中国科学: 数学 2018 年 第 48 卷 第 11 期: 1665 ～ 1672
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
论 文

加权射影线上的 tilting 对象和 cluster-tilting 对象

献给刘绍学教授 90 华诞

陈健敏[1], 林亚南[1], 刘品[2*], 阮诗佺[1]

1. 厦门大学数学科学学院, 厦门 361005;
2. 西南交通大学数学学院, 成都 611756
E-mail: chenjianmin@xmu.edu.cn, ynlin@xmu.edu.cn, pinliu@swjtu.edu.cn, sqruan@math.tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2017-10-10; 接受日期: 2018-06-20; 网络出版日期: 2018-10-11; * 通信作者
中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 2682017ZDPY12 和 2682018ZT25) 资助项目

摘要 本文在加权射影线相关的范畴中讨论 tilting 对象与 cluster-tilting 对象之间的关系, 证明当亏格为 1 时, 向量丛稳定范畴中的 tilting 对象与相应的 cluster 范畴中的 cluster-tilting 对象对应. 特别地, cluster 范畴中的 cluster-tilting 对象由加权射影线上凝聚层范畴中的 tilting 对象诱导.

关键词 tilting 对象 cluster-tilting 对象 加权射影线 向量丛

MSC (2010) 主题分类 14A22, 14F05, 16G70, 16S99, 18E30

1 引言

Cluster 理论兴起于 2000 年. 为了给量子群的典范基和代数群的全正性提供一套组合的研究框架, Fomin 和 Zelevinsky [1] 引入了 cluster 代数. 这是一类由被称为 cluster 变量的生成元生成的交换代数. Cluster 变量由初始变量经 mutation 变化得到, 它们递归地聚集在一起组成一些具有固定势的集合—cluster. Cluster 代数具有丰富的组合结构, 它被发现与诸多数学分支相关联, 如 Poisson 几何、可积系统、高维 Teichmüller 理论、motivic Donaldson-Thomas 不变量和有限维代数的表示理论等, 参见文献 [2] 及其参考文献.

代数表示论与 cluster 代数的联系遵循着范畴化的思想: 希望找到某些合适的范畴使得它里面不但有能与 cluster 变量和 cluster 对应的对象, 而且这些对象之间的关系能体现 cluster mutation 变换, 更进一步, 能通过这些范畴丰富的结构来探究 cluster 代数的性质. 2006 年, Buan 等 [3] 引入了 cluster 范畴为研究 cluster 代数提供了范畴模型. 设 H 是代数闭域 k 上的有限维遗传代数, 其有界导出范畴 $D^b(H)$ 的 suspension 函子记为 [1], Auslander-Reiten 变换记为 τ, 记 G 为合成 $\tau^{-1}[1]$. H 对应的

英文引用格式: Chen J M, Lin Y N, Liu P, et al. Tilting and cluster-tilting objects on weighted projective lines (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1665–1672, doi: 10.1360/N012017-00222

cluster 范畴 $\mathcal{C}_H$ 定义为导出范畴的 G- 轨道范畴 $D^b(H)/G$. Keller [4] 证明了 $\mathcal{C}_H$ 具有典范的三角结构且其 Calabi-Yau 维数为 2. 在 cluster 范畴中, 与 cluster 对应的是 cluster-tilting 对象, 它的不可分解直和项对应于 cluster 变量. 特别地, Buan 等 [3] 证明了 $\mathcal{C}_H$ 上的任意 cluster-tilting 对象一定由某个与 H 导出等价的代数 H' 的 tilting 模所诱导. 考虑到 Happel [5] 2001 年的著名结果: 任意具有 tilting 对象的遗传范畴 $\mathcal{H}$ 要么导出等价于 $\operatorname{mod} H$, 要么导出等价于加权射影线 $\mathbb{X}$ 上的凝聚层范畴 $\operatorname{coh}\mathbb{X}$. 本文将在与加权射影线相关的范畴中讨论 tilting 对象与 cluster-tilting 对象之间的关系.

