

## 飞机结构疲劳可靠度贝叶斯组合预测\*

袁修开, 刘文杰

(厦门大学 航空航天学院, 福建 厦门 361005)

**摘要:** 在实际工程中,常常需要利用模型去描述和分析问题。然而模型亦存在不确定性,即可能存在多个描述同一现象的模型,例如多个疲劳分析的模型。针对飞机结构的疲劳可靠性问题,提出在考虑三种裂纹扩展模型下基于贝叶斯公式的疲劳可靠度组合预测方法。针对不同应力水平下飞机结构试件的裂纹扩展数据建立了三种随机裂纹扩展模型;在考虑模型参数不确定性条件下,采用贝叶斯模型平均方法对三种模型进行组合;基于组合模型分析结构的可靠度。所提方法在分析飞机结构疲劳可靠度上,采用了组合模型,能够最大限度保障结果的稳定性。此外,考虑了模型参数的不确定性,能够得到更为合理的裂纹扩展预测分布和可靠度预测值。给出的实例及分析结果表明所提方法可行。

**关键词:** 飞机结构; 疲劳可靠度; 贝叶斯组合预测; 模型不确定性; 随机裂纹扩展

**中图分类号:** V215.5   **文献标志码:** A   **文章编号:** 1001-2486(2018)04-100-06

## Bayesian combination forecasting for fatigue reliability of aircraft structures

YUAN Xiukai, LIU Wenjie

(School of Aerospace Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

**Abstract:** In practical engineering, it is often necessary to use models to describe and analyze problems. However, uncertainty exists in the models. There are many models that can describe the same phenomenon, such as the multiple fatigue analysis models. In order to solve the problem of fatigue reliability of aircraft structures, a combination forecasting method based on Bayesian model averaging was proposed by considering three kinds of crack propagation models. Three random crack propagation models were established by using the crack propagation data of aircraft structures under three stress levels. Considering the uncertainty of the model parameters, the Bayesian model averaging method was used to combine the three models. The reliability of the structure was analyzed based on the combined model. The combined model was used to analyze the fatigue reliability of aircraft structure, which can improve the robustness of the results. In addition, considering the uncertainty of the model parameters, more reasonable predictive distribution of crack propagation as well as the reliability can be obtained. Examples and analysis results are given to show the feasibility of this method.

**Key words:** aircraft structures; fatigue reliability; Bayesian combination forecasting; model uncertainty; random crack propagation

在飞机的服役阶段,需要充分保证其结构的安全性。评价结构安全性的有效方法是对结构的可靠度进行预测,进而得到每个时刻下结构的可靠度。已有不少研究人员对于结构或系统的可靠度预测进行了研究,文献[1]采用贝叶斯动态线性模型对桥梁结构的可靠度进行了预测,文献[2]提出了一种在小样本数据下的基于设备状态信息的实时可靠度算法,文献[3]提出了一种基于退化数据的特定系统或元件的实时可靠性评估方法。文献[4]提出了基于贝叶斯更新的飞机结构腐蚀可靠性模型,文献[5-8]提出了当载荷谱确定时只考虑结构特性分散的结构寿命分析方

法,贺小帆等<sup>[9]</sup>对此做了进一步分析提出了综合考虑载荷谱分散和结构特性分散的断裂力学方法,建立了考虑载荷谱分散的裂纹扩展对数正态随机变量模型。

要分析飞机结构的疲劳可靠度,需要建立疲劳可靠度模型,但广泛存在的不确定性给可靠度预测带来了困难。首先,飞机结构所承受的载荷具有分散性,这就导致裂纹扩展速率参数具有分散性<sup>[9]</sup>,且服从对数正态分布<sup>[10-11]</sup>。其次,飞机结构使用期裂纹扩展模型<sup>[9]</sup>在文献[12-16]等中都作为指数型模型进行分析,而只考虑一种模型往往会忽略其他更优的模型<sup>[17]</sup>。因此,有必要

\* 收稿日期: 2017-05-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(U1530122, 51505398); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(20720180072)

