卷积等价分布簇的推广及其分布卷积根的封闭性

张伟伟[1],陈 维[1,2*]

(1.伊犁师范学院 数学与统计分院,新疆 伊宁 835000;2.厦门大学 数学科学学院,福建 厦门 361005)

摘 要:在文献[1]的基础上,研究推广的卷积等价分布的卷积根的封闭性.

关键词:卷积等价分布;扩张;卷积根的封闭性

中图分类号:O211.3 **文献标识码**:A **文章编号**:1673—999X(2018)01—0001—03

1 引言与介绍

文献[1]给出了卷积等价分布簇的一种推广,并研究了其卷积的封闭性,文献[2]指出这种推广是该分布簇的真包含推广.本文在文献[1]的基础上研究推广的卷积等价分布的卷积根的封闭性.对于卷积根的封闭性研究的早期文献见[3-5],近期文献见[6-8].

以下若无特别声明,均假设分布F的支撑为$[0,\infty)$,且是适正的,即$F(\infty)=1$.所有的极限均指$x\to+\infty$的情形.F的尾函数$\bar F(x)=1-F(x)$.对于$2\leqslant n\in Z^+$,F^{*n}表示F的n重卷积(记$F^{*1}=F$),$\overline{F^{*n}}$表示F^{*n}的尾函数.

记$a(x)\approx b(x)$,如果$\limsup\limits_{x\to\infty}a(x)/b(x)<\infty$且$\limsup\limits_{x\to\infty}b(x)/a(x)<\infty$.

对于$\gamma\geqslant 0$,分布F的γ指数矩为$\varphi_F(\gamma)=\int_0^\infty e^{\gamma y}F(\mathrm{d}x)\in[1,+\infty]$.

注1 易知,若$\gamma>0,\varphi_F(\gamma)<\infty$,则$\bar F(x)=o(e^{-\gamma x}),x\to\infty$.

在概率测度为P的概率空间上,两个非负的适正分布F与G分别为相互独立的随机变量ξ与η的分布,则对任意$x>0$,分布F与G的卷积的尾函数为

$$\begin{aligned}\overline{F*G}(x)&=P(\xi+\eta>x)=\int_0^\infty\bar F(x-y)G(\mathrm{d}y)=\int_0^x\bar F(x-y)G(\mathrm{d}y)+\int_x^\infty 1G(\mathrm{d}y)\\&=\int_0^x\bar F(x-y)G(\mathrm{d}y)+\bar G(x).\end{aligned}\tag{1.1}$$

注2 由(1.1)知$\overline{F*G}(x)\geqslant\bar G(x),\overline{F*G}(x)\geqslant\bar F(x)$.

定义A 称分布F属于$L(\gamma)$簇,$\gamma\geqslant 0$,如果对任意$y\in\mathbb{R}$,当$x\to\infty$时,有

$$\bar F(x-y)\sim e^{\gamma x}\bar F(x).\tag{1.2}$$

由定义A,可选择一个函数$h(x)\to\infty(x\to\infty)$,有$x^{-1}h(x)\to 0$且当$|y|\leqslant h(x)$时(1.2)一致成立.设$\gamma\geqslant 0$,记

收稿日期:2017-03-31

基金项目:2016年度伊犁师范学院研究生科研创新项目"伦德伯格指数的若干讨论"(2016YSY014).

作者简介:张伟伟,女,在读硕士研究生,研究方向:概率论.

***通信作者**:陈维,男,副教授,硕士生导师,在读博士研究生,研究方向:概率论.

$$H(F,\gamma)=\begin{Bmatrix} h:[0,\infty)\to[0,\infty):h(x)\to\infty,x^{-1}h(x)\to 0,\text{当}x\to\infty,\\ \text{有}\bar{F}(x-y)\sim e^{\gamma y}\bar{F}(x)\text{在}|y|\leqslant h(x)\text{上一致成立.}\end{Bmatrix}$$

定义B 称分布F属于卷积等价分布簇$S(\gamma)$，$\gamma\geqslant 0$，如果满足以下条件：

（i）$\varphi_F(\gamma)<\infty$；（ii）$F\in L(\gamma)$；（iii）$\overline{F^{*2}}(x)\sim 2\varphi_F(\gamma)\bar{F}(x)$.

