de um ponto sobre um hiperplano e a distância de um ponto a um hiperplano; a projeção de um ponto sobre uma reta e a distância de um ponto a uma reta; o melhor par aproximante de duas retas enviesadas e a distância entre duas retas enviesadas.

2 Conceitos e resultados auxiliares

Nesta secção reunimos certos conceitos e resultados, com a finalidade de facilitar a formulação e demonstração de resultados no resto do artigo. Falamos com algum pormenor do produto vetorial de dois vetores em $\mathbb{R}^7$ [11], [9], tendo em vista a apresentação de uma fórmula recente [10] para o duplo produto vetorial de três vetores de $\mathbb{R}^7$.

Para melhor enquadramento teórico e histórico do produto vetorial de dois vetores e do duplo produto vetorial de três vetores de $\mathbb{R}^7$, ver [4], bem como a extensa bibliografia aí indicada.

2.1 Produto vetorial de dois vetores de $\mathbb{R}^7$

O produto vetorial de dois vetores – verificando as três propriedades habituais do produto externo em $\mathbb{R}^3$ – existe somente em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^7$ [11].

Neste texto, usamos um produto vetorial de dois vetores de $\mathbb{R}^7$ o qual possui as seguintes propriedades: é uma aplicação bilinear dos fatores; o resultado é ortogonal a cada fator; a norma do resultado é a medida da área do paralelogramo gerado pelos fatores.

Há várias maneiras de calcular o produto vetorial $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ dos vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^7$. O produto vetorial de vetores de $\mathbb{R}^7$ aparece em expressões do produto $*$ de octoniões – tal como o produto vetorial de vetores de $\mathbb{R}^3$ já aparecera, no trabalho original de Hamilton sobre o produto de quaterniões: dados os octoniões $p = p_0 + \overrightarrow{p}$, $q = q_0 + \overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q} \in \mathbb{R}^7$, p_0, $q_0 \in \mathbb{R}$, tem-se [9]

$$p * q = p_0 q_0 - \overrightarrow{p} \bullet \overrightarrow{q} + q_0 \overrightarrow{p} + p_0 \overrightarrow{q} + \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}.$$

Assim, naturalmente, o modo de calcular o produto vetorial de vetores de $\mathbb{R}^7$ está intrinsecamente associado ao modo de calcular o produto de octoniões. Das variadas formas de multiplicação de octoniões, preferimos aquela que faz uso de uma matriz associada a um octonião [9], [10]. Não usamos a multiplicação de Zorn de octoniões referida em [8], nem a que é proposta em [13]. Assim, seguindo [4], propomos uma abordagem matricial

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 & -a_5 & a_4 & -a_7 & a_6 \\ a_3 & 0 & -a_1 & -a_6 & a_7 & a_4 & -a_5 \\ -a_2 & a_1 & 0 & a_7 & a_6 & -a_5 & -a_4 \\ a_5 & a_6 & -a_7 & 0 & -a_1 & -a_2 & a_3 \\ -a_4 & -a_7 & -a_6 & a_1 & 0 & a_3 & a_2 \\ a_7 & -a_4 & a_5 & a_2 & -a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_6 & a_5 & a_4 & -a_3 & -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{bmatrix}.$$

2.2 Duplo produto vetorial de três vetores de $\mathbb{R}^7$

Em [10] os autores tratam de um problema difícil em teoria de matrizes: o traço do produto de matrizes. Colocam-se no contexto das matrizes hipercomplexas – isto é, matrizes que representam quaterniões e octoniões – e usam vários resultados envolvendo o duplo produto vetorial de três vetores de $\mathbb{R}^7$.

Dados três vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^7$, temos ([10], Lemma 3.3)

$$\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{b}(\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{c}) - \overrightarrow{c}(\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}) + \frac{1}{3}\mathrm{J}(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}),$$

em que o Jacobiano $\mathrm{J}(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c})$ é dado por

$$\mathrm{J}(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) + \overrightarrow{b} \times (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) + \overrightarrow{c} \times (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$$

e é uma aplicação trilinear alternada.
Em particular, a relação seguinte vai ser muito utilizada neste artigo

$$\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = (\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b})\overrightarrow{a} - ||\overrightarrow{a}||^2\,\overrightarrow{b}. \tag{1}$$

2.3 Hiperplano associado a um ponto e uma reta

O conceito de hiperplano associado a um ponto e uma reta desempenha papel importante, quando se estuda a distância de um ponto a uma reta. Para a definição deste hiperplano, necessitamos do conceito de reta normal comum a um ponto e uma reta. Nas Definições e Proposições seguintes em que usamos o produto interno, formalizamos o que vem em ([12], pp. 165–166).

Definição 2.3.1 *Seja $\overrightarrow{a}$ um ponto exterior à reta r dada por*

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{p} + \alpha\overrightarrow{u},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Por $\overrightarrow{a}$ conduza-se uma reta s ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u}$. Denote-se por $\overrightarrow{q}$ o ponto de interseção das retas r e s. Chamamos reta normal comum ao ponto $\overrightarrow{a}$ e à reta r *à reta s que contém o ponto $\overrightarrow{q} \in r$ e é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u}$.*

Proposição 2.3.1 *Seja $\overrightarrow{a}$ um ponto exterior à reta r dada por*

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{p} + \alpha\overrightarrow{u},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Então a reta normal comum ao ponto $\overrightarrow{a}$ e à reta r *é a reta s de equação*

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \beta(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{q}),\ \beta \in \mathbb{R},$$

em que

$$\overrightarrow{q} = \overrightarrow{p} + \frac{(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{p}) \ \bullet \ \overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2}\,\overrightarrow{u}.$$

Demonstração. Procura-se o ponto $\overrightarrow{q} = r \cap s$. Temos

$$\begin{cases} \overrightarrow{q} = \overrightarrow{p} + \alpha \overrightarrow{u} \\ (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{q}) \bullet \overrightarrow{u} = 0 \end{cases}$$

donde sai $\alpha^* = \frac{(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{p}) \bullet \overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2}$. Logo $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{p} + \alpha^* \overrightarrow{u}$. $\square$

Observação 2.3.1 *A Definição 2.3.1 e a Proposição 2.3.1 são válidas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. No nosso contexto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^7$, procuramos, sempre que possível, formulações utilizando o produto vetorial.*

Note-se que, em $\mathbb{R}^7$, os vetores $(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{q})$ e $\overrightarrow{u} \times [\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{p})]$ onde $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{p} + \alpha^* \overrightarrow{u}$ são colineares.

