中国科学: 数学 2018 年 第 48 卷 第 10 期: 1339 ～ 1354
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

论 文

抛物型积分算子的弱型极限行为

献给王斯雷教授 85 华诞

侯宪明, 伍火熊*

厦门大学数学科学学院, 厦门 361005

E-mail: houxianming37@163.com, huoxwu@xmu.edu.cn

收稿日期: 2018-04-24; 接受日期: 2018-06-09; 网络出版日期: 2018-09-30; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11771358 和 11471041) 资助项目

摘要 设 $0 \leqslant \beta < \alpha$, $q = \alpha/(\alpha-\beta)$, $f \geqslant 0$. 本文研究带齐次核 Ω 的抛物型奇异积分和分数次积分算子的弱型极限行为, 建立了如下结果:

$$\lim_{\lambda\to 0+} \lambda^q m(\{x \in \mathbb{R}^n : T^{\alpha}_{\Omega,\beta} f(x) > \lambda\}) = \frac{1}{\alpha}\|\Omega\|^q_q \|f\|^q_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

以及

$$\lim_{\lambda\to 0+} \lambda^q m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|T^{\alpha}_{\Omega,\beta} f(x) - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\right| > \lambda\right\}\right) = 0,$$

其中 Ω 满足 L^q_β-Dini 条件, 当 $\beta = 0$ 时, 还需满足 $\int_{S^{n-1}} \Omega(x')J(x')d\sigma(x') = 0$. 同时, 给出了相应的抛物型极大奇异积分和 Marcinkiewicz 积分的弱型极限行为. 此外, 建立了关于 Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 上 Hardy-Littlewood 极大函数的相应结果.

关键词 极限行为 弱型估计 抛物型奇异积分 抛物型 Marcinkiewicz 积分 极大算子 Heisenberg 群

MSC (2010) 主题分类 42B20, 42B25

1 引言

对于固定的实数 $\alpha_i \geqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 取定 $x \in \mathbb{R}^n$, 函数 $F(x, \rho) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\rho^{2\alpha_i}}$ 是关于 $\rho > 0$ 的递减函数. 令 $\rho(x)$ 表示方程 $F(x, \rho) = 0$ 的唯一解. Fabes 和 Rivière [1] 证明了 $\rho(x)$ 是一个度量, 称 $(\mathbb{R}^n, \rho)$ 是一个关于 $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ 的混合齐性空间. 对于 $\lambda > 0$, $\alpha_i \geqslant 1$, 定义更一般的抛物型伸缩:

$$A_\lambda : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (\lambda^{\alpha_1}x_1, \lambda^{\alpha_2}x_2, \ldots, \lambda^{\alpha_n}x_n).$$

在混合齐性空间中, 对于 $x \in \mathbb{R}^n$, 作变换

$$x_1 = \rho^{\alpha_1} \cos\theta_1 \cdots \cos\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1},$$

英文引用格式: Hou X M, Wu H X. Limiting weak-type behaviors for parabolic singular integrals and related operators (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1339–1354, doi: 10.1360/N012018-00113

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \rho^{\alpha_2}\cos\theta_1\cdots\cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1},\\
&\ \vdots\\
x_{n-1} &= \rho^{\alpha_{n-1}}\cos\theta_1\sin\theta_2,\\
x_n &= \rho^{\alpha_n}\sin\theta_1,
\end{aligned}
$$

则 $dx=\rho^{\alpha-1}J(x')d\rho d\sigma(x')$, 其中 $\rho^{\alpha-1}J(x')$ 是上述变换的 Jacobi 行列式, $x'=A_{\rho(x)^{-1}}(x)\in S^{n-1}$ ($\mathbb{R}^n$ 中的单位球面), $\alpha=\sum_{i=1}^n\alpha_i$. 由文献 [1] 知, $J(x')\in C^\infty(S^{n-1})$, 且存在 $N\geqslant 1$ 使得

$$1\leqslant J(x')\leqslant N,\quad \forall\, x'\in S^{n-1}.$$

不难看出, 当 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=1$ 时, $\rho(x)=|x|$, $J(x')=1$. 设 $\Omega(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的实值可测函数, 满足与 A_λ 相关的零阶齐次性

$$\Omega(A_\lambda x)=\Omega(x),\quad \forall\,\lambda>0,\quad x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}. \tag{1.1}$$

对 $\alpha_i\geqslant 1$ ($i=1,\ldots,n$), $\alpha=\sum_{i=1}^n\alpha_i$, $0\leqslant\beta<\alpha$, 定义关于齐性核 Ω 的抛物型奇异和分数次积分算子

$$T^\alpha_{\Omega,\beta}f(x)=\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta}}f(y)dy,$$

其中, 对 $\beta=0$ 还需满足下列消失性条件:

$$\int_{S^{n-1}}\Omega(x')J(x')d\sigma(x')=0, \tag{1.2}$$

且记 $T^\alpha_{\Omega,0}$ 为 T^α_Ω.

由文献 [1,2] 可知, $T^\alpha_{\Omega,\beta}$ 是弱 $(1,q)$ 型有界, 其中 Ω 满足如下 L^q_β-Dini 条件:

$$\int_0^1\frac{\omega_1(\delta)}{\delta^{1+\beta}}d\delta<\infty,\quad 0\leqslant\beta<\alpha,\quad q=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}, \tag{1.3}$$

这里 $\Omega\in L^q(S^{n-1})$ 且对于 $\delta>0$, $\omega_1(\delta)=\sup_{|h|\leqslant\delta}\int_{S^{n-1}}|\Omega(x'+h)-\Omega(x')|d\sigma(x')$. 事实上, 上述结果在粗糙核情形下也成立 (参见文献 [2,3]).

注意到, 当 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=1$ 时, $T^\alpha_{\Omega,\beta}$ 即为经典的卷积型奇异积分和分数次积分算子 $T_{\Omega,\beta}$. 通常记 $T_{\Omega,0}$ 为 T_Ω. 为了估计 T_Ω 的弱型 $(1,1)$ 范数, Janakiraman [4] 获得了如下极限行为:

$$\lim_{\lambda\to 0+}\lambda m(\{x\in\mathbb{R}^n:|T_\Omega f(x)|>\lambda\})=\frac{1}{n}\|\Omega\|_{L^1}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

其中 Ω 满足

$$\int_{S^{n-1}}|\Omega(x-\delta\xi)-\Omega(x)|d\sigma(x)\leqslant cn\delta\|\Omega\|_{L^1},\quad \forall\,\xi\in S^{n-1},\quad 0<\delta<\frac{1}{n}. \tag{1.4}$$

这给出了 T_Ω 的弱型 $(1,1)$ 范数的一个下界. 同时, 在文献 [4] 中, 关于 Hardy-Littlewood 极大函数的相应结果也被建立. 随后, Ding 和 Lai [5,6] 在 Ω 满足比 (1.4) 更弱的 L^q_β-Dini 条件下, 建立了 $T_{\Omega,\beta}$ 和带齐性核 Ω 的 Hardy-Littlewood 极大函数与分数次极大函数的相应结论. 最近, Guo 等 [7] 将上述结果作了进一步完善与推广. 受上述结果启发, 本文将建立如下结果:

定理 1.1 设 $0 \leqslant \beta < \alpha$, $q = \alpha/(\alpha-\beta)$. 若 Ω 满足 L^q_β-Dini 条件, 则对 $f \geqslant 0$ 且 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 有

(i) $\lim_{\lambda\to 0+} \lambda^q m(\{x \in \mathbb{R}^n : T^\alpha_{\Omega,\beta} f(x) > \lambda\}) = \frac{1}{\alpha}\|\Omega\|_q^q \|f\|^q_{L^1(\mathbb{R}^n)}$;

(ii) $\lim_{\lambda\to 0+} \lambda^q m(\{x \in \mathbb{R}^n : |T^\alpha_{\Omega,\beta} f(x) - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}| > \lambda\}) = 0$.

注 1.1 我们指出定理 1.1 中的结论 (ii) 比结论 (i) 更强 (参见注 2.1). 因此, 即使在 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$ 的特殊情形, 我们的结果也是对文献 [4,5] 中相应结果的改进.

对于 $\beta = 0$, 考虑相应的极大奇异积分算子:

$$T^{\alpha,*}_\Omega f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \bigg| \int_{\rho(x-y)>\varepsilon} \frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^\alpha} f(y)dy \bigg|.$$

利用定理 1.1 的证明方法并适当修正, 我们能建立下列结果:

定理 1.2 设 Ω 满足 (1.1)、(1.2) 和 L^1-Dini 条件. 若 $T^{\alpha,*}_\Omega$ 是弱 $(1,1)$ 型算子, 则对 $f \geqslant 0$ 且 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 有

(i) $\lim_{\lambda\to 0+} \lambda m(\{x \in \mathbb{R}^n : |T^{\alpha,*}_\Omega f(x)| > \lambda\}) = \frac{1}{\alpha}\|\Omega\|_1 \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$;

(ii) $\lim_{\lambda\to 0+} \lambda m(\{x \in \mathbb{R}^n : |T^{\alpha,*}_\Omega f(x) - \frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^\alpha}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}| > \lambda\}) = 0$.

