doi: 10.6043/j.issn.0438-0479.201705031

物体在不可压缩流场中所受的流体动力表达式

林新武，林献武*，兰维瑶
(厦门大学航空航天学院，福建 厦门 361005)

摘要： 为统一有粘和无粘不可压缩流场中的流体动力表达式，在允许滑移边界条件的情况下，重新推导了不可压缩流场中运动体的流体动力表达式.根据流场动量定理将流体动力表示为无穷远边界上流场应力的积分与流场动量变化率积分的代数和；再利用导数矩转换(DMT)公式分别将这两个积分结果进行分解，并根据速度在无穷远处的渐近特性将这些分解结果组合并简化成流场第一涡量矩的积分及流场在物面边界上切向速度矩的积分之和，得到了新的流体动力表达式.理论分析和算例证明了这种新的流体动力表达式在无粘流的情况下收敛于Lamb的流体动力表达式，而在有粘流的情况下与涡动力学理论一致.

关键词： 飞艇；非定常气动力；不可压缩流场；涡动力学

中图分类号： O 355 **文献标志码：** A **文章编号：** 0438-0479(2018)01-0124-06

平流层飞艇用作高空信息平台时，与空基平台相比具有低能耗、驻留时间长和覆盖区域广的优点；与天基平台相比又具有距离地面近、观察时间长、发射和维护成本低的优点，可成为空基和天基信息平台的有益补充.由于平流层飞艇的这种诱人应用前景，近10多年来，许多国家投入了大量的人力物力研究平流层飞艇技术，并取得了一些进展.作为一种飞行器，气动力仍然是平流层飞艇技术的一个研究重点；同时，飞艇作为一种平均密度与周围流体密度接近的飞行器，人们往往认为其飞行过程受到非定常气动力的影响超过传统的重飞行器[1].

Lamb等[2]总结并完善了在不考虑粘性的情况下非定常气动力的计算方法.由于粘性对气动力具有重要的影响作用，许多研究者[3-7]经过不懈的努力，发展了一套飞艇气动力的工程估算方法.他们的主要思想是利用圆柱比拟的方法来估计艇体的定常升力，用平板气动力或薄弹翼理论来估算尾翼的气动力，用等效附加攻角的思想来估算飞艇非定常运动时的气动力，用翼体干扰因子来考虑组合体气动力与翼体单独气动力之和的差异.该工程方法后来被许多研究者引用和完善[1,8-11]，然而它缺乏坚实的理论基础并且只能估算小部分非定常气动力，大部分的非定常气动力如附加质量和附加惯量等仍需要采用Lamb等[2]所提供的无粘流结果，因此人们期待一种能计算有粘流非定常气动力的方法.

著名的涡动力学学者Wu[12-13]针对有粘流不可压缩流场提出了一种流体动力表达式，该理论与Lamb的理论[2]区别在于其采用了有粘流假设，这种处理方法考虑了真实流体对能量的耗散性，更加符合实际情况.其相关理论后来在Wu等[14-15]的一些专著中不断得到完善，也被其他学者改进和演绎[16-17]，为有粘不可压缩流情况下的运动体气动力计算提供了理论依据.然而在应用这个表达式计算运动体非定常气动力时存在如下困难：1) 在去除流场粘性的情况下，基于涡动力学理论的气动力表达式与Lamb的无粘流气动力表达式并不一致，其他学者也注意到这种情况，即有粘流中的附加质量表达式与无粘流的情况不同[16]；2) 使用涡动力学理论计算运动体气动力时，需要计算速度在运动体所占领空间上的积分，但这个速度场的具体概念并不明确，一般认为是运动体上对应刚体质点的速度.若按这种概念来理解就会导致一个悖论，即空心或内部含多刚体结构的运动体与实心运动体的

收稿日期：2017-05-15 录用日期：2017-10-30
基金项目：国家自然科学基金(11072028，61273199)；福建省自然科学基金(2016J01030)
* 通信作者：linxianw@xmu.edu.cn
引文格式：林新武，林献武，兰维瑶.物体在不可压缩流场中所受的流体动力表达式[J].厦门大学学报(自然科学版)，2018，57(1)：124-129.
Citation: LIN X W，LIN X W，LAN W Y.On the fluid dynamic force of a solid body moving in the incompressible flow[J].J Xiamen Univ Nat Sci，2018，57(1)：124-129.(in Chinese)

