Sistemas Dinâmicos

Editor Convidado: Pedro Miguel Duarte

Exponentially small splitting of separatrices

José Pedro Gaivão
CEMAPRE, ISEG
Universidade Técnica de Lisboa
Rua do Quelhas 6, 1200-781 Lisboa, Portugal
e-mail: jpgaivao@iseg.utl.pt

Abstract We study the exponentially small splitting of separatrices near a Hamiltonian-Hopf bifurcation. Our main result is an asymptotic expansion that measures the splitting. We also provide generic conditions under which the separatrices split, thus proving the existence of horseshoes in families of Hamiltonian systems undergoing a subcritical Hamiltonian-Hopf bifurcation.

keywords: Hamiltonian dynamics; splitting of separatrices; exponentially small phenomena

1 Introduction

A standard method for determining the splitting of separatrices is the Poincaré-Melnikov-Arnold method. Let us briefly describe the method in the context of time-periodic perturbations of one degree of freedom Hamiltonian systems [3]. Consider the following Hamiltonian,

$$H(q,p,t,\mu) = H_0(q,p) + \mu H_1(q,p,t), \tag{1.1}$$

where $(q,p) \in \mathbb{R}^2$, μ is a small parameter and H_1 is 2π-periodic in t. Suppose that the Hamiltonian H_0 has a saddle equilibrium, say at the origin, and a homoclinic trajectory $\Gamma_0(t) = (q_0(t), p_0(t))$, i.e. $\Gamma_0(t) \to 0$ as $t \to \pm\infty$. By the implicit function theorem, for small values of μ there exists a hyperbolic periodic orbit γ for H such that $\gamma(t) = O(\mu)$. Moreover, γ has stable and unstable manifolds μ-close to the unperturbed homoclinic orbit Γ_0. These are known as separatrices. By properly choosing a transverse section to the homoclinic orbit Γ_0 we can compute the difference d between the points of first intersection of the section with the separatrices of the periodic orbit γ. Projecting the difference to the gradient of H_0, V. Arnold derived the following simple formula,

$$d(t) = M(t)\mu + O(\mu^2), \quad M(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{H_0, H_1\}(\Gamma_0(s), s+t)\, ds,$$

where $M(t)$ is the well known *Melnikov function*. A simple zero of the Melnikov function gives a transverse homoclinic trajectory for μ sufficiently small. In this case we say that the separatrices split. The splitting of the separatrices implies the existence of horseshoes in a neighborhood of γ, thus positive topological entropy and chaotic dynamics [3].

Suppose now that H_1 depends on an extra parameter ϵ. Then the Melnikov function may also depend on that parameter. As an example, consider the Hamiltonian

$$H(q, p, t, \mu, \epsilon) = \frac{p^2}{2} + \cos q - \mu \sin q \cos\left(\frac{t}{\epsilon}\right) .$$

Using the calculus of residues we can compute,

$$M(t) = \pm \frac{2\pi}{\epsilon^2 \cosh(\frac{\pi}{2\epsilon})} \cos\left(\frac{t}{\epsilon}\right),$$

and the Melnikov function is exponentially small with respect to ϵ. Since the error term in $d(t)$ is of order $O(\mu^2)$, it becomes greater than the leading term $M(t)\mu$ when ϵ is very small. Thus, the method may fail to correctly predict the splitting of the separatrices. We shall now describe a codimension one bifurcation in two degrees of freedom Hamiltonian systems where we were able to correctly measure the exponentially small splitting of separatrices.

2 Hamiltonian-Hopf bifurcation

Let $H_\epsilon : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ be a one-parameter family of real analytic Hamiltonian functions. Associated to H_ϵ we have the Hamiltonian equations,

$$\dot{q} = \frac{\partial H_\epsilon}{\partial p} \quad \text{and} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H_\epsilon}{\partial q} .$$

Let X_{H_ϵ} denote the corresponding vector field, also known as *Hamiltonian vector field*. Suppose that the origin is an equilibrium point for the family X_{H_ϵ}, i.e. $X_{H_\epsilon}(0) = 0$ for every ϵ. We say that the equilibrium undergoes a *Hamiltonian-Hopf bifurcation* if the eigenvalues of the linearized system at the equilibrium change from complex $\pm\beta_\epsilon \pm i\alpha_\epsilon$ $(\alpha_\epsilon, \beta_\epsilon > 0)$ for $\epsilon > 0$ to pure imaginary when $\epsilon < 0$. When $\epsilon = 0$ the eigenvalues form a pair of pure imaginary numbers $\pm i\alpha_0$ with multiplicity two. Note that, as $\epsilon \to 0^+$ the equilibrium becomes weakly hyperbolic.

