一种带有误差补偿项的折线线圈阻抗解析建模新方法

吴德会， 何天府， 黄一民， 苏令锌， 刘志天
(厦门大学 机电工程系,福建 厦门 361005)

摘 要: 提出一种包含误差补偿项的任意折线线圈阻抗解析新模型。首先,在前人研究的基础上,通过定义外形位置因子,简化单矩形折线线圈的阻抗计算。其次,对多个单矩形折线线圈之间的相交耦合作用进行研究,建立串联等效电感模型。再次,讨论任意形状折线线圈的拆解和重构过程,研究重构过程的误差分布,并推导出误差补偿的数学表达;进而得到任意形状折线线圈的入射场阻抗及散射场阻抗的完整解析模型。最后,对螺线形折线线圈这一典型特例进行计算,绘制阻抗平面图,并利用高精度阻抗测试仪进行物理验证实验。结果表明,所提方法能有效补偿线宽因素带来的误差,可对置于导体上方的具有不同激励频率和提离的任意形状折线线圈的阻抗进行解析计算。

关键词: 折线线圈; 矩形电流回路; 阻抗计算; 解析模型; 误差补偿
DOI: 10.15938/j.emc.2018.04.008
中图分类号: TM 153 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-449X(2018)04-0058-09

Analytic modeling method for meander coil impedance with error compensation

WU De-hui, HE Tian-fu, HUANG Yi-min, SU Ling-xin, LIU Zhi-tian
(Department of Electronic Mechanical Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: An impedance analytical model of arbitrary shape meander coil is proposed in this paper. Firstly, the impedance calculation of single rectangular meander coil was simplified by defining shape-position factor. Secondly, the coupled effect between several overlapped meander coils was studied and the series equivalent inductance model of which was established. Thirdly, the separation and reconstitution processes of arbitrary shape meander coil were discussed, and the math expressions of error compensation in reconstitution process were also derived. Furthermore, the completely analytical model of incident field and scattered field impedance for arbitrary shape meander coil was obtained. Finally, a case of meander spiral coil was analyzed, and a series of physical verification experiments were carried out with a precise impedance tester. The results demonstrate that the presented method can be used in impedance analytical calculation of arbitrary shape meander coil, and placed over the conductor in different heights with different excitation frequencies.

Keywords: meander coil; rectangular current loop; impedance calculation; analytical model; error compensation

收稿日期: 2016-06-22
基金项目: 国家自然科学基金(51177141);航空基金(2012ZD68003)
作者简介: 吴德会(1975—),男,博士,副教授、博士生导师,研究方向为电气工程及机电装备;
何天府(1990—),男,硕士研究生,研究方向为电磁无损检测;
黄一民(1990—),男,硕士,研究方向为电磁无损检测;
苏令锌(1993—),男,硕士研究生,研究方向为电磁无损检测;
刘志天(1993—),男,硕士研究生,研究方向为电磁无损检测。
通信作者: 何天府

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

0　引　言

在电能无线传输及电磁检测技术领域中,折线线圈因其设计简单和易于模块化的特性被广泛使用。在涡流检测领域,可利用折线线圈构成线圈磁力计阵列[1],通过扫描从而生成检测图像。在感应式无线电能传输中,谐振耦合线圈也多采用螺线型折线线圈的形式[2-3]。采用折线形式的 Rogowski 线圈,也是现场测量高压环境中大电流的重要器件[4]。在电磁超声领域,改变电磁超声换能器(EMAT)的折线线圈形式可激发不同模式的兰姆波[5]。折线线圈的磁场分布与线圈结构、几何参数紧密相关[6],并直接影响线圈的性能[7]。因此对此类线圈磁场分布及其阻抗特性进行准确建模是各类电磁检测[8]及电能无线传输系统设计[9]中的重要研究内容。

近年来,国内外对一些特殊形式的折线线圈阻抗计算进行了研究。T. P. Theodoulidis 和 E. E. Kriezis 利用二阶矢量位推导了平行置于非磁性导体空间上方单矩形折线线圈的入射场阻抗和散射场阻抗[10]。J. O. Fava 和 M. C. Ruch 针对螺线形折线线圈建立了二阶阻抗矢量模型,并根据线圈上激励电流、线圈提离值及被测导体电导率的变化,绘制阻抗平面图并进行了讨论[2]。国内学者郝宽胜、黄松岭、赵伟等提出了将回折形折线线圈的阻抗和磁场计算问题转化为矩形线圈阵列的叠加问题,并得到了线圈阻抗的频域解析表达式[11]。但是,针对更复杂形态的折线线圈的阻抗建模,目前尚没有相关研究及报告。

本文在前人研究的基础上,提出对折线线圈的拆解及重构思路,可将上述单矩形、螺线形、回折形等折线线圈放在同一个模型中进行描述,并可解决任意折线线圈的阻抗机理建模问题。文中重点研究了任意形状折线线圈的拆解模型及其重构过程中的误差分布,并推导了修正补偿项,得出了在导体上方任意形状折线线圈阻抗的广义二重积分完整解析模型。

1　折线线圈的串联等效分析

1.1　单矩形折线线圈中电流回路的空间建模

单矩形折线线圈是本文讨论的折线线圈的基本构成元素,不妨将单矩形折线线圈平行置于电导率为 σ、相对磁导率为 μ_r 的无限大导体上方。在频率为 ω、强度为 I 的激励电流作用下,该线圈形成了一个清晰的矩形电流回路。可通过对矩形电流回路及其有效空间内的电磁场分布进行建模,达到求解单矩形折线线圈阻抗的目的[10]。

如图 1 所示,单矩形折线线圈的底面高度为 h,厚度为 δ,线宽为 w,线圈长宽为 $(2x_d, 2y_d)$,几何中心为 (x_O, y_O)。则根据电磁感应定律[12-13],矩形电流回路上的入射场感应电压 V 为

$$V = \frac{\int_{S'} V_\varepsilon \mathrm{d}S'}{S'} = \frac{\mathrm{j}\omega \int_{S'} \iint_S B_Z \mathrm{d}S \mathrm{d}S'}{S'} = ZI, \quad (1)$$