气动力不同.出现这种现象的根本原因在于这个流体动力表达式的推导过程中或多或少地将运动体所占领的空间和流体所占领的空间视为一体.事实上,流体动力与刚性运动体的内部结构并无关系,因此本研究尝试仅针对流体进行分析来获得不可压缩流场中的运动体流体动力表达式.这种表达式不但与运动体的内部结构无关,而且在无粘流情况下收敛于 Lamb 的结果,在有粘流场的情况下与涡动力学理论的结果一致,为人们进一步理解不可压缩流场的特点提供理论参考.

1 流体动力表达式

对于不可压缩流场,其速度 $\boldsymbol{v}$ 控制方程为[15]

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0, \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=-\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}-\nabla p+\rho\nu\nabla^2\boldsymbol{v}. \tag{2}$$

其中: 式(1)为连续性方程,式(2)为 Navier-Stokes 方程或动量方程;ρ,p,ν 分别是流体的密度、压力和运动粘性系数; 式(2)中已略去保守力如重力等.定义涡量为速度的旋度[16]

$$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{v}, \tag{3}$$

由于不可压缩流场中 ρ 为常数,则对动量方程(2)两边同求旋度可得涡量传输方程

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega})-\nu\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\omega}). \tag{4}$$

根据上述涡量传输方程,可以证明涡量场主要集中在运动体附近,在有限时间内,无穷远处 S_e 上的流场涡量密度等于 0[12-13].令 $\boldsymbol{I}$ 为二阶单位张量,则 $\nabla p=\nabla\cdot(\boldsymbol{I}p)$,$\nabla^2\boldsymbol{v}=\nabla\cdot(\nabla\boldsymbol{v})$,再利用质点导数公式 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ 可将式(2)改写为

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\nabla\cdot(-\boldsymbol{I}p+\rho\nu\nabla\boldsymbol{v})=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}, \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}=(-\boldsymbol{I}p+\rho\nu\nabla\boldsymbol{v})$.

记运动体所占领的空间区域为 R_b,其边界记为 S_b,与 S_b 接触的流体表面记为 S_i,S_b 和 S_i 的空间形状和位置是完全一致的.对于有粘流而言,根据无滑移边界条件,S_b 和 S_i 上的对应点速度是一致的; 对于无粘流而言,滑移边界条件将使得 S_b 和 S_i 上的对应点速度出现差异.在流场空间中取一个位置固定的封闭曲面 S_e 使得其包含 R_b 和部分流体,且位于 S_i 和 S_e 之间流体所占领的空间区域记为 R_f.取 R_f 中的流体作为研究对象,将式(5)在 R_f 上积分并利用张量形式的高斯公式可得积分形式的流场动量定理[18]

$$\int_{R_f}\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}R=\int_{R_f}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}R=\int_{S_i\cup S_e}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}S, \tag{6}$$

其中,$\boldsymbol{n}$ 表示 $S_i\cup S_e$ 的法向量,指向 R_f 外部为正.

式(6)最后一项在 S_i 上的积分结果就是运动体所受流体动力 $\boldsymbol{F}$ 的反作用力,因此

$$\boldsymbol{F}=-\int_{R_f}\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}R+\int_{S_e}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S. \tag{7}$$

先讨论式(7)等号右端的第 1 项.考虑到 R_f 不是控制体,则根据文献[18]中的研究结果,对于不可压缩流场 R_f 有

$$\int_{R_f}\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}R=\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_f}\boldsymbol{v}\mathrm{d}R-\int_{S_i\cup S_e}\rho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}_s-\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S, \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{v}_s$ 为边界 $S_i\cup S_e$ 的运动速度.由于 S_e 是固定的,因此在 S_e 上 $\boldsymbol{v}_s=0$; 在 S_i 上,由于流体没有进出物面,因此 $(\boldsymbol{v}_s-\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}=0$.这样,式(8)可简化为

$$\int_{R_f}\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}R=\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_f}\boldsymbol{v}\mathrm{d}R+\int_{S_e}\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S. \tag{9}$$