加权射影线由 Geigle 和 Lenzing 于 1987 年引入, 他们的主要目的是为 Ringel 的 canonical 代数 [6] 提供了一种几何刻画. Geigle 和 Lenzing [7] 利用 tilting 层证明了加权射影线 $\mathbb{X}$ 上的凝聚层范畴 $\operatorname{coh}\mathbb{X}$ 导出等价于有限维 canonical 代数的有限生成模范畴. 其中, 亏格 $g_{\mathbb{X}} = 1$ 的加权射影线上的凝聚层范畴 $\operatorname{coh}\mathbb{X}$ 与 tubular 型的 canonical 代数的有限生成模范畴导出等价. 向量丛范畴 $\operatorname{vect}\mathbb{X}$ 是凝聚层范畴 $\operatorname{coh}\mathbb{X}$ 的满子范畴. 最近, Kussin 等 [8] 在 $\operatorname{vect}\mathbb{X}$ 上发现了 Frobenius 范畴结构. 由 Happel [9] 的经典结果可知其稳定范畴 $\underline{\operatorname{vect}}\mathbb{X}$ 是三角范畴, Kussin 等 [8] 利用它系统研究了相应的奇异范畴, 其间发挥重要作用的是 $\underline{\operatorname{vect}}\mathbb{X}$ 上的 tilting 对象. 进一步, 由文献 [8] 知, 亏格为 1 时, $\underline{\operatorname{vect}}\mathbb{X}$ 与有界导出范畴 $D^b(\operatorname{coh}\mathbb{X})$ 作为三角范畴是等价的. 仍然记 suspension 函子为 [1], τ 为 Auslander-Reiten 变换, G 为合成 $\tau^{-1}[1]$. 受 Barot 等 [10] 启发, 我们将轨道范畴 $\underline{\operatorname{vect}}\mathbb{X}/G$ 视为相应的 cluster 范畴. 本文的主要目的是刻画三角范畴 $\underline{\operatorname{vect}}\mathbb{X}$ 中的 tilting 对象与 cluster 范畴 $\underline{\operatorname{vect}}\mathbb{X}/G$ 中的 cluster-tilting 对象之间的关系, 证明 cluster 范畴中的 cluster-tilting 对象由凝聚层范畴 $\operatorname{coh}\mathbb{X}$ 中的 tilting 层诱导. 利用此结果, 我们将在文献 [11] 中刻画 $(2,2,2,2)$ 权型的凝聚层范畴 $\operatorname{coh}\mathbb{X}$ 中的 tilting 层的自同态代数, 并对其导出范畴 $D^b(\operatorname{coh}\mathbb{X})$ 中的 tilting 对象的自同态代数进行分类.

2 向量丛范畴的稳定范畴

为简便, 本文中同构记作相等. 本节回顾加权射影线上的凝聚层范畴和向量丛范畴的稳定范畴的相关结论.

2.1 加权射影线上的凝聚层范畴

设 k 是代数闭域. 记 $\mathbb{X} = \mathbb{X}(\boldsymbol{p}, \lambda)$ 为 k 上的加权射影线, 其中 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t)$ 是域 k 上的射影线 $\mathbb{P}^1(k)$ 上不同的点, 不妨设 $\lambda_1 = \infty$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$, 正整数向量 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_t)$ 为权序列. $\mathbb{L}$ 是由生成元 $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_t$ 和关系

$$p_1\vec{x}_1 = p_2\vec{x}_2 = \cdots = p_t\vec{x}_t =: \vec{c} \tag{2.1}$$

生成的 Abel 群. 元素 $\vec{c}$ 称为群 $\mathbb{L}$ 中的典范元素. 任意 $\vec{x} \in \mathbb{L}$ 都可唯一地写为

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{t} l_i\vec{x}_i + l\vec{c}, \quad 其中\ 0 \leqslant l_i < p_i, \quad l \in \mathbb{Z}. \tag{2.2}$$

对任意 $\vec{x} \in \mathbb{L}$, 如果 (2.2) 中的 $l \geqslant 0$, 则称 $\vec{x} \geqslant 0$. 亦即, 在群 $\mathbb{L}$ 上定义了偏序, 容易证明, 任意 $\vec{x} \in \mathbb{L}$, 要么满足 $\vec{x} \geqslant 0$, 要么满足 $\vec{x} \leqslant \vec{\omega} + \vec{c}$, 其中

$$\vec{\omega} = (t-2)\vec{c} - \sum_{i=1}^{t} \vec{x}_i \tag{2.3}$$

称为 $\mathbb{L}$ 中的对偶元. 记 $\bar{p}$ 为数 $p_1, p_2, \ldots, p_t$ 的最小公倍数, 定义群同态 $\delta: \mathbb{L} \to \mathbb{Z}$, $\delta(\vec{x}_i) = \frac{\bar{p}}{p_i}$. 加权射影线 $\mathbb{X}$ 的亏格定义为