Com efeito, temos que $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{q} = (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{p}) - \frac{(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{p}) \bullet \overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2} \overrightarrow{u}$ é equivalente a $(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{q})||\overrightarrow{u}||^2 = (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{p})||\overrightarrow{u}||^2 - [(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{p}) \bullet \overrightarrow{u}]\overrightarrow{u}$. De acordo com a relação (1), obtemos

$$-||\overrightarrow{u}||^2(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{q}) = \overrightarrow{u} \times [\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{p})].$$

Assim, podemos formular o resultado seguinte

Proposição 2.3.2 *Seja $\overrightarrow{a}$ um ponto exterior à reta r dada por*

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{p} + \alpha \overrightarrow{u}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Então a reta normal comum ao ponto $\overrightarrow{a}$ e à reta r *é a reta s de equação*

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \gamma[\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{p}))], \ \overrightarrow{a}, \ \overrightarrow{p}, \ \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^7, \ \gamma \in \mathbb{R}. \ \square$$

Estamos agora em condições para a apresentação do hiperplano associado a um ponto e a uma reta.

Definição 2.3.2 *Seja $\overrightarrow{a}$ um ponto exterior à reta r dada por*

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{p} + \alpha \overrightarrow{u}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

O hiperplano $H^*(\overrightarrow{a}, r)$ associado ao ponto $\overrightarrow{a}$ e à reta r *é definido como sendo o hiperplano que contém o ponto $\overrightarrow{p}$ e é ortogonal ao vetor diretor da reta normal comum ao ponto $\overrightarrow{a}$ e à reta r.*

Proposição 2.3.3 *O hiperplano $H^*(\overrightarrow{a}, r)$ associado ao ponto $\overrightarrow{a}$ e à reta r dada por $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{p} + \alpha \overrightarrow{u}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tem equação $(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p}) \bullet (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{q}) = 0$, em que $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{p} + \frac{(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{p}) \bullet \overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2} \overrightarrow{u}$.* $\square$

A Definição 2.3.2 é dada no espaço $\mathbb{R}^n$. Para uma formulação vetorial em $\mathbb{R}^7$, vem, tendo em conta a Observação 2.3.1.

Proposição 2.3.4 *O hiperplano $H^*(\overrightarrow{a}, r)$ associado ao ponto $\overrightarrow{a}$ e à reta r de equação $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{p} + \alpha\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^7$ $\alpha \in \mathbb{R}$ é dado por*

$$(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p}) \bullet [\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{p}))] = 0. \square$$

2.4 Hiperplano associado a duas retas enviesadas

O conceito de hiperplano associado a duas retas enviesadas — não concorrentes e não paralelas — desempenha o papel principal, no estudo da distância entre duas retas enviesadas. Para a definição de tal hiperplano, necessitamos do conceito de reta normal comum a duas retas. De ([12], página 168) vem

Definição 2.4.1 *Supondo que r_1 e r_2 são retas com direções distintas e sem qualquer ponto em comum (retas não paralelas e não concorrentes) designamos por* normal comum *a r_1 e r_2 uma reta que encontre r_1 e r_2 e seja normal ao vetor diretor de r_1 e ao vetor diretor de r_2.*

Proposição 2.4.1 *Consideremos duas retas enviesadas*

$$r_1 := \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p_1} + \alpha_1\overrightarrow{u_1} \text{ e } r_2 := \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p_2} + \alpha_2\overrightarrow{u_2},\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Então a (única) reta normal comum às retas r_1 e r_2 é dada quer por

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{p_1^*} + \gamma(\overrightarrow{p_1^*} - \overrightarrow{p_2^*}),\ \gamma \in \mathbb{R},$$

quer por

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{p_2^*} + \delta(\overrightarrow{p_1^*} - \overrightarrow{p_2^*}),\ \delta \in \mathbb{R},$$

em que

$$\overrightarrow{p_1^*} = \overrightarrow{p_1} + \frac{\begin{vmatrix} (\overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}) \bullet \overrightarrow{u_1} & \overrightarrow{u_1} \bullet \overrightarrow{u_2} \\ (\overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}) \bullet \overrightarrow{u_2} & ||\overrightarrow{u_2}||^2 \end{vmatrix}}{g(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})}\overrightarrow{u_1} \in r_1 \tag{2}$$

e

$$\overrightarrow{p_2^*} = \overrightarrow{p_2} + \frac{\begin{vmatrix} ||\overrightarrow{u_1}||^2 & (\overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{p_2}) \bullet \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{u_1} \bullet \overrightarrow{u_2} & (\overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{p_2}) \bullet \overrightarrow{u_2} \end{vmatrix}}{g(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})}\overrightarrow{u_2} \in r_2. \tag{3}$$

Demonstração. Um ponto $\overrightarrow{p_1^*}$ da reta r_1 tem a forma $\overrightarrow{p_1}+\alpha_1\overrightarrow{u_1}$ para algum valor do parâmetro α_1; mutatis mutandis para a reta r_2. O sistema

$$\begin{cases} ((\overrightarrow{p_1}+\alpha_1\overrightarrow{u_1})-(\overrightarrow{p_2}+\alpha_2\overrightarrow{u_2}))\bullet\overrightarrow{u_1}=0 \\ ((\overrightarrow{p_1}+\alpha_1\overrightarrow{u_1})-(\overrightarrow{p_2}+\alpha_2\overrightarrow{u_2}))\bullet\overrightarrow{u_2}=0 \end{cases} \tag{4}$$

de incógnitas α_1 e α_2 traduz a condição de ortogonalidade referida na Definição 2.4.1. Como as retas são enviesadas, os vetores $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$ são linearmente independentes, logo o sistema (4) é possível e determinado, pois que o determinante de Gram $g(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$ tem valor diferente de zero ([6], página 129). Assim os pontos $\overrightarrow{p_1^*}\in r_1$ e $\overrightarrow{p_2^*}\in r_2$, obtidos usando a Regra de Cramer, são únicos. $\square$

Tratamos de seguida do conceito fundamental de hiperplano associado a duas retas.