另一方面, 对 $0 \leqslant \beta < \alpha$ 和 $q = \alpha/(\alpha-\beta)$, 定义抛物型 Marcinkiewicz 和分数次 Marcinkiewicz 积分算子 $\mu^\alpha_{\Omega,\beta}$ 如下:

$$\mu^\alpha_{\Omega,\beta} f(x) = \bigg(\int_0^\infty \bigg| \int_{\rho(x-y)\leqslant t} \frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta-1}} f(y)dy \bigg|^2 \frac{dt}{t^3} \bigg)^{1/2},$$

其中 Ω 满足 (1.1), 当 $\beta = 0$ 时还满足 (1.2), 且记 $\mu^\alpha_{\Omega,0}$ 为 μ^α_Ω. 由文献 [8] 知, 当 $\Omega \in L\log L(S^{n-1})$ 时, μ^α_Ω 是弱型 $(1,1)$ 有界的. 对 $0 < \beta < \alpha$, 注意到 $|\mu^\alpha_{\Omega,\beta} f(x)| \leqslant T^\alpha_{|\Omega|,\beta}(|f|)(x)$, 由文献 [2] 知, 当 $\Omega \in L^q(S^{n-1})$ 和 $q = \alpha/(\alpha-\beta)$ 时, $\mu^\alpha_{\Omega,\beta}$ 是弱 $(1,q)$ 型有界的. 考虑其弱型极限行为, 我们有下面的定理:

定理 1.3 设 $0 \leqslant \beta < \alpha$, $q = \alpha/(\alpha-\beta)$. 若 Ω 满足 L^q_β-Dini 条件, 则对 $f \geqslant 0$ 且 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 有

(i) $\lim_{\lambda\to 0+} \lambda^q m(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mu^\alpha_{\Omega,\beta} f(x)| > \lambda\}) = \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha 2^{q/2}} \|f\|^q_{L^1(\mathbb{R}^n)}$;

(ii) $\lim_{\lambda\to 0+} \lambda^q m(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mu^\alpha_{\Omega,\beta} f(x) - \frac{|\Omega(x)|}{\sqrt{2}\rho(x)^{\alpha-\beta}}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}| > \lambda\}) = 0$.

此外, 对 $X = (0,\infty)$, 设 M 是 $(X, |\cdot|, \nu)$ 上的 Hardy-Littlewood 极大函数, 其中 $|\cdot|$ 是 X 上的 Euclid 度量, $d\nu(x) = xdx$. Hu 和 Huang [9] 给出了如下弱型极限行为:

$$\lim_{\lambda\to 0+} \lambda\nu(\{x \in X : Mf(x) > \lambda\}) = \frac{1}{4}\|f\|_1, \quad \forall\, f \in L^1(X, d\nu).$$

在一般度量测度空间上的 Hardy-Littlewood 极大函数的弱型极限结果如何? 这是一个十分有意义的问题. 在这里, 我们讨论 Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 上 Hardy-Littlewood 极大函数的弱型极限性质. 为此, 先回顾一些相关的概念和记号. Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 是具底流形 $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ 的非交换幂零 Lie 群, 群结构为

$$\begin{aligned}&(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, x_{2n+1})(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{2n}, x'_{2n+1})\\ &\quad = \bigg(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \ldots, x_{2n} + x'_{2n}, x_{2n+1} + x'_{2n+1} + 2\sum_{j=1}^n (x'_j x_{n+j} - x_j x'_{n+j}) \bigg).\end{aligned}$$

显然, Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 上的单位元是 $0 \in \mathbb{R}^{2n+1}$, x 的逆元 $x^{-1} = -x$. 对于 $\lambda > 0$, Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 上的伸缩为

$$B_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, x_{2n+1}) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_{2n}, \lambda^2 x_{2n+1}).$$

$\mathbb{H}^n$ 上的 Haar 测度为 $\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度. 可测集 $E\in\mathbb{H}^n$ 的测度表示为 $m(E)$. $Q=2n+2$ 为 $\mathbb{H}^n$ 的齐次维数, 那么, $m(B_\lambda(E))=\lambda^Q m(E)$. 定义 $\mathbb{H}^n$ 的齐次范数为

$$|x|_h=\left[\left(\sum_{i=1}^{2n}x_i^2\right)^2+x_{2n+1}^2\right]^{1/4},$$

由此导出 $\mathbb{H}^n$ 上的左不变距离 $d(p,q)=d(q^{-1}p,0)=|q^{-1}p|_h$, 其中 $p,q\in\mathbb{H}^n$. 对于 $r>0$, 有 $x\in\mathbb{H}^n$, $\mathbb{B}(x,r)=\{y\in\mathbb{H}^n: d(x,y)<r\}$ 表示 x 为中心、r 为半径的球. $\mathbb{H}^n$ 中单位球 $\mathbb{B}(0,1)$ 的体积记为

$$\Omega_Q:=\frac{2\pi^{n+1/2}\Gamma(n/2)}{(n+1)\Gamma(n)\Gamma((n+1)/2)}.$$

那么, 单位球球面面积 $\omega_Q=Q\Omega_Q$. 因此, $m(\mathbb{B}(x,r))=m(\mathbb{B}(0,r))=\Omega_Q r^Q$. 关于 Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 的基本理论可以参见文献 [10,11]. 定义 $\mathbb{H}^n$ 上的中心 Hardy-Littlewood 极大函数

$$M_{\mathbb{H}}f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{m(\mathbb{B}(x,r))}\int_{\mathbb{B}(x,r)}|f(y)|dy.$$

由文献 [12] 知, $\|M_{\mathbb{H}}f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{H}^n)}\leqslant C\|f\|_{L^1(\mathbb{H}^n)}$. 我们将建立此弱型估计的如下极限结果:

定理 1.4 对于 $f\in L^1(\mathbb{H}^n)$, 则

(i) $\lim_{\lambda\to0+}\lambda m(\{x\in\mathbb{R}^n: M_{\mathbb{H}}f(x)>\lambda\})=\|f\|_{L^1(\mathbb{H}^n)}$;

(ii) $\lim_{\lambda\to0+}\lambda m(\{x\in\mathbb{R}^n: |M_{\mathbb{H}}f(x)-\frac{1}{\Omega_Q|x|_h^Q}\|f\|_{L^1(\mathbb{H}^n)}|>\lambda\})=0$.

本文结构如下: 第 2 节证明定理 1.1 和 1.2, 而定理 1.3 和 1.4 的证明则分别在第 3 和 4 节中给出. 为方便起见, 在后文中用字母 C 表示一个与本质变量无关的正常数, 但在不同的位置其值可以不同.

2 定理 1.1 和 1.2 的证明

在证明定理 1.1 之前, 我们先给出如下引理.

引理 2.1 设 $0\leqslant\beta<\alpha$ 和 $q=\alpha/(\alpha-\beta)$. 对于固定的 $\lambda>0$, 有

$$\lambda^q m\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n:\frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}>\lambda\right\}\right)=\frac{1}{\alpha}\|\Omega\|_q^q.$$

证明 对于固定的 $\lambda>0$, 有

$$\begin{aligned}m\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n:\frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}>\lambda\right\}\right)&=m\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n:\rho(x)^{\alpha-\beta}<\frac{|\Omega(x)|}{\lambda}\right\}\right)\\&=\int_{S^{n-1}}\int_0^{(\frac{|\Omega(x)|}{\lambda})^{\frac{1}{\alpha-\beta}}}\rho^{\alpha-1}d\rho J(x')d\sigma(x')\\&=\frac{1}{\alpha\lambda^q}\|\Omega\|_q^q.\end{aligned}$$

证明完毕. □

定理 1.1 的证明 不失一般性, 设 $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}=1$. 定义 $B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n:\rho(y-x)<r\}$ 是中心为 x、半径为 r 的椭球. 对于任意的 $0<\varepsilon\ll1$, 存在 r_ε 使得

$$\int_{\rho(x)<r_\varepsilon}f(x)dx>1-\varepsilon.$$

记 $f=f_1+f_2$, 其中 $f_1(x):=f\chi_{B(0,r_\varepsilon)}(x)$. 注意到

$$\|f_1\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}>1-\varepsilon,\quad 以及\quad \|f_2\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\leqslant\varepsilon.$$

对于 $\lambda>0$, 定义下面的集合:

$$E_\lambda:=\{x\in\mathbb{R}^n:|T^\alpha_{\Omega,\beta}f(x)|>\lambda\},\quad E^1_\lambda:=\{x\in\mathbb{R}^n:|T^\alpha_{\Omega,\beta}f_1(x)|>\lambda\},\quad E^2_\lambda:=\{x\in\mathbb{R}^n:|T^\alpha_{\Omega,\beta}f_2(x)|>\lambda\}.$$