作者简介: 袁修开(1981—),男,湖北黄石人,副教授,博士,硕士生导师, E-mail: xiukaiyuan@xmu.edu.cn

综合考虑不同模型以及模型参数的不确定性对分析结构的影响,即考虑模型形式和模型参数的不确定性<sup>[17]</sup>。此外,模型的预测结果和系统真实的响应值之间往往存在误差,而这种误差也具有不确定性,可以称之为模型预测误差不确定性<sup>[17]</sup>。

为此,本文提出了基于裂纹扩展数据点的随机裂纹扩展模型,采用飞机的常用结构材 7075-T7351 铝合金板件的疲劳裂纹扩展数据建立了 3 个随机裂纹扩展模型和 3 个结构疲劳可靠度预测模型,再基于所建立的 2 组模型建立了贝叶斯组合模型,最后基于结构失效模式利用贝叶斯组合模型分析了结构的可靠度。

## 1 飞机结构疲劳可靠度多模型预测

模型不确定性在实际工程中普遍存在,模型不确定性包括模型形式不确定性、参数不确定性和预测误差不确定性<sup>[17]</sup>。在飞机结构疲劳可靠度分析中,只考虑一种模型得出的结果的准确性往往存在较大的偏差,所以综合考虑多个模型的分析结果可以提高其准确性。由于裂纹扩展速率参数具有分散性<sup>[10-11]</sup>,因此结构疲劳可靠度模型需要考虑参数不确定性。假设对于结构的疲劳可靠度预测存在  $K$  个模型,则第  $i$  个模型的预测值  $f_i$  与系统真实响应  $y_i$  之间通常会存在误差  $\varepsilon_i$ ,它们之间的关系为:

$$y_i = f_i(\theta_i, X_i) + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, K \quad (1)$$

式中:  $\theta_i$  和  $X_i$  分别表示模型  $M_i$  的不确定性参数和输入量;  $\varepsilon_i$  为模型误差,一般将模型预测误差视为服从均值为 0、方差为某个参数  $\sigma_i$  的正态分布,即  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2)$ <sup>[17]</sup>。

### 1.1 飞机结构使用期随机裂纹扩展多模型

文献[6-8]提出的飞机结构使用期确定性裂纹扩展模型为:

$$\frac{da(t)}{dt} = Qa^b(t) \quad (2)$$

式中:  $Q$  为确定性裂纹扩展速率参数,  $a(t)$  为结构使用时间为  $t$  时的裂纹尺寸,  $b$  为疲劳裂纹扩展速率关系式中的指数,与载荷谱和应力水平无关。

需要指出的是,式(2)中  $b$  的取值不同,积分得到的裂纹扩展模型的预测准确度就会不同。文献[12-16]仅凭对实验数据的直观判断就得出指数型模型的拟合效果较好,此时将  $b = b_1 = 1$ 。但在没有对比分析数据支撑的情况下,  $b_1 = 1$  时得到的指数型模型不一定是最优的选择。为了充分考虑不确定性,且综合不同的  $b$  取值下的模型信息,本文选取不同  $b$  取值获得多个扩展模型,以

期提高对飞机结构裂纹扩展的预测能力。另取两个不同的  $b$  值为  $b_2 = 0.9$ 、 $b_3 = 1.1$ , 可得到对应 3 个随机裂纹扩展模型。

$$a_{M_1}(t) = a_{t_0} \exp [Q_1(t - t_0)] \quad (3)$$

$$a_{M_{2,3}}(t) = \left[ a_{t_0}^{-b_{2,3}} - (b_{2,3} - 1) Q_{2,3}(t - t_0) \right]^{-\frac{1}{b_{2,3}-1}} \quad (4)$$

其中  $t > t_0$ ,  $Q_1$ 、 $Q_2$  和  $Q_3$  为各模型裂纹扩展速率参数,  $a_{t_0}$  表示在结构使用时间为  $t_0$  时的裂纹尺寸,实际分析时通过最小二乘法拟合得到。一般飞机结构裂纹扩展速率参数  $Q$  具有分散性,也需考虑其不确定性。将  $Q_1$ 、 $Q_2$  和  $Q_3$  作为对数正态变量进行分析<sup>[10-11]</sup>。