This bifurcation has been extensively studied in [4] and a normal form theory for the bifurcation has been developed. It is known that depending on the sign of a certain coefficient of the normal form there are two main bifurcation scenarios. In one of these scenarios, known as the *subcritical case*, for $\epsilon > 0$ the equilibrium has two dimensional stable W^s_ϵ and unstable W^u_ϵ manifolds, also known as *separatrices*. These manifolds are contained in the three dimensional energy level set $H_\epsilon = 0$ and shrink to the equilibrium as $\epsilon \to 0^+$. Proving the splitting of the separatrices near a subcritical Hamiltonian-Hopf bifurcation is a non-trivial problem, since the nonlinear effects that cause the splitting are invisible to classical perturbation methods such as the Poincaré-Melnikov-Arnold method [2, 1].

3 Homoclinic invariant

In the study of homoclinic trajectories it is important to have a convenient basis in the tangent space to the stable and unstable manifolds. Let $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ and $\sigma > 0$. A *natural parametrization* of the unstable manifold W^u_ϵ is a map $\mathbf{\Gamma}^u_\epsilon : \mathbb{T} \times (-\infty, \sigma) \to \mathbb{R}^4$ which is a solution of the equation

$$\alpha_\epsilon \partial_\varphi \mathbf{\Gamma}^u_\epsilon + \beta_\epsilon \partial_z \mathbf{\Gamma}^u_\epsilon = X_{H_\epsilon}(\mathbf{\Gamma}^u_\epsilon)$$

supplied with the condition $\mathbf{\Gamma}^u_\epsilon(\varphi, z) \to 0$ as $z \to -\infty$. By the method of characteristics we see that $\mathbf{\Gamma}^u_\epsilon$ linearizes the dynamics on the unstable manifold, i.e.

$$\mathbf{\Gamma}^u_\epsilon(\varphi + \alpha_\epsilon t, z + \beta_\epsilon t) = \Phi^t_{H_\epsilon} \circ \mathbf{\Gamma}^u_\epsilon(\varphi, z) \tag{3.1}$$

where $\Phi^t_{H_\epsilon}$ is the Hamiltonian flow. Similarly, we can define a natural parametrization $\mathbf{\Gamma}^s_\epsilon : \mathbb{T} \times (-\sigma, \infty)$ for the stable manifold W^s_ϵ.

Theorem 3.1 *For every $\epsilon > 0$ sufficiently small there exist real analytic natural parametrizations $\mathbf{\Gamma}^s_\epsilon$ and $\mathbf{\Gamma}^s_\epsilon$ for the stable and unstable manifold such that $\mathbf{x}_\epsilon = \mathbf{\Gamma}^u_\epsilon(0,0) = \mathbf{\Gamma}^s_\epsilon(0,0)$ is a primary homoclinic point.*

For a proof of this theorem see [2]. The trajectory $\gamma_\epsilon = \{\Phi^t_{H_\epsilon}(\mathbf{x}_\epsilon) : t \in \mathbb{R}\}$ is a primary homoclinic trajectory which, roughly speaking, is the "first intersection" of stable and unstable manifolds. Each of the derivatives $\partial_z \mathbf{\Gamma}^{s,u}_\epsilon$ and $\partial_\varphi \mathbf{\Gamma}^{s,u}_\epsilon$ defines a vector field on $W^{s,u}_\epsilon$ and equation (3.1) implies that both vector fields are invariant under the flow $\Phi^t_{H_\epsilon}$ restricted to $W^{s,u}_\epsilon$.

In order to measure the splitting of the separatrices we introduce the *Lazutkin homoclinic invariant* of the homoclinic point $\mathbf{x}_\epsilon$,

$$\omega_\epsilon = \Omega(\partial_\varphi \mathbf{\Gamma}^s_\epsilon(0,0), \partial_\varphi \mathbf{\Gamma}^u_\epsilon(0,0)),$$

where Ω is the standard symplectic form in $\mathbb{R}^4$. It is easy to see that ω_ϵ is an invariant: the definition leads to the same value for all points of the homoclinic trajectory γ_ϵ. Also note that ω_ϵ does not depend on the choice of coordinates. Moreover, since $\mathbf{\Gamma}_\epsilon^{s,u}$ belong to the 3D energy level $\{H_\epsilon = 0\}$, if $\omega_\epsilon \neq 0$ then the stable and unstable manifolds intersect transversely along the homoclinic trajectory γ_ϵ.