选择足够小的 $0<\delta\ll1$ 且满足当 $\varepsilon\to0$ 时 $\varepsilon/\delta\to0$. 由 $T^\alpha_{\Omega,\beta}$ 是线性算子易知,

$$E_\lambda\subseteq E^1_{(1-\delta)\lambda}\cup E^2_{\delta\lambda}\quad 和\quad E^1_{(1+\delta)\lambda}\subseteq E_\lambda\cup E^2_{\delta\lambda}.$$

从而,

$$m(E^1_{(1+\delta)\lambda})-m(E^2_{\delta\lambda})\leqslant m(E_\lambda)\leqslant m(E^1_{(1-\delta)\lambda})+m(E^2_{\delta\lambda}).$$

而由 $T^\alpha_{\Omega,\beta}$ 的弱型 $(1,q)$ 有界性得

$$m(E^2_{\delta\lambda})\leqslant\left(\frac{C}{\delta\lambda}\|f_2\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\right)^q\leqslant\left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q.$$

因此,

$$m(E^1_{(1+\delta)\lambda})-\left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q\leqslant m(E_\lambda)\leqslant m(E^1_{(1-\delta)\lambda})+\left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q. \tag{2.1}$$

下面分别对 $m(E^1_{(1+\delta)\lambda})$ 和 $m(E^1_{(1-\delta)\lambda})$ 进行估计. 记

$$I_1(x):=\left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}f_1(y)dy\right|,\quad I_2(x):=\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta}}-\frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}\right|f_1(y)dy.$$

利用三角不等式, 可得

$$I_1(x)-I_2(x)\leqslant|T^\alpha_{\Omega,\beta}f_1(x)|\leqslant I_1(x)+I_2(x). \tag{2.2}$$

因此,

$$m(E^1_{(1-\delta)\lambda})\leqslant m(\{x\in\mathbb{R}^n:I_2(x)>2\delta\lambda\})+m(\{x\in\mathbb{R}^n:I_1(x)>(1-3\delta)\lambda\}).$$

设 $R_\varepsilon:=(1+1/\varepsilon)r_\varepsilon$. 定义集合

$$G_\lambda:=\{x\in\mathbb{R}^n:\rho(x)>R_\varepsilon,I_2(x)>\lambda\}.$$

由引理 2.1, 可得

$$\begin{aligned}m(E^1_{(1-\delta)\lambda})&\leqslant m(G_{2\delta\lambda})+m(\{x\in\mathbb{R}^n:\rho(x)\leqslant R_\varepsilon,|T^\alpha_{\Omega,\beta}f_1(x)|>(1-\delta)\lambda\})\\&\quad+m(\{x\in\mathbb{R}^n:I_1(x)>(1-3\delta)\lambda\})\\&\leqslant m(G_{2\delta\lambda})+\frac{R^\alpha_\varepsilon}{\alpha}\int_{S^{n-1}}J(x')d\sigma(x')+\frac{\|\Omega\|^q_q}{\alpha(1-3\delta)^q\lambda^q}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

注意到

$$\left|\frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta}}-\frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}\right|\leqslant\frac{|\Omega(x-y)-\Omega(x)|}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta}}+|\Omega(x)|\left|\frac{1}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta}}-\frac{1}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}\right|.$$

记

$$G_{\lambda}^{1}:=\left\{x\in\mathbb{R}^{n}:\rho(x)>R_{\varepsilon},\int_{\mathbb{R}^{n}}\frac{|\Omega(x-y)-\Omega(x)|}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta}}f_{1}(y)dy>\lambda\right\},$$
$$G_{\lambda}^{2}:=\left\{x\in\mathbb{R}^{n}:\rho(x)>R_{\varepsilon},\int_{\mathbb{R}^{n}}|\Omega(x)|\left|\frac{1}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta}}-\frac{1}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}\right|f_{1}(y)dy>\lambda\right\},$$

则

$$m(G_{2\delta\lambda})\leqslant m(G_{\delta\lambda}^{1})+m(G_{\delta\lambda}^{2}).$$

首先估计 $m(G_{\delta\lambda}^{1})$. 因为 $\rho(x)>R_{\varepsilon}$, $\rho(y)<r_{\varepsilon}$, 所以有

$$\rho(x-y)\geqslant\rho(x)-\rho(y)>\frac{\rho(x)}{1+\varepsilon},\quad 以及\quad \frac{r_{\varepsilon}}{R_{\varepsilon}}<\varepsilon.$$

注意到 $\rho(x)<1$ 时, $|x|<\rho(x)$. 那么, $|A_{\rho^{-1}}y|<\rho(A_{\rho^{-1}}y)=\rho(y)/\rho$. 利用变量替换 $s:=\rho(y)/\rho$, 可得

$$\begin{aligned}
m(G_{\delta\lambda}^{1})&\leqslant\frac{1}{\delta\lambda}\int_{\rho(x)>R_{\varepsilon}}\int_{\mathbb{R}^{n}}\frac{|\Omega(x-y)-\Omega(x)|}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta}}f_{1}(y)dydx\\
&\leqslant\frac{(\varepsilon+1)^{\alpha-\beta}}{\delta\lambda}\int_{\mathbb{R}^{n}}\int_{|x|>R_{\varepsilon}}\frac{|\Omega(x-y)-\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}dxf_{1}(y)dy\\
&\leqslant\frac{C}{\delta\lambda}\int_{\mathbb{R}^{n}}\int_{R_{\varepsilon}}^{\infty}\int_{S^{n-1}}\frac{|\Omega(x'-A_{\rho^{-1}}y)-\Omega(x')|}{\rho^{1-\beta}}d\sigma(x')d\rho f_{1}(y)dy\\
&\leqslant\frac{C}{\delta\lambda}\int_{\mathbb{R}^{n}}\int_{R_{\varepsilon}}^{\infty}\frac{\omega_{1}(\rho(y)/\rho)}{\rho^{1-\beta}}d\rho f_{1}(y)d(y)\\
&\leqslant\frac{Cr_{\varepsilon}^{\beta}}{\delta\lambda}\int_{0}^{r_{\varepsilon}/R_{\varepsilon}}\frac{\omega_{1}(s)}{s^{1+\beta}}ds\\
&\leqslant\frac{Cr_{\varepsilon}^{\beta}}{\delta\lambda}\int_{0}^{\varepsilon}\frac{\omega_{1}(s)}{s^{1+\beta}}ds.
\end{aligned}$$

接下来估计 $m(G_{\delta\lambda}^{2})$. 由文献 [2, 引理 3.2] 知, 对于 $\rho(x)>R_{\varepsilon}$, $\rho(y)<r_{\varepsilon}$, 有

$$\left|\frac{1}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta}}-\frac{1}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}\right|\leqslant C\frac{\rho(y)}{\rho(x)^{\alpha-\beta+1}}.\tag{2.4}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
m(G_{\delta\lambda}^{2})&\leqslant m\left(\left\{x\in\mathbb{R}^{n}:\rho(x)>R_{\varepsilon},C\int_{\mathbb{R}^{n}}|\Omega(x)|\frac{\rho(y)}{\rho(x)^{\alpha-\beta+1}}f_{1}(y)dy>\delta\lambda\right\}\right)\\
&\leqslant\frac{C}{\delta^{q}\lambda^{q}}\int_{\rho(x)>R_{\varepsilon}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n}}|\Omega(x)|\frac{\rho(y)}{\rho(x)^{\alpha-\beta+1}}f_{1}(y)dy\right)^{q}dx\\
&\leqslant\frac{Cr_{\varepsilon}^{q}}{\delta^{q}\lambda^{q}}\int_{\rho(x)>R_{\varepsilon}}\frac{|\Omega(x)|^{q}}{\rho(x)^{(\alpha-\beta+1)q}}dx\\
&\leqslant\frac{Cr_{\varepsilon}^{q}}{\delta^{q}\lambda^{q}}\int_{S^{n-1}}|\Omega(x')|^{q}\int_{R_{\varepsilon}}^{\infty}\frac{1}{\rho^{q+1}}d\rho J(x')d\sigma(x')\\
&\leqslant\frac{Cr_{\varepsilon}^{q}}{\delta^{q}\lambda^{q}R_{\varepsilon}^{q}}\|\Omega\|_{q}^{q}\leqslant\frac{C\varepsilon^{q}}{\delta^{q}\lambda^{q}}\|\Omega\|_{q}^{q}.
\end{aligned}$$

结合 $m(G^1_{\delta\lambda})$ 和 $m(G^2_{\delta\lambda})$ 的估计, 可得

$$m(G_{2\delta\lambda}) \leqslant \frac{Cr_\varepsilon^\beta}{\delta\lambda}\int_0^\varepsilon \frac{\omega_1(s)}{s^{1+\beta}}ds + \frac{C\varepsilon^q}{\delta^q\lambda^q}\|\Omega\|_q^q. \tag{2.5}$$