式中: $S = 2x_d 2y_d$ 为回路包围的面积; $S' = \delta \cdot w$ 为电流横截面,B_Z 为磁感应强度的 Z 方向分量,可通过二阶矢量位[10]进行求解:

$$B_Z = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 \delta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(2 - \mathrm{e}^{k(z-h)} - \mathrm{e}^{k[z-(h+\delta)]}\right) \times \mathrm{e}^{\mathrm{j}(ax+by)} \frac{\Lambda}{ab} \mathrm{d}a\mathrm{d}b, \quad (2)$$

式中: a, b 为积分变量; $k = \sqrt{a^2 + b^2}$; Λ 为外形位置因子,由位置因子 $\Psi = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(ax_O + by_O)}$ 及外形因子 Γ 的乘积构成。这里的外形因子 Γ 可表达为:

$$\Gamma = \frac{1}{2}\cos(ax_d + by_d)\,\mathrm{Sinc}\left((a+b)\frac{w}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos(ax_d - by_d)\,\mathrm{Sinc}\left((a-b)\frac{w}{2}\right)。\quad (3)$$

根据式(1)中矩形电流回路上感应电压与激励电流之间关系[14],可以得到单矩形折线线圈的入射场阻抗表达式为

$$Z = \mathrm{j}X_0 = \mathrm{j}\omega L = \frac{4\mathrm{j}\omega\mu_0}{\pi^2\delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta + \frac{\mathrm{e}^{-k\delta} - 1}{k}\right) \frac{\Lambda\bar{\Lambda}}{a^2 b^2} \mathrm{d}a\mathrm{d}b, \quad (4)$$

式中: L 为自感系数; $\bar{\Lambda}$ 为外形位置因子 Λ 的复共轭。

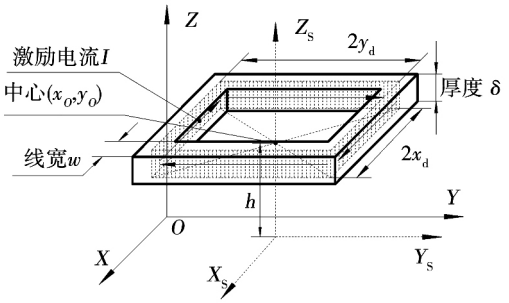


图 1　单个矩形线圈坐标示意

Fig. 1　Coordinate diagram of single rectangular meander coil

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

1.2 多个单矩形折线线圈的串联建模

下面考虑多个单矩形折线线圈存在的情况。如图2中所示，对于高度 h 平面内两个线宽 w 及厚度 δ 均相等的单矩形折线线圈 C_i 及 C_j，几何中心坐标分别为 (x_i, y_i) 及 (x_j, y_j)，并记 M 为两个线圈的互感系数。根据上述定义可求得两线圈互感系数 M 可表达为:

$$M = \frac{4\mu_0}{\pi^2\delta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\delta + \frac{e^{-k\delta}-1}{k}\right)\frac{\Lambda_j\overline{\Lambda}_i}{a^2b^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b, \quad (5)$$

式中，下标 i，j 分别代表该变量属于单矩形折线线圈 C_i 或 C_j。

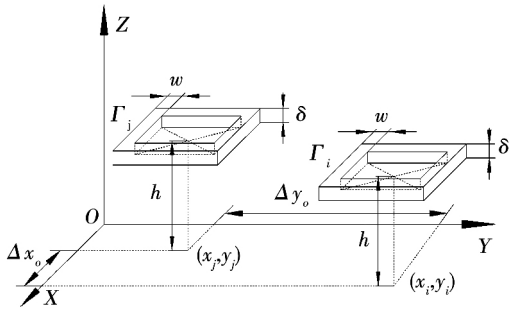


图2 任意两个单矩形折线线圈的空间位置示意

Fig. 2 Spatial position diagram of two arbitrary single rectangular meander coils

不妨记 $\Delta x = x_i - x_j$，$\Delta y = y_i - y_j$，并且由于 $\Lambda_j\overline{\Lambda}_i = \Gamma_i\Gamma_j e^{j(a\Delta x + b\Delta y)}$，则对式(5)化简得到

$$M = \frac{4\mu_0}{\pi^2\delta^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\delta + \frac{e^{-k\delta}-1}{k}\right)\frac{\Gamma_i\Gamma_j\cos(a\Delta x)\cos(b\Delta y)}{a^2b^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b \quad (6)$$

很明显，互感系数 M 满足互易性，且与两个线圈 C_i 和 C_j 的相对位置有关，与坐标系的选取无关。则上述线圈 C_i 和 C_j 之间的串联等效电感 $L_{eq(i+j)}$ 可表达为

$$L_{eq(i+j)} = L_i + L_j + 2M = \frac{16\mu_0}{\pi^2\delta^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\delta + \frac{e^{-k\delta}-1}{k}\right)\frac{|\Lambda_{eq(i+j)}|^2}{a^2b^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b。 \quad (7)$$

为简化表达，本文中定义运算符⊗，其满足 $\Lambda_i \otimes \Lambda_j = |\Lambda_i\Lambda_j|\cos(a\Delta x)\cos(b\Delta y)$，则有

$$|\Lambda_{eq(i+j)}|^2 = (\Lambda_i + \Lambda_j)\otimes(\Lambda_i + \Lambda_j) = \Gamma_i^2 + \Gamma_j^2 + 2\Gamma_i\Gamma_j\cos(a\Delta x)\cos(b\Delta y)。 \quad (8)$$

