第46卷 第6期　福州大学学报(自然科学版)　Vol. 46 No. 6
2018年12月　Journal of Fuzhou University(Natural Science Edition)　Dec. 2018

DOI: 10.7631/issn.1000-2243.18045　文章编号: 1000-2243(2018)06-0764-05

保 E^* 关系且方向保序严格部分一一变换半群的秩

龙伟锋[1,2]，徐 波[2]，龙伟芳[3]，李 湘[4]

(1. 厦门大学数学科学学院，福建 厦门 361005; 2. 贵州师范大学数学科学学院，贵州 贵阳 550001;
3. 凯里学院理学院，贵州 凯里 556011; 4. 遵义师范学院数学学院，贵州 遵义 563002)

摘要: 设 X 为有限集合，E 为 X 上的等价关系，令 $\mathrm{SOPI}_{E^*}(X)$ 为 X 上的所有保 E^* 关系且方向保序严格部分一一变换构成的半群. 为了讨论此变换半群的秩，引入了新的等价关系从而得到新的等价类. 通过对等价类的分析得到了半群 $\mathrm{SOPI}_{E^*}(X)$ 的秩.

关键词: 保 E^* 关系; 方向保序; 秩

中图分类号: O152.7　**文献标识码:** A

On the rank of semigroup of preserving E relation and orientation strictly partial one-one transformations

LONG Weifeng[1,2], XU Bo[2], LONG Weifang[3], LI Xiang[4]

(1. College of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen, Fujian 361005, China;
2. College of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou 550001, China;
3. College of Sciences, Kaili University, Kaili, Guizhou 556011, China;
4. College of Mathematical Sciences, Zhunyi Normal University, Zhunyi, Guizhou 563002, China)

Abstract: Let E be an equivalence relation on a finite set X. The semigroup denoted by $\mathrm{SOPI}_{E^*}(X)$ consisting of all preserving E^* relation and orientation strictly partial one-one transformations. In order to discuss the rank of this transformation semigroup, this paper introduces some new equivalence relations to get new equivalence classes. The rank of semigroup $\mathrm{SOPI}_{E^*}(X)$ is obtained by analyzing the equivalence classes.

Keywords: E^*-preserving; preserving orientation; rank

0 引言

变换半群的秩一直是变换半群研究的一个重要课题，国内外许多学者对此进行了深入广泛的研究[1-9]. 设 X 为有限集合，E 为 X 上的等价关系且 I_X 为 X 上的对称逆半群. 令 $I_{E^*}(X)=\{f\in I_X$: 对任意 x, $y\in \mathrm{dom}\, f$, $(x, y)\in E$ 当且仅当 $(f(x), f(y))\in E\}$. 则 $I_{E^*}(X)$ 为 I_X 的逆半子群，称为保 E^* 关系部分一一变换半群. 文献[4]讨论了它的 Green 关系与秩.

令 X 为有限集合，E 为 X 上的等价关系且 $I_{E^*}(X)$ 为 X 上的保 E^* 关系部分一一变换半群. 设 $f\in I_{E^*}(X)$ 且 $\mathrm{dom}(f)=\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$，其中 $a_1<a_2<\cdots<a_r$. 若最多存在一个 $i\in\{0, 1, \cdots, r-1\}$，使得 $f(a_i)>f(a_{i+1})$，则称 f 为(X 上的)保 E^* 关系且方向保序部分一一变换.

设 $X(|X|=n)$ 为有限集合，E 为 X 上的等价关系，I_X 是 X 上的对称逆半群且 S_n 是 X 上的 n 次对称群，令 $\mathrm{SOPI}_{E^*}(X)$ 为 X 上的所有保 E^* 关系且方向保序严格部分一一变换之集，即 $\mathrm{SOPI}_{E^*}(X)=\{f\in I_X\backslash S_n$: f 为保 E^* 关系且方向保序部分一一变换$\}$. 则易验证 $\mathrm{SOPI}_{E^*}(X)$ 是 $I_{E^*}(X)(I_X)$ 的逆子半群，称为保 E^* 关系且方向保序严格部分一一变换半群.