再由 (2.1) 和 (2.3) 可知,

$$\begin{aligned} m(E_\lambda) &\leqslant m(G_{2\delta\lambda}) + \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha}\int_{S^{n-1}} J(x')d\sigma(x') + \frac{\|\Omega\|_q^q}{n(1-3\delta)^q\lambda^q} + \left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q \\ &\leqslant \frac{Cr_\varepsilon^\beta}{\delta\lambda}\int_0^\varepsilon \frac{\omega_1(s)}{s^{1+\beta}}ds + \frac{C\varepsilon^q}{\delta^q\lambda^q}\|\Omega\|_q^q + \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha}\int_{S^{n-1}} J(x')d\sigma(x') + \frac{\|\Omega\|_q^q}{n(1-3\delta)^q\lambda^q} + \left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q. \end{aligned}$$

注意到, 当 $\varepsilon \to 0+$ 时, $\int_0^\varepsilon \frac{\omega_1(s)}{s^{1+\beta}}ds \to 0$. 令 $\lambda \to 0+$, $\varepsilon \to 0+$, 再由 δ 的任意性, 可得

$$\overline{\lim_{\lambda\to 0+}}\lambda^q m(E_\lambda) \leqslant \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha}. \tag{2.6}$$

另一方面,

$$m(E^1_{(1+\delta)\lambda}) \geqslant m(\{x\in\mathbb{R}^n : \rho(x) > R_\varepsilon, |T^\alpha_{\Omega,\beta}f_1(x)| > (1+\delta)\lambda\}).$$

利用 (2.2) 和引理 2.1, 有

$$\begin{aligned} &m(\{x\in\mathbb{R}^n : \rho(x) > R_\varepsilon, |T^\alpha_{\Omega,\beta}f_1(x)| > (1+\delta)\lambda\}) \\ &\quad \geqslant m(\{x\in\mathbb{R}^n : \rho(x) > R_\varepsilon, I_1(x) > (1+3\delta)\lambda\}) - m(G_{2\delta\lambda}) \\ &\quad \geqslant m\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : \frac{|\Omega(x)|(1-\varepsilon)}{\rho(x)^{n-\alpha}} > (1+3\delta)\lambda\right\}\right) - \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha}\int_{S^{n-1}} J(x')d\sigma(x') - m(G_{2\delta\lambda}) \\ &\quad \geqslant \frac{\|\Omega\|_q^q(1-\varepsilon)^q}{\alpha(1+3\delta)^q\lambda^q} - \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha}\int_{S^{n-1}} J(x')d\sigma(x') - m(G_{2\delta\lambda}). \end{aligned}$$

由此并结合估计 (2.5), 令 $\lambda \to 0+$, $\varepsilon \to 0+$ 和 $\delta \to 0+$, 可得

$$\underline{\lim_{\lambda\to 0+}}\lambda^q m(E_\lambda) \geqslant \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha}. \tag{2.7}$$

于是, $\lim_{\lambda\to 0+}\lambda^q m(E_\lambda) = \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha}$. 这就完成了定理中 (i) 的证明.

接下来证明 (ii). 为了方便起见, 对于 $\lambda > 0$, 设

$$\begin{aligned} H_\lambda &:= \left\{x\in\mathbb{R}^n : \left|T^\alpha_{\Omega,\beta}f(x) - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}\right| > \lambda\right\}, \\ H^1_\lambda &:= \left\{x\in\mathbb{R}^n : \rho(x) > R_\varepsilon, \left|T^\alpha_{\Omega,\beta}f_1(x) - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}\right| > \lambda\right\}. \end{aligned}$$

只需证 $\lim_{\lambda\to 0+}\lambda^q m(H_\lambda) = 0$. 因为 $T^\alpha_{\Omega,\beta}$ 是线性的, 所以有

$$\begin{aligned} m(H_\lambda) &\leqslant m(H^1_{(1-\delta)\lambda}) + m(\mathbb{R}^n \setminus H^1_{(1-\delta)\lambda}) + m(\{x\in\mathbb{R}^n : |T^\alpha_{\Omega,\beta}f_2(x)| > \delta\lambda\}) \\ &\leqslant m(H^1_{(1-\delta)\lambda}) + \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha}\int_{S^{n-1}} J(x')d\sigma(x') + \left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q. \end{aligned}$$

下面估计 $m(H^1_{(1-\delta)\lambda})$. 前面已经假定 $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$, 注意到

$$\left|T^\alpha_{\Omega,\beta}f_1(x) - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta}} - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}\right| f_1(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}f_2(y)dy. \tag{2.8}$$

由 (2.8)、(2.5) 和引理 2.1 得

$$
\begin{aligned}
m(H^1_{(1-\delta)\lambda}) &\leqslant m(G_{2\delta\lambda}) + m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| > R_\varepsilon, \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta}} f_2(y)dy > (1-3\delta)\lambda\right\}\right) \\
&\leqslant \frac{Cr_\varepsilon^\beta}{\delta\lambda}\int_0^\varepsilon \frac{\omega_1(s)}{s^{1+\beta}}ds + \frac{C\varepsilon^q}{\delta^q\lambda^q}\|\Omega\|_q^q + \frac{\|\Omega\|_q^q\varepsilon^q}{\alpha(1-3\delta)^q\lambda^q}.
\end{aligned}
$$

因此,

$$
m(H_\lambda) \leqslant \frac{Cr_\varepsilon^\beta}{\delta\lambda}\int_0^\varepsilon \frac{\omega_1(s)}{s^{1+\beta}}ds + \frac{C\varepsilon^q}{\delta^q\lambda^q}\|\Omega\|_q^q + \frac{\|\Omega\|_q^q\varepsilon^q}{\alpha(1-3\delta)^q\lambda^q} + \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha}\int_{S^{n-1}} J(x')d\sigma(x') + \left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q. \tag{2.9}
$$

令 $\lambda \to 0+$ 和 $\varepsilon \to 0+$, 可得 $\lim_{\lambda\to 0+}\lambda^q m(H_\lambda) = 0$. 定理 1.1 证毕. □

注 2.1 我们指出定理 1.1 中的结论 (ii) 比结论 (i) 更强.

事实上, 假定 (ii) 成立. 对于 $0<\eta<1$, 令 H_λ 如定理 1.1 中 (ii) 证明中所设. 由引理 2.1, 可得

$$
\begin{aligned}
m(\{x \in \mathbb{R}^n : |T^\alpha_{\Omega,\beta}f(x)| > \lambda\}) &\leqslant m(H_{\eta\lambda}) + m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta}} > (1-\eta)\lambda\right\}\right) \\
&= m(H_{\eta\lambda}) + \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha(1-\eta)^q\lambda^q}.
\end{aligned}
$$

类似于 (2.9) 的估计, 可知 $\lim_{\lambda\to 0+}\lambda^q m(H_{\eta\lambda}) \to 0$. 此外, 令 $\eta \to 0+$, 则有

$$
\overline{\lim_{\lambda\to 0+}}\lambda^q m(\{x \in \mathbb{R}^n : |T^\alpha_{\Omega,\beta}f(x)| > \lambda\}) \leqslant \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha}. \tag{2.10}
$$

另一方面, 再次利用引理 2.1, 可得

$$
\begin{aligned}
m(\{x \in \mathbb{R}^n : |T^\alpha_{\Omega,\beta}f(x)| > \lambda\}) &\geqslant m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta}} > (1+\eta)\lambda\right\}\right) - m(H_{\eta\lambda}) \\
&= \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha(1+\eta)^q\lambda^q} - m(H_{\eta\lambda}).
\end{aligned}
$$

令 $\lambda \to 0+$ 和 $\eta \to 0+$, 可得

$$
\underline{\lim_{\lambda\to 0+}}\lambda^q m(\{x \in \mathbb{R}^n : |T^\alpha_{\Omega,\beta}f(x)| > \lambda\}) \geqslant \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha}. \tag{2.11}
$$

由 (2.10) 和 (2.11) 可知 (i) 成立.