同理，可将式(7)推广到 N 个单矩形折线线圈的串联的情况，建立其串联等效电感模型为

$$L_{eq(\Sigma)} = \frac{16\mu_0}{\pi^2\delta^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\delta + \frac{e^{-k\delta}-1}{k}\right)\frac{|\Lambda_{eq(\Sigma)}|^2}{a^2b^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b。 \quad (9)$$

式中，$\Lambda_{eq(\Sigma)}$ 称为串联等效外形位置因子，并有 $|\Lambda_{eq(\Sigma)}|^2 = \sum_{i=1}^{N}\Lambda_i \otimes \sum_{i=1}^{N}\Lambda_i$。

2 任意形状折线线圈拆解建模及误差补偿

2.1 拆解、重构与误差分析

现有研究中，针对一些特殊形状电流回路的电磁场分布，往往采用串联等效的思路来近似分析，例如: 螺线形折线线圈可以近似等效为多个同一几何中心但尺寸递增的矩形线圈阵列串联叠加[15]。对于本文中讨论的任意形状折线线圈的建模问题，也可借鉴上述线圈串联叠加的思路。本文中将任意形状折线线圈表达为平面空间内有限 N 个更简单形式的折线线圈串联的过程，称之为“拆解”，反之称为“重构”。如图3所示，对于确定形状的折线线圈，其拆解方案具有多样性，但不会影响其重构结果唯一性，就此不再赘述。

在现有的串联等效研究中，均不考虑线圈厚度 δ 及线宽 w，而将线圈内电流假设为截面积无穷小的理想线形电流[17]。如图3中所示，在该假设下，相邻矩形电流回路两两相接处(图中浅虚线所示)的线形电流可相互抵消，则线圈的宏观电磁模型与其 N 个矩形电流回路的串联模型完全等效。但是，本文所讨论的折线线圈多应用于电能无线传输及各类电磁激发[16]，其激励电流较大，线宽和厚度不容忽视，与上述假设明显不符，必然会产生重构误差。

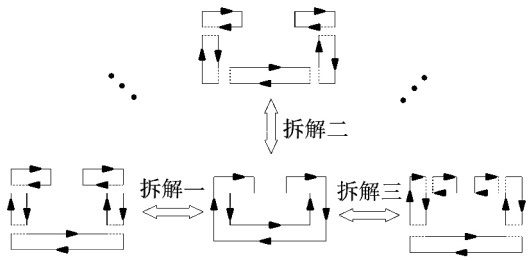


图3 拆解方案示意

Fig. 3 Diagram of meander coil disassembling

如图4中所示，设某一存在线宽 w 的线圈0，不妨将其拆解为2个更小线圈Ⅰ和Ⅱ。在重构时，虽然线圈Ⅰ和Ⅱ在两两相接处的电流方向仍是互逆

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的,但由于线宽 w 的存在,使得两组互逆的线形电流在空间位置上不能完全重叠(如图 4 中虚线所示)。因此,无法等效为图 4 线圈 0 中所示的电流回路,重构失败。因此在重构过程中,必须对线宽误差进行建模补偿。

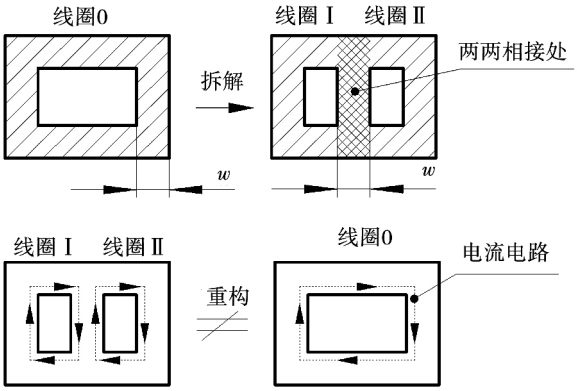


图 4　重构过程的误差分布示意

Fig. 4　Error distribution of meander coil reconstitution

由式(2)可知,单矩形折线线圈的磁感应模型由外形位置因子 Λ 决定,则在重构过程中,可通过对因子 Λ 的修正达到误差补偿的目的。不妨定义补偿外形位置因子 $\hat{\Lambda}$,其值为真实外形位置因子 Λ 与串联等效的外形位置因子 $\Lambda_{eq(\Sigma)}$ 之差,即有 $\hat{\Lambda} = \Lambda - \Lambda_{eq(\Sigma)}$。

2.2　重构过程的误差模型

不失一般性,不妨以任意两个单矩形折线线圈的重构过程进行误差建模。如图 5,设任意两个相接的单矩形折线线圈Ⅰ和Ⅱ的重构结果为折线线圈 0,并记两线圈相接线段为 PQ(下文中称为"补偿线段")。记线圈 0 的外形尺寸为 $(2x_d, 2y_d)$,几何中心为 $(0,0)$,折线线圈Ⅰ的外形尺寸为 $(2x_{d,\mathrm{I}}, 2y_d)$,则补偿线段 PQ 的外形尺寸为 $(0, 2y_d)$。P 点坐标为 $(x_d - 2x_{d,\mathrm{I}}, -y_d)$,$Q$ 点坐标为 $(x_d - 2x_{d,\mathrm{I}}, y_d)$。

将上述参数代入式(2),并根据式(3)计算整理可得补偿外形位置因子 $\hat{\Lambda}$ 为

$$\hat{\Lambda} = \Lambda_0 - (\Lambda_{\mathrm{I}} + \Lambda_{\mathrm{II}}) = \Gamma e^{-ja(x_d - 2x_{d,\mathrm{I}})}, \quad (10)$$