$$g_{\mathbb{X}} = 1 + \frac{1}{2}\delta(\vec{\omega}). \tag{2.4}$$

下面记 $S = k[X_1, X_2, \ldots, X_t]/I := k[x_1, x_2, \ldots, x_t]$, 其中 $I = (f_3, \ldots, f_t)$ 是由 $f_i = X_i^{p_i} - X_2^{p_2} + \lambda_i X_1^{p_1}$ $(i = 3, \ldots, t)$ 生成的理想. 令 $\deg(x_i) = \vec{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$, 则 S 成为 $\mathbb{L}$- 分次代数:

$$S = \bigoplus_{\vec{x} \in \mathbb{L}} S_{\vec{x}}.$$

记 $\mathrm{mod}^{\mathbb{L}}(S)$ 为有限生成 $\mathbb{L}$- 分次 S- 模范畴, $\mathrm{mod}_0^{\mathbb{L}}(S)$ 为它的由有限长度 $\mathbb{L}$- 分次 S- 模构成的 Serre 子范畴. 加权射影线 $\mathbb{X}$ 上的凝聚层范畴 $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 定义为商范畴 $\mathrm{coh}\,\mathbb{X} := \mathrm{mod}^{\mathbb{L}}(S)/\mathrm{mod}_0^{\mathbb{L}}(S)$. 自由模 S 在商范畴 $\mathrm{mod}^{\mathbb{L}}(S)/\mathrm{mod}_0^{\mathbb{L}}(S)$ 中的像是 $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 中的结构层 $\mathcal{O}$, 线丛由 $\vec{x}$- 平移 $\mathcal{O}(\vec{x})$ 给出, 并且存在自然同构 $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(\vec{x}), \mathcal{O}(\vec{y})) = S_{\vec{y}-\vec{x}}$. 由定义, 向量丛是局部自由层, 记 $\mathrm{vect}\,\mathbb{X}$ 为 $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 中向量丛构成的满子范畴.

本文总是将 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{coh}\,\mathbb{X}}(X, Y)$ 简记为 $\mathrm{Hom}(X, Y)$, 将 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{coh}\,\mathbb{X}}(X, Y)$ 简记为 $\mathrm{Ext}^1(X, Y)$. 由文献 [7] 知, $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 是遗传范畴. 并且, 对任意 X 和 Y, 有如下 k- 线性同构 (Serre 对偶公式):

$$D\,\mathrm{Ext}^1(X, Y) = \mathrm{Hom}(Y, X(\vec{\omega})), \tag{2.5}$$

其中 $D = \mathrm{Hom}_k(-, k)$. 进而, $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 上存在几乎可裂序列, Auslander-Reiten 变换 τ 由 $\vec{\omega}$- 平移给出.

按照文献 [7], 记 $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 的 Grothendieck 群为 $K_0(\mathbb{X})$, 其基由 $\mathcal{O}(\vec{x})$ $(0 \leqslant \vec{x} \leqslant \vec{c})$ 的同构类给出. 对任意 $X \in \mathrm{coh}\,\mathbb{X}$, 将它的同构类在 $K_0(\mathbb{X})$ 中的像仍记为 X. $K_0(\mathbb{X})$ 上的 Euler 型是整双线性型: 对 $X, Y \in K_0(\mathbb{X})$, 有

$$\langle X, Y \rangle = \dim_k \mathrm{Hom}(X, Y) - \dim_k \mathrm{Ext}^1(X, Y). \tag{2.6}$$

此外, $K_0(\mathbb{X})$ 上的两个 $\mathbb{Z}$- 线性映射也非常重要. 首先是次数函数 $\deg: K_0(\mathbb{X}) \to \mathbb{Z}$, 在基上定义为

$$\deg(\mathcal{O}(\vec{x})) = \delta(\vec{x}). \tag{2.7}$$

其次是秩函数 $\mathrm{rk}: K_0(\mathbb{X}) \to \mathbb{Z}$, 在基上定义为

$$\mathrm{rk}(\mathcal{O}(\vec{x})) = 1. \tag{2.8}$$

秩函数在非零向量丛上取值为正数; 次数函数在结构层上取值为零, 在单层上取值为正数. 对任意非零对象 $X \in \mathrm{coh}\,\mathbb{X}$, 定义斜率如下:

$$\mu X = \frac{\deg(X)}{\mathrm{rk}(X)} \in \mathbb{Q} \cup \infty. \tag{2.9}$$

2.2 向量丛范畴的稳定范畴

一个 k- 线性范畴称为 Frobenius 范畴, 如果其上存在正合结构使得范畴里有足够多的 (相对) 投射对象和足够多的 (相对) 入射对象, 并且投射对象与入射对象一致. 由文献 [8] 知, 向量丛范畴 $\mathrm{vect}\,\mathbb{X}$ 上具有如下正合结构: 序列 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ 称为标准正合列, 如果任意线丛 L 都诱导出如下的短正合列:

$$0 \to \mathrm{Hom}(L, X') \to \mathrm{Hom}(L, X) \to \mathrm{Hom}(L, X'') \to 0.$$

Kussin 等[8] 证明了此正合结构使得 $\operatorname{vect}\mathbb{X}$ 成为 Frobenius 范畴, 其不可分解投射 - 入射对象由线丛集合 $\mathcal{L}$ 给出, 因此, 由文献 [9] 知, 相应的稳定范畴 $\underline{\operatorname{vect}}\mathbb{X} = \operatorname{vect}\mathbb{X}/[\mathcal{L}]$ 是三角范畴, 其 suspension 函子 [1] 由余 syzygy 函子给出. 以下将三角范畴 $\underline{\operatorname{vect}}\mathbb{X}$ 简记为 $\mathscr{D}$, 其上从 X 到 Y 的态射集记为 $\mathscr{D}(X,Y)$.

称三角范畴 $\mathcal{T}$ 是同调有限的, 如果对任意对象 X 和 Y, 当 $|n|\gg 0$ 时, $\mathcal{T}(X,Y[n])=0$.

引理 2.1 (参见文献 [8, 定理 3.7]) 三角范畴 $\mathscr{D}$ 是 Hom- 有限、同调有限的 Krull-Remak-Schmidt 范畴. 对任意 X 和 Y, 有如下 Serre 对偶公式:

$$\mathscr{D}(X,Y[1]) = D\mathscr{D}(Y,X(\vec{\omega})). \tag{2.10}$$

特别地, $\mathscr{D}$ 上有 Auslander-Reiten 三角, Auslander-Reiten 变换由 $\vec{\omega}$- 平移给出.

本文限定在亏格为 1, 即 tubular 权型的加权射影线上讨论. 首先我们有下面的引理:

引理 2.2[7] (1) 对任意不可分解对象 $X,Y\in\operatorname{coh}\mathbb{X}$, 若 $\operatorname{Hom}(X,Y)\neq 0$, 则 $\mu X\leqslant \mu Y$;

(2) 对任意非零向量丛 E, 有 $\mu E(\vec{\omega})=\mu E$.

我们还会用到如下两个结论.

引理 2.3 (参见文献 [8, 引理 5.3]) $\mathscr{D}$ 上的 suspension 函子诱导出定义在斜率上的双射 $\alpha:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, $\alpha(\mu(X))=\mu(X[1])$. 映射 α 单调递增, 并且对任意 $q\in\mathbb{Q}$, 有 $\alpha(q)>q$.

引理 2.4 (参见文献 [8, 定理 A.4]) 设 $\operatorname{vect}\mathbb{X}$ 中不可分解对象 X 和 Y 的斜率分别为 $\mu(X)=q$ 和 $\mu(Y)=q'$. 若 $q'>\alpha(q)$, 则 $\mathscr{D}(X,Y)=0$.

我们可以看到斜率在此起着非常重要的作用. 由此, 对任意有理数 $q\in\mathbb{Q}$, 记 $\mathscr{D}_q$ 为 $\mathscr{D}$ 中包含所有斜率大于 q 且小于等于 $\alpha(q)$ 的不可分解对象的最小的直和封闭满子范畴, 称为斜率范畴. 亦即, 若不可分解向量丛 $X\in\mathscr{D}_q$, 则 $q<\mu(X)\leqslant\alpha(q)$.

引理 2.5[8] 斜率范畴 $\mathscr{D}_q$ 是 Abel 范畴, 并且存在 Abel 范畴间的等价 $\Phi_q:\mathscr{D}_q\to\operatorname{coh}\mathbb{X}$.