We are now ready to state our main result.

Theorem 3.2 *The homoclinic invariant has the following asymptotic expansion,*

$$\omega_\epsilon \sim \pm e^{-\frac{\pi\alpha_\epsilon}{2\beta_\epsilon}} \sum_{n\geq 0} \omega_n \epsilon^n \quad \text{as} \quad \epsilon \to 0^+ ,$$

where $\omega_n \in \mathbb{R}$ *for every* $n = 0, 1, 2, \ldots$

For a proof of the asymptotic expansion see [2]. Recall that α_ϵ and β_ϵ are the absolute value of the imaginary and real part of the eigenvalues of $DX_{H_\epsilon}(0)$. Since $\beta_\epsilon \to 0$ and $\alpha_\epsilon \to \alpha_0 \neq 0$ as $\epsilon \to 0^+$, the prefactor in the asymptotic expansion is exponentially small with respect to ϵ. In fact, it is possible to show that $\alpha_\epsilon/\beta_\epsilon = O(\epsilon^{-1/2})$.

If there is $n \geq 0$ such that $\omega_n \neq 0$ then $\omega_\epsilon \neq 0$ for every $\epsilon > 0$ sufficiently small. The leading term ω_0 of the asymptotic formula depends only on the Hamiltonian H_ϵ at the moment of bifurcation, i.e. ω_0 is a functional $H_0 \mapsto \omega_0(H_0)$. Moreover, the splitting is generic, in the sense that for every $\epsilon > 0$ there exists a family of Hamiltonians $\tilde{H}_\epsilon$ undergoing a subcritical Hamiltonian-Hopf bifurcation such that $\tilde{H}_\epsilon$ is ϵ-close to H_ϵ and $\omega_0(\tilde{H}_0) \neq 0$.

References

[1] J. P. Gaivao and V. Gelfreich, "Splitting of separatrices for the Hamiltonian-Hopf bifurcation with the Swift-Hohenberg equation as an example", *Nonlinearity*, **24** (2011), N. 3, pp. 677–698.

[2] J. P. Gaivao, *Exponentially small splitting of invariant manifolds near a Hamiltonian-Hopf bifurcation*, Ph.D. thesis, University of Warwick, 2010.

[3] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer: Berlin, 1983

[4] Jan-Cees van der Meer, *The Hamiltonian Hopf bifurcation*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1160, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

Produto de Atractores Homoclínicos

Alexandre Rodrigues
Centro de Matemática da Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre, 687
4169-464 Porto, Portugal
e-mail: `alexandre.rodrigues@fc.up.pt`

Resumo: Apoiado nos avanços recentes de Agarwal, Rodrigues e Field [1], neste texto apresenta-se uma perspectiva global a respeito dos resultados existentes acerca da dinâmica-produto de sistemas não-acoplados, em que um dos factores contém um ciclo homoclínico atractor.

Abstract Based on the recent research of Agarwal, Rodrigues and Field [1], this text presents a global overview of the results about the dynamics of uncoupled systems, where at least one of the factors contains a planar homoclinic attractor.

palavras-chave: Ciclo homoclínico, atractor, dinâmica-produto

keywords: homoclinic cycle; attractor; product dynamics

1 Introdução

Estudos muito recentes têm enfatizado que a existência de ciclos e redes heteroclínicos associados a selas invariantes podem ser responsáveis pela dinâmica intermitente em sistemas não lineares. Além do seu estudo intrínseco, estas estruturas permitem modelar diversos fenómenos, destacando-se no estudo de sistemas de células acopladas – basicamente são sistemas que, para além de uma dinâmica interna, passam a depender do *input* de outros sistemas. Um pré-requisito para a compreensão do comportamento dinâmico de um sistema de células acopladas é o de entender a dinâmica-produto do sistema não acoplado.

É conhecido que o produto de dois ciclos limites c_1 e c_2, $c_1 \times c_2$, é um atractor minimal (indecomponível) se o quociente entre os respectivos períodos for irracional. No caso em que esta razão é racional, o toro $c_1 \times c_2$ é *folheado* por soluções periódicas atractoras. Esta observação abriu caminho para a questão: será que o produto de dois ciclos homoclínicos atractores planares Γ_1 e Γ_2, $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, é um atractor minimal?

Tendo como base o trabalho recente de Agarwal, Rodrigues e Field [1], o objectivo deste artigo é o de dar resposta à questão atrás levantada, e descrever o comportamento de trajectórias na dinâmica do fluxo-produto, contendo cada factor um atractor homoclínico.