收稿日期: 2018-01-21
通信作者: 龙伟锋(1984-)，副教授，主要从事半群理论及密码学方面研究，longweifeng2009@126.com
基金项目: 贵州省科学技术厅科技基金资助项目(黔科合 LH [2015] 7047); 国家自然科学基金资助项目(11461014)

任取 $x, y \in X$，若 $x \leqslant y$，定义 $[x, y] = \{z \in X: x \leqslant z \leqslant y\}$. 对于一般情形，即对任意的有限全序集 X 和 X 上的任意等价关系，很难描述半群 $\mathrm{SOPI}_{E^*}(X)$ 的秩. 因此，先考虑一种特殊情形. 本研究总是假设 $X = \{1, 2, \cdots, nm\}\{n \geqslant 3, m \geqslant 2\}$ 为全序集，E 为 X 上的等价关系，满足 $E = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \cdots \cup (A_m \times A_m)$，其中：$A_i = [(i-1)n+1, in]$，$i = 1, 2, \cdots, m$. 本研究在上述全集与等价关系下，讨论了 $\mathrm{SOPI}_{E^*}(X)$ 的秩.

1　预备知识

设 $f \in \mathrm{SOPI}_{E^*}(X)$，用 $\mathrm{dom}(f)$ 表示 f 的原象集，$\mathrm{im}(f)$ 表示 f 的象集. 为了叙述方便本研究在 $\mathrm{SOPI}_{E^*}(X)$ 上引入下面的二元关系，对任意的 $f, g \in \mathrm{SOPI}_{E^*}(X)$，定义

$$(f, g) \in L^{\Delta} \text{ 当且仅当 } \mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(g)$$

$$(f, g) \in R^{\Delta} \text{ 当且仅当 } \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$$

$$(f, g) \in J^{\Delta} \text{ 当且仅当 } |\mathrm{im}(f)| = |\mathrm{im}(g)|$$

则 L^{Δ}，R^{Δ}，J^{Δ} 都是 $\mathrm{SOPI}_{E^*}(X)$ 上的等价关系，易见 $L^{\Delta} \subseteq J^{\Delta}$，$R^{\Delta} \subseteq J^{\Delta}$. 对 $0 \leqslant r \leqslant nm-1$，记

$$K_r = \{f \in: \mathrm{SOPI}_{E^*}(X) \mid |\mathrm{im}(f)| = r\}$$

$$V_r = \{f \in: \mathrm{SOPI}_{E^*}(X) \mid |\mathrm{im}(f)| \leqslant r\}$$

则 $K_0, K_1, \cdots, K_{nm-1}$ 恰好是 $\mathrm{SOPI}_{E^*}(X)$ 的 nm 个 K 类，其中 K_0 是由空变换组成，而 $V_0, V_1, \cdots, V_{nm-1}$ 是由 $\mathrm{SOPI}_{E^*}(X)$ 的 nm 个理想构成的理想链，并且 $\mathrm{SOPI}_{E^*}(X) = V_{nm-1}$.

下面说明本研究用到的符号与概念. 任取 $f \in \mathrm{SOPI}_{E^*}(X)$，$A_i \in X/E$，若 $A_i \cap \mathrm{dom}(f) \neq \varnothing (i \in \{1, 2, \cdots, m\})$，为了方便记 $f(A_i) = f(A_i \cap \mathrm{dom}(f))$. 任取 $f \in \mathrm{SOPI}_{E^*}(X)$，$A_i \in X/E$，若 $A_i \cap \mathrm{dom}(f) \neq \varnothing$，不妨设 $A_i \cap \mathrm{dom}(f) = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ 且 $a_1 < a_2 < \cdots < a_r (1 < r < n)$. 由于 f 为 X 上的保 E^* 关系且方向保序严格部分一一变换，则 $f(a_1) < \cdots < f(a_r)$. 从而把 f 的定义域限制在 A_i 上构成一个保序变换. 注意到 A_i 的任意性，进而 $\mathrm{SOPI}_{E^*}(X)$ 中的变换 f 在定义域相交非空的 E 上保序.