回顾 $\operatorname{coh}\mathbb{X}$ 中的对象 T 称为 tilting 层, 如果

(1) T 是 rigid 对象, 即 $\operatorname{Ext}^1(T,T)=0$;

(2) 若对任意 $X\in\operatorname{coh}\mathbb{X}$ 和 $i=0,1$ 有 $\operatorname{Ext}^i(T,X)=0$, 则 $X=0$.

类似地, 在三角范畴 $\mathscr{D}$ 中, 如果对任意非零整数 n 都有 $\mathscr{D}(T,T[n])=0$, 则称 T 是三角范畴 $\mathscr{D}$ 上的自扩张自由对象. 记 $\langle T\rangle$ 是 $\mathscr{D}$ 中包含 T 的有厚度的最小三角子范畴, $\langle T\rangle^{\perp}$ 是其右垂范畴, 即

$$\langle T\rangle^{\perp}=\{X\in\mathscr{D}\mid \mathscr{D}(C,X[n])=0,\forall n\in\mathbb{Z},C\in\langle T\rangle\}.$$

定义 2.1 $\mathscr{D}$ 中对象 T 称为 tilting 对象, 如果

(1) T 是自扩张自由对象;

(2) $\langle T\rangle=\mathscr{D}$.

注 2.1 文献 [8] 指出, 在本文所考虑的 tubular 权型的情形中, 如果 T 是 $\mathscr{D}$ 中的自扩张自由对象, 则三角范畴 $\mathscr{D}$ 由 $\langle T\rangle$ 和 $\langle T\rangle^{\perp}$ 生成. 因此, 上面定义中的第二条可换为如下条件:

(2′) 对任意 $X\in\mathscr{D}$, 存在 $\langle T\rangle$ 中对象 C 和整数 n 使得

$$\mathscr{D}(C,X[n])\neq 0. \tag{2.11}$$

引理 2.6 设 X 和 Y 是 $\mathscr{D}_q$ 中不可分解对象, 则对于任意 $n\neq 0,1$, 有 $\mathscr{D}(X,Y[n])=0$. 特别地, T 是 $\mathscr{D}_q$ 中自扩张自由对象的充分必要条件是 $\mathscr{D}(T,T[1])=0$.

证明 若 $n \leqslant -1$, 由引理 2.3 知, $\mu(Y[n]) \leqslant q < \mu(X)$. 由稳定范畴的定义知,

$$\mathscr{D}(X, Y[n]) = 0. \tag{2.12}$$

当 $n \geqslant 2$ 时, $\mu(Y[n]) \geqslant \mu(Y[2]) > \alpha(\mu(X))$. 由引理 2.4 知 (2.12) 成立.

特别地, 取 X 和 Y 为 T 的不可分解直和项 T_i 和 T_j, 则引理第二部分由第一部分得证. □

更多地, 我们有下面的结论:

命题 2.1 设 T 是 $\mathscr{D}_q$ 中对象, 则 T 是 $\mathscr{D}$ 中 tilting 对象的充分必要条件是 $\Phi_q(T)$ 是 $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 上的 tilting 层.

证明 由文献 [8], 当 $\mathbb{X}$ 是 tubular 权型的加权射影线时, 有界导出范畴 $D^b(\mathrm{coh}\,\mathbb{X})$ 与三角范畴 $\mathscr{D}$ 等价. 因此, 当 $\Phi_q(T)$ 是 $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 上的 tilting 层时, T 是 $\mathscr{D}$ 中的 tilting 对象.

反过来, 若 T 是 $\mathscr{D}$ 中的 tilting 对象, 则 $\mathrm{Ext}^1(\Phi_q(T), \Phi_q(T)) = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{D}_q}(T, T) = \mathscr{D}(T, T[1]) = 0$. 亦即 $\Phi_q(T)$ 是 $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 上的 rigid 对象. 进一步, 设 $X \in \mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 满足 $\mathrm{Ext}^1(\Phi_q(T), X) = 0 = \mathrm{Hom}(\Phi_q(T), X)$, 我们有 $\mathscr{D}(T, \Phi_q^{-1}(X) \oplus \Phi_q^{-1}(X)[1]) = 0$, 于是, 由引理 2.6, 有

$$\mathscr{D}\left(T, \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Phi_q^{-1}(X)[n]\right) = 0.$$

