

部分范数约束的稀疏恢复算法及其在单载波水声数据遥测中的应用

伍飞云^{1,2}, 杨坤德^{1,2}, 童峰³

(1. 西北工业大学航海学院, 陕西 西安 710072;
2. 西北工业大学海洋声学信息感知工业和信息化部重点实验室, 陕西 西安 710072;
3. 厦门大学水声通信与海洋信息技术教育部重点实验室, 福建 厦门 361005)

摘要: 对于单载波水声数据压缩与恢复问题, 压缩感知能以较低能耗获得信号压缩与恢复效果。但压缩感知核心目标是直接求最小 l_0 范数, 该问题表现为 NP 难问题, 因此, 常将其转化为求 l_1 范数约束最小化问题, 而求 l_1 范数约束最小化的稀疏解精度有限。基于此, 推导出基于部分范数约束的稀疏信号恢复算法, 该算法通过部分范数约束在拉格朗日求解中增加一个零吸引项, 从而动态分配稀疏抽头的软阈值。同时, 该算法用于实际海上数据的遥测, 结合离散余弦变换 (DCT), 可将单载波水声数据恢复精度提高。

关键词: 压缩感知; 单载波水声数据; 部分范数约束

中图分类号: TN929.3

文献标识码: A

doi: 10.11959/j.issn.1000-436x.2018099

Partial-norm-constrained sparse recovery algorithm and its application on single carrier underwater-acoustic-data telemetry

WU Feiyun^{1,2}, YANG Kunde^{1,2}, TONG Feng³

1. School of Marine Science and Technology, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China
2. Key Laboratory of Ocean Acoustics and Sensing Ministry of Industry and Information Technology, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China
3. Key Laboratory of Underwater Acoustic Communication and Marine Information Technique of the Ministry of Education, Xiamen University, Xiamen 361005, China

Abstract: To solve the problem of single carrier underwater-acoustic-data telemetry, compressive sensing (CS) provides competitive performance of compression and recovery with low energy consumption. The primary objective of CS is to minimize the l_0 norm, which is an NP hard problem. Hence, the common methods were transferred to minimize l_1 norm. However, l_1 norm minimization provided a limited accuracy. A partial-norm-constraint (PNC) based sparse signal recovery method was derived, which adopted PNC as a zero attraction in a Lagrange method, to distribute the soft threshold for the non-zero taps. The proposed method is used for at-sea data telemetry. Combining with DCT, the proposed method improves the recovery accuracy.

Key words: compressive sensing, single carrier underwater-acoustic-data, partial-norm-constraint

1 引言

水下无线传感网络涉及诸多领域, 如水下数据

监测、污染控制、气象预报等^[1-3]。水下单载波水声数据的遥测则为水下无线传感网络的一个分支和具体应用, 如水下自主航行器的控制、舰船噪声监

收稿日期: 2017-09-22; 修回日期: 2018-04-09

通信作者: 杨坤德, ykdzym@nwpu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.61701405); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目 (No.3102017OQD007); 中国博士后科学基金资助项目 (No.2017M613208)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.61701405), The Central University Basic Business Expenses Special Funding for Scientific Research Projects (No.3102017OQD007), China Postdoctoral Science Foundation Projects (No.2017M613208)

测以及水声通信等。由于观测和记录的数据时间长、容量大，加上无线通信带宽有限，且与卫星通信成本高，无线传感器所携带的能量有限等问题，在设计水下单载波水声数据的遥测系统时，不得不考虑数据压缩问题，而数据压缩越大，恢复精度必将受到影响，如何提高算法的恢复精度是本文研究的重点内容。

传统的数据压缩方法诸如小波压缩^[4]，能耗大且恢复精度有限。与小波压缩方法不同，压缩感知 (CS, compressed sensing) 采用稀疏二进制传感矩阵^[5]，以降低能耗与成本。但 CS 算法仅适用于能稀疏表达的信号^[6-7]，因此，对于处理时域非稀疏的水声信号，则需考虑将水声信号进行稀疏化表达。结合单载波水声信号的频域稀疏特性，本文考虑在离散余弦变换 (DCT, discrete cosine transform) 域对压缩的信号进行估计，并最终恢复出观测的单载波信号。