式中,Λ_0、Λ_{I} 及 Λ_{II} 分别为折线线圈 0、Ⅰ及Ⅱ的外形位置因子。

这里的 $\hat{\Lambda}$ 主要由补偿线段的长度 y_d 决定,因此,也将 $\hat{\Lambda}$ 称为补偿线段的直线外形位置因子 $\hat{\Lambda}_y$。则由式(3)可定义补偿线段的直线外形因子 $\hat{\Gamma}_y$ 为:

$$\hat{\Gamma}_y = -\frac{1}{2}\cos(b\hat{y}_d)\left(\mathrm{Sinc}\left((a+b)\frac{w}{2}\right) - \mathrm{Sinc}\left((a-b)\frac{w}{2}\right)\right) = -\Gamma_0\cos(b\hat{y}_d)。 \quad (11)$$

将上式代入式(10),并展开得

$$\hat{\Lambda}_y = -\frac{\Gamma_0 e^{-jb\hat{y}_d} + \Gamma_0 e^{jb\hat{y}_d}}{2} e^{-ja(x_d - 2x_{d,\mathrm{I}})}。 \quad (12)$$

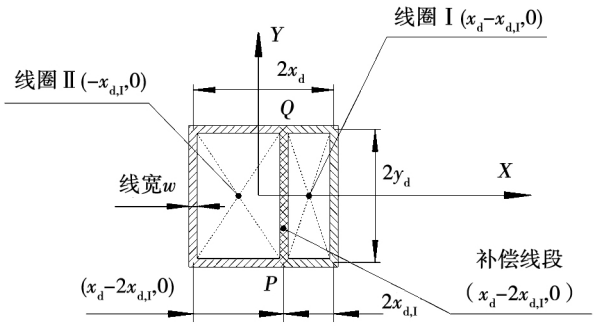


图 5　两个单矩形折线线圈重构过程

Fig. 5　Two single rectangular meander coils reconstitution

同理,分别将 P,Q 两点的位置坐标代入式(10),并根据式(3)可得其点外形位置因子 $\Lambda_{0,P}$、$\Lambda_{0,Q}$ 分别为

$$\Lambda_{0,P} = \Gamma_0 e^{-j[a(x_d - 2x_{d,\mathrm{I}}) - b\hat{y}_d]}, \Lambda_{0,Q} = \Gamma_0 e^{-j[a(x_d - 2x_{d,\mathrm{II}}) + b\hat{y}_d]}。 \quad (13)$$

比较式(12)和式(13),可得

$$\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}_y = -\frac{\Lambda_{0,P} + \Lambda_{0,Q}}{2}。 \quad (14)$$

由上式不难看出,补偿外形位置因子 $\hat{\Lambda}$ 仅由折线线圈Ⅰ和Ⅱ两两相接处两个端点 P,Q 的点外形位置因子 $\Lambda_{0,P}$、$\Lambda_{0,Q}$ 决定。对于在 x 轴方向的补偿线段,只需将坐标系旋转 90°。同理,可对 N 个折线线圈的重构过程进行误差分析,对此本文不再赘述。

2.3　任意形状折线线圈阻抗模型

通过上述对重构过程中的误差分析可知,由实际线宽等因素引入的重构误差可通过补偿外形位置因子 $\hat{\Lambda}$ 进行修正,且仅与补偿折线的端点有关。因此,任意形状折线线圈的补偿外形位置因子 $\hat{\Lambda}$ 可表达为:

$$\hat{\Lambda} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{0,i}。 \quad (15)$$

式中: n 为端点个数; $\Lambda_{0,i}$ 为第 i 个补偿折线端点的点外形位置因子。

进一步,可对实际任意折线线圈的串联等效电

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

感模型进行误差修正为

$$L_{eq} = \frac{16\mu_0}{\pi^2\delta^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\delta + \frac{e^{-k\delta}-1}{k}\right)\frac{|\Lambda_{eq}|^2}{a^2b^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b。 \tag{16}$$

式中: Λ_{eq} 为修正后的等效外形位置因子,其仍满足运算符⊗,即有

$$|\Lambda_{eq}|^2 = (\Lambda_{eq(\Sigma)} + \hat{\Lambda}) \otimes (\Lambda_{eq(\Sigma)} + \hat{\Lambda}) = \left(\sum_{i=1}^{N}\Lambda_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{0,i}\right)\otimes \left(\sum_{i=1}^{N}\Lambda_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{0,i}\right), \tag{17}$$

式中,$\hat{\Lambda}$ 为串联等效求解时的补偿外形位置因子。

根据楞次定律,当载有激励电流的线圈位于导体上方时,导体中感应涡流产生了与线圈中由电流激励产生的一次场的变化方向相反的二次场,该二次场即为散射场。而涡流对线圈阻抗的影响表现在散射场阻抗。由式(16)所示带有误差补偿项的串联等效电感模型,可对任意形状折线线圈的入射场阻抗 Z 及散射场阻抗 ΔZ 进行计算为

$$\left.\begin{aligned} Z &= \frac{16j\omega\mu_0}{\pi^2\delta^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\delta + \frac{e^{-k\delta}-1}{k}\right)\frac{|\Lambda_{eq}|^2}{a^2b^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b, \\ \Delta Z &= \frac{8j\omega\mu_0}{\pi^2\delta^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{k\mu_r-\lambda}{k\mu_r+\lambda}\frac{\left(e^{-k(h+\delta)}-e^{-kh}\right)^2}{k}\frac{|\Lambda_{eq}|^2}{a^2b^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b。\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

式中 $\lambda = \sqrt{k^2 - j\omega\mu_0\mu_r\sigma}$ 。

而任意形状折线线圈的总阻抗 Z_{total} 可以表达为

$$Z_{total} = Z + \Delta Z = \Delta R + j(X_0 + \Delta X) = R + jX。 \tag{19}$$

式中: X_0 为入射场感抗; ΔR 与 ΔX 为散射场对电阻及电抗产生的影响; R 与 X 分别为 Z_{total} 的电阻及电抗。

3 实验与验证

3.1 拆解方案的一致性验证

由于"回折形"折线线圈在涡流检测与 EMAT 中应用广泛且其结构简单,因此本节以此类线圈为例说明拆解和重构的具体过程。一个典型应用的"回折形"折线线圈的外形尺寸参数如表1中所示。

