

# Problemas

Editor:  
*Jorge Nuno Silva*

---

## Notas sobre o Problema anterior e *A cadeira da noiva*

Jorge Nuno Silva

Os leitores são convidados a enviar, para eventual publicação, soluções, comentários, propostas de problemas, etc. Essa correspondência deve ser enviada para a SPM, ao cuidado do editor desta secção. Há livros da Gradiva para sortear entre as soluções recebidas em cada número.

Relembremos o problema do número anterior.

### *Elevadores malditos*

Gamow e Stern relataram uma situação curiosa, que viveram quando trabalhavam no mesmo edifício, em andares diferentes, e se tentavam visitar.<sup>1</sup>

Gamow trabalhava no primeiro andar, Stern no quinto de um prédio com seis andares. Quando Gamow queria apanhar o elevador para subir até ao gabinete do seu colega, ficava irritado por a maioria dos elevadores surgir no seu andar em sentido descendente. De uma forma análoga, quando Stern queria descer ao primeiro andar, era surpreendido por muitos elevadores a subir. Haveria alguma conspiração para os manter afastados?

Para abordar este problema matematicamente é necessário proceder a alguma idealização. Vamos supor um prédio de  $N$  andares com elevadores

---

<sup>1</sup>George Gamow & Marvin Stern, *Puzzle-Math*, New York: Viking Press, 1958.

que, independentemente uns dos outros, se deslocam à mesma velocidade, num vai-vem contínuo entre o Piso 0 e o Piso  $N$ .

Vamos colocar-nos no  $k$ -ésimo andar e calcular a probabilidade de o próximo elevador a passar no nosso andar o fazer a descer.

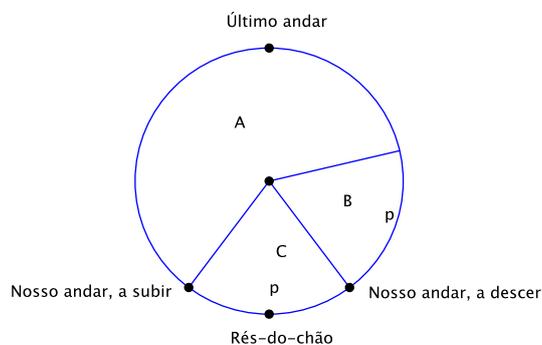


No caso de haver somente um elevador, os cálculos são simples. Num momento arbitrário em que procuremos o ascensor, a probabilidade de ele nos surgir a subir é igual à probabilidade de ele se encontrar abaixo do andar  $k$ , isto é,  $k/N$ . Sendo que a probabilidade de aparecer a descer é de  $1 - k/N$ . No caso particular de Gamow ( $k = 1$ ,  $N = 6$ ) vemos que a sorte lhe é adversa 5 em cada 6 vezes.

E se houver vários elevadores?

Este problema foi resolvido por Knuth<sup>2</sup> essencialmente de duas maneiras, uma analítica, muito elaborada e outra baseada na representação do ciclo de cada elevador por um ponto que gira numa circunferência de perímetro unitário, em sentido retrógrado.

<sup>2</sup>*Selected Papers on Fun & Games*, CSLI, Stanford 2011.



Na notação usada acima, seja  $p = k/N$ . Marquemos um arco de comprimento  $p$  cujos extremos marcam o nosso andar, atingido em sentidos contrários. Marquemos ainda outro arco com o mesmo comprimento, obtendo a divisão da circunferência em três partes,  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Notemos agora que se os  $n$  pontos que representam os  $n$  elevadores se encontrarem todos em  $A$  (o que sucede com uma probabilidade  $(1 - 2p)^n$ ) então o próximo elevador a chegar ao nosso andar vai a descer. Mas se um ou mais elevadores estiver em  $B$  ou  $C$  (a que corresponde uma probabilidade  $1 - (1 - 2p)^n$ ) as probabilidades de vir a subir ou a descer são iguais. Assim, a probabilidade procurada é

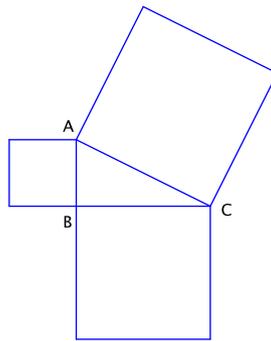
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - 2p)^n .$$

Em rigor estes cálculos valem para  $p \leq 0,5$ . No caso geral temos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - 2p)|1 - 2p|^{n-1} .$$

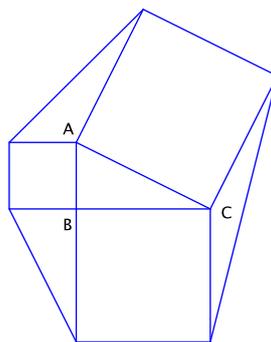
### *A cadeira da noiva*

A figura que habitualmente acompanha a prova do Teorema de Pitágoras é conhecido por vários nomes populares. Na Rússia, chamam-lhe «as calças de Pitágoras», nós vamos usar «a cadeira da noiva».



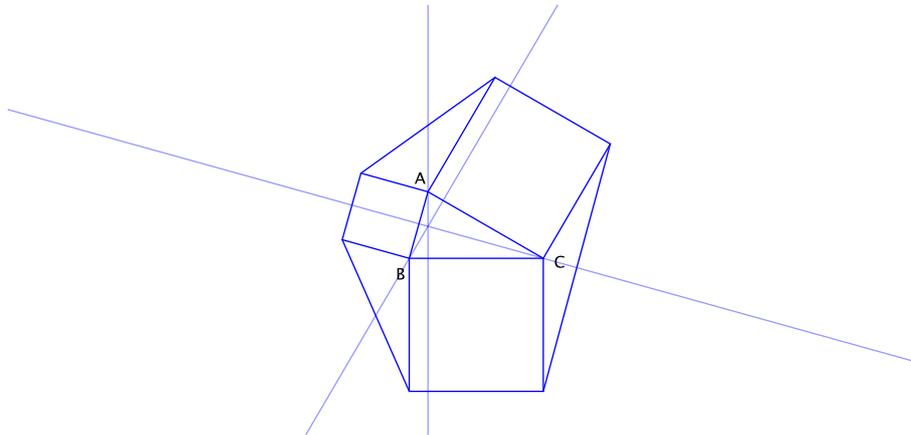
A Cadeira da Noiva

Unamos os vértices dos quadrados de forma a construir três novos triângulos.



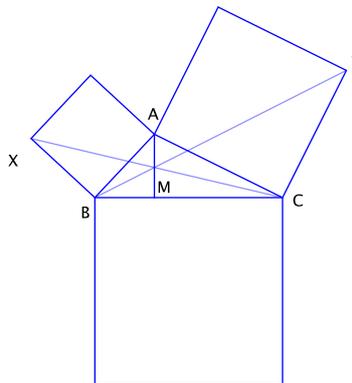
Questão 1: Mostre que cada um destes três novos triângulos tem a mesma área do que  $ABC$ .

Determinemos as medianas destes novos triângulos. Consideremos os seus prolongamentos.



Questão 2: Mostre que estas medianas são alturas do triângulo  $ABC$ , mesmo que este não seja retângulo.

Tracemos  $XC$  e  $YB$ , que se encontram em  $M$ .



Questão 3: Mostre que  $AM$  é uma altura do triângulo  $ABC$ , mesmo que este não seja retângulo.