Definição 2.4.2 *Dadas as retas enviesadas $r_1 := \overrightarrow{x}=\overrightarrow{p_1}+\alpha_1\overrightarrow{u_1}$ e $r_2 := \overrightarrow{x}=\overrightarrow{p_2}+\alpha_2\overrightarrow{u_2}$, definimos hiperplano associado às duas retas r_1 e r_2 — $H^*(r_1,r_2)$ — como sendo o hiperplano que contém o ponto $\overrightarrow{p_1}$ e é ortogonal ao vetor diretor da reta normal comum às retas r_1 e r_2.*

Proposição 2.4.2 *Sejam r_1 e r_2 duas retas enviesadas cujas equações são, respetivamente, $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{p_1}+\alpha_1\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{p_2}+\alpha_2\overrightarrow{u_2}$. Sejam $\overrightarrow{p_1^*}$ e $\overrightarrow{p_2^*}$ dados na Proposição 2.4.1, com $\overrightarrow{p_1^*}\in r_1$ e $\overrightarrow{p_2^*}\in r_2$. Então:*

1. *O hiperplano $H^*(r_1,r_2)$ associado às retas r_1 e r_2 é dado por*

$$(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{p_1})\bullet(\overrightarrow{p_1^*}-\overrightarrow{p_2^*})=0;$$

2. *O hiperplano $H^*(r_2,r_1)$ associado às retas r_2 e r_1 é dado por*

$$(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{p_2})\bullet(\overrightarrow{p_1^*}-\overrightarrow{p_2^*})=0;$$

3. *$H^*(r_1,r_2)=H^*(\overrightarrow{p_2^*},r_1)$;*
4. *$H^*(r_2,r_1)=H^*(\overrightarrow{p_1^*},r_2)$.* $\square$

3 Projeções e distâncias

Nesta Secção tratamos de projeções e de distâncias. O que for enunciado em termos de produto interno tem validade no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Contudo, no contexto do espaço $\mathbb{R}^7$ munido de um produto vetorial, exprimiremos em termos do duplo produto vetorial: projeção de um ponto sobre uma reta e distância de um ponto a uma reta; melhor par aproximante de duas retas enviesadas e distância entre duas retas enviesadas. Fica assim acentuada a "preocupação vetorial" deste texto.

3.1 Ponto e hiperplano: projeções e distâncias

Usaremos nesta Secção apenas o produto interno de dois vetores. Definimos a distância $d(\overrightarrow{p}, H(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{u}))$ de um ponto $\overrightarrow{p}$ a um hiperplano

$$H(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{u}) := (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{m}) \bullet \overrightarrow{u} = 0$$

como sendo

$$d(\overrightarrow{p}, H(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{u})) := \min\{d(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) : \overrightarrow{q} \in H(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{u})\}.$$

Daqui sai

$$\begin{aligned} d(\overrightarrow{p}, H(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{u})) &= \min\{||\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}|| : \overrightarrow{q} \in H(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{u})\} \\ &= ||\overrightarrow{p} - \overrightarrow{s}|| := ||\overrightarrow{p} - \mathbb{P}_{H(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{u})}(\overrightarrow{p})||. \end{aligned}$$

Procura-se assim $\overrightarrow{s} := \mathbb{P}_{H(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{u})}(\overrightarrow{p}) = r \cap H(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{u})$ em que a reta r passa pelo ponto $\overrightarrow{p}$ e — devido à caracterização de projeção ortogonal sobre uma variedade — é ortogonal ao hiperplano

$$H(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{u}) := (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{0}) \bullet \overrightarrow{u} = 0.$$

A projeção é dada no seguinte resultado

Proposição 3.1.1 *Seja* $\overrightarrow{p}$ *um ponto exterior ao hiperplano*

$$H(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{u}) := (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{m}) \bullet \overrightarrow{u} = 0.$$

Então a projeção $\overrightarrow{s} := \mathbb{P}_{H(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{u})}(\overrightarrow{p}) \in H(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{u})$ *do ponto* $\overrightarrow{p}$ *sobre o hiperplano* $H(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{u})$ *é dada por*

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{p} + \frac{(\overrightarrow{m} - \overrightarrow{p}) \bullet \overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2} \overrightarrow{u}.$$

Demonstração. Temos $\overrightarrow{s} = r \cap H(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{u}) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p} + \beta \overrightarrow{u} \\ (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{m}) \bullet \overrightarrow{u} = 0 \end{cases}$ e sai $\beta^* = \frac{(\overrightarrow{m} - \overrightarrow{p}) \bullet \overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2}$, vindo

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{p} + \frac{(\overrightarrow{m} - \overrightarrow{p}) \bullet \overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2} \overrightarrow{u}. \square$$

Donde, tomando $||\overrightarrow{s} - \overrightarrow{p}||$ e confirmando ([12], página 165), ([6], página 98), podermos escrever

Proposição 3.1.2 *Seja $H(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{u}) := (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{m}) \bullet \overrightarrow{u} = 0$ o hiperplano que contém o ponto $\overrightarrow{m}$ e é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u}$.*

Seja $\overrightarrow{p}$ um ponto exterior ao hiperplano $H(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{u})$. Então a distância $d(\overrightarrow{p}, H(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{u}))$ do ponto $\overrightarrow{p}$ ao hiperplano $H(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{u})$ é dada por

$$d(\overrightarrow{p}, H(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{u})) = \frac{|(\overrightarrow{m} - \overrightarrow{p}) \bullet \overrightarrow{u}|}{||\overrightarrow{u}||}. \square$$

3.2 Ponto e reta: projeções e distâncias

Nesta Secção exprimiremos projeções e distâncias utilizando produto interno e duplo produto vetorial. Temos

Proposição 3.2.1 *Seja $\overrightarrow{p}$ um ponto exterior à reta r de equação*

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{m} + \alpha \overrightarrow{u}, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \overrightarrow{x}, \ \overrightarrow{m}, \ \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^7.$$

Seja $\overrightarrow{s} := \mathbb{P}_r(\overrightarrow{p})$ a projeção ortogonal do ponto $\overrightarrow{p}$ sobre a reta r. Então as duas asserções seguintes são equivalentes

1. $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{p} - \frac{\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{m} - \overrightarrow{p}))}{||\overrightarrow{u}||^2}$;

2. $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{m} - \frac{(\overrightarrow{m} - \overrightarrow{p}) \bullet \overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2} \overrightarrow{u}$.

Demonstração. Para obter a relação *2.*, note-se que $\overrightarrow{s} = r \cap H(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{u})$, em que $H(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{u})$ é o hiperplano que contém o ponto $\overrightarrow{p}$ e é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u}$, isto é,

$$H(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{u}) := (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p}) \bullet \overrightarrow{u} = 0.$$

A relação *1.* foi provada em [4]. Assim acabaria a demonstração. Porém, para que tudo fique mais completo, estabeleçamos a equivalência de *1.* e *2.*.