定义C 对于$\gamma\geqslant 0$，称分布G属于$S^e(\gamma)$簇，如果G满足以下条件：

（i）存在分布$F\in S(\gamma)$，使得$\bar{G}(x)\approx\bar{F}(x)$；（ii）$\overline{G^{*2}}(x)\sim 2\varphi_G(\gamma)\bar{G}(x)$，$x\to\infty$.

定义D 对于$\gamma\geqslant 0$，称分布F属于$L^e(\gamma)$，如果F满足以下条件：

（i）存在一个分布$G\in L(\gamma)$，使得$\bar{F}(x)\approx\bar{G}(x)$；

（ii）存在函数h，当$x\to\infty$时，$h(x)\to 0$，$x^{-1}h(x)\to 0$，使得

$$\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_0^{h(x)}\bar{F}(x-y)F(\mathrm{d}x)\to\varphi_F(\gamma).$$

命题A[1] 对$0\leqslant\gamma<\infty$，如果$F\in L^e(\gamma)$，则存在函数$h(x)\to\infty$，$x^{-1}h(x)\to\infty(x\to\infty)$使对任意$n\geqslant 2$，有

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_0^{x-h(x)}\bar{F}(x-y)F^{*(n-1)}(\mathrm{d}y)\geqslant\varphi_F^{n-1}(\gamma)>0.$$

命题B[1] 若$F\in L^e(\gamma)$，$\gamma\geqslant 0$，则对任意整数$n\geqslant 2$，有

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\bar{F}(x)}\geqslant n\left(\varphi_F(\gamma)\right)^{n-1}>0.$$

命题C[1] 若对$0\leqslant\gamma<\infty$，$F\in S^e(\gamma)$，$G\in L^e(\gamma)$且$\bar{F}(x)\approx\bar{G}(x)$，则$G\in S^e(\gamma)$.

2 主要结果的证明

命题1 若$F^{*n}\in S^e(\gamma)$，且$F\in L^e(\gamma)$，$\varphi_F(\gamma)<\infty$，$0\leqslant\gamma<\infty$，$n\geqslant 2$，则$F\in S^e(\gamma)$.（卷积根的封闭性）

证明：由命题C，我们只需证明$\bar{F}(x)\approx\overline{F^{*n}}(x)$即可．由命题B可知

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\bar{F}(x)}{\overline{F^{*n}}(x)}\leqslant\frac{1}{n\varphi_F^{n-1}(\gamma)}<\infty,$$

故我们只需证明$\limsup\limits_{x\to\infty}\overline{F^{*n}}(x)/\bar{F}(x)<\infty$即可．

取$h(x)\in H(F,\gamma)\cap H(F^{*n},\gamma)$，由命题A及命题B知

$$\limsup_{x\to\infty}\int_0^{x-h(x)}\frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)}F^{*(n-1)}(\mathrm{d}y)>0,\ \limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{*(n-1)}}(x)}{\bar{F}(x)}>0.\tag{2.1}$$

由分部积分、注2、定义C、定义B、定义A及注1，当x充分大时，我们有

$$\begin{aligned}\overline{F^{*n}}(x)&=\int_0^{h(x)}\overline{F^{*(n-1)}}(x-y)F(\mathrm{d}y)+\int_{h(x)}^{x}\overline{F^{*(n-1)}}(x-y)F(\mathrm{d}y)+\int_x^{\infty}1F(\mathrm{d}y)\\&=\int_0^{h(x)}\overline{F^{*(n-1)}}(x-y)F(\mathrm{d}y)+\int_0^{x-h(x)}\bar{F}(x-y)F^{*(n-1)}(\mathrm{d}y)+\overline{F^{*(n-1)}}(x-h(x))\bar{F}(h(x))\\&\leqslant\int_0^{h(x)}\overline{F^{*(n-1)}}(x-y)F(\mathrm{d}y)+\int_0^{x-h(x)}\bar{F}(x-y)F^{*(n-1)}(\mathrm{d}y)+\overline{F^{*n}}(x-h(x))\bar{F}(h(x))\\&=\int_0^{h(x)}\overline{F^{*(n-1)}}(x-y)F(\mathrm{d}y)+\int_0^{x-h(x)}\bar{F}(x-y)F^{*(n-1)}(\mathrm{d}y)+o\left(\overline{F^{*(n)}}(x)\right),\end{aligned}$$