根据文献[14],有如下导数矩转换(derivative moment transformation,DMT)公式

$$\int_{R(t)}\boldsymbol{f}\mathrm{d}R=\frac{1}{2}\int_{R(t)}\boldsymbol{r}\times(\nabla\times\boldsymbol{f})\mathrm{d}R-\frac{1}{2}\int_{S(t)}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{n}(t)\times\boldsymbol{f})\mathrm{d}S, \tag{10}$$

$$\int_{S(t)}f\boldsymbol{n}(t)\mathrm{d}S=-\frac{1}{2}\int_{S(t)}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{n}(t)\times\nabla f)\mathrm{d}S. \tag{11}$$

其中,$\boldsymbol{r}$ 为位置矢量,f 或 $\boldsymbol{f}$ 为任意连续分布的场量,$R(t)$ 表示空间区域 R 可以是时变的,$S(t)$ 为空间区域 $R(t)$ 的边界,$\boldsymbol{n}(t)$ 为 $S(t)$ 的外法向方向.令式(10)中的 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{v}$,$R(t)=R_f$,并注意到 $\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{v}$,可得

$$\int_{R_f}\boldsymbol{v}\mathrm{d}R=\frac{1}{2}\int_{R_f}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}R+\frac{1}{2}\int_{S_i\cup S_e}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n})\mathrm{d}S, \tag{12}$$

合并上式和式(9)得

$$\int_{R_f}\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}R=\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_f}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}R+\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_i\cup S_e}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n})\mathrm{d}S+\int_{S_e}\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S. \tag{13}$$

现在讨论式(7)等号右端的第 2 项.根据 Wu[12-13] 的理论,在有限时间内,涡量场随距离物面长度的增加以指数形式衰减,令 S_e 离物面足够远,这时其附近流场可视为无旋,根据式(5)可知

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}=-\nabla p+\rho\nu[-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{v})+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})], \tag{14}$$

又因为不可压缩流场中 $\nabla\cdot \boldsymbol{v}=0$，再考虑到 S_e 上 $\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$，因此 $\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}=-\nabla p$. 在远处无旋流场 R_p 中任取一封闭曲面 S_{ps}，其所包围的空间区域记为 R_{ps}，根据张量形式的高斯公式，有

$$\int_{S_{ps}}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}S=\int_{R_{ps}}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}R=\int_{R_{ps}}-\nabla p\mathrm{d}R=\int_{R_{ps}}-\nabla\cdot(\boldsymbol{I}p)\mathrm{d}R=\int_{S_{ps}}-(\boldsymbol{I}p)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_{S_{ps}}-p\boldsymbol{n}\mathrm{d}S. \tag{15}$$

由于 R_{ps} 是任意选取的，为了使上式在 R_p 中恒成立，必须有 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}=-p\boldsymbol{n}$，于是式(7)等号右端的第 2 项可写为

$$\int_{S_e}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}S=\int_{S_e}-p\boldsymbol{n}\mathrm{d}S. \tag{16}$$

令式(11)中的积分区域取 $S(t)=S_e$，f 取流场静压力 p，则

$$\int_{S_e}p\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=-\frac{1}{2}\int_{S_e}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{n}\times\nabla p)\mathrm{d}S. \tag{17}$$

根据流场动量定理的微分形式(5)，考虑到 S_e 上的 $\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}=-\nabla p$ 可得 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\nabla p}{\rho}$，于是式(17)可改写为

$$\int_{S_e}p\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\frac{\rho}{2}\int_{S_e}\boldsymbol{r}\times\left(\boldsymbol{n}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}S. \tag{18}$$

由于 S_e 上的涡量等于零[12-13]，流场无粘，因此速度有势. 用 ϕ 表示为流场的速势，则根据质点导数公式有 $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\phi$，对两边同时求梯度，同时利用矢量恒等式 $\frac{\nabla(|\boldsymbol{v}|^2)}{2}=\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})$ [19]，$|\boldsymbol{v}|$ 为 $\boldsymbol{v}$ 的模，并考虑到梯度符号可以与时间偏导数符号对调顺序可得

$$\nabla\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t}+\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\phi)=\frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t}+\nabla(|\boldsymbol{v}|^2)=\frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t}+\frac{\nabla(|\boldsymbol{v}|^2)}{2}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+\frac{\nabla(|\boldsymbol{v}|^2)}{2}+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times|\boldsymbol{v}|), \tag{19}$$