基于 DCT 框架，压缩感知的核心目标是直接求最小 l_0 范数，然而该问题不可直接获取^[6-7]，通常的办法是采用最小 l_1 范数进行代替，典型的算法包括基于最小 l_1 范数的拉格朗日算法^[8]和硬阈值迭代 (IHT, iterative hard threshold) 算法^[9]。前者获得的稀疏解精度有限，而后者不能保证所求解为稀疏解^[10]，改进的思路是在所求解中加入稀疏度的限制使其稀疏化。但这些方法不足以改善稀疏解的估计精度。贪婪算法作为广泛采用的稀疏求解算法，具体包括匹配追踪 (MP, matching pursuit) 算法^[11]和正交匹配追踪 (OMP, orthogonal matching pursuit) 算法^[12]。然而这些算法是局部搜索最优，所获得的解不是全局最优。

本文将部分范数约束 (PNC, partial-norm-constraint) 引入优化目标中，以取代直接对 l_1 范数进行最小化策略。事实上，PNC 首次应用在有限长单位冲激响应滤波器^[13]，随后在范数自适应算法^[14]和自适应零吸引因子算法设计中得以应用^[15]，进一步地，PNC 结合压缩感知框架构建了稀疏恢复算法^[16]。然而，以上算法主要是在实数域中进行讨论和设计。本文将 PNC 与拉格朗日乘子法结合，推导出 DCT 域的稀疏恢复算法。本文的创新点如下。

1) 结合压缩感知框架对单载波水声数据进行压缩和恢复研究，在该框架下，数据的大量压缩将有助于提高遥测系统的电池使用时间，降低网络传输数据的负载。

2) 将部分范数约束添加到测量关系式中，并通过拉格朗日算子法得到解析式，从而导出基于部分范数约束下的稀疏求解策略。该算法的性能将在后续部分范数与传统算法进行对比和分析。

对本文采用的数学符号做统一说明：上角标 T 表示向量或矩阵的转置，上角标 H 表示共轭转置， I 表示单位矩阵， $\|\theta\|_0$ 表示向量的非零元素的个数， $\|\theta\|_1$ 表示向量各元素的绝对值之和， $\|\theta\|$ 表示向量的欧氏长度， $E(d_i)$ 表示第 i 列列向量 d_i 的平均值。

2 模型建立

将采集的水声数据记为 $x = [x_1, \dots, x_N]^T$ ，称为观测值，如不进行压缩处理， x 采集的数据量大且传输能耗高，基于 CS 的数据获取方式在数据压缩和降低能耗方面提供了新思路，含噪环境下基本的数据获取模型为

$$y = \Phi x + v \tag{1}$$

其中， Φ 表示 $M \times N$ 的测量矩阵，且 $M \ll N$ ， Φ 随机选取 M 列线性无关的向量，压缩向量 y 和 v 维数都为 $M \times 1$ ，由于 $M \ll N$ ，即 y 的维度远小于原始数据 x 的维度，因此， y 的存储和传输比 x 的要求更低，在终端，基于合理选择的 Φ ，CS 算法可从压缩信号 y 中重构^[17]，且不需要任何先验知识。本文选取随机二进制矩阵作为测量矩阵。

实际应用中， x 虽然在时域表达不稀疏，但在变换域中可由一组正交基 ψ_i 表示为

$$x = \sum_{i=1}^N \psi_i^T \theta \tag{2}$$

其中， $\theta = \langle x, \psi_i \rangle$ 是 $N \times 1$ 的向量，且 $\Psi = [\psi_1, \dots, \psi_N]$ 为 $N \times N$ 的字典矩阵。本文采用 DCT 矩阵作为字典矩阵。 $\psi_i (i=1, \dots, N)$ 的构成如下：设 $d_i = \cos\left(\frac{i\pi[0:1:N-1]^T}{N}\right)$ ， $0 < i < N$ ，用 Matlab 语言表示变化步长为 1， $c_i = d_i - E(d_i)$ ， $0 < i < N$ ，则 $\psi_i = \frac{c_i}{\|c_i\|}$ ， $i=1, \dots, N$ 。128×128 维的 Ψ 如图 1 所示。