本研究未说明的符号与概念请参见文献 [10].

2　主要结果与证明

定理 1　$K_r \subseteq K_{r+1}K_{r+1} (r \leqslant nm-2)$.

证明　设 θ 为空变换，则 $K_0 = \{\theta\}$. 令 $\eta = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$，$\xi = \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix}$，其中 $a \neq b$. 易知 $\eta, \xi \in K_1$，且 $\theta = \eta\xi$. 因此 $K_0 \subseteq K_1K_1$.

任取 $f \in K_r$，其中 $0 < r \leqslant nm-2$，易知存在 $A_p, A_q \in X/E (1 \leqslant p, q \leqslant m)$，使得 $|A_p \cap \mathrm{dom}(f)| \leqslant n-1$ 且 $f(A_p) \subseteq A_q$. 若把 f 的定义域限制在 A_p 上，则构成了 A_p 到 A_q 的保序部分一一变换，记为 $f|_{A_p}$.

情形 1　$|A_p \cap \mathrm{dom}(f)| = n-1$

不妨设

$$f|_{A_p} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ f(a_1) & f(a_2) & \cdots & f(a_{n-1}) \end{bmatrix}$$

其中：$a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1}$. 由 $r \leqslant nm-2$，知存在 $a, b, c \in X$，使得 $a \notin \mathrm{dom}(f)$，$b, c \notin \mathrm{im}(f)$ 且 $a \in A_p$，$b \in A_q$，$c \notin A_q$. 注意到 f 的有序性，不失一般性设

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_i < a < a_{i+1} < \cdots < a_{n-1}$$

$$f(a_1) < f(a_2) < \cdots < f(a_j) < b < f(a_{j+1}) < \cdots < f(a_{n-1})$$

以下分三种情况讨论.

1) $i = j$. 令

$$\xi(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in \mathrm{dom}(f)) \\ b & (x = a) \end{cases}$$

则

$$\xi|_{A_p}=\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_i & a & a_{i+1} & \cdots & a_{n-1} \\ f(a_1) & \cdots & f(a_i) & b & f(a_{i+1}) & \cdots & f(a_{n-1}) \end{bmatrix}$$

令 $\eta(x)=x$，$x\in \mathrm{im}(f)\cup\{c\}$. 显然 η，$\xi\in K_{r+1}$，$\eta\xi=f$. 从而 $f\in K_{r+1}K_{r+1}$.

2) $i<j$. 令

$$\phi=\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_i & a & a_{i+1} & \cdots & a_{j-1} & a_j & a_{j+1} & \cdots & a_{n-1} \\ f(a_1) & \cdots & f(a_i) & f(a_{i+1}) & f(a_{i+2}) & \cdots & f(a_j) & b & f(a_{j+1}) & \cdots & f(a_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$\xi(x)=\begin{cases}\phi(x) & (x\in \mathrm{dom}(\phi))\\ f(x) & (x\in \mathrm{dom}(f)\setminus A_p)\end{cases}$$

由 ξ 的定义，显然 $\xi\in K_{r+1}$. 令

$$\varphi=\begin{bmatrix} f(a_1) & \cdots & f(a_i) & f(a_{i+2}) & \cdots & f(a_j) & b & f(a_{j+1}) & \cdots & f(a_{n-1}) \\ f(a_1) & \cdots & f(a_i) & f(a_{i+1}) & \cdots & f(a_{j-1}) & f(a_j) & f(a_{j+1}) & \cdots & f(a_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$\eta(x)=\begin{cases}\varphi(x) & (x\in \mathrm{dom}(\varphi))\\ x & (x\in\{\mathrm{im}(f)\cup\{c\}\}\setminus A_q)\end{cases}$$

根据 η 的定义，显然 $\eta\in K_{r+1}$.