表1 典型回折形折线线圈外形及材料参数

Table 1 The shape and material parameters of a typical rectangular meander coil

n	$x_{d,1}$/mm	$y_{d,1}$/mm	$x_{d,0}$/mm	$y_{d,0}$/mm	h/mm	w/mm	δ/mm
5	5	35	45	5	1	0.245	0.035

如图6所示,可将该5折的回折形折线线圈拆解为线圈 C 及线圈阵列 A,并添加5条线段组成的补偿线段阵列 B。本例中将该拆解结果称为拆解方式一。

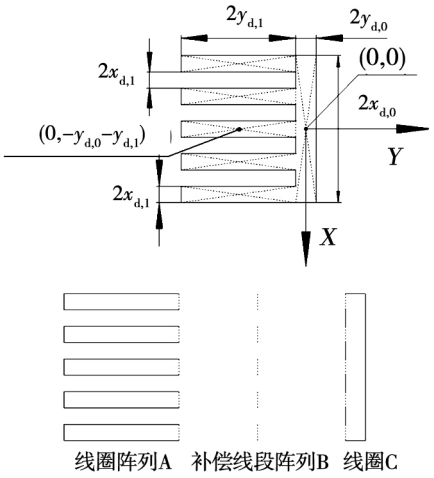


图6 拆解方式一及其等效重构示意

Fig. 6 The first way of diassembling and reconstitution

则根据图中所示坐标系,不难计算线圈 C 的外形位置因子为

$$\Lambda_C = \frac{1}{2}\cos(ax_{d,0} + by_{d,0})\,\mathrm{Sinc}\left((a+b)\frac{w}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos(ax_{d,0} - by_{d,0})\,\mathrm{Sinc}\left((a-b)\frac{w}{2}\right)。 \tag{20}$$

则对应线圈阵列 A 有:

$$\sum_{i=0}^{n}\Lambda_{A,i} = \frac{\sin(2\times 5ax_{d,1})}{\sin(2ax_{d,1})}\Gamma_A e^{-jb(y_{d,0}+y_{d,1})}。 \tag{21}$$

式中: Γ_A 为阵列 A 的外形因子; $\Lambda_{A,i}$ 为阵列 A 中第 i 个线圈的外形位置因子。

对应补偿线段阵列 B 亦有

$$\sum_{i=0}^{n}\hat{\Lambda}_{B,i} = \frac{\sin(2\times 5ax_{d,1})}{\sin(2ax_{d,1})}\hat{\Gamma}_{B,1}。 \tag{22}$$

式中: Γ_B 为阵列 B 的外形因子; $\hat{\Lambda}_{B,i}$ 为阵列 B 中第 i 条补偿线段的外形位置因子。

则利用拆解方式一,该回折形折线线圈的重构等效外形位置因子为: $\Lambda_{eq} = \Lambda_C + \sum_{i=1}^{n}\Lambda_{A,i} + \sum_{i=1}^{n}\Lambda_{B,i}$。再将因子 Λ_{eq} 代入式(16)可计算得到该线圈的电感为 0.369 μH。再设激励电流频率为 100 kHz并代入式(18),可得该线圈的入射场阻抗

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

为0.23 Ω(保留 2 位有效数字)。

对于该回折形折线线圈,还可以将其拆解为线圈阵列 a 及线圈阵列 c,并添加含 8 段补偿线段的阵列 b。记该拆解结果称为拆解方式二,如图 7 所示。

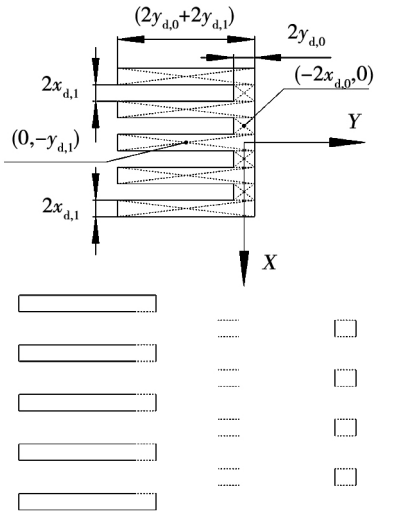


图 7　拆解方式二及其重构等效示意

Fig. 7　The second way of diassembling and reconstitution

在图示坐标系下分别计算上述阵列的外形位置因子。对于线圈阵列 c,其外形位置因子为

$$\sum_{i=0}^{n}\Lambda_{c,i}=\frac{\sin(2\times 4ax_{d,1})}{\sin(2ax_{d,1})}\Gamma_c e^{j0}。\qquad(23)$$

式中: Γ_c 为阵列 c 的外形因子; $\Lambda_{c,i}$ 为阵列 c 中第 i 个线圈的外形位置因子。

线圈阵列 a 的外形位置因子为

$$\sum_{i=0}^{n}\Lambda_{a,i}=\frac{\sin(2\times 5ax_{d,1})}{\sin(2ax_{d,1})}\Gamma_a e^{-jby_{d,1}}。\qquad(24)$$

式中: Γ_a 为阵列 a 的外形因子; $\Lambda_{a,i}$ 为阵列 a 中第 i 个线圈的外形位置因子。

同理,可计算补偿线段阵列 a 的外形位置因子为

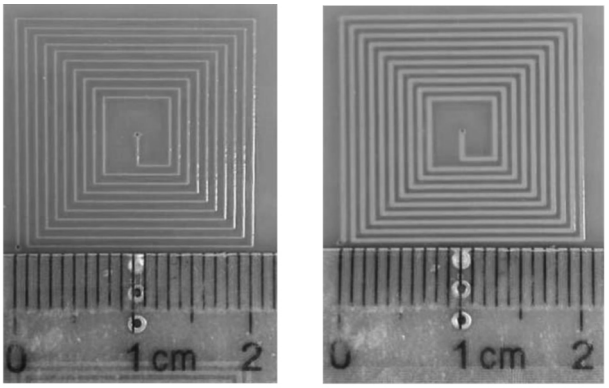
$$\sum_{i=0}^{n}\hat{\Lambda}_{b,i}=\frac{\sin(2\times 8ax_{d,1})}{\sin(2ax_{d,1})}\hat{\Gamma}_{b,1}。\qquad(25)$$