由 T 是 $\mathscr{D}$ 中的 tilting 对象知 $\Phi_q^{-1}(X) = 0$, 亦即 $X = 0$, 从而, $\Phi_q(T)$ 是 $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 上的 tilting 层. □

3 主要结果

如上所述, 当 $\mathbb{X}$ 是 tubular 权型的加权射影线时, 有界导出范畴 $D^b(\mathrm{coh}\,\mathbb{X})$ 与三角范畴 $\mathscr{D}$ 等价. 记 τ 是 $\mathscr{D}$ 上的 Auslander-Reiten 变换 (由 $\vec{\omega}$- 平移给出), [1] 是 $\mathscr{D}$ 的 suspension 函子, 令 $G = \tau^{-1}[1]$. 与文献 [10] 类似, 我们将轨道范畴 $\mathscr{D}/G$ 称为 cluster 范畴, 记为 $\mathscr{C}$. 具体地, $\mathscr{C}$ 中对象与 $\mathscr{D}$ 中对象一致, 对任意 X 和 Y, 定义

$$\mathscr{C}(X, Y) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{D}(X, G^n Y).$$

由文献 [4] 知, $\mathscr{C}$ 是 Calabi-Yau 维数为 2 的三角范畴, 典范函子 $\pi: \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ 是三角函子. $\mathscr{C}$ 上的 suspension 函子由 $\mathscr{D}$ 上的 suspension 函子诱导, 仍记为 [1].

定义 3.1 $\mathscr{C}$ 中对象 T 称为 cluster-tilting 对象, 如果

(1) T 是 rigid 对象;

(2) 若 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}}(T, X) = 0$, 则 $X \in \mathrm{add}(T)$.

以下, 对任意有理数 $q \in \mathbb{Q}$, 仍记 $\mathscr{D}_q$ 为斜率范畴. 特别地, 设 T 是 $\mathscr{D}_q$ 中的 basic 对象, 由轨道范畴的定义, 我们仍用 T 记它在典范函子 $\pi: \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ 下的像.

引理 3.1 设 X 和 Y 是 $\mathscr{D}_q$ 中不可分解对象, 则

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}}(X, Y) = \mathscr{D}(X, Y[1]) \oplus \mathscr{D}(X, Y(\vec{\omega})). \tag{3.1}$$

特别地, T 是 $\mathscr{C}$ 中 rigid 对象的充分必要条件是 T 是 $\mathscr{D}$ 中自扩张自由对象.

证明 由定义和引理 2.6 知,

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}}(X, Y) = \mathscr{C}(X, Y[1]) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathscr{D}(X, G^i Y[1]) = \mathscr{D}(X, Y(\vec{\omega})) \oplus \mathscr{D}(X, Y[1]).$$

又由引理 2.1 知, $\mathscr{D}(T,T[1])=D\mathscr{D}(T,T(\vec{\omega}))$. 故 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}}(T,T)=0$ 当且仅当 $\mathscr{D}(T,T[1])=0$. 由引理 2.6, 命题得证. □

本文的主要目的是刻画三角范畴 $\underline{\mathrm{vect}}\mathbb{X}$ 中的 tilting 对象与 cluster 范畴 $\underline{\mathrm{vect}}\mathbb{X}/G$ 中的 cluster-tilting 对象之间的关系.

定理 3.1 设 T 是 $\mathscr{D}_q$ 中对象, 其在典范函子 $\pi:\mathscr{D}\to\mathscr{C}$ 下的像仍记为 T, 则 T 是 $\mathscr{D}$ 中的 tilting 对象当且仅当 T 是 $\mathscr{C}$ 中的 cluster-tilting 对象.

证明 先证充分性. 由引理 3.1 知, T 是 $\mathscr{D}$ 中自扩张自由对象. 对任意不可分解对象 $X\in\mathscr{D}$, 总存在整数 n 使得 $G^nX\in\mathscr{D}_q$. 不失一般性, 假设 $X\in\mathscr{D}_q$. 由引理 2.6 和注 2.1 知, 只需证明存在 $n\in\{0,1\}$ 使得 $\mathscr{D}(T,X[n])\neq 0$. 若 $X\in\mathrm{add}\,T$, 结论显然成立, 因此以下假设 $X\notin\mathrm{add}\,T$. 由 T 是 $\mathscr{C}$ 中的 cluster-tilting 对象知存在 $\mathscr{C}$ 中的逼近三角