Com efeito, usando a relação (1) da Secção 2.2, obtemos $\frac{\overrightarrow{u}\times(\overrightarrow{u}\times(\overrightarrow{m}-\overrightarrow{p}))}{||\overrightarrow{u}||^2} = \frac{(\overrightarrow{u}\bullet(\overrightarrow{m}-\overrightarrow{p}))\overrightarrow{u}-||\overrightarrow{u}||^2(\overrightarrow{m}-\overrightarrow{p})}{||\overrightarrow{u}||^2} = \frac{\overrightarrow{u}\bullet(\overrightarrow{m}-\overrightarrow{p})}{||\overrightarrow{u}||^2}\overrightarrow{u} - \overrightarrow{m} + \overrightarrow{p}$ e assim

$$\overrightarrow{p} - \frac{\overrightarrow{u}\times(\overrightarrow{u}\times(\overrightarrow{m}-\overrightarrow{p}))}{||\overrightarrow{u}||^2} = -\frac{\overrightarrow{u}\bullet(\overrightarrow{m}-\overrightarrow{p})}{||\overrightarrow{u}||^2}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{m}. \ \square$$

Para a distância de um ponto a uma reta, consideramos ([12], página 166) o hiperplano associado a um ponto e uma reta.

Definição 3.2.1 *A distância $d(\overrightarrow{p}, r)$ de um ponto $\overrightarrow{p}$ a uma reta r é definida como sendo a distância do ponto $\overrightarrow{p}$ ao hiperplano $H^*(\overrightarrow{p}, r)$ associado ao ponto $\overrightarrow{p}$ e à reta r*

$$d(\overrightarrow{p}, r) := d(\overrightarrow{p}, H^*(\overrightarrow{p}, r)) = ||\overrightarrow{p} - \mathbb{P}_{H^*(\overrightarrow{p}, r)}(\overrightarrow{p})||.$$

Observação 3.2.1 *A Definição 3.2.1 pode considerar-se uma particularização, para retas em $\mathbb{R}^n$, do "Strong Separation Principle" ([6], p. 103, Theorem 6.23). Este Princípio tem uma interessante interpretação geométrica ([6], p. 105, Remark), segundo a qual "dado um ponto $\overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^n$ exterior a um convexo K, existe um hiperplano H que separa K e $\overrightarrow{p}$, de tal modo que a distância de $\overrightarrow{p}$ a H é igual à distância de $\overrightarrow{p}$ a K: $d(\overrightarrow{p}, K) = d(\overrightarrow{p}, H)$". Para mais pormenores sobre esta interpretação geométrica, veja-se ([6], pp. 105–106, Theorem 6.25) que versa a distância de um ponto a um conjunto convexo.*

Para a distância de um ponto a uma reta, apresentamos duas fórmulas: uma em termos do duplo produto vetorial; outra em termos do produto interno.

Proposição 3.2.2 *Seja $\overrightarrow{p}$ um ponto exterior à reta r dada por*

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{m} + \alpha\overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{m}, \ \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^7, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Seja $d(\overrightarrow{p}, r)$ a distância do ponto $\overrightarrow{p}$ à reta r. Então as duas asserções seguintes são equivalentes

1. $d(\overrightarrow{p}, r) = \frac{||\overrightarrow{u}\times[\overrightarrow{u}\times(\overrightarrow{m}-\overrightarrow{p})]||}{||\overrightarrow{u}||^2}$;
2. $d(\overrightarrow{p}, r) = \frac{|(\overrightarrow{s}-\overrightarrow{p})\bullet(\overrightarrow{m}-\overrightarrow{p})|}{||\overrightarrow{s}-\overrightarrow{p}||}$;

em que $\overrightarrow{s} := \mathbb{P}_r(\overrightarrow{p})$ é a projeção ortogonal do ponto $\overrightarrow{p}$ sobre a reta r.

Demonstração. A relação *1.* está demonstrada em [4] e vem do ponto 1. da Proposição 3.2.1, considerando $||\overrightarrow{s} - \overrightarrow{p}||$. A relação *2.*, considerada em ([12], página 166), pode ser deduzida como segue.
No nosso caso, da Proposição 3.1.2, vem

$$d(\overrightarrow{p}, r) = d(\overrightarrow{p}, H(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{s} - \overrightarrow{p})) = \frac{|(\overrightarrow{s} - \overrightarrow{p}) \bullet (\overrightarrow{m} - \overrightarrow{p})|}{||\overrightarrow{s} - \overrightarrow{p}||},$$

visto que, pela Definição 3.2.1 e pela Definição 2.3.2, vem, sucessivamente,

$$d(\overrightarrow{p}, r) := d(\overrightarrow{p}, H^*(\overrightarrow{p}, r)) := d(\overrightarrow{p}, H(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{s} - \overrightarrow{p}). \ \square$$

Observação 3.2.2 *O hiperplano $H^*(\overrightarrow{p}, r)$ associado a um ponto $\overrightarrow{p}$ e uma reta r, desempenha no nosso caso, o papel do hiperplano separador de um ponto e de um conjunto convexo ([6], página 106).*

3.3 Retas enviesadas: projeções e distâncias

A distância $d(r_1, r_2)$ entre duas retas enviesadas r_1 e r_2 é definida como sendo

$$\begin{aligned} d(r_1, r_2) : &= \min\{d(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) : \overrightarrow{p} \in r_1, \ \overrightarrow{q} \in r_2\} \\ &= \min\{||\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}|| : \overrightarrow{p} \in r_1, \ \overrightarrow{q} \in r_2\}. \end{aligned}$$

Temos

Proposição 3.3.1 *Sejam dadas as retas enviesadas em $\mathbb{R}^7$*

$$r_1 := \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p_1} + \alpha_1 \overrightarrow{u_1} \ \text{ e } \ r_2 := \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p_2} + \alpha_2 \overrightarrow{u_2}.$$

Considerem-se os pontos $\overrightarrow{p_1^*} \in r_1$ e $\overrightarrow{p_2^*} \in r_2$ dados na Proposição 2.4.1. Então – de entre todos os pares $(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$, com $\overrightarrow{f_1} \in r_1$ e $\overrightarrow{f_2} \in r_2$ – $(\overrightarrow{p_1^*}, \overrightarrow{p_2^*})$ é o único par de pontos tais que o vetor $\overrightarrow{p_2^*} - \overrightarrow{p_1^*}$ é ortogonal às retas

$$r_{1_0} := \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} + \alpha_1 \overrightarrow{u_1} \ \text{ e } \ r_{2_0} := \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} + \alpha_2 \overrightarrow{u_2},$$

isto é, $(\overrightarrow{p_1^*}, \overrightarrow{p_2^*})$ é o único par de pontos que satisfaz às condições

$$(\overrightarrow{p_2^*} - \overrightarrow{p_1^*}) \bullet \overrightarrow{u_1} = 0 \ e \ (\overrightarrow{p_2^*} - \overrightarrow{p_1^*}) \bullet \overrightarrow{u_2} = 0 \tag{5}$$

Demonstração. A unicidade foi contemplada na Proposição 2.4.1. Efetuando os cálculos com as relações (2), (3) obtemos as relações (5). $\square$

O próximo resultado é usado na demonstração da Proposição 3.3.6.