### 1.2 飞机结构使用期疲劳可靠度预测多模型

基于 1.1 节建立的随机裂纹扩展多模型,可以对应地建立飞机结构疲劳可靠度预测多模型。结构某一时刻的可靠度定义为该时刻下结构的裂纹尺寸小于裂纹极限尺寸的概率<sup>[12]</sup>。

$$R(t) = \Pr\{a(t) < a_{lim}\} \quad (5)$$

式中:  $R(t)$  为在使用时间为  $t$  时的结构的疲劳可靠度,  $a_{lim}$  为裂纹极限尺寸,  $a(t)$  为在使用时间为  $t$  时的结构裂纹尺寸。

从而,结合式(5)可以在式(3)~(4)的基础上对应建立三个飞机结构使用期疲劳可靠度预测模型。

## 2 贝叶斯组合预测方法

贝叶斯组合预测是基于贝叶斯定理的一种综合多模型信息的预测方法,该方法在考虑模型形式不确定性的基础上,同时也充分考虑了模型中参数的不确定性。

### 2.1 模型概率

给出一个模型集合且假设集合中存在一个正确的模型,则在数学上模型概率定义为模型集合中的某个模型正确的可信度。正确的模型定义为可以完全反映实际系统响应的模型<sup>[17]</sup>,模型概率越大则模型越能反映实际的物理过程。

### 2.2 模型先验概率

在模型先验信息(如专家经验、已有的相关数据储备等)足够充分的情况下,模型先验概率可以取特定值;在信息不充足的情况下,则可将模型的先验概率视为相等的。<sup>[17]</sup>

假设对于结构可靠度预测存在  $K$  个模型,且模型的先验概率都相等,则可以得到每个模型的先验概率:

$$P(M_i) = 1/K, i = 1, 2, \dots, K \quad (6)$$

### 2.3 模型预测分布

考虑模型  $M_i$  与系统响应  $y$  之间存在的误差  $\varepsilon_i$ , 由式 (1) 有  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2)$ , 则模型  $M_i$  的响应预测分布  $y$  可以表示为:

$$g(y|M_i) = \int_{\theta_i} g(\theta_i|M_i) g(y|M_i, \theta_i, X_i) d\theta_i \tag{7}$$

$$g(y|M_i, \theta_i, X_i) = N[f_i(\theta_i, X_i), (\sigma_i)_{\theta_i}^2] \tag{8}$$

其中:  $g(y|M_i, \theta_i, X_i)$  表示确定模型参数  $\theta_i$  和  $X_i$  的值后模型  $M_i$  的响应预测分布;  $f_i(\theta_i, X_i)$  和  $(\sigma_i)_{\theta_i}^2$  分别为  $g(y|M_i, \theta_i, X_i)$  的均值和方差。

采用蒙特卡洛抽样法对模型  $M_i$  中的不确定参数在其所服从的分布内抽取  $L$  组样本  $S = \{\theta_{i_1}, \theta_{i_2}, \dots, \theta_{i_L}\}$ , 文献 [17] 给出了近似求解式 (7) 的计算公式。

$$g(y|M_i) \approx \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L N[f_i(\theta_{i_l}, X_i), (\sigma_i)_{\theta_{i_l}}^2] \tag{9}$$

式中  $\theta_{i_l}$  表示第  $l$  组样本点,  $(\sigma_i)_{\theta_{i_l}}^2$  为参数  $\theta_{i_l}$  时对应的模型方差。

### 2.4 模型似然

模型似然的大小表示为模型预测结果与实验数据  $D$  的接近程度, 文献 [17] 将模型  $M_i (i = 1, 2, \dots, K)$  的似然函数表达形式写为:

$$P(D|M_i) = \int_{\theta_i} g(\theta_i|M_i) g(D|M_i, \theta_i, X_i) d\theta_i \tag{10}$$