式中: $\hat{\Gamma}_{a,1}$ 为阵列 b 的外形因子; $\Lambda_{b,i}$ 为阵列 b 中第 i 条补偿线段的外形位置因子。

则利用拆解方式二,该回折形折线线圈的重构等效外形位置因子为: $\Lambda_{eq}=\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{a,i}+\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{b,i}+\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{c,i}$。再将因子 Λ_{eq} 代入式(18)并同样设置激励电流频率为 100 kHz,计算可得该线圈的入射场阻抗(即感抗)为 0.23 Ω(保留 2 位有效数字)。通过案例中两种拆解方案的重构结果对比可以看出,本文所提方法与拆解方案无关,具有建模结果的唯一性。

3.2　线宽误差的存在性实验

本节进一步验证实际线圈的线宽因素对建模结果的影响。考虑到"回折形"折线线圈属于单匝线圈,其有效电感较小,实验测量的精度不高。因此,特别利用 PCB 印刷电路板制作了两个螺线形折线线圈。该形状折线线圈的有效匝数较多,电感和电抗也相对较大,有利于实验测量。本节实验所用线圈如图 8 中所示。



(a) 线圈1(细)　　(b) 线圈2(宽)

图 8　不同线宽的同形螺线形折线螺线线圈

Fig. 8　Similar shape meander spiral coils with different width

从图 9 中可以看出,除了线宽不同外,两个折线线圈的外形完全相同。两螺线形折线线圈具体外形参数如表 2 中所示。

表 2　螺线形折线线圈外形参数

Table 2　The shape parameters of meander spiral coils

几何参数	线圈 1	线圈 2
线圈长 L/mm	20	20
线圈宽 W/mm	20	20
线宽 w/mm	0.2	0.4
匝间距 d/mm	0.8	0.8
厚度 δ/mm	0.035	0.035
匝数 N	10	10

使用日本高精度阻抗测量仪 HIOKI IM3523 对上述线圈的自感量进行测量。将线圈置于高绝缘性的空芯泡沫塑料上方,以减小周围环境对入射场的

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

影响。实验过程如图9中所示。

为了减小PCB制造工艺给线圈外形尺寸带来的误差，制作了5组相同参数的PCB平面线圈，并分别进行线圈自感测量，测试结果如表3中所示。

图9 线圈的阻抗测量实验

Fig. 9 Self-inductance measurements of coils

表3 多组螺线形折线线圈自感实测结果

Table 3 The results of self-inductance measurements

No	线圈1/μH	线圈2/μH
1	1.483	1.360
2	1.495	1.369
3	1.485	1.364
4	1.485	1.360
5	1.488	1.372
平均值	1.487	1.365

从对线圈1和线圈2的自感量直接测量结果来看，线圈的线宽对阻抗的影响是明显的。且随线宽增加，自感量呈减小的趋势，因此实际线圈的线宽不能忽视，需要对其进行误差补偿。

利用文献[17]中介绍的线圈模型分别线圈1和线圈2自感量分别进行计算。再使用本文所提模型中带有误差补偿项和不带有误差补偿项的两种情况下，分别对线圈1和线圈2进行计算，上述结果如下表所示。

表4 不同方法建模结果对比

Table 4 Comparion of the coil´s calculation result with different theoretical methods

No	线圈1/μH	线圈2/μH
实测值(平均)	1.487	1.365
文献[17]模型	1.624	1.624
本文模型(无补偿)	1.602	1.557
误差补偿修正量	-0.103	-0.179
本文模型(带补偿)	1.499	1.378

从表4中可以看出，由于文献[17]中模型并不考虑线圈的线宽参数，因此其对线圈1和线圈2的建模结果相同，且自感量的计算结果略大于实际测量值。本文所提模型中包含了线宽方向的积分，因此，即使在无补偿项情况下，本文方法对线圈自感的建模精度也略高于文献[17]中的方法。

当本文所提模型带有误差补偿项后，可对重构过程中互逆线形电流的空间错位进行修正，因此，具有最好的建模精度。而且，实际线宽越大，误差补偿的修正量也越大，这一点也与实际工程经验相吻合。

3.3 入射场和散射场阻抗模型的实验验证

本文所提解析模型包含入射场阻抗 Z 及散射场阻抗 ΔZ 两个部分，因此还可对涡流引起线圈阻抗的变化进行计算。将上述实验中的线圈1(其参数见表2)置于30 mm厚的光滑铝板上方，并对涡流引起的散射场阻抗变化进行实验。实验过程中，在线圈1和铝板表面之间铺设提离垫片，通过改变垫片厚度来调整线圈的实际提离值。同时，使用IM3523LCR监测线圈的感抗变化，并使用Rigol MSO1074Z型示波器观察线圈上的波形变化，整个验证实验过程如图10所示。

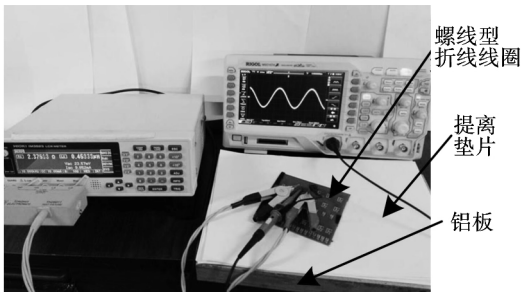


图10 涡流线圈的阻抗验证实验

Fig. 10 Impedance measurements of eddy-current coils

对照式(18)，模型计算中有2个参数在实验中是无法精确确定的。第一个不确定参数是实验所用铝板的实际电导率 σ；通过资料查询，铝材的电导率 σ 在 $3.1\times10^7\sim4.0\times10^7$ S/m 范围之间，具体与不同型号铝材所含合金及杂质有关。另一个不确定参数是线圈实际有效的提离值 h。由于PCB线圈表面有一层保护漆，而铝板表面也铺设有防短路薄膜，会对线圈形成一个固有提离值偏差。对于该“固有提离值”，暂无法精确测量，只能推测其范围在0.2 mm～0.5 mm之间。