定理 1.2 的证明 定理 1.2 的证明类似于定理 1.1. 我们仅给出证明过程中需要变动之处, 其他细节不再详述. 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 令 R_ε、r_ε 和 f_1 如定理 1.1 证明中所设. 注意到对 $\rho(x) > R_\varepsilon$, 有

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\rho(x-y)>\varepsilon} \frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^\alpha} f_1(y)dy\right| &\leqslant \int_{\rho(x-y)>\varepsilon}\left|\frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^\alpha} - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha}\right| f_1(y)dy + \left|\int_{\rho(x-y)>\varepsilon}\frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha}f_1(y)dy\right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^\alpha} - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha}\right| f_1(y)dy + \frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^\alpha}.
\end{aligned}
$$

此外,

$$
\left|\int_{\rho(x-y)>\varepsilon} \frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^\alpha} f_1(y)dy\right| \geqslant \left|\int_{\rho(x-y)>\varepsilon}\frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha}f_1(y)dy\right| - \int_{\rho(x-y)>\varepsilon}\left|\frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^\alpha} - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha}\right| f_1(y)dy
$$

$$\geqslant \left|\int_{\rho(x-y)>\varepsilon}\frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha}f_1(y)dy\right| - \int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^\alpha}-\frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha}\right|f_1(y)dy.$$

因此,

$$\begin{aligned}|T_\Omega^{\alpha,*}f_1(x)| &\geqslant \sup_{\varepsilon>0}\left|\int_{\rho(x-y)>\varepsilon}\frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha}f_1(y)dy\right| - \int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^\alpha}-\frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha}\right|f_1(y)dy\\ &\geqslant \frac{|\Omega|(x)(1-\varepsilon)}{\rho(x)^\alpha} - \int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^\alpha}-\frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha}\right|f_1(y)dy.\end{aligned}$$

结合可得

$$\begin{aligned}\frac{|\Omega(x)|(1-\varepsilon)}{\rho(x)^\alpha} - \int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^\alpha}-\frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha}\right|f_1(y)dy &\leqslant |T_\Omega^{\alpha,*}f_1(x)|\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^\alpha}-\frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha}\right|f_1(y)dy + \frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^\alpha}.\end{aligned}$$

仿照定理 1.1 的证明可证得定理 1.2. □

3 定理 1.3 的证明

定理 1.3 的证明 类似于定理 1.1 的证明, 不妨设 $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}=1$, 并借用定理 1.1 证明中的记号 ε、r_ε、δ、f_1、f_2 和 R_ε. 对于任意给定的 $\lambda>0$, 记

$$F_\lambda := \{x\in\mathbb{R}^n : |\mu_{\Omega,\beta}^\alpha f(x)|>\lambda\},\quad F_\lambda^1 := \{x\in\mathbb{R}^n : |\mu_{\Omega,\beta}^\alpha f_1(x)|>\lambda\},\quad F_\lambda^2 := \{x\in\mathbb{R}^n : |\mu_{\Omega,\beta}^\alpha f_2(x)|>\lambda\}.$$

由于 $\mu_{\Omega,\beta}^\alpha$ 是次线性的, 所以有

$$F^1_{(1+\delta)\lambda}\subseteq F_\lambda\cup F^2_{\delta\lambda},\quad F_\lambda\subseteq F^1_{(1-\delta)\lambda}\cup F^2_{\delta\lambda}.$$

因此,

$$m(F^1_{(1+\delta)\lambda})-m(F^2_{\delta\lambda})\leqslant m(F_\lambda)\leqslant m(F^1_{(1-\delta)\lambda})+m(F^2_{\delta\lambda}). \tag{3.1}$$

注意到算子 $\mu_{\Omega,\beta}^\alpha$ 是弱型 $(1,q)$ 有界, 则

$$m(F^2_{\delta\lambda})\leqslant\left(\frac{C}{\delta\lambda}\|f_2\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\right)^q\leqslant\left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q.$$

结合 (3.1) 可知,

$$m(F^1_{(1+\delta)\lambda})-\left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q\leqslant m(F_\lambda)\leqslant m(F^1_{(1-\delta)\lambda})+\left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q. \tag{3.2}$$

为了估计 $m(F^1_{(1-\delta)\lambda})$ 和 $m(F^1_{(1+\delta)\lambda})$, 我们将 $\mu_{\Omega,\beta}^\alpha f_1$ 分解成下面的四部分:

$$\begin{aligned}|\mu_{\Omega,\beta}^\alpha f_1(x)| &\leqslant \left(\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\Omega(x-y)-\Omega(x)}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta-1}}\chi_{\{y:\rho(x-y)\leqslant t\}}(y)\right|f_1(y)d(y)\right)^2\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}\\ &\quad+\left(\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\Omega(x)}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta-1}}-\frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta-1}}\right|\chi_{\{y:\rho(x-y)\leqslant t\}}(y)f_1(y)d(y)\right)^2\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}\\ &\quad+\left(\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta-1}}\left(\chi_{\{y:\rho(x-y)\leqslant t\}}(y)-\chi_{\{x:\rho(x)\leqslant t\}}(x)\right)\right|f_1(y)d(y)\right)^2\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\bigg(\int_0^\infty\bigg|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta-1}}\chi_{\{x:\rho(x)\leqslant t\}}(x)f_1(y)d(y)\bigg|^2\frac{dt}{t^3}\bigg)^{1/2}\\
&=: J_1(x)+J_2(x)+J_3(x)+J_4(x).
\end{aligned}
$$

易知

$$
J_4(x)-J_3(x)-J_2(x)-J_1(x)\leqslant|\mu^\alpha_{\Omega,\beta}f_1(x)|\leqslant J_1(x)+J_2(x)+J_3(x)+J_4(x). \tag{3.3}
$$

对于 $\rho(x)>R_\varepsilon$, 设

$$
K^1_\lambda:=\{x\in\mathbb{R}^n:\rho(x)>R_\varepsilon, J_1(x)+J_2(x)+J_3(x)>\lambda\}.
$$

由 (3.3) 和引理 2.1, 可得

$$
\begin{aligned}
m(F^1_{(1-\delta)\lambda})&\leqslant m(K^1_{3\delta\lambda})+m(\{x\in\mathbb{R}^n:J_4(x)>(1-4\delta)\lambda\})+m(\mathbb{R}^n\setminus K^1_{3\delta\lambda})\\
&\leqslant m(K^1_{3\delta\lambda})+m\bigg(\bigg\{x\in\mathbb{R}^n:\frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}>\sqrt{2}(1-4\delta)\lambda\bigg\}\bigg)+\frac{R^\alpha_\varepsilon}{\alpha}\int_{S^{n-1}}J(x')d\sigma(x')\\
&\leqslant m(K^1_{3\delta\lambda})+\frac{\|\Omega\|^q_q}{\alpha2^{q/2}(1-4\delta)^q\lambda^q}+\frac{R^\alpha_\varepsilon}{\alpha}\int_{S^{n-1}}J(x')d\sigma(x').
\end{aligned}\tag{3.4}
$$

下面来估计 $m(K^1_{3\delta\lambda})$. 记

$$
L^1_\lambda:=\{x\in\mathbb{R}^n:\rho(x)>R_\varepsilon, J_1(x)>\lambda\},\quad L^2_\lambda:=\{x\in\mathbb{R}^n:\rho(x)>R_\varepsilon, J_2(x)>\lambda\}
$$

和

$$
L^3_\lambda:=\{x\in\mathbb{R}^n:\rho(x)>R_\varepsilon, J_3(x)>\lambda\}.
$$

显然,

$$
m(K^1_{3\delta\lambda})\leqslant m(L^1_{\delta\lambda})+m(L^2_{\delta\lambda})+m(L^3_{\delta\lambda}).
$$

对于 $m(L^1_{\delta\lambda})$, 由 Minkowski 不等式, 再参照定理 1.1 中对 $m(G^1_{\delta\lambda})$ 的估计, 可得

$$
\begin{aligned}
m(L^1_{\delta\lambda})&\leqslant m\bigg(\bigg\{x\in\mathbb{R}^n:\rho(x)>R_\varepsilon,\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Omega(x-y)-\Omega(x)|}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta-1}}f_1(y)\bigg(\int_{\rho(x-y)}^\infty\frac{dr}{r^3}\bigg)^{1/2}dy>\delta\lambda\bigg\}\bigg)\\
&\leqslant\frac{C}{\delta\lambda}\int_{\rho(x)>R_\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Omega(x-y)-\Omega(x)|}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta}}f_1(y)dydx\\
&\leqslant\frac{C}{\delta\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{R_\varepsilon}^\infty\int_{S^{n-1}}\frac{|\Omega(x'-A_{\rho^{-1}}y)-\Omega(x')|}{\rho^{1-\beta}}d\sigma(x')d\rho f_1(y)dy\\
&\leqslant\frac{Cr^\beta_\varepsilon}{\delta\lambda}\int_0^\varepsilon\frac{\omega_1(s)}{s^{1+\beta}}ds.
\end{aligned}
$$

当 $\alpha-\beta-1>0$ 时, 对于 $\rho(x)>R_\varepsilon$, $\rho(y)<r_\varepsilon$, 由文献 [2, 引理 3.2] 知,

$$
\bigg|\frac{1}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta-1}}-\frac{1}{\rho(x)^{\alpha-\beta-1}}\bigg|\leqslant C\frac{\rho(y)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}.
$$

当 $-1<\alpha-\beta-1\leqslant0$ 时, 对于 $\rho(x)>R_\varepsilon$, $\rho(y)<r_\varepsilon$, 有

$$
\frac{\rho(x)}{2}\leqslant\frac{\rho(x)}{1+\varepsilon}\leqslant\rho(x-y)\leqslant\frac{\rho(x)(1+2\varepsilon)}{1+\varepsilon}\leqslant\frac{3\rho(x)}{2}.
$$