式中,  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_N\}$  表示实验数据,  $g(\theta_i|M_i)$  表示模型参数的联合分布函数。

假设实验数据  $d_1, d_2, \dots, d_N$  相互独立, 则  $g(D|M_i, \theta_i, X_i)$  可以表示为:

$$g(D|M_i, \theta_i, X_i) = \prod_{j=1}^N N[d_j; f_i(\theta_i, X_{ij}), (\sigma_i)_{\theta_{ij}}^2] \tag{11}$$

式中,  $f_i(\theta_i, X_{ij}) (j = 1, 2, \dots, N)$  和  $(\sigma_i)_{\theta_{ij}}^2$  分别表示模型  $M_i$  预测分布的均值和方差。

采用蒙特卡洛抽样法对模型  $M_i$  中的不确定参数在其所服从的分布内抽取  $L$  组样本  $S = \{\theta_{i_1}, \theta_{i_2}, \dots, \theta_{i_L}\}$ , 则当  $L$  足够大时, 样本  $S$  可以近似反映模型参数的不确定性。给出样本点  $\theta_{ij} (j = 1, 2, \dots, L)$ , 式 (11) 可以表示为:

$$g(D|M_i, \theta_i, X_i) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_i)_{\theta_{ij}}^2}} \exp\left(-\frac{[d_j - f_i(\theta_{ij}, X_{ij})]^2}{2(\sigma_i)_{\theta_{ij}}^2}\right) \tag{12}$$

式 (12) 中参数  $(\sigma_i)_{\theta_{ij}}^2$  的极大似然估计值最能反映模型和实验数据之间的偏差关系。对

式 (12) 两边取对数, 再对  $(\sigma_i)_{\theta_{ij}}$  求导, 使之等于 0, 即可得到方差的极大似然估计值。

$$(\hat{\sigma}_i)_{\theta_{ij}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N [d_j - f_i(\theta_{ij}, X_{ij})]^2}{N} \tag{13}$$

将式 (13) 代入式 (12), 从而可以得出模型似然的估计值为:

$$P(D|M_i) \approx \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left(\frac{1}{2\pi(\hat{\sigma}_i)_{\theta_{il}}^2}\right)^{N/2} \exp(-N/2) \tag{14}$$

### 2.5 模型后验概率

图 1 为贝叶斯定理更新模型先验概率的过程。

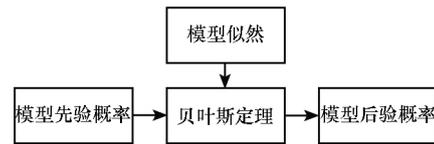


图 1 贝叶斯定理更新模型先验概率过程  
Fig. 1 Process of updating the model prior probability using Bayes' theorem

利用贝叶斯定理将模型先验概率进行更新得到模型的后验概率。

$$P(M_i|D) = \frac{P(M_i) P(D|M_i)}{\sum_{i=1}^K P(M_i) P(D|M_i)} \tag{15}$$

根据对模型先验概率的讨论可以将模型后验概率简化为:

$$P(M_i|D) = \frac{P(D|M_i)}{\sum_{i=1}^K P(D|M_i)} \tag{16}$$

式中  $P(M_i|D)$  为模型  $M_i$  的后验概率。

### 2.6 贝叶斯组合模型

贝叶斯组合模型是基于模型后验概率得到的, 即以模型的后验概率为权重对模型进行加权平均就可以得到贝叶斯组合模型。贝叶斯组合模型的表达式为:

$$\bar{y}_{BMA} = \sum_{i=1}^K P(M_i|D) y_{M_i} \tag{17}$$

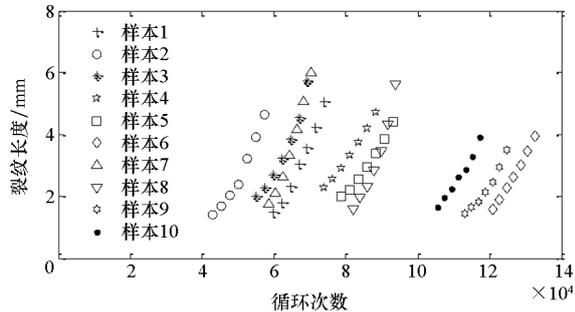
式中  $\bar{y}_{BMA}$  表示贝叶斯组合模型的表达式,  $y_{M_i}$  表示模型  $M_i$  的表达式,  $P(M_i|D)$  表示在已知一组实验数据  $D$  的情况下得到的模型  $M_i$  的后验概率。