下证 $\eta\xi=f$. 由 η，ξ 的定义，易验证 $\mathrm{dom}(\eta\xi)=\mathrm{dom}(f)$ 且

$$f|_{A_p}=\varphi\phi=\eta|_{A_q}\xi|_{A_p}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ f(a_1) & f(a_2) & \cdots & f(a_{n-1}) \end{bmatrix}$$

此外考虑当 $x\in \mathrm{dom}(f)\setminus A_p$ 时，$\eta\xi(x)=\eta(f(x))=f(x)$. 故 $\eta\xi=f$.

综上所述，$f\in K_{r+1}K_{r+1}$.

3) $i>j$. 证明类似于 2) 的证明.

情形 2 $|A_p\cap \mathrm{dom}(f)|\leqslant n-2$

设

$$f|_{A_p}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_t \\ f(a_1) & f(a_2) & \cdots & f(a_t) \end{bmatrix}$$

其中：$a_1<a_2<\cdots<a_t(1\leqslant t\leqslant n-2)$. 由 $|A_p\cap \mathrm{dom}(f)|\leqslant n-2$，知存在 $a\in X$，使得 $a\notin \mathrm{dom}(f)$ 且 $a\in A_p$. 不失一般性设 $a_1<a_2<\cdots a_i<a<a_{i+1}<\cdots<a_t(1\leqslant i\leqslant t)$. 令

$$\theta=\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_i & a & a_{i+1} & \cdots & a_t \\ qn+1 & \cdots & qn+i & qn+i+1 & qn+i+2 & \cdots & qn+t+1 \end{bmatrix}$$

$$\xi(x)=\begin{cases}\theta(x) & (x\in \mathrm{dom}(\theta))\\ f(x) & (x\in \mathrm{dom}(f)\setminus A_p)\end{cases}$$

由 ξ 的定义，显然 $\xi\in K_{r+1}$.

设 s 是在 1，2，…，t 中使得 $f(a_s)\neq qn+s$ 的最小整数，则 $f(a_s)\geqslant qn+s+1$. 下面分三种情况一一讨论.

Ⅰ) $s<i+1$. 令

$$\mu=\begin{bmatrix} qn+1 & \cdots & qn+s-1 & qn+s & qn+s+1 & \cdots & qn+t+1 \\ qn+1 & \cdots & qn+s-1 & qn+s+1 & qn+s+2 & \cdots & qn+t+2 \end{bmatrix}$$

$$\eta_1(x)=\begin{cases}\mu(x) & (x\in \mathrm{dom}(\mu))\\ x & (x\in \mathrm{dom}(f)\setminus A_q)\end{cases}$$

根据 η_1 的定义，显然 $\eta_1\in K_{r+1}$. 令

$$\nu=\begin{bmatrix} qn+1 & \cdots & qn+s-1 & qn+s & qn+s+1 & \cdots & qn+i+1 & qn+i+3 & \cdots & qn+t+2 \\ qn+1 & \cdots & qn+s-1 & qn+s & f(a_s) & \cdots & f(a_i) & f(a_{i+1}) & \cdots & f(a_t) \end{bmatrix}$$

$$\eta_2(x)=\begin{cases}v(x) & (x\in \mathrm{dom}(\nu))\\ x & (x\in \mathrm{dom}(f)\setminus A_q)\end{cases}$$

按 η_2 的定义，显然 $\eta_2\in K_{r+1}$

下证 $\eta_2\eta_1\xi=f$. 由 ξ，η_1，η_2 的定义，易验证 $\mathrm{dom}(\eta_2\eta_1\xi)=\mathrm{dom}(f)$ 且

$$f|_{A_p}=\nu\mu\theta=\eta_2|_{A_q}\eta_1|_{A_q}\xi|_{A_p}=\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_t\\ f(a_1) & \cdots & f(a_t)\end{bmatrix}$$

此外考虑当 $x\in \mathrm{dom}(f)\setminus A_p$ 时，$\eta_2\eta_1\xi(x)=\eta_2\eta_1(f(x))=f(x)$. 从而 $\eta_2\eta_1\xi=f$，$f\in K_{r+1}K_{r+1}$.