再考虑到 S_e 上 $\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$，式(18)可改写为

$$\int_{S_e}p\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\frac{\rho}{2}\int_{S_e}\boldsymbol{r}\times\left[\boldsymbol{n}\times\nabla\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}-\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2}\right)\right]\mathrm{d}S=-\rho\int_{S_e}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}-\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2}\right)\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=-\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_e}\phi\boldsymbol{n}\mathrm{d}S+\rho\int_{S_e}\frac{|\boldsymbol{v}|^2\boldsymbol{n}}{2}\mathrm{d}S=\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_e}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{n}\times\nabla\phi)\boldsymbol{n}\mathrm{d}S+\rho\int_{S_e}\frac{|\boldsymbol{v}|^2\boldsymbol{n}}{2}\mathrm{d}S=\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_e}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})\mathrm{d}S+\rho\int_{S_e}\frac{|\boldsymbol{v}|^2\boldsymbol{n}}{2}\mathrm{d}S. \tag{20}$$

将式(20)代入式(16)可得 $\int_{S_e}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}S$ 的表达式，然后和式(13)一起代入式(7)可得

$$\boldsymbol{F}=-\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_f}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}R-\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_i\cup S_e}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n})\mathrm{d}S-\int_{S_e}\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S-\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_e}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})\mathrm{d}S-\rho\int_{S_e}\frac{|\boldsymbol{v}|^2\boldsymbol{n}}{2}\mathrm{d}S=-\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_f}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}R-\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_i}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n})\mathrm{d}S-\rho\int_{S_e}\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S-\rho\int_{S_e}\frac{|\boldsymbol{v}|^2\boldsymbol{n}}{2}\mathrm{d}S. \tag{21}$$

最后根据速度在远场的渐进特性[20]，式(21)等号右边在 S_e 上的积分结果为 0，于是得流体动力的最终表达式为

$$\boldsymbol{F}=-\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_f}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}R+\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_i}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})\mathrm{d}S. \tag{22}$$

式(22)与 Wu[13] 的结论的不同之处在于等式右边第 2 项积分的积分域为 S_i 而不是 S_b，因此不论固体边界是否允许速度滑移，该式都能够成立. 若令式(10)中的 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{v}$，$R(t)=R_b$ 并注意到 $\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{v}$ 可得

$$\int_{R_b}\boldsymbol{v}\mathrm{d}R=\frac{1}{2}\int_{R_b}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}R+\frac{1}{2}\int_{S_i}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})\mathrm{d}S. \tag{23}$$

上式成立的条件为 $\boldsymbol{v}$ 在 R_b 和 S_i 上连续，其中第 2 项改变了符号是为了使 $\boldsymbol{n}$ 的方向与式(6)中 $\boldsymbol{n}$ 的方向保持一致，即指向 R_f 外部为正. 合并上述两式可得

$$\boldsymbol{F}=-\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_f\cup R_b}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}R+\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_b}\boldsymbol{v}\mathrm{d}R. \tag{24}$$

R_b 上的 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 是虚拟存在且不确定的，仅需保证 $\boldsymbol{v}$ 在 R_b 和 S_i 上连续. 对于有粘流而言，一个符合此条件的 $\boldsymbol{v}$ 分布是将运动体视为实心刚体，这样上式的结果就是 Wu[13] 所给出的有粘不可压缩流场气动力表达式. 如果运动体是空心的，或者运动体内部出现多刚体结构，则 $\boldsymbol{v}$ 的分布仍可按实心刚体来计算，说明运动体是气动力与其内部的结构无关，符合事实.