## 3 算例

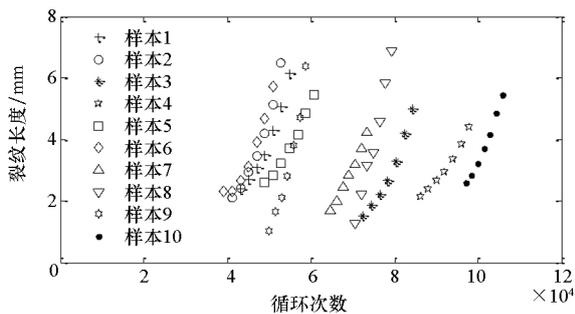
### 3.1 疲劳裂纹扩展数据

航空材料 7075-T7351 铝合金板件的 30 个试件分别在 3 种应力水平进行疲劳试验, 最大应

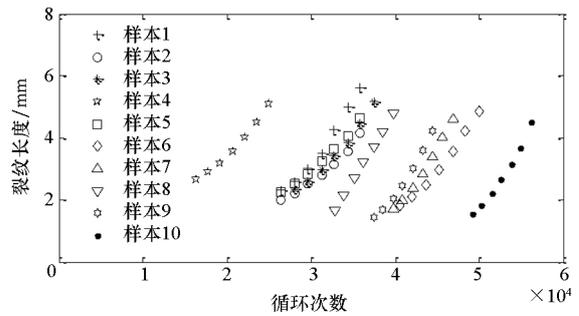
力分别为 130 MPa、150 MPa 和 170 MPa 的应力谱,应力比  $R$  均为 0.6,每个应力水平下 10 个试件(标记:1~10)。测得的疲劳裂纹扩展数据如图 2 所示。每个试件断裂后根据试件断口分析采集  $n=7$  个裂纹扩展数据点。



(a)  $\sigma_{max} = 130$  MPa



(b)  $\sigma_{max} = 150$  MPa



(c)  $\sigma_{max} = 170$  MPa

图 2 3 种应力水平下测得的断口的裂纹扩展数据  
Fig. 2 Data of crack growth of fractures in 3 stress level

### 3.2 模型参数不确定性量化

首先将 3 种应力水平下裂纹扩展速率参数的分布进行分析,采用最小二乘法拟合可得到裂纹扩展速率参数。再对 10 个试件的参数值拟合得到裂纹扩展速率参数的分布。模型参数概率分布函数 (Probability Distribution Function, PDF) 如图 3 所示。通过分析图 3 可以得出,模型形式和应力状况都能影响裂纹扩展速率参数的分布。