若向量 θ 中有 κ 个非零元素，则称 θ 为 κ 稀疏，若将噪声影响融合到待压缩的信号中，则模型(1)变为

$$y = \Phi x = \Phi \Psi \theta = A \theta \tag{3}$$

其中， $A = \Phi \Psi$ ，且 $\kappa \leq M < N$ 。

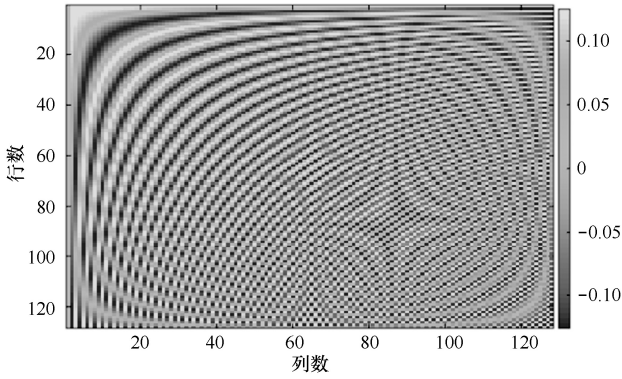


图 1 128×128 维的 Ψ

经测量矩阵 Φ ， $N \times 1$ 的信号 \mathbf{x} 压缩为 $M \times 1$ 的信号 \mathbf{y} ，由于测量矩阵是超完备的，即存在无数多个解，设计的目标是找出其中最稀疏的解。因此，优化目标为

$$\begin{aligned} \min \|\theta\|_0 \\ \text{s.t. } \mathbf{y} = \Phi\Psi\theta \end{aligned} \quad (4)$$

其中， $\|\theta\|_0$ 为 θ 的非零元素个数，设该问题的解为 $\tilde{\theta}$ ，则重构信号 $\tilde{\mathbf{x}}$ 可由以下获得

$$\tilde{\mathbf{x}} = \Psi\tilde{\theta} \quad (5)$$

3 稀疏解估计

一旦模型建立，余下的目标是为设计优化算法求解稀疏解，优化目标(4)是一个 NP 难问题，因此可转化为

$$\begin{aligned} \min \|\theta\|_1 \\ \text{s.t. } \mathbf{y} = \mathbf{A}\theta \end{aligned} \quad (6)$$

解决目标(6)的一个常用方法是 IHT 算法^[9]，其核心为

$$\theta_{i+1} = H_s(\theta_i + \mu A^H(\mathbf{y} - A\theta_i)) \quad (7)$$

其中，阈值函数 $H_s(p_i)$ 定义为

$$H_s(p_i) = \begin{cases} 0, & |p_i| < \lambda_s(\mathbf{p}) \\ |p_i|, & |p_i| \geq \lambda_s(\mathbf{p}) \end{cases} \quad (8)$$

其中， $\lambda_s(\mathbf{p})$ 为设置的阈值，具体设置办法为：将向量 $\theta_i + \mu A^H(\mathbf{y} - A\theta_i)$ 中绝对值由大到小进行排序，选取排在第 s 个元素的绝对值作为阈值，即将接近零的元素值设置为零。该方法的设计因不需要求解逆矩阵，算法结构简单，运行速度快，但精度有限，且算法性能依赖于参数阈值 $\lambda_s(\mathbf{p})$ 和步长 μ 的选取。此外，还需要保证 \mathbf{A} 是正则化的。换一种思路，尝试采用拉格朗日乘子法求解如下问题

$$F(\theta, \lambda) = \|\theta\|_1 + \lambda^T(\mathbf{y} - \mathbf{A}\theta) \quad (9)$$

分别求偏导并置零，有

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial \|\theta\|_1}{\partial \theta} - A^T \lambda = \mathbf{0} \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \mathbf{y} - \mathbf{A}\theta = \mathbf{0} \end{cases} \quad (10)$$

记

$$\frac{\partial \|\theta\|_1}{\partial \theta} = \text{sign}(\theta) = \mathbf{G}^{-1}\theta \quad (11)$$

其中

$$\mathbf{G} = \text{diag}(|\theta_1|, \dots, |\theta_N|) \quad (12)$$

其中， diag 表示将向量进行对角化。交替代换，最终可得到解析解为

$$\theta = \mathbf{G}A^T(\mathbf{A}\mathbf{G}A^T)^{-1}\mathbf{y} \quad (13)$$

无论是 IHT 算法还是基于 l_1 范数的拉格朗日算法，其核心都是围绕最小化 l_1 范数展开的，因此，获得的精度有限，本文尝试采用 PNC 范数约束，构建目标函数为

$$F(\theta, \lambda) = \|\theta\|_{\text{PNC}} + \lambda^T(\mathbf{y} - \mathbf{A}\theta) \quad (14)$$