Proposição 3.3.2 *Sejam as retas enviesadas r_1 e r_2 dadas, respetivamente, por*

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{p_1} + \alpha_1 \overrightarrow{u_1} \ \text{ e } \ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p_2} + \alpha_2 \overrightarrow{u_2}.$$

Escolha-se $\overrightarrow{p_2^*} - \overrightarrow{p_1^*}$ *para vetor diretor da reta normal comum às retas* r_1 *e* r_2*, em que* $\overrightarrow{p_1^*} \in r_1$, $\overrightarrow{p_2^*} \in r_2$ *são dados na Proposição 2.4.1. Então*

$$(\overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}) \bullet (\overrightarrow{p_2^*} - \overrightarrow{p_1^*}) = (\overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1^*}) \bullet (\overrightarrow{p_2^*} - \overrightarrow{p_1^*}) = -(\overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{p_2^*}) \bullet (\overrightarrow{p_2^*} - \overrightarrow{p_1^*}).$$

Demonstração. Temos $\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_1^*} + k_1\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p_2^*} + k_2\overrightarrow{u_2}$, para algum $k_1 \in \mathbb{R}$ e para algum $k_2 \in \mathbb{R}$.

Vem, sucessivamente,

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}) \bullet (\overrightarrow{p_2^*} - \overrightarrow{p_1^*}) &= (\overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1^*} - k_1\overrightarrow{u_1}) \bullet (\overrightarrow{p_2^*} - \overrightarrow{p_1^*}) \\
&= (\overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1^*}) \bullet (\overrightarrow{p_2^*} - \overrightarrow{p_1^*}) - k_1(\overrightarrow{u_1} \bullet (\overrightarrow{p_2^*} - \overrightarrow{p_1^*})) \\
&= (\overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1^*}) \bullet (\overrightarrow{p_2^*} - \overrightarrow{p_1^*}),
\end{aligned}$$

porque $\overrightarrow{u_1}$ é ortogonal a $\overrightarrow{p_2^*} - \overrightarrow{p_1^*}$, de acordo com a Proposição 3.3.1. Mutatis mutandis para a segunda igualdade. $\square$

Definição 3.3.1 *O melhor par aproximante das retas enviesadas*

$$r_1 := \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p_1} + \alpha_1\overrightarrow{u_1} \text{ e } r_2 := \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p_2} + \alpha_2\overrightarrow{u_2}$$

é o par $(\overrightarrow{p_1^*}, \overrightarrow{p_2^*}), \overrightarrow{p_1^*} \in r_1, \overrightarrow{p_2^*} \in r_2$ *tal que* $||\overrightarrow{p_1^*} - \overrightarrow{p_2^*}|| = d(r_1, r_2)$.

O melhor par aproximante $(\overrightarrow{p_1^*}, \overrightarrow{p_2^*})$ está dado, através do produto interno, nas fórmulas (2) e (3) da Proposição 2.4.1.

A seguir caracterizamos os elementos do melhor par aproximante.

Proposição 3.3.3 *Sejam* $r_1 := \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p_1} + \alpha_1\overrightarrow{u_1}$ *e* $r_2 := \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p_2} + \alpha_2\overrightarrow{u_2}$ *duas retas enviesadas em* $\mathbb{R}^7$*. Considere-se o par* $(\overrightarrow{p_1^*}, \overrightarrow{p_2^*})$ *em que* $\overrightarrow{p_1^*} \in r_1$ *e* $\overrightarrow{p_2^*} \in r_2$ *são dados na Proposição 2.4.1.*
Então: $\overrightarrow{p_1^*}$ *é a projeção ortogonal do ponto* $\overrightarrow{p_2^*}$ *sobre a reta* r_1, $\overrightarrow{p_1^*} = \mathbb{P}_{r_1}(\overrightarrow{p_2^*})$*; e* $\overrightarrow{p_2^*}$ *é a projeção ortogonal do ponto* $\overrightarrow{p_1^*}$ *sobre a reta* r_2, $\overrightarrow{p_2^*} = \mathbb{P}_{r_2}(\overrightarrow{p_1^*})$.

Demonstração. Temos, como foi dito na Introdução, na caracterização da projeção de um ponto sobre uma variedade linear, $\overrightarrow{p_1^*} = \mathbb{P}_{r_1}(\overrightarrow{p_2^*})$ se e só se o vetor $\overrightarrow{p_2^*} - \overrightarrow{p_1^*}$ for ortogonal à reta $r_{1_0} := \overrightarrow{O} + \alpha u_1$, ([6], página 64), o que é equivalente a $(\overrightarrow{p_2^*} - \overrightarrow{p_1^*}) \perp \overrightarrow{u_1}$; esta última relação é válida, pela Proposição 3.3.1. Mutatis mutandis para $\overrightarrow{p_2^*} = \mathbb{P}_{r_2}(\overrightarrow{p_1^*})$. $\square$

Vamos apresentar expressões em termos do duplo produto vetorial para o melhor par aproximante.

Proposição 3.3.4 *Em $\mathbb{R}^7$, o melhor par aproximante das retas enviesadas $r_1 := \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p_1} + \alpha_1\overrightarrow{u_1}$ e $r_2 := \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p_2} + \alpha_2\overrightarrow{u_2}$ é dado por $(\overrightarrow{p_1^*}, \overrightarrow{p_2^*})$, sendo $\overrightarrow{p_1^*} = \overrightarrow{p_2^*} - \frac{\overrightarrow{u_1}\times[\overrightarrow{u_1}\times(\overrightarrow{p_1}-\overrightarrow{p_2^*})]}{||\overrightarrow{u_1}||^2}$ e $\overrightarrow{p_2^*} = \overrightarrow{p_1^*} - \frac{\overrightarrow{u_2}\times[\overrightarrow{u_2}\times(\overrightarrow{p_2}-\overrightarrow{p_1^*})]}{||\overrightarrow{u_2}||^2}$, em que $\overrightarrow{p_1^*} \in r_1$ e $\overrightarrow{p_2^*} \in r_2$ são dados na Proposição 2.4.1.*