### 3.3 贝叶斯定理更新模型概率

依据上述步骤,基于裂纹扩展数据,利用

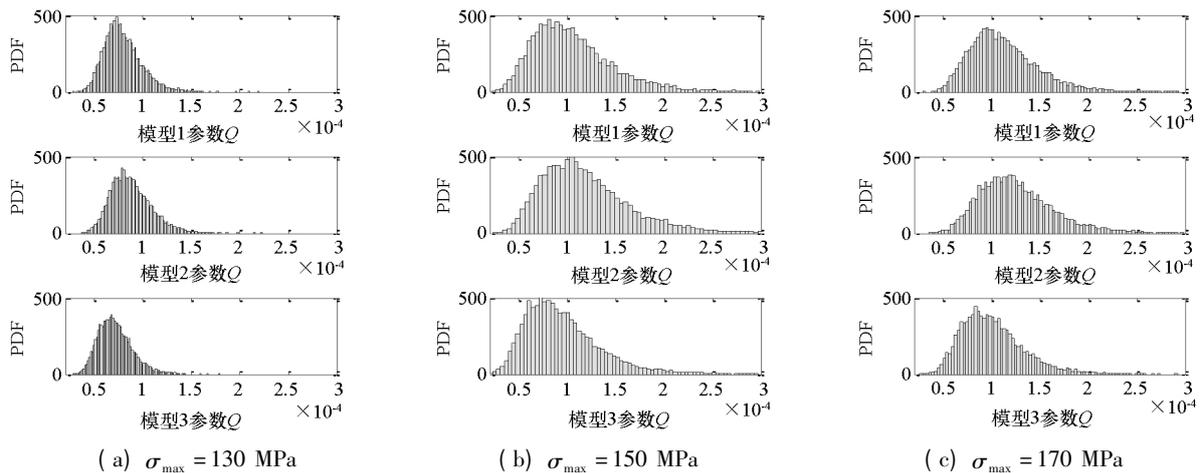


图 3 模型 1、模型 2 和模型 3 中参数  $Q$  的概率分布

Fig. 3 Probability distribution functions of parameters  $Q$  in model 1, model 2 and model 3

式(6)、式(14)和式(16)可计算得到模型的后验概率。针对部分试件的计算分析结果见表 1。模型对于 3 个试件裂纹扩展数据的拟合效果可以从后验概率反映出来,后验概率越大表明模型对于试件裂纹扩展数据的拟合效果越好。模型 1 的后验概率值不总是最大的,这表明常规使用的指数型裂纹扩展模型( $b=1$ )不一定总是最优的选择。

### 3.4 贝叶斯组合模型的建立

求得模型后验概率后,由式(16)建立随机裂纹扩展贝叶斯组合模型和疲劳可靠度贝叶斯组合模型。

$$\bar{a}_{\text{Bayes}}(t) = \sum_{i=1}^3 P(M_i | D) a_{M_i}(t) \quad (18)$$

$$\bar{R}_{\text{Bayes}}(t) = \sum_{i=1}^3 P(M_i | D) R_i(t) \quad (19)$$

$$R_i(t) = Pr(a_{M_i}(t) < a_{lim}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (20)$$

其中:  $P(M_i | D)$  表示模型  $a_{M_i}(t)$  的后验概率,  $R_i(t)$  表示依据结构失效模式得到的疲劳可靠度模型, 飞机结构裂纹极限长度<sup>[12]</sup> 设定为  $a_{lim} = 10 \text{ mm}$ 。

表 1 模型先验概率、模型似然和模型后验概率  
Tab.1 Model prior probability, model likelihood and model posterior probability

应力水平, 试件序号	模型	先验概率	模型似然	后验概率
130 MPa, 2	1	0.333	82.856	0.338
	2	0.333	80.836	0.329
	3	0.333	81.799	0.333
150 MPa, 7	1	0.333	292.293	0.147
	2	0.333	1565.042	0.788
	3	0.333	129.013	0.065
170MPa, 6	1	0.333	495.833	0.269
	2	0.333	1214.370	0.658
	3	0.333	135.975	0.074

### 3.5 裂纹扩展预测分布及结构疲劳可靠度

选取在  $\sigma_{max} = 130 \text{ MPa}$  应力水平下的 2 号试件为例来进行分析。基于试件断口裂纹扩展实验数据的前 6 个数据  $(t_j, a_j) (j = 1, 2, \dots, 6)$ , 首先由式 (3)、式 (4) 确定 3 种裂纹扩展模型, 再通过式 (18) 得到贝叶斯组合模型, 最后依据式 (9) 计算得到单模型和贝叶斯组合模型在数据点  $(t_j, a_j) (j = 7)$  对应时间  $t_7$  处的裂纹扩展预测分布, 如图 4 所示。