再次利用文献 [2, 引理 3.2] 得到

$$\left|\frac{1}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta-1}}-\frac{1}{\rho(x)^{\alpha-\beta-1}}\right|\leqslant\frac{C\rho(y)\rho(x)^{\alpha-\beta-2}}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta-1}\rho(x)^{\alpha-\beta-1}}\leqslant C\frac{\rho(y)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}.$$

综合以上两种情形, 有

$$\left|\frac{1}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta-1}}-\frac{1}{\rho(x)^{\alpha-\beta-1}}\right|\leqslant C\frac{\rho(y)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}.$$

对于 $m(L^2_{\delta\lambda})$, 由 Minkowski 不等式, 可得

$$\begin{aligned}m(L^2_{\delta\lambda})&\leqslant m\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n:\rho(x)>R_\varepsilon,\int_{\mathbb{R}^n}\frac{C\rho(y)|\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta+1}}f_1(y)dy>\delta\lambda\right\}\right)\\&\leqslant m\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n:\rho(x)>R_\varepsilon,\left(\frac{Cr_\varepsilon|\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta+1}}\right)^q>\delta^q\lambda^q\right\}\right)\\&\leqslant\frac{Cr_\varepsilon^q}{\delta^q\lambda^q}\int_{\rho(x)>R_\varepsilon}\frac{|\Omega(x)|^q}{\rho(x)^{(\alpha-\beta+1)q}}dx\\&\leqslant\frac{Cr_\varepsilon^q}{\delta^q\lambda^q}\int_{S^{n-1}}|\Omega(x')|^q\int_{R_\varepsilon}^\infty\frac{1}{\rho^{q+1}}d\rho J(x')d\sigma(x')\\&\leqslant\frac{C\varepsilon^q\|\Omega\|_q^q}{\delta^q\lambda^q}.\end{aligned}$$

最后来估计 $m(L^3_{\delta\lambda})$. 对于 $\rho(x)>R_\varepsilon$, $\rho(y)<r_\varepsilon$, 有

$$\begin{aligned}J_3(x)&\leqslant\left(\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta-1}}\chi_{\{t:\rho(x)-\rho(y)<t<\rho(x)+\rho(y)\}}(t)f_1(y)dy\right|\right)^2\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}\\&\leqslant\frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta-1}}\left(\int_{\rho(x)-r_\varepsilon}^{\rho(x)+r_\varepsilon}\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}\leqslant\frac{C|\Omega(x)|r_\varepsilon^{1/2}}{\rho(x)^{\alpha-\beta+1/2}}.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}m(L^3_{\delta\lambda})&\leqslant m\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n:\rho(x)>R_\varepsilon,\frac{C|\Omega(x)|^qr_\varepsilon^{q/2}}{\rho(x)^{(\alpha-\beta+1/2)q}}>\delta^q\lambda^q\right\}\right)\\&\leqslant\frac{Cr_\varepsilon^{q/2}}{\delta^q\lambda^q}\int_{S^{n-1}}|\Omega(x')|^q\int_{R_\varepsilon}^\infty\frac{1}{\rho^{1+q/2}}d\rho J(x')d\sigma(x')\\&\leqslant\frac{C\|\Omega\|_q^q\varepsilon^{q/2}}{\delta^q\lambda^q}.\end{aligned}$$

结合 $m(L^1_{\delta\lambda})$、$m(L^2_{\delta\lambda})$ 和 $m(L^3_{\delta\lambda})$ 的估计, 可得

$$m(K^1_{3\delta\lambda})\leqslant\frac{Cr_\varepsilon^\beta}{\delta\lambda}\int_0^\varepsilon\frac{\omega_1(s)}{s^{1+\beta}}ds+\frac{C\varepsilon^q\|\Omega\|_q^q}{\delta^q\lambda^q}+\frac{C\|\Omega\|_q^q\varepsilon^{q/2}}{\delta^q\lambda^q}.\tag{3.5}$$

由 (3.2)、(3.4) 和 (3.5), 有

$$\begin{aligned}m(F_\lambda)&\leqslant m(K^1_{3\delta\lambda})+\frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha2^{q/2}(1-4\delta)^q\lambda^q}+\frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha}\int_{S^{n-1}}J(x')d\sigma(x')+\left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q\\&\leqslant\frac{Cr_\varepsilon^\beta}{\delta\lambda}\int_0^\varepsilon\frac{\omega_1(s)}{s^{1+\beta}}ds+\frac{C\varepsilon^q\|\Omega\|_q^q}{\delta^q\lambda^q}+\frac{C\|\Omega\|_q^q\varepsilon^{q/2}}{\delta^q\lambda^q}\end{aligned}$$

$$+\frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha 2^{q/2}(1-4\delta)^q\lambda^q}+\frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha}\int_{S^{n-1}}J(x')d\sigma(x')+\left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q.$$

令 $\lambda\to 0+$, $\varepsilon\to 0+$ 和 $\delta\to 0+$, 可知

$$\overline{\lim_{\lambda\to 0+}}\lambda^q m(F_\lambda)\leqslant\frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha 2^{q/2}}. \tag{3.6}$$

另一方面,

$$m(F^1_{(1+\delta)\lambda})\geqslant m(\{x\in\mathbb{R}^n:\rho(x)>R_\varepsilon,|\mu^\alpha_{\Omega,\beta}f_1(x)|>(1+\delta)\lambda\}).$$

由 (3.3)、$\|f_1\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}>1-\varepsilon$ 和引理 2.1, 可得

$$\begin{aligned}m(F^1_{(1+\delta)\lambda})&\geqslant m(\{x\in\mathbb{R}^n:\rho(x)>R_\varepsilon,J_4(x)>(1+4\delta)\lambda\})-m(K^1_{3\delta\lambda})\\&\geqslant m(\{x\in\mathbb{R}^n:J_4(x)>(1+4\delta)\lambda\})-m(K^1_{3\delta\lambda})\\&\quad-m(\{x\in\mathbb{R}^n:\rho(x)\leqslant R_\varepsilon,J_4(x)>(1+4\delta)\lambda\})\\&\geqslant m\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n:\frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}>\frac{\sqrt{2}(1+4\delta)\lambda}{1-\varepsilon}\right\}\right)-\frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha}\int_{S^{n-1}}J(x')d\sigma(x')-m(K^1_{3\delta\lambda})\\&=\frac{(1-\varepsilon)^q\|\Omega\|_q^q}{\alpha 2^{q/2}(1+4\delta)^q}-\frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha}\int_{S^{n-1}}J(x')d\sigma(x')-m(K^1_{3\delta\lambda}).\end{aligned}$$

由 (3.2) 和 (3.5), 有

$$\begin{aligned}m(F_\lambda)&\geqslant m(\{x\in\mathbb{R}^n:\rho(x)>R_\varepsilon,|\mu^\alpha_{\Omega,\beta}f_1(x)|>(1+\delta)\lambda\})-\left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q\\&\geqslant\frac{(1-\varepsilon)^q\|\Omega\|_q^q}{\alpha 2^{q/2}(1+4\delta)^q}-\frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha}\int_{S^{n-1}}J(x')d\sigma(x')-\frac{Cr_\varepsilon^\beta}{\delta\lambda}\int_0^\varepsilon\frac{\omega_1(s)}{s^{1+\beta}}ds\\&\quad-\frac{C\varepsilon^q\|\Omega\|_q^q}{\delta^q\lambda^q}-\frac{C\|\Omega\|_q^q\varepsilon^{q/2}}{\delta^q\lambda^q}-\left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q.\end{aligned}$$

令 $\lambda\to 0+$、$\varepsilon\to 0+$ 和 $\delta\to 0+$, 则有

$$\underline{\lim_{\lambda\to 0+}}\lambda^q m(F_\lambda)\geqslant\frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha 2^{q/2}}. \tag{3.7}$$

结合 (3.6) 和 (3.7), 可得

$$\lim_{\lambda\to 0+}\lambda^q m(F_\lambda)=\frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha 2^{q/2}}.$$

这就完成了定理 1.3 中 (i) 的证明.