Ⅱ) $s=i+1$. 令

$$\rho=\begin{bmatrix}qn+1 & \cdots & qn+i & qn+i+1 & qn+i+2 & \cdots & qn+t+1\\ qn+1 & \cdots & qn+i & qn+i+2 & qn+i+3 & \cdots & qn+t+2\end{bmatrix}$$

$$\eta_1(x)=\begin{cases}\rho(x) & (x\in \mathrm{dom}(\rho))\\ x & (x\in \mathrm{dom}(f)\setminus A_q)\end{cases}$$

根据 η_1 的定义，显然 $\eta_1\in K_{r+1}$. 令

$$\sigma=\begin{bmatrix}qn+1 & \cdots & qn+i & qn+i+1 & qn+i+3 & \cdots & qn+t+2\\ qn+1 & \cdots & qn+i & qn+i+1 & f(a_{i+1}) & \cdots & f(a_t)\end{bmatrix}$$

$$\eta_2(x)=\begin{cases}\sigma(x) & (x\in \mathrm{dom}(\sigma))\\ x & (x\in \mathrm{dom}(f)\setminus A_q)\end{cases}$$

由 η_2 的定义，显然 $\eta_2\in K_{r+1}$.

下证 $\eta_2\eta_1\xi=f$. 由 ξ，η_1，η_2 的定义，易验证 $\mathrm{dom}(\eta_2\eta_1\xi)=\mathrm{dom}(f)$ 且

$$f|_{A_p}=\sigma\rho\theta=\eta_2|_{A_q}\eta_1|_{A_q}\xi|_{A_p}=\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_t\\ f(a_1) & \cdots & f(a_t)\end{bmatrix}$$

此外考虑当 $x\in \mathrm{dom}(f)\setminus A_p$ 时，$\eta_2\eta_1\xi(x)=\eta_2\eta_1(f(x))=f(x)$. 从而 $\eta_2\eta_1\xi=f$，$f\in K_{r+1}K_{r+1}$.

Ⅲ) $s>i+1$，证明类似于 Ⅱ) 的证明.

综上所述 $K_r\subseteq K_{r+1}K_{r+1}$.

定理 2　$V_0\subseteq V_1\subseteq\cdots\subseteq V_{nm-1}=\mathrm{SOPI}_{E^*}(X)$ 为理想链，每个 $V_r(r=0,1,\cdots,nm-1)$ 都是 $\mathrm{SOPI}_{E^*}(X)$ 的逆子群，且 $V_r=\langle K_r\rangle(r\leqslant nm-1)$.

证明　由定理 1，可得 $V_r=\langle K_r\rangle(r\leqslant nm-1)$.

在 K_{nm-1} 中考虑元素 g_0，g_1，$\cdots$，g_{nm-1}，定义如下:

1) $g_0: X\setminus\{1\}\rightarrow X\{nm\}$

$$g_0=\begin{cases}x-n & (x\in A_i(2\leqslant i\leqslant m))\\ n(m-1)+x-1 & (x\in A_1\setminus\{1\})\end{cases}$$

2) $g_i: X\setminus\{nm-i+1\}\rightarrow X\{nm-i\}(i\in\{1,2,\cdots,nm-1\})$.

若存在整数 $k(1\leqslant k\leqslant m)$，使得 $nm-i+1$，$nm-i\in A_k$，则不妨设 $nm-i=n(k-1)+s(1\leqslant s\leqslant n-1)$. 于是

$$g_i=\begin{cases}x & (x\notin A_k)\\ x & ((k-1)n+1\leqslant x\leqslant(k-1)n+s-1\text{ 或 }(k-1)n+s+2\leqslant x\leqslant kn)\\ n(k-1)+s+1 & (x=n(k-1)+s)\end{cases}$$

若存在整数 $k(1\leqslant k\leqslant m)$，使得 $nm-i\in A_k$，$nm-i+1\in A_{k+1}$，则不妨设 $nm-i=nk$，$nm-i+1=nk+1$. 于是

$$g_i=\begin{cases}x+(m-1)n & (x\in A_1)\\ x-n & (x\in A_i(2\leqslant i\leqslant\text{ 或 }+2\leqslant i\leqslant m))\\ x-n-1 & (x\in A_{k+1}\setminus\{nm-i+1\})\end{cases}$$

由 g_0，g_1，$\cdots$，g_{nm-1} 的定义，易验证 $\mathrm{im}(g_i)=\mathrm{dom}(g_{i+1})(i=\{0,1,\cdots,nm-1\})$，$\mathrm{im}(g_{nm-1})=\mathrm{dom}(g_0)$.