其中，PNC 范数 $\|\theta\|_{\text{PNC}}$ 定义详见文献[11,14]（文献中将其称为非均匀范数 NNC，此处为了避免混淆 2 种算法，故本文算法名称采用 PNC）。分别求偏导并置零为

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial \|\theta\|_{\text{PNC}}}{\partial \theta} - A^T \lambda = \mathbf{0} \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \mathbf{y} - \mathbf{A}\theta = \mathbf{0} \end{cases} \quad (15)$$

记

$$\frac{\partial \|\theta\|_{\text{PNC}}}{\partial \theta} = \mathbf{F}\text{sign}(\theta) = \mathbf{F}\mathbf{G}^{-1}\theta \quad (16)$$

其中， \mathbf{G} 如式(11)所述，而 \mathbf{F} 为

$$\mathbf{F} = \text{diag}\left(\frac{\text{sgn}[\sigma - |\theta_1|] + 1}{2}, \dots, \frac{\text{sgn}[\sigma - |\theta_N|] + 1}{2}\right) \quad (17)$$

其中， σ 为 PNC 算法的阈值，交替代换，可得

$$\mathbf{F}\mathbf{G}^{-1}\theta = A^T \lambda \quad (18)$$

从而有

$$\theta = \mathbf{G}\mathbf{F}^{-1}A^T \lambda \quad (19)$$

因此有

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\theta = \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{F}^{-1}A^T \lambda \quad (20)$$

$$\lambda = (AGF^{-1}A^T)^{-1}y \quad (21)$$

最终可得到解析解为

$$\theta = GF^{-1}A^T(AGF^{-1}A^T)^{-1}y \quad (22)$$

从式(22)可以看出, 该算法表达式具有固定点算法的特征, 因此具有和固定点算法相同的收敛性。值得注意的是, 本文所提算法和作者之前的工作^[13]有以下 3 点不同之处。

1) 之前的工作是将非均匀范数加在经典最小均方误差(LMS)的代价函数中, 从而得到比经典 LMS 多一项计算式的迭代表达式; 本文工作则是将部分范数约束作为一个阈值处理器融入求解的解析式中。

2) 在算法的实际处理中, 之前的工作导出的迭代式可引入重构过程; 而本文工作则引入了一个微小常量以避免病态运算。

3) 之前的工作是向量之间的运算, 可实现在线模式进行处理; 而本文工作方式是逐块进行, 是矩阵的运算形式, 本文工作算法收敛对数据长度的要求低, 且两者的收敛策略也不同, 前者是最陡梯度法, 而本文采用的是拉格朗日算子法。

4 仿真实验

为了评估算法的性能, 采用恢复信噪比(RSNR, recovery signal to noise ratio) 对各算法的恢复精度进行评估。 $RSNR = 20 \lg \frac{\|\theta\|}{\|\tilde{\theta} - \theta\|}$, 其中, $\tilde{\theta}$ 是 θ 的重构。因优化算法的本质是恢复稀疏信号, 仿真实验中设置 $M=40$, $N=100$, 矩阵 A 元素服从高斯分布, 再进行正则化处理。稀疏度(即非零元素的个数)设置为 $\kappa=10$, 稀疏信号中的非零抽头随机分布, 测量信号 y 的信噪比设置为

$SNR = 20 \lg \frac{\|A\theta\|}{\|v\|}$, 本次仿真实验中 $SNR=30$ dB, 采用 PNC、IHT、L1、MP、OMP 算法对稀疏信号进行估计, 得到的估计图与原始图对比情况如图 2 所示, 采用 PNC、IHT、L1、MP、OMP 算法恢复结果计算得到的 RSNR 分别为 28.84 dB、20.72 dB、25.46 dB、22.23 dB 和 25.25 dB。仿真实验中, IHT 算法参数设置为 $\mu=0.95$ 、 $\kappa=10$, L1 和 PNC 算法的迭代次数设置为 40 次, MP、OMP 算法迭代次数为 40 次, PNC 算法中, $\sigma=0.1\|A^{\dagger}y\|$, 其中, $A^{\dagger}=A^T(AA^T)^{-1}$ 为 A 的伪逆矩阵。以上参数都是以 RSNR 最大化设置的。可以看出, IHT 算法虽然结