2 Atractores de Milnor

Ao longo deste artigo, para $i \in \{1, 2\}$, vão-se considerar equações diferenciais do tipo $\dot{x} = f_i(x)$, onde $x \in \mathbf{R}^n$ e f_i é um campo de vectores C^2. O grupo de difeomorfismos a um parâmetro $\phi^i : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ tal que $f_i(x) = \frac{\partial \phi^i}{\partial t}(t, x)|_{t=0}$ designa-se *fluxo* associado à equação. O *fluxo produto* é definido como o produto cartesiano dos fluxos: $\Phi_t = (\phi_t^1, \phi_t^2), t \in \mathbf{R}$.

Nesta secção, vão-se introduzir os conceitos de *atractor de Milnor minimal* e de *conjunto mais provável*, que serão essenciais para a compreensão do que se segue – mais detalhes em Milnor [4]. Daqui em diante, o espaço de medida é $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}, \ell)$ onde ℓ será a medida de Lebesgue definida na sigma-álgebra dos borelianos $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^n$.

Define-se o ω–limite de $x_0 \in \mathbf{R}^n$, e denota-se por $\omega(x_0)$, como o conjunto dos pontos que são pontos de acumulação da (única) trajectória $\phi(t, x_0)$, $t > 0$. Se X for um conjunto compacto de $\mathbf{R}^n$ e invariante pelo fluxo, a *bacia de atracção de* X é o conjunto dos $x \in \mathbf{R}^n$ tal que $\omega(x) \subset X$; este conjunto denotar-se-á por $\mathcal{B}(X)$.

O conjunto $X \subset \mathbf{R}^n$ diz-se um *atractor de Milnor* se $\ell(\mathcal{B}(X)) > 0$ e, se Y for um subconjunto próprio compacto e invariante pelo fluxo, então $\ell(\mathcal{B}(X) \backslash \mathcal{B}(Y)) > 0$. Com a definição de *atractor de Milnor* conseguem-se capturar as noções comuns de conjuntos que *atraem* um conjunto *"grande"* de pontos; porém pode acontecer que A seja um atractor de Milnor, $x \in \mathcal{B}(A)$ e, no entanto, que exista x tal que $\omega(x) \neq A$. Este facto, deve-se à possibilidade do atractor poder ser desconexo. Com o objectivo de eliminar esse problema, aparece o conceito de atractor de Milnor minimal.

O conjunto $X \subset M$ diz-se um *atractor de Milnor minimal* se X é um atractor de Milnor e se $Y \subset X$ é um subconjunto próprio compacto e invariante pelo fluxo, então $\ell(\mathcal{B}(Y)) = 0$. Por vezes, ocorrem situações em que uma parte do atractor tem uma *atracção privilegiada*; mais formalmente, pode acontecer que ℓ–quase todos os trajectórias de A tendam para um seu subconjunto.

Seja $Z \subset M$ mensurável com $\ell(Z) > 0$ e Z positivamente invariante pelo fluxo. O *conjunto mais provável* de Z, $\mathcal{L}(Z)$, é o mais pequeno subconjunto fechado e invariante de Z que contém os ω–limite de ℓ–quase todos os pontos de Z.

3 Rede-Produto $\Sigma^\star$

Em 2005, recorrendo a técnicas não triviais de Teoria de Números, Peter Ashwin e Michael Field [3] fizeram um estudo exaustivo da dinâmica-produto Φ_t em que um dos factores contém um ciclo homoclínico atractor do plano, Γ. A dinâmica perto de um ciclo homoclínico atractor é caracterizada pela *intermitência*: soluções que começam na região delimitada pelo ciclo, aproximam-se dele assimptoticamente, e o tempo de visita das soluções à sela invariante aumenta geometricamente – ver figura 1 (a).

Quando o segundo factor de Φ_t contém uma solução periódica não trivial, c, Ashwin e Field [3] provam que o produto $\Gamma \times c$ é um atractor de Milnor minimal para a dinâmica-produto. Apesar do produto de Γ com um conjunto hiperbólico Λ não ser necessariamente um atractor de Milnor minimal, os autores de [3], mostram que se Λ for topologicamente misturador, então $\Sigma \times \Lambda$ é minimal. Na verdade, exigindo uma condição mais fraca ao conjunto hiperbólico, a de ser topologicamente transitivo, é possível assegurar o mesmo [1]. Na tentativa de catalogar toda a dinâmica-produto envolvendo ciclos homoclínicos, para responder à questão levantada na Introdução, comece-se por considerar o seguinte resultado:

Teorema: ([1], [3]) Sejam M_1 e M_2 duas variedades compactas e seja $\Phi_t = (\phi_t^1, \phi_t^2)$ o fluxo-produto C^1 definido em $M_1 \times M_2$. Suponha-se que $X_i \subset M_i$ é positivamente invariante com medida positiva. Então $\mathcal{L}(X_1 \times X_2)$ é invariante pela acção definida por: (ϕ_t^1, ϕ_s^2), com $t, s \in \mathbf{R}_0^+$.