如果流场是无粘的，则不能将 R_b 上的 $\boldsymbol{v}$ 用实心刚体所对应的速度场来替代，这是因为滑移边界条件导

致这种处理方法并不能保证 $\boldsymbol{v}$ 在 S_i 上连续. 这时需要根据 S_i 上的 $\boldsymbol{v}$ 来重新确定其在 R_b 上的分布以保证连续性. 这里给出一种确定 R_b 上 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 的具体方法: 有一个不渗透的壳体，其形状与 S_i 一致且壳体上各质点的速度分布等于流场在 S_i 上的速度分布; 然后往壳体内部注入含磁性物质的粘性流体，利用电磁力使壳体内部的流体运动起来，这时壳体内部流场所对应的 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 就能满足 R_b 以及 S_i 上的连续性要求. 当电磁力和时间不同时，壳体内部的流场分布也是不同的，这意味着虚拟涡的分布并不是唯一的. 然后将得到的 R_b 上的 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 的分布代入式(24) 来计算气动力; 或者，更简单地，直接根据式(22) 来计算气动力.

在上面的推导结果中，R_f 的外边界处于无穷远处，而在实际应用中只能够取到有限区域，这将导致一定的计算误差. 对于实际飞行器的运动过程中，其运动时间总是有限的，因此满足 Wu 所设定的条件[12]. 于是，涡量的强度随着与物面的距离增加以指数规律衰减. 指数衰减要比幂级数衰减更快，因此在实际应用中，并不需要取太大的空间区域即可达到足够的计算精度.

2　与无粘流气动力表达式的兼容性

Lamb 首先引入了流场冲量的概念，即运动体运动过程中对流场所提供的冲量 $\boldsymbol{I}_{\text{imp}} = -\int_0^t \boldsymbol{F}\mathrm{d}\tau$，两边同时对时间 t 取导数即可得流体动力表达式

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}_{\text{imp}}}{\mathrm{d}t}, \tag{25}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 为运动体所受到的流体动力. 对于不可压缩无粘流场而言，Lamb 根据能量守恒定律证明了[2]

$$\boldsymbol{I}_{\text{imp}} = \frac{\partial T}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial T}{\partial v}\boldsymbol{j} + \frac{\partial T}{\partial w}\boldsymbol{k}, \tag{26}$$

其中 u, v, w 为运动体速度 $\boldsymbol{v}_b$ 的 3 个分量，T 表示 R_f 中流体所包含的动能. 由于流场动能可根据流场的速度分布来确定，因此 I_{imp}和 F 均可通过实际计算得到.

由此可见，Lamb 在推导无粘流气动力表达式时并没有用到流场的动量和流场的动量定理. 为了证明式(24) 兼容 Lamb 的流体动力表达式，需要建立 Lamb 方法与动量定理之间的关系. 记流场的总动量

$$\boldsymbol{Q} = \int_{R_f} \rho \boldsymbol{v}\mathrm{d}R, \tag{27}$$

则根据物理学中的冲量定理，流场的总动量等于外力冲量之和，它不但包括运动体所提供的冲量，也包括 S_e 上流场压力 p 所产生的冲量，因此

$$\boldsymbol{Q} = \int_0^t \left(-\boldsymbol{F} + \int_{S_e} -p\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \right) \mathrm{d}t. \tag{28}$$

两边同时求导数并考虑到在无粘流中 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{Q} = \int_{R_f} \rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}R$[18] 可得

$$\boldsymbol{F} = -\int_{R_f} \rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}R + \int_{S_e} -p\boldsymbol{n}\mathrm{d}S. \tag{29}$$

上式和基于流场动量定理得到的流体动力表达式(7) 是一致的，因此式(24) 兼容于 Lamb 给出的结果即式(25). 从式(29) 还可以看出，Lamb 利用冲量的概念巧妙地回避了无穷远边界上的压力计算问题. 但他所提出的基于流场动能计算冲量的方法，即表达式(26) 仅在无粘流场中成立，难以推广到存在粘性和能量耗散的有粘流场，这是其局限性.

3　算　例

式(22) 和(24) 在有粘流场中的等效性已被 Wu[13] 证明，式(24) 的正确性，也在文献[12] 中有所论述和验证，因此这里将仅讨论式(22) 与无粘流场中 Lamb 理论的等效性. 以圆球在静止无粘流场中直线运动的附加质量为例来进行讨论.