首先，分别固定激励电流频率 f 为10 kHz、50 kHz、200 kHz，并记录随提离垫垫片厚度变化的实测线圈阻抗。根据实测结果，绘制测试数据的阻

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

抗点阵图，如图 11 中所示，其中，方形、圆形和三角形点阵分别为 10 kHz、50 kHz、200 kHz 时的测试数据。

再将线圈 1 的几何参数及铝材电导率的取值范围代入式(19)进行模型计算，分别确定三组频率值下理论阻抗的变化范围(图 11 中虚线所包含的阴影部分)。从如图 11 中可以看出，实验测量所得点阵图均包含在理论计算阻抗的变化范围内。并且在该取值范围内，测量值与模型值最大的误差为 3.2%。

若根据实验测试结果，对铝板电导率 σ 进行系统误差标定; 则经反复计算，当铝板电导率被标定为 3.536×10^7 S/m 时，可得到图 11 中的黑色实线。

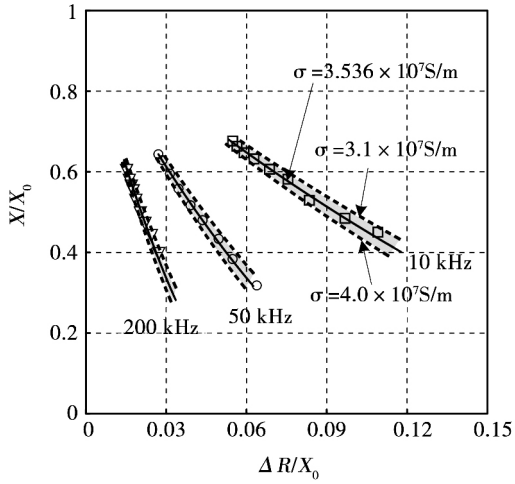


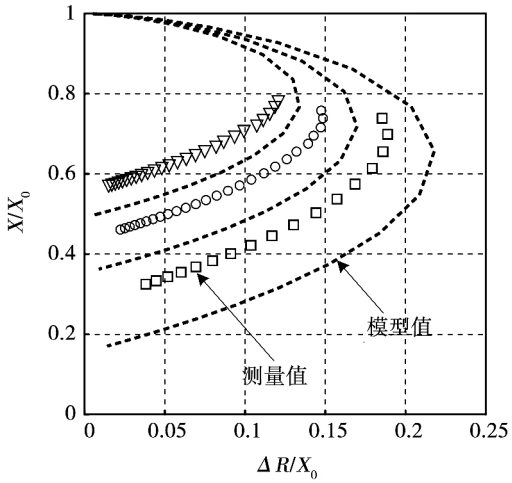
图 11　不同提离值下的建模结果验证

Fig. 11　Model verifications at different heights

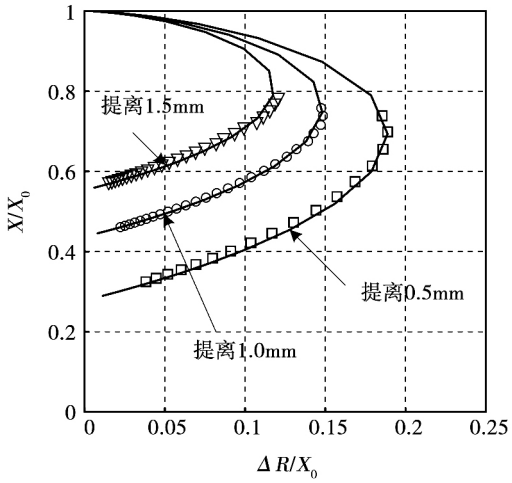
从图中可以看出，对铝板电导率 σ 进行标定后，测量值和模型值的趋势基本一致。随着提离值 h 的增加，$\Delta R/X_0$ 趋近于 0，$X/X_0X/X_0$ 趋近于 1。说明，当线圈远离导体时，散射场造成的影响逐渐减小，线圈的电抗趋近于自感感抗。本文模型能有效反映提离值对线圈阻抗的影响规律。

然后，在标定电导率的基础上，再设置三组不同厚度的提离垫片并调节激励电流频率 f，记录随电流频率 f 变化的实测线圈阻抗。若忽略固有提离值，直接用提离垫片的厚度作为线圈提离值代入式(19)进行模型计算，则绘制的阻抗平面图如图 12(a)所示。此时，模型值与测量值偏差非常大，误差最大可达 26%。从图中也可以看出，该情况下，模型值明显存在一个提离值测定上的系统误差。

同样，可根据测试结果，对该实验过程中由固有提离值引入的系统误差进行标定。经反复计算，当固有提离值标定为 0.4 mm 时，用提离垫片厚度 + 固有提离值作为线圈的实际提离值 h 进行模型计算，可基本消除该系统误差。图12(b)中给出了实际提离值 h 分别为 0.5 mm、1.0 mm 及 1.5 mm 时，标定后的测量值和模型值的对比结果。



(a) 固有提离值标定前



(b) 固有提离值标定后

图 12　不同激励频率下的建模结果验证

Fig. 12　Mmodel verifications in different excitationl frequencies

从图中可以看出，标定后理论值和实测值之间的系统误差得到有效消除，两者偏差基本在 1% 左右。当线圈实际提离值 h 保持不变时，随着激励频率 f 的增加，$\Delta R/X_0$ 先增大后减小，阻抗曲线呈现半圆形。该建模结果也与实际工程应用中涡流线圈的频率响应规律相吻合。