下面来证明 (ii). 对于 $\lambda>0$, 设

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_\lambda&:=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\left|\mu^\alpha_{\Omega,\beta}f(x)-\frac{|\Omega(x)|}{\sqrt{2}\rho(x)^{\alpha-\beta}}\right|>\lambda\right\},\\\widetilde{H}^1_\lambda&:=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\rho(x)>R_\varepsilon,\left|\mu^\alpha_{\Omega,\beta}f_1(x)-\frac{|\Omega(x)|}{\sqrt{2}\rho(x)^{\alpha-\beta}}\right|>\lambda\right\}.\end{aligned}$$

由算子 $\mu^{\alpha}_{\Omega,\beta}$ 的次线性性和 (3.3), 可以得到

$$\begin{aligned}\left|\mu^{\alpha}_{\Omega,\beta}f(x)-\frac{|\Omega(x)|}{\sqrt{2}\rho(x)^{\alpha-\beta}}\right| &\leqslant \mu^{\alpha}_{\Omega,\beta}f_2(x)+\left|\mu^{\alpha}_{\Omega,\beta}f_1(x)-\frac{|\Omega(x)|}{\sqrt{2}\rho(x)^{\alpha-\beta}}\right|\\ &\leqslant \mu^{\alpha}_{\Omega,\beta}f_2(x)+J_1(x)+J_2(x)+J_3(x)+\left|J_4(x)-\frac{|\Omega(x)|}{\sqrt{2}\rho(x)^{\alpha-\beta}}\right|.\end{aligned}$$

再结合引理 2.1 和 (3.5) 推出

$$\begin{aligned}m(\widetilde{H}_\lambda) &\leqslant m(\widetilde{H}^1_{(1-\delta)\lambda})+m(\{x\in\mathbb{R}^n:\mu^{\alpha}_{\Omega,\beta}f_2(x)>\delta\lambda\})+m(\mathbb{R}^n\setminus\widetilde{H}^1_{(1-\delta)\lambda})\\ &\leqslant m\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n:\rho(x)>R_\varepsilon,\left|J_4(x)-\frac{|\Omega(x)|}{\sqrt{2}\rho(x)^{\alpha-\beta}}\right|>(1-4\delta)\lambda\right\}\right)+m(K^1_{3\delta\lambda})\\ &\quad+\left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q+\frac{R^{\alpha}_{\varepsilon}}{\alpha}\int_{S^{n-1}}J(x')d\sigma(x')\\ &\leqslant m\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n:\frac{\varepsilon|\Omega(x)|}{\sqrt{2}\rho(x)^{\alpha-\beta}}>(1-4\delta)\lambda\right\}\right)+m(K^1_{3\delta\lambda})+\left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q+\frac{R^{\alpha}_{\varepsilon}}{\alpha}\int_{S^{n-1}}J(x')d\sigma(x')\\ &\leqslant \frac{\varepsilon^q\|\Omega\|^q_q}{\alpha 2^{q/2}(1-4\delta)^q\lambda^q}+\frac{Cr^{\beta}_{\varepsilon}}{\delta\lambda}\int_0^{\varepsilon}\frac{\omega_1(s)}{s^{1+\beta}}ds+\frac{C\varepsilon^q\|\Omega\|^q_q}{\delta^q\lambda^q}+\frac{C\|\Omega\|^q_q\varepsilon^{q/2}}{\delta^q\lambda^q}\\ &\quad+\left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q+\frac{R^{\alpha}_{\varepsilon}}{\alpha}\int_{S^{n-1}}J(x')d\sigma(x').\end{aligned}$$

令 $\lambda\to 0+$, $\varepsilon\to 0+$ 和 $\delta\to 0+$, 可知 $\lim_{\lambda\to 0+}\lambda^q m(\widetilde{H}_\lambda)=0$. 定理 1.3 证毕. □

注 3.1 类似于注 2.1, 我们容易验证定理 1.3 中的结论 (ii) 比结论 (i) 更强.

4 定理 1.4 的证明

定理 1.4 的证明 不失一般性, 设 $\|f\|_{L^1(\mathbb{H}^n)}=1$. 对于任意的 $0<\varepsilon\ll 1$, 存在 r_ε 使得

$$\int_{|x|_h<r_\varepsilon}|f(x)|dx>1-\varepsilon.$$

记 $f(x)=f_1(x)+f_2(x):=f\chi_{\{x:|x|_h<r_\varepsilon\}}(x)+f\chi_{\{x:|x|_h\geqslant r_\varepsilon\}}(x)$. 注意到

$$\|f_1\|_{L^1(\mathbb{H}^n)}>1-\varepsilon,\quad \|f_2\|_{L^1(\mathbb{H}^n)}\leqslant\varepsilon.$$

对于 $\lambda>0$, 定义下面的集合:

$$\widetilde{E}_\lambda:=\{x\in\mathbb{H}^n:|M_{\mathbb{H}}f(x)|>\lambda\},\quad \widetilde{E}^1_\lambda:=\{x\in\mathbb{H}^n:|M_{\mathbb{H}}f_1(x)|>\lambda\},\quad \widetilde{E}^2_\lambda:=\{x\in\mathbb{H}^n:|M_{\mathbb{H}}f_2(x)|>\lambda\}.$$

注意到 $\widetilde{E}_\lambda\subseteq\widetilde{E}^1_{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda}\cup\widetilde{E}^2_{\sqrt{\varepsilon}\lambda}$ 且 $\widetilde{E}^1_{(1+\sqrt{\varepsilon})\lambda}\subseteq\widetilde{E}_\lambda\cup\widetilde{E}^2_{\sqrt{\varepsilon}\lambda}$, 则

$$m(\widetilde{E}^1_{(1+\sqrt{\varepsilon})\lambda})-m(\widetilde{E}^2_{\sqrt{\varepsilon}\lambda})\leqslant m(\widetilde{E}_\lambda)\leqslant m(\widetilde{E}^1_{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda})+m(\widetilde{E}^2_{\sqrt{\varepsilon}\lambda}). \tag{4.1}$$

因为 Hardy-Littlewood 极大算子 $M_{\mathbb{H}}$ 从 $L^1(\mathbb{H}^n)$ 到 $L^{1,\infty}(\mathbb{H}^n)$ 有界, 所以,

$$m(\widetilde{E}^2_{\sqrt{\varepsilon}\lambda})\leqslant\frac{C}{\sqrt{\varepsilon}\lambda}\|f_2\|_{L^1(\mathbb{H}^n)}\leqslant\frac{C\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}.$$

再结合 (4.1), 有

$$m(\widetilde{E}^1_{(1+\sqrt{\varepsilon})\lambda})-\frac{C\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}\leqslant m(\widetilde{E}_\lambda)\leqslant m(\widetilde{E}^1_{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda})+\frac{C\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}. \tag{4.2}$$

接下来估计 $m(\widetilde{E}^1_{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda})$. 设 $R_\varepsilon:=(1+1/\varepsilon)r_\varepsilon$. 对于 $|x|_h>R_\varepsilon$, 易知

$$\frac{1-\varepsilon}{m(\mathbb{B}(x,|x|_h+r_\varepsilon))}\leqslant M_{\mathbb{H}}f_1(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{m(\mathbb{B}(x,r))}\int_{\mathbb{B}(x,r)}|f_1(y)|dy\leqslant\frac{1}{m(\mathbb{B}(x,|x|_h-r_\varepsilon))}. \tag{4.3}$$

由 (4.3) 和 $|x|_h-r_\varepsilon>|x|_h/(1+\varepsilon)$, 有

$$\begin{aligned}
m(\widetilde{E}^1_{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda})&\leqslant m\left(\left\{x\in\mathbb{H}^n:|x|_h>R_\varepsilon,\frac{1}{m(B(x,|x|_h-r_\varepsilon))}>(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda\right\}\right)+\Omega_QR_\varepsilon^Q\\
&\leqslant m\left(\left\{x\in\mathbb{H}^n:|x|_h>R_\varepsilon,\frac{1}{m(B(x,|x|_h/(1+\varepsilon)))}>(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda\right\}\right)+\Omega_QR_\varepsilon^Q\\
&\leqslant m\left(\left\{x\in\mathbb{H}^n:\frac{(1+\varepsilon)^Q}{\Omega_Q|x|_h^Q}>(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda\right\}\right)+\Omega_QR_\varepsilon^Q\\
&=\frac{(\varepsilon+1)^Q}{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda}+\Omega_QR_\varepsilon^Q.
\end{aligned}$$

结合 (4.2), 推出

$$m(\widetilde{E}_\lambda)\leqslant m(\widetilde{E}^1_{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda})+\frac{C\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}\leqslant\frac{(\varepsilon+1)^Q}{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda}+\frac{C\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}+\Omega_QR_\varepsilon^Q.$$

令 $\lambda\to0+$ 以及 ε 的任意性, 可得

$$\overline{\lim_{\lambda\to0+}}\lambda m(\widetilde{E}_\lambda)\leqslant 1. \tag{4.4}$$

另一方面, 注意到

$$m(\widetilde{E}^1_{(1+\sqrt{\varepsilon})\lambda})\geqslant m(\{x\in\mathbb{H}^n:|x|_h>R_\varepsilon,|M_{\mathbb{H}}f_1(x)|>(1+\sqrt{\varepsilon})\lambda\}).$$