$$T_1^X\xrightarrow{g}T_0^X\xrightarrow{f}X\to T_1^X[1],\tag{3.2}$$

其中 f 为极小右 $\mathrm{add}\,T$- 逼近, 并且 g 不是可裂单. 若 $f=0$, 则 $X\in\mathrm{add}\,T[1]\subset\mathscr{C}$. 利用引理 2.2 和 2-Calabi-Yau 性质, 由 $X,T\in\mathscr{D}_q$ 可知, $X\in\mathrm{add}\,T(\vec{\omega})\subset\mathscr{D}$. 此时, $\mathscr{D}(T,X[1])=D\mathscr{D}(X,T(\vec{\omega}))\neq 0$. 下面考虑 $f\neq 0$. 由 $\mathscr{C}$ 的定义知, 存在 $f_0\in\mathscr{D}(T_0^X,X)$, $f_1\in\mathscr{D}(T_0^X,X(-\vec{\omega})[1])$ 使得 $f=f_0+f_1$. 若 $f_0\neq 0$, 则 $\mathscr{D}(T,X)\neq 0$. 下面设 $f_0=0$, $f_1\neq 0$. 在 $\mathscr{D}$ 中, 考虑 f_1 诱导的三角

$$X(-\vec{\omega})\to Y\to T_0^X\xrightarrow{f_1}X(-\vec{\omega})[1],\tag{3.3}$$

其中 $Y\in\mathscr{D}_q$. 显然, 逼近三角 (3.2) 是三角 (3.3) 在 $\mathscr{C}$ 中的像. 因此, $Y=T_1^X$. 对三角 (3.3) 作用函子 τ, 可得

$$X\to T_1^X(\vec{\omega})\xrightarrow{g(\vec{\omega})}T_0^X(\vec{\omega})\to X[1].\tag{3.4}$$

由 T 自扩张自由知, $\mathscr{D}(T,T(\vec{\omega}))=D\mathscr{D}(T,T[1])=0$. 另一方面, $T,X\in\mathscr{D}_q$ 可推出 $\mathscr{D}(T,X[2])=0$. 于是, 对三角 (3.4) 作用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(T_1^X,-)$ 可得短正合列

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathscr{D}(T_1^X,X[1]) & \longrightarrow & \mathscr{D}(T_1^X,T_1^X(\vec{\omega})[1]) & \longrightarrow & \mathscr{D}(T_1^X,T_0^X(\vec{\omega})[1]) & \longrightarrow & 0\\
 & & & & \| & & \| & & \\
 & & & & D\mathscr{D}(T_1^X(\vec{\omega}),T_1^X(\vec{\omega})) & \xrightarrow{g(\vec{\omega})^*} & D\mathscr{D}(T_0^X(\vec{\omega}),T_1^X(\vec{\omega})). & &
\end{array}$$

若 $\mathscr{D}(T_1,X[1])=0$, 则 $g(\vec{\omega})^*$ 为同构, 从而 g 是可裂单, 矛盾. 故此时有 $\mathscr{D}(T,X[1])\neq 0$, 充分性得证.

下面证明必要性. 由引理 3.1 知, T 是 $\mathscr{C}$ 中的 rigid 对象. 下面只需对不属于 $\mathrm{add}\,T$ 的不可分解对象 X 证明 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}}(T,X)\neq 0$. 同上, 不失一般性, 假设 $X\in\mathscr{D}_q$. 由 (3.1), 有

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}}(T,X)=\mathscr{D}(T,X(\vec{\omega}))\oplus\mathscr{D}(T,X[1]).$$

故只需证明当 $\mathscr{D}(T,X[1])=0$ 时,

$$\mathscr{D}(T,X(\vec{\omega}))\neq 0.\tag{3.5}$$

利用注 2.1 和引理 2.6, 由 $\mathscr{D}(T,X[1])=0$ 可知, $\mathscr{D}(T,X)\neq 0$. 令 $\theta:T_X\to X$ 是右 $\mathrm{add}T$- 逼近, 且有诱导三角

$$T_X\xrightarrow{\theta}X\xrightarrow{\beta}Y\to T_X[1].\tag{3.6}$$

用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(T[n],-)$ 作用 (3.6) 可得正合列

$$\mathscr{D}(T[n],T_X)\xrightarrow{\mathscr{D}(T[n],\theta)}\mathscr{D}(T[n],X)\to\mathscr{D}(T[n],Y)\to\mathscr{D}(T[n],T_X[1]).$$