由文献[2] 可知，无粘流场中直线运动圆球的速势为

$$\phi = \frac{U}{2}\frac{a^3}{r^2}\cos\theta, \tag{30}$$

其中 U 为球直线运动速度的大小，a 为球的半径，r、θ 为球面坐标. 那么在以球心为原点的固连直角坐标系中，令

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta\cos\psi, \\ z = r\sin\theta\sin\psi, \end{cases} \tag{31}$$

其中 $\theta \in [0, \pi]$, $\psi \in [0, 2\pi]$，则可得

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \sin\theta = \sqrt{\dfrac{y^2 + z^2}{r^2}}, \end{cases} \tag{32}$$

将式(32) 代入式(30) 中可得圆球速势在直角坐标系中的表达式如下:

$$\phi = \frac{Ua^3}{2(x^2 + y^2 + z^2)}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{Ua^3 x}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{Ua^3 x}{2r^3}, \tag{33}$$

于是流场速度在直角坐标系下的速度分量为

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{Ua^3}{2}\left(\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{3x^2}{r^5}\right), \\ v_y = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \dfrac{Ua^3}{2}\left(-\dfrac{3xy}{r^5}\right), \\ v_z = \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = \dfrac{Ua^3}{2}\left(-\dfrac{3xz}{r^5}\right). \end{cases} \tag{34}$$

又圆球表面位矢 $\boldsymbol{r}$ 及法向量 $\boldsymbol{n}$ 分别如下:

$$\begin{cases} r_x = x, \\ r_y = y, \\ r_z = z; \end{cases} \tag{35}$$

$$\begin{cases} n_x = \dfrac{x}{r}, \\ n_y = \dfrac{y}{r}, \\ n_z = \dfrac{z}{r}. \end{cases} \tag{36}$$

进而可将式(34),式(35)和式(36)代入式(22)来计算无粘流场中圆球直线运动气动力,由于无粘流场中 $\boldsymbol{\omega}$ 为 0,可得无粘流场中圆球直线运动气动力为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= \frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_\mathrm{i}} \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}S = \\ &\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_\mathrm{i}} \left[\frac{Ua^3}{2}\left(\frac{y^2}{r^4} + \frac{z^2}{r^4}\right)\boldsymbol{i} - \frac{Ua^3}{2}\frac{xy}{r^4}\boldsymbol{j} - \right. \\ &\left.\frac{Ua^3}{2}\frac{xz}{r^4}\boldsymbol{k}\right]\mathrm{d}S = \frac{m}{2}a^*\boldsymbol{i}, \end{aligned} \tag{37}$$

其中 $a^* = \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$ 表示圆球直线运动的加速度大小. $m = \rho R_\mathrm{b}$ 是运动体所占领空间用流体填充时所对应的质量. 同时可计算圆球流场的流场总动量 Q. 根据对称性,只有 x 轴方向的速度分量对 Q 有贡献,即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_x &= \int_{R_\mathrm{f}} \rho \boldsymbol{v}_x \mathrm{d}R = 2\pi\rho\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_a^\infty \boldsymbol{v}_x r^2 \sin\theta \mathrm{d}r = \\ &0 \cdot \pi\rho U a^3 \ln r \,\big|_a^\infty. \end{aligned} \tag{38}$$

由计算结果可知,圆球在静止无粘流场中直线运动的附加质量为 $\dfrac{m}{2}$,与文献[1]中的结果相符. 此时流场动量的积分不收敛,因此不能直接使用动量定理来计算运动体的气动力,而根据式(22)来计算无粘流场中圆球的气动力能够回避该问题. 传统流体力学中认为式(38)的积分结果是不确定的[2],因此采用动能来计算无粘流中的非定常气动力,而根据式(22)则可以回避计算流场总动量的问题。

4 结 论

本研究在流场 R_f 上速度分布连续的基础上重新推导了运动体在不可压缩流体中运动时所受的气动力. 由于回避了流体在物面边界上的连续性问题,所得的公式不仅适用于有粘流场,也适用于无粘流场. 研究结果表明,涡动力学理论所给出的式(24)在实际应用中,运动体所占领空间 R_b 上速度场分布并非唯一,但需要在保证内部连续的同时与 R_f 中的速度分布在 S_i 上连续. 对于有粘流而言,这种速度分布可以取实心刚体上的速度场;对于无粘流而言,由于滑移边界条件,实心刚体所对应的速度场并不一定能满足 $\boldsymbol{v}$ 在 S_i 上的连续性,这时可直接采用式(22)来计算气动力.