Demonstração. Usando a relação (1) da Secção 2.2, obtemos $\frac{\overrightarrow{u_1}\times[\overrightarrow{u_1}\times(\overrightarrow{p_1}-\overrightarrow{p_2^*})]}{||\overrightarrow{u_1}||^2} + \frac{\overrightarrow{u_2}\times[\overrightarrow{u_2}\times(\overrightarrow{p_2}-\overrightarrow{p_1^*})]}{||\overrightarrow{u_2}||^2} = \frac{[\overrightarrow{u_1}\bullet(\overrightarrow{p_1}-\overrightarrow{p_2^*})]}{||\overrightarrow{u_1}||^2}\overrightarrow{u_1} + \frac{[\overrightarrow{u_2}\bullet(\overrightarrow{p_2}-\overrightarrow{p_1^*})]}{||\overrightarrow{u_2}||^2}\overrightarrow{u_2} + (\overrightarrow{p_1^*} - \overrightarrow{p_1}) + (\overrightarrow{p_2^*} - \overrightarrow{p_2})$; tendo em atenção o ponto 2. da Proposição 3.2.1 e a Proposição 3.3.3, temos $\overrightarrow{p_1^*} - \overrightarrow{p_1} = \frac{(\overrightarrow{p_2^*}-\overrightarrow{p_1})\bullet\overrightarrow{u_1}}{||\overrightarrow{u_1}||^2}\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{p_2^*} - \overrightarrow{p_2} = \frac{(\overrightarrow{p_1^*}-\overrightarrow{p_2})\bullet\overrightarrow{u_2}}{||\overrightarrow{u_2}||^2}\overrightarrow{u_2}$; assim podemos concluir que $\frac{\overrightarrow{u_1}\times[\overrightarrow{u_1}\times(\overrightarrow{p_1}-\overrightarrow{p_2^*})]}{||\overrightarrow{u_1}||^2} = -\frac{\overrightarrow{u_2}\times[\overrightarrow{u_2}\times(\overrightarrow{p_2}-\overrightarrow{p_1^*})]}{||\overrightarrow{u_2}||^2}$ e, adicionando o ponto $\overrightarrow{p_1^*}$ a cada membro desta equação, vem $\overrightarrow{p_1^*} + \frac{\overrightarrow{u_1}\times[\overrightarrow{u_1}\times(\overrightarrow{p_1}-\overrightarrow{p_2^*})]}{||\overrightarrow{u_1}||^2} = \overrightarrow{p_1^*} - \frac{\overrightarrow{u_2}\times[\overrightarrow{u_2}\times(\overrightarrow{p_2}-\overrightarrow{p_1^*})]}{||\overrightarrow{u_2}||^2}$; pelo ponto 1. da Proposição 3.2.1, concluímos que $\overrightarrow{p_2^*} = \overrightarrow{p_1^*} - \frac{\overrightarrow{u_2}\times[\overrightarrow{u_2}\times(\overrightarrow{p_2}-\overrightarrow{p_1^*})]}{||\overrightarrow{u_2}||^2}$. Logo também $\overrightarrow{p_2^*} = \overrightarrow{p_1^*} + \frac{\overrightarrow{u_1}\times[\overrightarrow{u_1}\times(\overrightarrow{p_1}-\overrightarrow{p_2^*})]}{||\overrightarrow{u_1}||^2}$, donde sai $\overrightarrow{p_1^*} = \overrightarrow{p_2^*} - \frac{\overrightarrow{u_1}\times[\overrightarrow{u_1}\times(\overrightarrow{p_1}-\overrightarrow{p_2^*})]}{||\overrightarrow{u_1}||^2}$. □

Obtido o melhor par aproximante, podemos exibir a esfera ótima associada às duas retas.

Corolário 3.3.1 *A menor superfície esférica tangente às duas retas enviesadas $r_1 := \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p_1} + \alpha_1\overrightarrow{u_1}$ e $r_2 := \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p_2} + \alpha_2\overrightarrow{u_2}$, tem centro $\overrightarrow{c} = \frac{\overrightarrow{p_1^*}+\overrightarrow{p_2^*}}{2}$ e raio $r = \frac{||\overrightarrow{p_1^*}-\overrightarrow{p_2^*}||}{2}$: $\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n : ||\overrightarrow{x} - \frac{\overrightarrow{p_1^*}+\overrightarrow{p_2^*}}{2}|| = \frac{||\overrightarrow{p_1^*}-\overrightarrow{p_2^*}||}{2}\}$.*

A distância entre duas retas enviesadas é, essencialmente, a distância de um ponto a um hiperplano ([12], página 169). Temos

Definição 3.3.2 *A distância entre duas retas enviesadas r_1 e r_2 é definida como sendo quer a distância de um ponto da reta r_2 ao hiperplano associado às retas r_1 e r_2, quer a distância de um ponto da reta r_1 ao hiperplano associado às retas r_2 e r_1.*

Proposição 3.3.5 *Sejam r_1 e r_2 duas retas enviesadas definidas pelas equações*

$$r_1 := \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p_1} + \alpha_1\overrightarrow{u_1} \quad e \quad r_2 := \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p_2} + \alpha_2\overrightarrow{u_2}.$$

Seja $(\overrightarrow{p_1^*}, \overrightarrow{p_2^*})$, $\overrightarrow{p_1^*} \in r_1$, $\overrightarrow{p_2^*} \in r_2$ o melhor par aproximante das retas r_1 e r_2. Então a distância $d(r_1, r_2)$ entre as retas r_1 e r_2 é dada por

$$d(r_1,r_2) = \frac{|(\overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{p_2}) \bullet (\overrightarrow{p_2^*} - \overrightarrow{p_1^*})|}{||(\overrightarrow{p_2^*} - \overrightarrow{p_1^*})||}.$$

Demonstração. $d(r_1,r_2) := d(\overrightarrow{p_2}, H^*(r_1,r_2)) = d(\overrightarrow{p_2}, H^*(\overrightarrow{p_2^*}, r_1))$; também $d(r_1,r_2) := d(\overrightarrow{p_1}, H^*(r_2,r_1)) = d(\overrightarrow{p_1}, H^*(\overrightarrow{p_1^*}, r_2))$. Usem-se a Proposição 2.4.2, a Proposição 3.1.2, a Proposição 3.2.2 e a Definição 2.4.2. $\square$

Proposição 3.3.6 *Sejam em $\mathbb{R}^7$ as retas enviesadas*

$$r_1 := \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p_1} + \alpha_1\overrightarrow{u_1} \text{ e } r_2 := \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p_2} + \alpha_2\overrightarrow{u_2}.$$