由 (4.3) 和 $|x|_h+r_\varepsilon\leqslant(2\varepsilon+1)|x|_h/(\varepsilon+1)$, 可得

$$\begin{aligned}
m(\widetilde{E}^1_{(1+\sqrt{\varepsilon})\lambda})&\geqslant m\left(\left\{x\in\mathbb{H}^n:|x|_h>R_\varepsilon,\frac{1-\varepsilon}{m(B(x,|x|_h+r_\varepsilon))}>(1+\sqrt{\varepsilon})\lambda\right\}\right)\\
&\geqslant m\left(\left\{x\in\mathbb{H}^n:|x|_h>R_\varepsilon,\frac{1-\varepsilon}{m(B(x,(2\varepsilon+1)|x|_h/(\varepsilon+1)))}>(1+\sqrt{\varepsilon})\lambda\right\}\right)\\
&=m\left(\left\{x\in\mathbb{H}^n:|x|_h>R_\varepsilon,\frac{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^Q}{\Omega_Q(2\varepsilon+1)^Q|x|_h^Q}>(1+\sqrt{\varepsilon})\lambda\right\}\right)\\
&\geqslant m\left(\left\{x\in\mathbb{H}^n:\frac{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^Q}{\Omega_Q(2\varepsilon+1)^Q|x|_h^Q}>(1+\sqrt{\varepsilon})\lambda\right\}\right)-\Omega_QR_\varepsilon^Q\\
&=\frac{(1-\sqrt{\varepsilon})(1+\varepsilon)^Q}{\lambda(2\varepsilon+1)^Q}-\Omega_QR_\varepsilon^Q.
\end{aligned}$$

因此, 利用 (4.2), 可得

$$m(\widetilde{E}_\lambda)\geqslant m(\widetilde{E}^1_{(1+\sqrt{\varepsilon})\lambda})-\frac{C\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}\geqslant\frac{(1-\sqrt{\varepsilon})(1+\varepsilon)^Q}{\lambda(2\varepsilon+1)^Q}-\Omega_QR_\varepsilon^Q-\frac{C\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}.$$

令 $\lambda\to 0+$ 以及 ε 的任意性, 可得 $\underline{\lim}_{\lambda\to 0+}\lambda m(\widetilde{E}_\lambda)\geqslant 1$. 再结合 (4.4), 推出 $\lim_{\lambda\to 0+}\lambda m(\widetilde{E}_\lambda)=1$. 定理 1.4(i) 的证明完毕.

现在证明 (ii). 对于 $\lambda>0$, 设

$$\begin{aligned}D_\lambda &:= \left\{x\in\mathbb{H}^n: \left|M_{\mathbb{H}}f(x)-\frac{1}{\Omega_Q|x|_h^Q}\right|>\lambda\right\},\\ D_\lambda^1 &:= \left\{x\in\mathbb{H}^n: |x|_h>R_\varepsilon, \left|M_{\mathbb{H}}f_1(x)-\frac{1}{\Omega_Q|x|_h^Q}\right|>\lambda\right\}.\end{aligned}$$

由极大算子 $M_{\mathbb{H}}$ 的次线性, 可得

$$\left|M_{\mathbb{H}}f(x)-\frac{1}{\Omega_Q|x|_h^Q}\right|\leqslant M_{\mathbb{H}}f_2(x)+\left|M_{\mathbb{H}}f_1(x)-\frac{1}{\Omega_Q|x|_h^Q}\right|.$$

因此,

$$\begin{aligned}m(D_\lambda)&\leqslant m(D^1_{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda})+m(\{x\in\mathbb{H}^n: M_{\mathbb{H}}f_2(x)>\sqrt{\varepsilon}\lambda\})+m(\mathbb{H}^n\setminus D^1_{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda})\\ &\leqslant m(D^1_{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda})+\frac{C\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}+\Omega_Q R_\varepsilon^Q.\end{aligned}\tag{4.5}$$

下面只需估计 $m(D^1_{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda})$. 对于 $|x|_h>R_\varepsilon$, 由 (4.3)、$|x|_h-r_\varepsilon>|x|_h/(1+\varepsilon)$ 和 $|x|_h+r_\varepsilon\leqslant(2\varepsilon+1)|x|_h/(\varepsilon+1)$ 可知,

$$\begin{aligned}\left|M_{\mathbb{H}}f_1(x)-\frac{1}{\Omega_Q|x|_h^Q}\right|&\leqslant\left|\frac{1-\varepsilon}{\Omega_Q(|x|_h+r_\varepsilon)^Q}-\frac{1}{\Omega_Q(|x|_h-r_\varepsilon)^Q}\right|+\left|\frac{1}{\Omega_Q(|x|_h-r_\varepsilon)^Q}-\frac{1}{\Omega_Q|x|_h^Q}\right|\\ &\leqslant\frac{(2\varepsilon+1)^Q-1+\varepsilon}{\Omega_Q|x|_h^Q}+\frac{(\varepsilon+1)^Q-1}{\Omega_Q|x|_h^Q}.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}m(D^1_{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda})&\leqslant m\left(\left\{x\in\mathbb{H}^n: \frac{(2\varepsilon+1)^Q+(\varepsilon+1)^Q-2+\varepsilon}{\Omega_Q|x|_h^Q}>(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda\right\}\right)\\ &=\frac{(2\varepsilon+1)^Q+(\varepsilon+1)^Q-2+\varepsilon}{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda}.\end{aligned}$$

结合 (4.5), 可得

$$m(D_\lambda)\leqslant\frac{(2\varepsilon+1)^Q+(\varepsilon+1)^Q-2+\varepsilon}{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda}+\frac{C\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}+\Omega_Q R_\varepsilon^Q.$$

令 $\lambda\to 0+$ 和 $\varepsilon\to 0$, 可得 $\lim_{\lambda\to 0+}\lambda m(D_\lambda)=0$. 这就完成了定理 1.4 的证明. □

注 4.1　类似于定理 1.1, 容易验证定理 1.4 中的结论 (ii) 可导出结论 (i).

致谢　作者对审稿人提出的修改建议表示衷心感谢.

参考文献

1 Fabes E B, Rivière N M. Singular integrals with mixed homogeneity. Studia Math, 1966, 27: 19–38
2 Chen Y P, Ding Y. A charaterization of commutators for parabolic singular integrals. Math Scand, 2011, 108: 5–25
3 Tao T. The weak-type $(1,1)$ of $L\log L$ homogeneous convolution operators. Indiana Univ Math J, 1999, 48: 1547–1584

4 Janakiraman P. Limiting weak-type behavior for singular integral and maximal operators. Trans Amer Math Soc, 2006, 358: 1937–1952
5 Ding Y, Lai X D. L^1-Dini conditions and limiting behavior of weak type estimates for singular integrals. Rev Mat Iberoam, 2017, 33: 1267–1284
6 Ding Y, Lai X D. Weak type $(1,1)$ behavior for the maximal operator with L^1-Dini kernel. Potential Anal, 2017, 47: 169–187
7 Guo W C, He J X, Wu H X. Limiting weak-type behaviors for some integral operators in harmonic analysis. ArXiv:1710.10602, 2017
8 Ding Y, Wu X F. Littlewood-Paley g-functions with rough kernels on homogeneous groups. Studia Math, 2009, 195: 51–86
9 Hu J X, Huang X P. A note on the limiting weak-type behavior for maximal operators. Proc Amer Math Soc, 2008, 136: 1599–1607
10 Coulhon T, Müller D, Zienkiewicz J. About Riesz transforms on the Heisenberg groups. Math Ann, 1996, 305: 369–379
11 Folland G B, Stein E M. Hardy Spaces on Homogeneous Groups. Mathematical Notes, Vol. 28. Princeton: Princeton University Press, 1982
12 Li H Q. Fonctions maximales centrées de Hardy-Littlewood sur les groupes de Heisenberg. Studia Math, 2009, 191: 89–100

Limiting weak-type behaviors for parabolic singular integrals and related operators

Xianming Hou & Huoxiong Wu

Abstract Suppose that $0 \leqslant \beta < \alpha$, $q = \alpha/(\alpha-\beta)$, $f \geqslant 0$. This paper establishes the following limiting weak-type behaviors of parabolic singular integral and fractional integral operators with homogeneous kernels Ω:

$$\lim_{\lambda\to 0+} \lambda^q m(\{x \in \mathbb{R}^n : T^{\alpha}_{\Omega,\beta} f(x) > \lambda\}) = \frac{1}{\alpha}\|\Omega\|_q^q \|f\|^q_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

and

$$\lim_{\lambda\to 0+} \lambda^q m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|T^{\alpha}_{\Omega,\beta} f(x) - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\right| > \lambda\right\}\right) = 0,$$

if Ω satisfies the L^q_β-Dini condition with $\int_{S^{n-1}} \Omega(x')J(x')d\sigma(x') = 0$ when $\beta = 0$. Meanwhile, the corresponding results for parabolic maximal singular integral operators and parabolic Marcinkiewicz integral with homogeneous kernels are given. In addition, we also establish the corresponding results for Hardy-Littlewood maximal function on Heisenberg group $\mathbb{H}^n$.

Keywords limiting behaviors, weak-type estimates, parabolic singular integrals, parabolic Marcinkiewicz integrals, maximal operators, Heisenberg group

MSC(2010) 42B20, 42B25

doi: 10.1360/N012018-00113