参考文献:

[1] KHOURY G A, GILLETT J D. Airship technology [M]. 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 2012: 36-38.

[2] LAMB H. Hydrodynamics [M]. 6th ed. New York: Dover, 1945: 160-201, 214.

[3] ALLEN H J. Estimation of the forces and moments acting on inclined bodies of high fineness ratio, RM-A9I26 [R]. Washington D C: NACA, 1949.

[4] ALLEN H J, PERKINS E W. A study of effects of viscosity on flow over slender inclined bodies of revolution, REPORT1048 [R]. Washington DC: NACA, 1951.

[5] HOPKINS E J. A semi-empirical method for calculating the pitching moment of bodies of revolution at low Mach numbers, RM-A51C14 [R]. Washington DC: NACA, 1951.

[6] JONES S P, DELAURIER J D. Aerodynamic estimation techniques for aerostats and airship [J]. Journal of Aircraft, 2015, 20(2): 120-126.

[7] 基里林·阿列克桑德拉·尼卡拉伊维奇. 现代飞艇设计导论 [M]. 吴飞, 王培美, 译. 北京: 国防工业出版社, 2009: 5-26.

[8] MUELLER J B, PALUSZEK M A, ZHAO Y Y. Development of an aerodynamic model and control law design for a high altitude airship [C] // AIAA 3rd "Unmanned Unlimited" Technical Conference. Chicago: Workshop and Exhibit, 2004: 1-17.

[9] LI Y, NAHON M. Modeling and simulation of airship dynamics [J]. Journal of Guidance Control & Dynamics, 2007, 30(6): 1691-1700.

[10] LI Y, NAHON M, SHARF I. Airship dynamic modeling: a literature review [J]. Progress in Aerospace Sciences, 2011, 47(3): 217-239.

[11] SEBBANE Y B. Lighter than air robots [M]. Netherlands: Springer, 2012: 34.
[12] WU J C. Theory for aerodynamic forces and moments in viscous flow [J]. AIAA Journal, 2012, 19(4): 432-441.
[13] WU J C. Elements of vorticity aerodynamics [M]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 2014: 12, 51, 78, 83-89, 93.
[14] WU J Z, MA H Y, ZHOU M D. Vorticity and vortex dynamics [M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2006: 600-603.
[15] WU J Z, MA H Y, ZHOU M D. Vortical flows [M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2015: 312-320.
[16] 吴子牛. 空气动力学(下册) [M]. 北京: 清华大学出版社, 2008: 85.
[17] 童炳刚, 尹协远, 朱克勤. 涡运动理论 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2009: 69.
[18] 林献武, 兰维瑶, 李智斌, 等. 时变系统流场动量定理的积分形式及其在流体动力系数分析中的应用 [J]. 应用数学和力学, 2016, 37(6): 551-566.
[19] 易中, 吴萱, 周丽珍. 低速空气动力学 [M]. 北京: 冶金工业出版社, 2005: 9.
[20] BATCHELOR G K. An introduction to fluid dynamics [M]. Beijing: China Machine Press, 2014: 114-117.

On the Fluid Dynamic Force of a Solid Body Moving in the Incompressible Flow

LIN Xinwu, LIN Xianwu*, LAN Weiyao
(School of Aerospace Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: For unifying the expression of the fluid dynamic force in the viscous and inviscid incompressible flow field, the expression is re-deduced with the slip boundary condition is permitted. The fluid dynamic force is expressed as the algebraic sum of the integral of the flow stress on the infinity boundary and the integral of the change rate of the flow field momentum based on the momentum theorem. Then, the derivative moment transformation (DMT) is adopted to decompose these two integrals, then decomposition results are combined and simplified into the sum of the integral of the first vortex moment in the flow field and the integral of the tangent velocity moment on the solid surface based on the asymptotic property of the velocity at infinity, and the new expression of the fluid dynamic force is obtained. Theoretical analysis and the example show that this new expression of the fluid dynamic force not only converges to the Lamb´s expression in the inviscid flow, but also is consistent with the theory of vortical dynamics in the viscous flow.

Key words: airship; unsteady state hydrodynamic force; incompressible flow field; vortical dynamics