Decorre imediatamente que o conjunto mais provável associado ao produto de dois ciclos atractores Γ_1 e Γ_2, só poderá ser $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ ou $(\{p_1\} \times \Gamma_2) \cup (\Gamma_1 \times \{p_2\})$. Tendo como base algumas simulações numéricas, sendo N_i uma vizinhança de Γ_i, os autores de [1] provaram analiticamente que:

Teorema: ([1]) O conjunto mais provável associado a $N_1 \times N_2$, $\mathcal{L}(N_1 \times N_2)$, é a rede heteroclínica $\Sigma^\star = (\{p_1\} \times \Gamma_2) \cup (\Gamma_1 \times \{p_2\})$, como esquematizado na figura 1 (b).

Repare-se que não se exclui a hipótese de haver condições iniciais cujas trajectórias *preencham* o toro bidimensional $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, mas tal só acontece para um conjunto de condições iniciais com medida de Lebesgue nula. O enunciado e a prova são generalizáveis para ciclos heteroclínicos definidos em qualquer espaço de dimensão finita.

A dinâmica das soluções na vizinhança da rede-produto $\Sigma^\star$ está longe de estar completamente compreendida; todavia, prova-se em [1] que não

[1] A prova é substancialmente mais complicada.

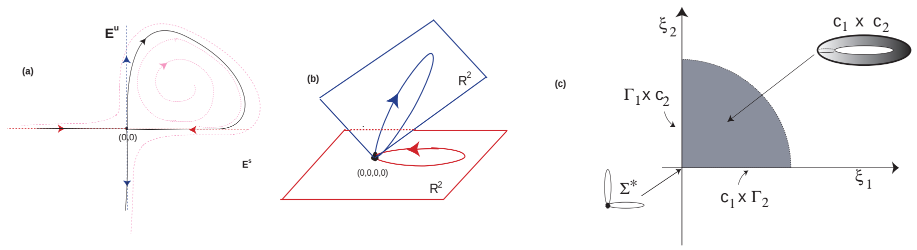

Figura 1: (a): ciclo homoclínico; (b): rede $\Sigma^\star$; (c): diagrama de bifurcação.

existe um ciclo preferido na bacia de atracção das trajectórias. Além disso, as trajectórias não exibem *comutação heteroclínica* – ver detalhes em [2]; noutros termos, codificando cada um dos ciclos da rede $\Sigma^\star$ com 1 e 2, existe pelo menos uma *palavra* arbitrária em $\{1,2\}^{\mathbf{N}}$, para a qual não existe uma trajectória que sombreie $\Sigma^\star$ pela ordem induzida na *palavra*.

Introduzindo-se um parâmetro de quebra da ligação λ_i no ciclo homoclínico Γ_i, decorre da teoria de Andronov-Leontovich que num dos lados do espaço de parâmetros (assuma-se $\lambda_i > 0$), bifurca uma solução periódica hiperbólica c_i. Decorre, portanto, que para $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, o toro $c_1 \times c_2$ é um atractor de Milnor para a dinâmica produto. Uma vez que genericamente a razão de dois números reais é irracional então, no espaço de parâmetros (λ_1, λ_2) (1 (c)), existe um conjunto de medida positiva (não aberto) na vizinhança da origem para a qual o atractor $c_1 \times c_2$ é minimal.

Referências

[1] N. A. Agarwal, A. A. P. Rodrigues, M. J. Field, "Dynamics near the Product of Heteroclinic Attractors", *Dynamical Systems: an International Journal*, Vol. 26 (4), pp. 447–481, 2011.

[2] M. A. D. Aguiar, I. S. Labouriau, A. A. P. Rodrigues, "Switching near a heteroclinic network of rotating nodes", *Dynamical Systems: an International Journal*, Vol. 25 (1), pp. 75–95, 2010.

[3] P. Ashwin and M. Field, *Product dynamics for homoclinic attractors*, Proceedings of Royal Society, Series A, Vol. 461, pp. 155–177, 2005.

[4] J. Milnor, *On the concept of attractor*, Commun. Math. Phys., Vol. 99 (2), pp. 177–195, 1985.