4　结　论

1、本文提出了折线线圈的拆解及重构思路，可

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

将单矩形、螺线形、回折形及其它任意不规则形态折线线圈置于同一个统一模型中进行阻抗机理分析。同时，考虑了现有理想模型中忽略的线圈宽度和厚度等所产生的误差，弥补了在电能无线传输、EMAT电磁激励等线圈的设计方面现有方法的不足。

2、通过定义外形位置因子 $\Lambda = \Gamma\Psi$，单矩形折线线圈的阻抗模型可表达为包含 Λ 的广义二重积分表达式。任意形状折线线圈可拆解为 N 个几何中心与尺寸具有一定关系的单矩形折线线圈阵列的串联。

3、重构误差可通过对折线线圈的外形位置因子 Λ 进行补偿。其补偿项的取值仅由补偿线段端点的点外形位置因子决定，而与各串联等效折线线圈的具体形态、位置无关。

4、文中所提的带有误差补偿项的折线线圈串联等效电磁模型，可用于置于导体上方的不同形状、激励频率、提离高度的任意形状折线线圈的入射场阻抗及散射场阻抗的解析计算。

参 考 文 献:

[1] SHI Y L, CHEN D G. An on-chip inductive impedance measurement method with adaptive measurement range control for mwm-array based nde applications [C] // 2012 IEEE 55th International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS), IEEE, 2012: 618 - 621.

[2] FAVA J O, RUCH M C. Calculation and simulation of impedance diagrams of planar rectangular spiral coils for eddy current testing [J]. NDT &E International, 2006, 39(5): 414.

[3] 张献，杨庆新，张欣，等. 新型电磁耦合谐振式无线电能传输系统建模与实验验证(英文) [J]. 电工技术学报，2014，29(2):185.
ZHANG Xian, YANG Qingxin, ZHANG Xin, et al. Modeling and experimental verification for a novel wireless power transmission system via electromagnetic resonant coupling [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2014, 29(2):185.

[4] SOLOVEV D B, SHADRIN A S. Instrument current transducers with rogowski coils in protective relaying applications [J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2015, 73: 107.

[5] 李明亮，邓明晰，高广健. 电磁超声换能器激发超声兰姆波的模式展开分析 [J]. 声学学报，2014，39(3): 385.
LI Mingliang, DENG Mingxi, GAO Guangjian. Modal expansion analyses of ultrasonic lamb waves generated by electromagnetic ultrasonic transducers [J]. Acta Acustica, 2014, 39(3): 385.

[6] 王维，黄学良，谭林林，等. 磁谐振式无线电能传输系统谐振器参数对传输性能的影响性分析 [J]. 电工技术学报，2015，30(19): 1.
WANG Wei, HUANG Xueliang, TAN Linlin, et al. Effect analysis between resonator parameters and transmission performance of magnetic coupling resonant wireless power transmission system [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2015, 30(19): 1.

[7] SHEN L W, TANG W C, XIANG H L, et al. Uniform magnetic field by changing the current distribution on the planar coil for displacement-insensitive wireless power transfer/near field communication [J]. Microwave and Optical Technology Letters, 2015, 57(2): 424.

[8] 王鹏，丁天怀，傅志斌. 微小平面电感线圈近场涡流效应的计算模型与实验验证 [J]. 清华大学学报(自然科学版)，2009，49(5):64.
WANG Peng, DING Tianhuai, FU Zhibin. Mathematic model and experimental test for near-filed eddy current of small planar inductance coil [J]. Journal of Tsinhua University(Science and Technology), 2009, 49(5):64.

[9] 王维，黄学良，周亚龙，等. 双中继无线电能传输系统建模及传输效率分析 [J]. 电工技术学报，2014，29(9): 1.
WANG Wei, HUANG Xueliang, ZHOU Yalong, et al. Modeling and transmission efficiency analysis of wireless power transmission system with dual relays [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2014, 29(9): 1.

[10] THEODOULIDIS T P, KRIEZIS E E. Impedance evaluation of rectangular coils for eddy current testing of planar media [J]. NDT& E International, 2002, 35(6): 407.

[11] 郝宽胜，黄松岭，赵伟，等. 基于二阶矢量位的矩形截面回折线圈阻抗和脉冲磁场的解析建模与计算 [J]. 物理学报，2011,60(7):791.
HAO Kuansheng, HUANG Songling, ZHAO Wei, et al. Analytical modelling and calculation of impedance and pulsed magnetic field for rectangular meander coil based on second order potential [J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(7):791.

[12] 刘鹏程. 电磁场解析方法 [M]. 北京: 电子工业出版社，1995.

[13] 刘鹏程. 工程电磁场简明手册 [M]. 北京: 高等教育出版社，1991.

[14] W R SMYTHE 著，戴世强译. 静电学与电动力学(下册) [M]. 北京: 科学出版社，1982.

[15] WESTREICHER M, MAYER L W, PRESTROS R, et al. Efficient rectangular spiral coil simulation based on partial element equivalent circuit method using quasistationary approximation [C] // Antennas and Propagation Conference (LAPC), 2013 Loughborough. IEEE, 2013: 605 - 610.

[16] 李素环，廖承林，王丽芳，等. 无线电能传输中线圈设计对效率的影响综述 [J]. 电工技术学报，2015，S1: 270.
LI Suhuan, LIAO ChengLin, WANG Lifang, et al. A review of the impacts of coil design on system efficiency of wireless power transmission [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2015, S1: 270.

[17] ISHIDA K, ITAYA T, TANAKA A, et al. Arbitrary-shaped single-layer coil self-inductance using shape functions [J]. IET Science Measurement & Technology, 2011, 5(1):21.0

(编辑: 刘素菊)

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net