构简单, 复杂度不高, 但精度最低, OMP、L1 算法虽比 MP、IHT 算法精度有所提升, 但 PNC 算法的精度最高, 这是因为其采用了 PNC 范数约束而不是仅采用 l_1 范数进行约束构建代价函数, 而贪婪算法是局部最优策略。此外, IHT 算法必须要求 A 矩阵正则化才适用, 这一要求限制了其广泛应用, 而 L1 和 PNC 算法没有此项限制。

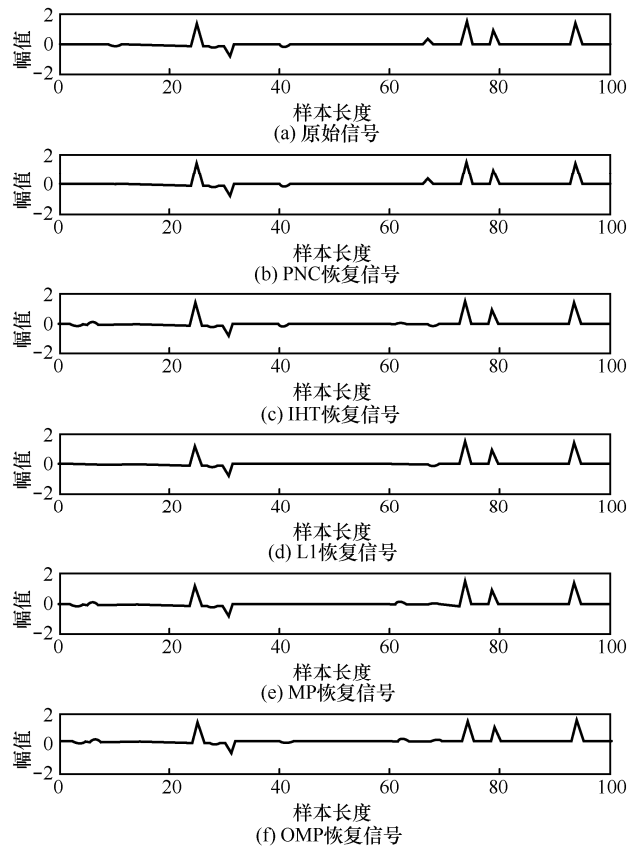


图 2 原始稀疏信号与 5 种算法恢复结果对比

5 海试数据实验

本次实验数据取自 2017 年的东海实验, 声源放置在水下 30 m, 水听器放置在水下 20 m, 收发距离约为 10 km, 水深约为 100 m。选择一段 16 s 的单载频接收信号如图 3 所示, 中心频率 $f_c = 1$ kHz, 采样率 $f_s = 30$ kHz。实验选取的单载波信号具有典型意义, 如该类型信号常用作模拟舰船噪声检测。从图 3(a)可以看出, 单载波信号淹没在噪声中, 时域信号无任何稀疏特征, 因此先将信号转为 DCT 域。实验中, 数据被划分为若干个相同长度的块, 每块长度为 $N=100$, 再对这些数据进行压缩, 压缩至 $M=40$, 然后根据给定的 $A = \Phi\Psi$ 和压缩信号 y ,

采用不同优化算法进行稀疏信号估计，再由这些估计结果和 Ψ 得到恢复信号。各算法参数设置如前，为了展现不同算法对信号的恢复性能细节，取 2 000 个采样点进行对比，如图 4 所示。其中，PNC、IHT、L1、MP、OMP 算法对应的平均 *RSNR* 值分别为 24.51 dB、14.25 dB、22.08 dB、18.52 dB、21.89 dB。可以看出，PNC 算法比 IHT、L1、MP、OMP 算法所获得的精度分别高出 10.26 dB、2.43 dB、5.99 dB、2.62 dB，这是因为 PNC 算法范数约束比 l_1 范数约束更具适配性，更好地逼近 l_0 范数的性能。而匹配追踪算法是局部最优策略，求解精度有限。