定理3　令 $A = \{g_0, g_1, \cdots, g_{nm-1}\}$，则 A 是$SOPI_{E^*}(X)$ 的生成集.

证明　任取 $s \in V_{nm-1}$.注意到 $dom(g_0)$，$dom(g_1)$，$\cdots$，$dom(g_{nm-1})$ 是集合$\{1, 2, \cdots, nm\}$ 的所有势为 $nm-1$ 的子集，则存在 $i, j \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$，使得 $dom(s) = dom(g_i)$，$im(s) = dom(g_j)$. 若 $i < j$，易验证 $s = g_{j-1}\cdots g_{i-1}g_i$. 若 $i \geqslant j$，易验证 $s = g_{j-1}\cdots g_{n-1}g_0\cdots g_{i-1}g_i$. 从而 A 是 K_{nm-1} 的生成集，再证定理2，知 A 是 V_{nm-1} 的生成集.注意到 $V_{nm-1} = SOPI_{E^*}(X)$，则 A 是$SOPI_{E^*}(X)$ 的生成集.

定理4　$\operatorname{rank} SOPI_{E^*}(X) = mn$.

证明　设 B 是$SOPI_{E^*}(X)$ 的生成集.注意到定理3中的 A 也是$SOPI_{E^*}(X)$ 的生成集且 $|A| = nm$，则要证 $\operatorname{rank} SOPI_{E^*}(X) = mn$，只要证 $|B| \geqslant nm$，即证明对任意 $i \in \{0, 1, \cdots, nm-1\}$，存在 $t \in B$，使得 $dom(t) = dom(g_i)$. 由 $g_i \in SOPI_{E^*}(X)$ 且 B 为生成集，知存在 $t_1, t_2, \cdots, t_k \in B(k \in N)$，使得 $g_i = t_1t_2\cdots t_k$. 注意到 $g_i \neq 1$，则 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 不全为恒等映射，于是存在 $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$，使得 $t_k = 1(1 \leqslant k \leqslant j-1)$ 且 $t_j \neq 1$. 从而 $dom(g_i) = dom(t_j)$. 因此 $|B| \geqslant nm$，$\operatorname{rank} SOPI_{E^*}(X) = mn$.

参考文献:

[1] 龙伟锋，徐波. 保 E^* 关系且方向保序部分一一变换半群的 Green 关系[J]. 广西师范大学学报(自然科学版)，2014，32(4)：72-75.

[2] 龙伟锋，徐波. $I_{E^*}(X)$ 中 E 类保序变换半群的秩[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2014，32(5)：88-90.

[3] 龙伟锋，游泰杰. $I_{E^*}(X)$ 中 E 类方向保序变换半群的秩[J]. 数学的实践与认识，2014，44(10)：230-234.

[4] 龙伟锋，游泰杰，龙伟芳，等. 保 E^* 关系的部分一一变换半群[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2013，35(4)：63-66.

[5] 腾文，游泰杰. 有限双向 E 类保序变换半群的 Green 关系和正则性[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2012，30(5)：53-57.

[6] 徐波. 保序压缩变换半群的极大子半群[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2012，30(4)：63-65.

[7] 徐波. 关于有限保序部分一一变换半群的极大逆子半群[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2007，25(1)：72-73.

[8] 徐波. 正则保序压缩变换半群的秩[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2012，30(3)：52-54.

[9] 张熹成，高荣海. 核具有连续横截面的保序部分变换半群的秩[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2015，33(1)：42-52，57.

[10] HOWIE J M. An introduction to semigrpoup theory[M]. London: Academic Press，1976.

(责任编辑：林晓)