Seja $(\overrightarrow{p_1^*}, \overrightarrow{p_2^*}), \overrightarrow{p_1^*} \in r_1, \overrightarrow{p_2^*} \in r_2$ o melhor par aproximante das retas r_1 e r_2. Então a distância $d(r_1,\ r_2) = ||\overrightarrow{p_2^*} - \overrightarrow{p_1^*}||$ entre as retas r_1 e r_2 é dada por

1. $d(r_1,r_2) = \frac{||\overrightarrow{u_2}\times(\overrightarrow{u_2}\times(\overrightarrow{p_2}-\overrightarrow{p_1^*}))||}{||\overrightarrow{u_2}||^2}$;

2. $d(r_1,r_2) = \frac{||\overrightarrow{u_1}\times(\overrightarrow{u_1}\times(\overrightarrow{p_1}-\overrightarrow{p_2^*}))||}{||\overrightarrow{u_1}||^2}$.

Demonstração. Provemos que $d(\overrightarrow{p_1^*}, r_2) = d(r_1,r_2)$.
Temos:

$$d(\overrightarrow{p_1^*}, r_2) = \frac{|(\overrightarrow{p_2}-\overrightarrow{p_1^*})\bullet(\overrightarrow{p_2^*}-\overrightarrow{p_1^*})|}{||\overrightarrow{p_2^*}-\overrightarrow{p_1^*}||}, \text{ pela Proposição 3.2.2;}$$

$$d(\overrightarrow{p_1^*}, r_2) = \frac{|(\overrightarrow{p_1}-\overrightarrow{p_2})\bullet(\overrightarrow{p_2^*}-\overrightarrow{p_1^*})|}{||\overrightarrow{p_2^*}-\overrightarrow{p_1^*}||}, \text{ pela Proposição 3.3.2;}$$

e, finalmente,

$$d(\overrightarrow{p_1^*}, r_2) = d(r_1,r_2),$$

pela Proposição 3.3.5. Fica provado o ponto *1.*, usando o ponto *1.* da Proposição 3.2.2. O ponto *2.* prova-se mutatis mutandis como se faz para o ponto *1.*. $\square$

Observação 3.3.1 *Algumas considerações sobre: paralelismo e enviesamento; existência e unicidade do melhor par aproximante.*

i) paralelismo e enviesamento

Em $\mathbb{R}^n$ as retas enviesadas serão, de acordo com [7], variedades lineares totalmente enviesadas. As retas paralelas são completamente paralelas.

Em [7] é introduzido o conceito de grau de paralelismo.

As variedades lineares

$$\mathcal{A} := A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} := \overrightarrow{x_0} + \mathcal{N}(A) \text{ e } \mathcal{B} := B\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} := \overrightarrow{y_0} + \mathcal{N}(B)$$

têm grau de paralelismo k se $k = \dim \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B)$. Quando $k = 0$, as variedades são totalmente enviesadas. Se $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(B)$, então as variedades $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são ditas completamente paralelas.

ii) existência e unicidade do melhor par aproximante

O melhor par aproximante não existe em geral ([5], página 191). Calcular a distância entre dois conjuntos convexos pode reduzir-se ao cálculo da distância da origem das coordenadas ao convexo que é a diferença dos dois convexos ([5], página 191).

O problema do melhor par aproximante $(\overrightarrow{l^{**}}, \overrightarrow{m^{**}})$ *de duas variedades lineares em* $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{L} := \overrightarrow{x} = \overrightarrow{l_0} + L\overrightarrow{\alpha},\ \mathcal{M} := \overrightarrow{x} = \overrightarrow{m_0} - M\overrightarrow{\beta}$$

pode resolver-se ([5], pp 195-196) a partir do sistema

$$\begin{bmatrix} L & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{\alpha} \\ \overrightarrow{\beta} \end{bmatrix} = \overrightarrow{m_0} - \overrightarrow{l_0}$$

de que se obtém a solução, única, de norma mínima, no sentido dos mínimos quadrados ([3], pp 28 - 29, Theorem 2.1.1, Theorem 2.1.2), ([1], página 122)

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{\alpha^{**}} \\ \overrightarrow{\beta^{**}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & M \end{bmatrix}^{\psi} (\overrightarrow{m_0} - \overrightarrow{l_0}). \tag{6}$$

Da relação (6) sai o melhor par aproximante $(\overrightarrow{l^{**}}, \overrightarrow{m^{**}})$ *dado por*

$$\overrightarrow{l^{**}} = \overrightarrow{l_0} + L\overrightarrow{\alpha^{**}},\ \overrightarrow{m^{**}} = \overrightarrow{m_0} - M\overrightarrow{\beta^{**}}.$$

$\star$ *No nosso caso de* ***duas retas enviesadas*** *em* $\mathbb{R}^n$

$$r_1 := \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p_1} + \alpha_1\overrightarrow{u_1},\ r_2 := \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p_2} - \alpha_2\overrightarrow{u_2}$$

temos o único melhor par aproximante $(\overrightarrow{p_1^{**}}, \overrightarrow{p_2^{**}})$ *dado por*

$$\overrightarrow{p_1^{**}} = \overrightarrow{p_1} + \alpha_1^{**}\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{p_2^{**}} = \overrightarrow{p_2} - \alpha_2^{**}\overrightarrow{u_2}, \tag{7}$$

em que $(\alpha_1^{**}, \alpha_2^{**})$ *vem de*

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{u_1} & \overrightarrow{u_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}$$

através de

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^{**} \\ \alpha_2^{**} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{u_1} & \overrightarrow{u_2} \end{bmatrix}^{\psi} (\overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}).$$

Como a matriz $\begin{bmatrix} \overrightarrow{u_1} & \overrightarrow{u_2} \end{bmatrix}$ *tem característica dois, devido ao facto de os vetores* $\overrightarrow{u_1}$ *e* $\overrightarrow{u_2}$ *serem linearmente independentes, vem ([2], página 398, Proposition 6.1.5; pp 427 - 428, Fact 6.5.18) e como dissemos na Introdução*