由式 (19) ~ (20) 可以计算得到结构的疲劳可靠度, 表 2 中列出了所取 2 号试件在  $t_7$  处的裂纹扩展实验数据的信息, 单模型和贝叶斯组合模型(包括裂纹扩展模型和疲劳可靠度模型) 在该时刻下预测得到的裂纹扩展分布的均值和方差以及疲劳可靠度数据。

由表 1 及表 2 可以看出, 单模型预测能力往往存在很大的差异, 在实际分析中模型的选择往

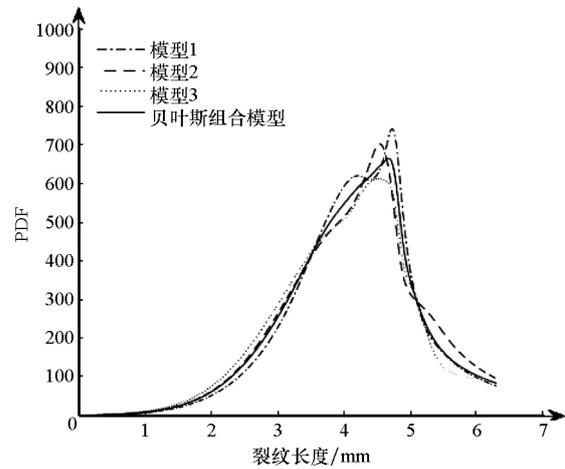


图 4 模型 1、模型 2、模型 3 及贝叶斯组合模型裂纹扩展预测分布

Fig.4 Crack propagation predictive distributions in model 1, model 2, model 3 and Bayesian combined model

往对结果产生很大的影响。而贝叶斯组合预测结果是 3 个单模型预测结果的加权平均, 贝叶斯组合模型能够综合多模型的信息, 其预测分布相对于单模型更能反映实际结构裂纹尺寸可能出现的状态, 其预测结果能够减小由于模型选择带来的预测误差, 其预测结果具有较好的鲁棒性。

## 4 结论

本文将贝叶斯组合预测方法应用在飞机结构的疲劳可靠度预测上, 克服了传统只考虑指数型模型对飞机结构裂纹进行预测以及对结构疲劳可靠度进行分析的缺陷。另外, 从文中的实例分析中, 可以得出结论:

- 1) 模型形式和应力状况都能影响裂纹扩展速率参数分布的计算结果, 在实际工程分析中需要综合考虑不同的模型形式和应力状况。
- 2) 实例中所得的模型的后验概率可知, 飞机使用期裂纹扩展模型的  $b$  值取 1 得到的指数型模型不一定是最优的选择, 分析时可以按照本文方法综合考虑多个不同  $b$  值来建立多模型, 然后再

表 2 裂纹扩展及可靠度预测分析结果

Tab.2 Results of crack propagation and fatigue reliability

应力水平, 试件序号	实验数据		模型	裂纹长度预测均值/ mm	裂纹长度预测方差/ mm <sup>2</sup>	疲劳可靠度 $Pr(a < 10 \text{ mm})$
	循环次数	裂纹长度/mm				
130 MPa, 2	57 297	4.652 7	模型 1	4.177 5	1.424 6	0.999 9
			模型 2	4.490 7	1.740 8	0.998 5
			模型 3	4.637 9	3.619 8	0.974 0
			组合模型	4.286 6	2.186 1	0.988 5

获得组合模型进行预测。

3) 贝叶斯组合预测方法综合了多模型的信息,即考虑了模型形式的不确定性,可以在分析过程中降低由于不恰当的模型选择而带来不准确预测结果的风险,其预测的结果较为稳定和可靠。