进而, 由 $X,T\in\mathscr{D}_q$ 知, 对任意整数 $n\neq 0,1$ 有 $\mathscr{D}(T[n],Y)=0$. 另一方面, 由逼近的定义可知, $\mathscr{D}(T,Y)=0$. 从而, 对 Y 的任意不可分解直和项 Y_i, 有 $\mathscr{D}(T[1],Y_i)\neq 0$. 故

$$\alpha(q)<\mu(Y_i)\leqslant\alpha^2(q). \tag{3.7}$$

同上, 令

$$T_Y[1]\xrightarrow{\delta}Y\to Z\to T_Y[2] \tag{3.8}$$

为极小右 $\mathrm{add}(T[1])$- 逼近 $\delta:T_Y[1]\to Y$ 诱导的三角. 重复上面的过程可知,

$$\mu(Z_j)>\alpha^2(q). \tag{3.9}$$

由引理 2.4 知, $\mathscr{D}(X,Z)=0$. 于是存在 $\gamma:X\to T_Y[1]$, 使得 β 通过 γ 分解:

$$\begin{tikzcd}
& & T_Y[1] \arrow[d, "\delta"] & \\
T_X \arrow[r, "\theta"] & X \arrow[r, "\beta"] \arrow[ur, dashed, "\gamma"] & Y \arrow[r] \arrow[d] & T_X[1] \\
& & Z \arrow[d] & \\
& & T_Y[2]. &
\end{tikzcd}$$

由 $\beta\neq 0$ 可知 $\gamma\neq 0$. 从而, $\mathscr{D}(T_Y,X(\vec{\omega}))=D\mathscr{D}(X,T_Y[1])\neq 0$, 即 (3.5) 成立, 定理得证. □

结合命题 2.1, 我们立即得到与文献 [3, 定理 3.3] 类似的结果 (参见文献 [10, 命题 2.3]).

推论 3.1　Cluster 范畴 $\mathscr{C}$ 中的 cluster-tilting 对象由 $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 上的 tilting 层诱导.

致谢　*感谢匿名审稿人认真细致地审稿, 他们富有建设性的意见和建议使得本文更易阅读.*

参考文献

1 Fomin S, Zelevinsky A. Cluster algebras, I: Foundations. J Amer Math Soc, 2002, 15: 497–529
2 Keller B. Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories. In: Triangulated Categories. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 375. Cambridge: Cambridge University Press, 2010
3 Buan A B, Marsh R J, Reineke M, et al. Tilting theory and cluster combinatorics. Adv Math, 2006, 204: 572–618
4 Keller B. On triangulated orbit categories. Doc Math, 2005, 10: 551–581
5 Happel D. A characterization of hereditary categories with tilting object. Invent Math, 2001, 144: 381–298
6 Ringel C M. Tame Algebras and Integral Quadratic Forms. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1099. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1984
7 Geigle W, Lenzing H. A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite dimensional algebras. In: Singularities, Representations of Algebras, and Vector Bundles. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1273. Berlin: Springer, 1987, 265–297
8 Kussin D, Lenzing H, Meltzer H. Triangle singularities, ADE-chains, and weighted projective lines. Adv Math, 2013, 237: 194–251

9 Happel D. Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite-Dimensional Algebras. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 119. Cambridge: Cambridge University Press, 1988
10 Barot M, Kussin D, Lenzing H. The cluster category of a canonical algebra. Trans Amer Math Soc, 2010, 362: 4313–4330
11 Chen J M, Lin Y N, Liu P, et al. Classification of tilting objects on a weighted projective line of type $(2,2,2,2;\lambda)$. ArXiv:1303.1323, 2013

Tilting and cluster-tilting objects on weighted projective lines

Jianmin Chen, Ya'nan Lin, Pin Liu & Shiquan Ruan

Abstract In this paper, we investigate tilting objects and cluster-tilting objects in the categories associated with weighted projective lines. For the case of genus one, tilting objects in the stable category of vector bundles are proved to be precisely cluster-tilting objects in the associated cluster category. Particularly, cluster-tilting objects in the associated cluster category are induced by tilting sheaves in the category of coherent sheaves.

Keywords tilting object, cluster tilting object, weighted projective line, vector bundle

MSC(2010) 14A22, 14F05, 16G70, 16S99, 18E30

doi: 10.1360/N012017-00222