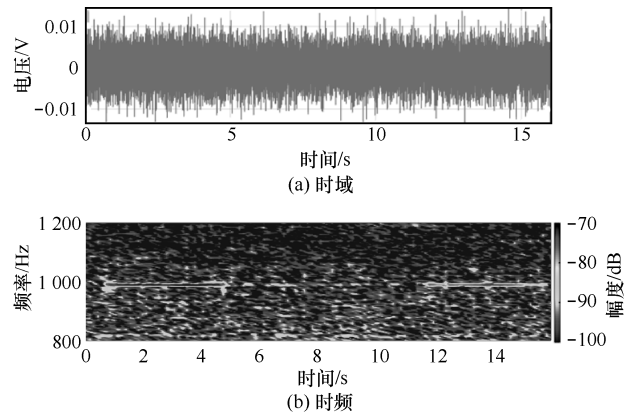


图 3 海试数据单载波信号

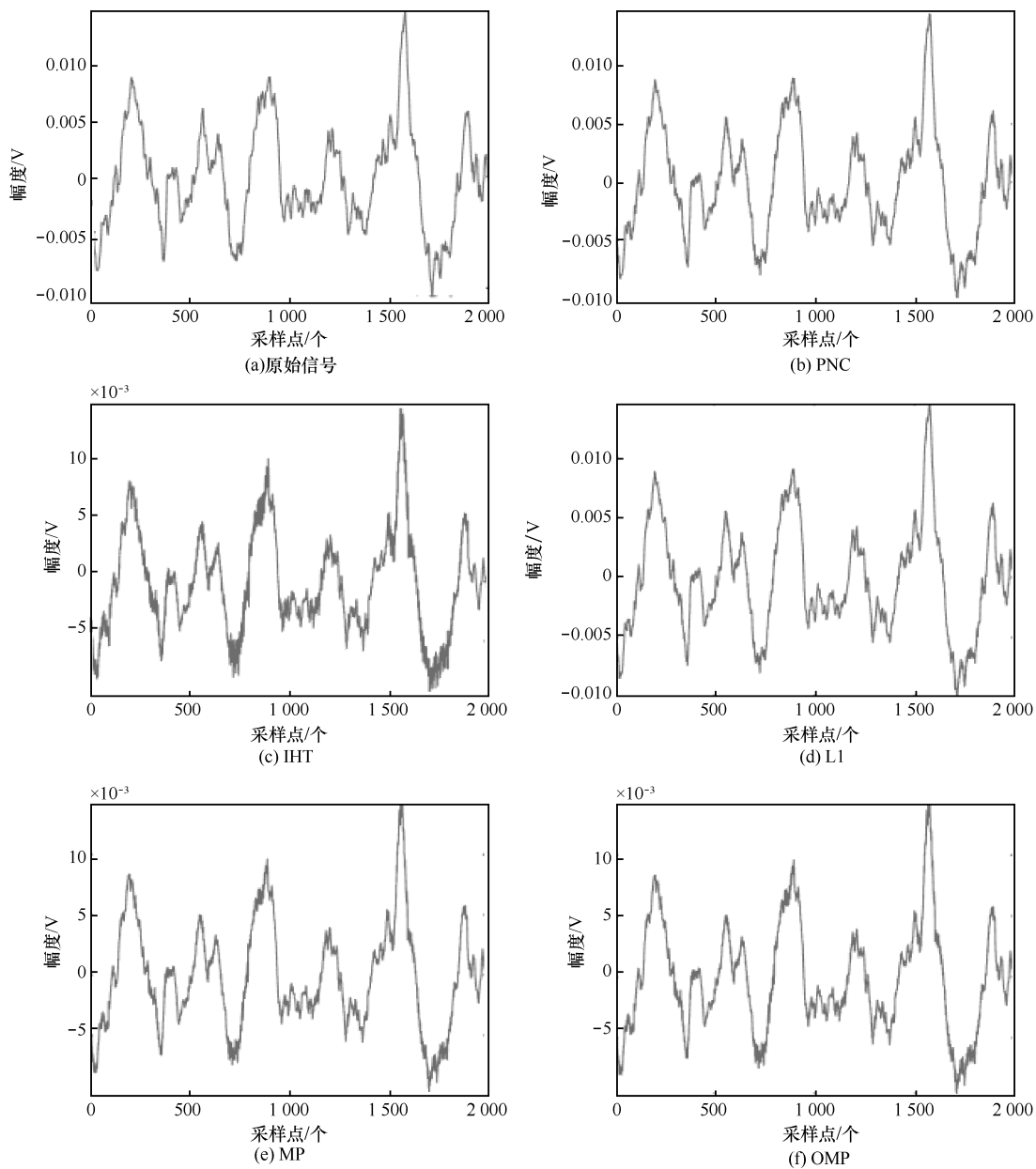


图 4 海试数据单载波原始信号和各算法恢复结果对比

6 结束语

为提高单载波水声数据压缩与重构的估计性能, 本文提出将时域非稀疏的水声信号转为 DCT 域信号进行稀疏值估计。在分析讨论 IHT 和 L1 算法的基础上, 引入 PNC 范数约束并提出了 PNC 算法, 与 IHT 和 L1 算法不同, 本文算法通过部分范数约束项, 根据抽头系数的大小而给予不同的约束, 从而提高了其对不同稀疏度的适应性。仿真和海试实验中对比了 PNC、IHT、L1、MP、OMP 算法的处理结果, 验证了本文算法的优越性。

参考文献:

- [1] CLIMENT S, SANCHEZ A, CAPELLA J V, et al. Underwater acoustic wireless sensor networks: advances and future trends in physical, MAC and routing layers[J]. *Sensors*, 2014, 14(1): 795-833.
- [2] HEIDEMANN J, YE W, WILLS J, et al. Research challenges and applications for underwater sensor networking[C]//Wireless Communications and NETWORKING Conference. 2006: 228-235.
- [3] HEIDEMANN J, STOJANOVIC M, ZORZI M. Underwater sensor networks: applications, advances and challenges[J]. *Philosophical Transactions*, 2012, 370(1958): 158-175.
- [4] ZHUO J, ZHANG Y, LIU X H, et al. An underwater acoustic data compression method using improved threshold integer wavelet and LZW algorithm[J]. *Technical Acoustics*, 2015, 34: 115-120.
- [5] MAMAGHANIAN H, KHALED N, ATIENZA D, et al. Compressed sensing for real-time energy-efficient ECG compression on wireless body sensor nodes[J]. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2011, 58(9): 2456-2466.
- [6] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [7] DONOHO D L, ELAD M, TEMLYAKOV V N. Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(1): 6-18.