### 参考文献(References)

- [1] 樊学平,吕大刚. 基于多个BDLM的桥梁结构可靠度实时预测[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2013, 41(3): 70-75.  
FAN Xueping, LYU Dagang. Real-time reliability forecast of bridge structures based on multiple BDLMs [J]. Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition), 2013, 41(3): 70-75. (in Chinese)
- [2] 陈保家,陈雪峰,田红亮,等. 小样本条件下的设备实时可靠度预测研究[J]. 现代制造工程, 2015(1): 1-8.  
CHEN Baojia, CHEN Xuefeng, TIAN Hongliang, et al. The research on equipment real time reliability prediction under small sample condition [J]. Modern Manufacturing Engineering, 2015(1): 1-8. (in Chinese)
- [3] 李常有,徐敏强,郭耸,等. 基于gamma过程及贝叶斯估计的实时可靠性评估[J]. 宇航学报, 2009, 30(4): 1722-1726.  
LI Changyou, XU Minqiang, GUO Song, et al. Real time reliability assessment based on gamma process and Bayesian estimation [J]. Journal of Astronautics, 2009, 30(4): 1722-1726. (in Chinese)
- [4] 张春晓,周美茵,王志平. 基于贝叶斯更新的飞机结构腐蚀可靠度模型[J]. 航空学报, 2014, 35(7): 1931-1940.  
ZHANG Chunxiao, ZHOU Meiyin, WANG Zhiping. Reliability model of aircraft structure corrosion Bayesian updated [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2014, 35(7): 1931-1940. (in Chinese)
- [5] 刘文琰. 结构可靠性设计手册[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008: 590-723.  
LIU Wenting. Design handbook for structural reliability [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2008: 590-723. (in Chinese)
- [6] Provan J W. Probabilistic fracture mechanics and reliability [M]. Nederland: Martinus Nijhoff Publishers, 1987: 219-251.
- [7] Manning S D, Yang J N. Advanced durability analysis. volume 1. analytical methods [R]. General Dynamics Fort Worth TX Fort Worth DIV, 1987.
- [8] 刘文琰,郑旻仲,费斌军. 概率断裂力学与概率损伤容限/耐久性[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1999: 169-181.  
LIU Wenting, ZHENG Minzhong, FEI Binjun. Probability fracture mechanics and probabilistic damage tolerance and durability [M]. Beijing: Beihang University Press, 1999: 169-181. (in Chinese)
- [9] 贺小帆,董颖豪,李玉海,等. 综合考虑载荷谱和结构特性分散的概率断裂力学方法[J]. 航空学报, 2015, 36(4): 1142-1149.  
HE Xiaofan, DONG Yinghao, LI Yuhai, et al. Probabilistic fracture mechanics approach accounting for both the variability of load spectra and of structure properties [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2015, 36(4): 1142-1149. (in Chinese)
- [10] 王智,刘文琰,王磊. 单机结构疲劳分散系数研究[J]. 机械强度, 2009, 31(1): 150-154.  
WANG Zhi, LIU Wenting, WANG Lei. Study on fatigue scatter factor of individual aircraft structure [J]. Journal of Mechanical Strength, 2009, 31(1): 150-154. (in Chinese)
- [11] He X F, Sui F C, Zhai B, et al. Probabilistic and testing analysis for the variability of load spectrum damage in a fleet [J]. Engineering Failure Analysis, 2013, 33: 419-429.
- [12] Molent L, Barter S A. A comparison of crack growth behaviour in several full-scale airframe fatigue tests [J]. International Journal of Fatigue, 2007, 29(6): 1090-1099.
- [13] Liu H W. Fatigue crack propagation and applied stress range—an energy approach [J]. Journal of Basic Engineering, 1963, 85(1): 116-120.
- [14] Potter J M, Yee B G W. Use of small crack data to bring about and quantify improvements to aircraft structural integrity [R]. Air Force Wright Aeronautical Labs Wright-Patterson, 1983.
- [15] Molent L, Jones R, Barter S, et al. Recent developments in fatigue crack growth assessment [J]. International Journal of Fatigue, 2006, 28(12): 1759-1768.
- [16] Barter S, Molent L, Goldsmith N, et al. An experimental evaluation of fatigue crack growth [J]. Engineering failure analysis, 2005, 12(1): 99-128.
- [17] Park I. Quantification of multiple types of uncertainty in physics-based simulation [D]. USA: Wright State University, 2012.