故由上式及定义D得

$$1\leqslant \liminf_{x\to\infty}\int_0^{h(x)}\frac{\overline{F^{*(n-1)}}(x-y)}{\overline{F^{*n}}(x)}F(\mathrm{d}y)+\liminf_{x\to\infty}\int_0^{x-h(x)}\frac{\bar{F}(x-y)}{\overline{F^{*n}}(x)}F^{*(n-1)}(\mathrm{d}y)$$

$$=\liminf_{x\to\infty}\int_0^{h(x)}\frac{\overline{F^{*(n-1)}}(x-y)}{\overline{F^{*n}}(x)}\frac{\bar{F}(x-y)\bar{F}(x)}{\bar{F}(x-y)\bar{F}(x)}F(\mathrm{d}y)+\liminf_{x\to\infty}\int_0^{x-h(x)}\frac{\bar{F}(x-y)}{\overline{F^{*n}}(x)}\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x)}F^{*(n-1)}(\mathrm{d}y)$$

$$\leqslant \liminf_{x\to\infty}\frac{\bar{F}(x)}{\overline{F^{*n}}(x)}\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{*(n-1)}}(x)}{\bar{F}(x)}\limsup_{x\to\infty}\int_0^{h(x)}\frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)}F(\mathrm{d}y)$$

$$+\liminf_{x\to\infty}\frac{\bar{F}(x)}{\overline{F^{*n}}(x)}\limsup_{x\to\infty}\int_0^{x-h(x)}\frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)}F^{*(n-1)}(\mathrm{d}y)$$

$$=\liminf_{x\to\infty}\frac{\bar{F}(x)}{\overline{F^{*n}}(x)}\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{*(n-1)}}(x)}{\bar{F}(x)}\varphi_F(\gamma)+\liminf_{x\to\infty}\frac{\bar{F}(x)}{\overline{F^{*n}}(x)}\limsup_{x\to\infty}\int_0^{x-h(x)}\frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)}F^{*(n-1)}(\mathrm{d}y),$$

于是由(2.1)得

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\bar{F}(x)}{\overline{F^{*n}}(x)}\geqslant\frac{1}{\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{*(n-1)}}(x)}{\bar{F}(x)}\varphi_F(\gamma)+\limsup_{x\to\infty}\int_0^{x-h(x)}\frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)}F^{*(n-1)}(\mathrm{d}y)}>0.$$

因此 $\limsup_{x\to\infty}\overline{F^{*n}}(x)/\bar{F}(x)<\infty$，这样就完成了命题1的证明.

参考文献：

[1] 排孜热合曼·吐尔逊江，王芳，汤建钢，等. 卷积等价分布簇的推广及其分布卷积的封闭性[J]. 伊犁师范学院学报(自然科学版)，2013(4)：1-6.

[2] 杨海丽，陈维. 关于广义局部卷积等价分布簇的注解[J]. 伊犁师范学院学报(自然科学版)，2016(2)：5-7.

[3] EMBRECHTS P, GOLDIE C M, VERAVERBEKE N. Subexponentiality and infinite divisibility[J]. Z. Wahr. Verw. Gebiete, 1979, 49: 335-347.

[4] EMBRECHTS P, GOLDIE C M. On convolution tails[J]. Stochastic Processes & Their Applications, 1982, 13(3): 263-278.

[5] CLINE D B H. Convolutions of distributions with exponential and subexponential tails[J]. Aust. Math. Soc. Ser A, 1987, 43: 347-365.

[6] PAKES A G. Convolution equivalence and infinite divisibility[J]. J. Appl. Probab, 2004, 41: 407-424.

[7] WANG Y, YANG Y, WANG K, et al. Some new equivalent conditions on asymptotics and local asymptotics for random sums and their applications[J]. Insurance Mathematics & Economics, 2007, 40(2): 256-266.

[8] 王开永，王岳宝，张雅文. 广义次指数簇的卷积根的封闭性[J]. 应用数学，2007，20(1)：47-52.

[责任编辑：张丽亚]

An Extension of the Convolution Equivalent Class and Closure of Their Convlution Roots

ZHANG Wei-wei[1], CHEN Wei[1,2]

(1.School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining, Xinjiang 835000, China; 2.School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen, Fujian 361005, China)

Abstract: Based on the reference [1], we research the closure of convolution roots in the extensive convolution equivalent distribution class.

Key words: convolution equivalent distribution; extension; closure of convlution roots