- [8] BENESTY J, PALEOLOGU C, CIOCHINA S. Proportionate adaptive filters from a basis pursuit perspective[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2010, 17(12): 985-988.
- [9] WRIGHT S J, NOWAK R D, FIGUEIREDO M A T. Sparse reconstruction by separable approximation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(7): 2479-2493.
- [10] BLUMENSATH T. Accelerated iterative hard thresholding[J]. *Signal Processing*, 2012, 92(3): 752-756.
- [11] MALLAT S G, ZHANG Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, 41(12): 3397-3415.
- [12] TROPP J A, GILBERT A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [13] WU F Y, TONG F. Non-uniform norm constraint LMS algorithm for sparse system identification[J]. *IEEE Communications Letters*, 2013, 17(2): 385-388.
- [14] LI Y, WANG Y, JIANG T. Norm-adaption penalized least mean square/fourth algorithm for sparse channel estimation[J]. *Signal Processing*, 2016, 128(C): 243-251.
- [15] WANG C, ZHANG Y, WEI Y, et al. A new $\$l_0\$$ -LMS algorithm with adaptive zero attractor[J]. *IEEE Communications Letters*, 2015, 19(12): 2150-2153.
- [16] WU F Y, TONG F. Mean-square analysis of the gradient projection sparse recovery algorithm based on non-uniform norm[J]. *Neurocomputing*, 2017, 223: 103-106.
- [17] SARTIPI M, FLETCHER R. Energy-efficient data acquisition in wireless sensor networks using compressed sensing[C]// Data Compression Conference. 2011: 223-232.

[作者简介]



伍飞云 (1984-), 男, 江西宜春人, 西北工业大学助理教授, 主要研究方向为信号处理、压缩感知、水声通信等。

杨坤德 (1974-), 男, 四川邻水人, 西北工业大学教授、博士生导师, 主要研究方向为信号处理、压缩感知、微波传输等。

童峰 (1973-), 男, 福建龙岩人, 厦门大学教授、博士生导师, 主要研究方向为水声通信、水声网络、水声信号处理等。