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \overrightarrow{u_1} & \overrightarrow{u_2} \end{bmatrix}^{\psi} &= (\begin{bmatrix} \overrightarrow{u_1}^T \\ \overrightarrow{u_2}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{u_1} & \overrightarrow{u_2} \end{bmatrix})^{-1} \begin{bmatrix} \overrightarrow{u_1}^T \\ \overrightarrow{u_2}^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ||\overrightarrow{u_1}||^2 & \overrightarrow{u_1} \bullet \overrightarrow{u_2} \\ \overrightarrow{u_1} \bullet \overrightarrow{u_2} & ||\overrightarrow{u_2}||^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \overrightarrow{u_1}^T \\ \overrightarrow{u_2}^T \end{bmatrix} \\
&= \frac{\begin{bmatrix} ||\overrightarrow{u_2}||^2 & -\overrightarrow{u_1} \bullet \overrightarrow{u_2} \\ -\overrightarrow{u_1} \bullet \overrightarrow{u_2} & ||\overrightarrow{u_1}||^2 \end{bmatrix}}{g(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})} \begin{bmatrix} \overrightarrow{u_1}^T \\ \overrightarrow{u_2}^T \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Daqui tira-se

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^{**} \\ \alpha_2^{**} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} ||\overrightarrow{u_2}||^2 \overrightarrow{u_1}^T - (\overrightarrow{u_1} \bullet \overrightarrow{u_2}) \overrightarrow{u_2}^T \\ -(\overrightarrow{u_1} \bullet \overrightarrow{u_2}) \overrightarrow{u_1}^T + ||\overrightarrow{u_1}||^2 \overrightarrow{u_2}^T \end{bmatrix}}{g(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})} (\overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}),$$

donde sai, por (7), $\overrightarrow{p_1^{**}}$ *e* $\overrightarrow{p_2^{**}}$. *Note-se a reemergência do determinante de Gram.* □

Já provámos na Proposição 2.4.1 a unicidade do melhor par aproximante, utilizando apenas resultados de Álgebra Linear. Aqui propusemos nova abordagem envolvendo resultados da Teoria da Aproximação.

4 Observações finais e conclusões

Usamos o duplo produto vetorial de três vetores em $\mathbb{R}^7$ nos casos seguintes: projeção de um ponto sobre uma reta e distância de um ponto a uma reta; melhor par aproximante de duas retas enviesadas e distância entre duas retas enviesadas.

Quando se usa o produto interno, as expressões para as distâncias e para o melhor par aproximante são válidas em $\mathbb{R}^n$. Também são favoráveis do ponto de vista computacional.

Um instrumento essencial é o hiperplano associado a um ponto e uma reta, o qual consideramos ser um caso especial do hiperplano separador de um ponto e de um conjunto convexo.

O melhor par aproximante de duas retas enviesadas também foi obtido através da inversa de Moore-Penrose de uma matriz resultante de um processo que envolve a diferença de dois conjuntos convexos.

Acknowledgements

Agradecemos a um relator anónimo as sugestões que permitiram melhorar a forma e o conteúdo deste artigo. The author José Vitória gratefully thanks the generous logistic support from the Department of Mathematics of the University of Coimbra and also asserts that, in part, this work was supported by Portuguese funds through the CIDMA - Center for Research and Development in Mathematics and Applications, and the Portuguese Foundation for Science and Technology ("FCT–Fundação para a Ciência e a Tecnologia"), within project with reference PEst-OE/MAT/UI4106/2014. The author Paula Catarino gratefully thanks the support by the Portuguese Government through the "FCT–Fundação para a Ciência e a Tecnologia" – under the project with reference PEst-OE/MAT/UI4080/2014.

Referências

[1] A. Ben-Israel e T. N. E. Greville, *Generalized Inverses, Theory and Applications*, Series: CMS Books in Mathematics, 2nd edition, Springer, New York, 2003 [MR 198 7382; Zbl 1026.15004].

[2] D. S. Bernstein, *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas*, 2nd edition, Princeton University Press, Princeton, 2009 [MR 251 3751; Zbl 1183.15001].

[3] S. L. Campbell e C. D. Meyer, *Generalized Inverses of Linear Transformations*. Correct reprint of the 1979 original, Dover, New York, 1991 [MR 110 5324; Zbl 1158.15301].

[4] C. Costa, M. A. F. Vicente, P. Beites, F. Martins, R. Serôdio e P. Tadeu, "Produto vectorial em $\mathbb{R}^7$: Projecção de um ponto sobre uma recta", *Boletim da SPM*, No. 62 (2010), pp. 18–35 [MR 266 2730; Zbl 1206.15022].

[5] A. Dax, "The distance between two convex sets", *Linear Algebra and its Applications*, No. 416 (2006), pp. 184–213 [MR 223 2929; Zbl 1131.90031].

[6] F. Deutsch, *Best Approximation in Inner Product Spaces*, CMS Books in Mathematics, Springer, New York, 2001 [MR 266 2730; Zbl 1206. 15022].

[7] A. DuPré e S. Kass, "Distance and parallelism between flats in $\mathbb{R}^n$", *Linear Algebra and its Applications*, No. 171 (1992), pp. 99–107 [MR 116 5447; Zbl 0781.51003].

[8] H. D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neurkirch, A. Prestel e R. Remmert, *Numbers*, Springer, New York, 1996 [MR 141 5833 (97f:00001); Zbl 0705.00001].

[9] F. S. Leite, "The geometry of hypercomplex matrices", *Linear and Multilinear Algebra*, No. 34 (1993), pp. 123–132 [MR 133 4681; Zbl 0796.15017].

[10] F. S. Leite e P. Crouch, "The triple cross product in $\mathbb{R}^7$", *Reports in Mathematical Physics*, Vol. 39, No. 3 (1997), pp. 407–424 [MR 147 7902; Zbl 0901.17003].

[11] W. S. Massey, "Cross products of vectors in higher-dimensional Euclidean spaces", *American Mathematical Monthly*, Vol. 90, No. 10 (1983), pp. 697–701 [MR 072 3943; Zbl 0532.55011].

[12] M. L. A. M. Ruiz, *Um Curso de Álgebra Linear e Geometria Analítica.* 1.ª parte – Vol. I, 1985–1986–Instituto Universitário de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real.

[13] J. P. Ward, *Quarternions and Cayley Numbers*, Kluwer, Dordrecht, 1997 [MR 145 8894 (98e:16001); Zbl 0877. 15031].

O primeiro autor é membro do CM-UTAD — Centro de Investigação em Matemática da Universidade de Trá-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, Portugal. É também membro colaborador do LabDCT-CIDTFF — Laboratório de Didáctica de Ciências e Tecnologia.
Scopus Author ID: 55899791800
ORCID ID: `http://orcid.org/0000-0001-6917-5093`

O segundo autor é membro do CIDMA — Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações da Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.
Scopus Author ID: 15735365200
ORCID ID: `http://orcid.org/0000-0003-3964-2425`