

端部质量块对悬臂梁型挠曲电俘能器性能的影响

林晓辉¹, 苏雅璇², 陈本强¹, 周志东^{1*}

(1.厦门大学材料学院,福建省特种先进材料重点实验室,福建 厦门 361005;2.集美大学诚毅学院,福建 厦门 361021)

摘要: 端部质量块对悬臂梁型挠曲电俘能器的性能具有显著的影响.以电吉布斯自由能为基础,基于 Euler-Bernoulli 梁模型,利用挠曲电材料的变分方法,推导带端部质量块的挠曲电俘能器结构的机电耦合动力学控制方程和相应的力电边界条件;利用分离变量法推导结构在短路条件下的振型正交条件和归一化振型参数;结合模态叠加法推导出挠曲电俘能器在外加简谐激励条件下位移和电势响应的解析形式.数值分析结果表明,端部质量块质量的增加和尺寸的减小可以提高俘能器输出功率并降低其共振频率,并且具有调节挠曲电俘能器最优外加电阻负载的功能.此外,当端部质量块尺寸一定时,端部质量块的质量越大,采用质点模型分析所带来的误差越明显.

关键词: 端部质量块;挠曲电俘能器;模态分析;功率密度;变分法

中图分类号: O 343.9

文献标志码: A

文章编号: 0438-0479(2019)01-0087-09

随着纳米技术的迅速发展,无线传感器网络和小型电子元器件的能源供给引起了研究人员的广泛关注.在微纳机电系统中,从环境中收集振动能量的方式有^[1]:压电式^[2]、静电式^[3]以及磁电式^[4].其中,压电式能量收集方式因具有直接的力电转换特性,能够实现对环境快速响应以及高效的能量转换和方便的应用,获得研究人员的重点关注.

结构振动使得压电式俘能器内部电荷发生定向移动产生电流而输出电势^[5],从而把机械能转换为电能.随着电子器件的微型化,俘能器的应用尺寸不断减小,这便需要更软的材料来降低结构的自振频率以匹配周围环境的振动频率,但柔性压电材料的机电转换效率远远低于陶瓷类的压电材料,这使得压电式俘能器在微纳尺度的应用上存在一定局限性.近年来,基于应变梯度与极化强度的挠曲电俘能器逐渐受到研究者的重视.Kogan^[6]和 Indenbom^[7]报道了应变梯度与电场强度之间的耦合关系,并提出了“挠曲电效应”的概念.相比于压电式俘能器,挠曲电俘能器具有更加广泛的材料选择范围^[8],并且具有明显的尺寸效应^[9].同时,挠曲电材料不需要进行预极化处理,不依赖于剩余极化强度和温度,也不存在极化衰退^[10].对于俘

能器结构,挠曲电俘能器可仅为单层的梁板结构,不依赖于弹性基础层,不会存在机械或热膨胀引起的错配、脱层等失效问题^[11].

国内外学者已经对挠曲电效应进行了大量的实验和理论研究^[12-15].Zubko 等^[16]对固体电介质中的挠曲电效应进行了系统而详细地评述和分析.Shen 等^[17]通过变分原理建立了介电材料考虑表面效应、挠曲电效应和静电力的力电耦合理论框架.Majdoub 等^[18]研究了压电纳米悬臂梁在非均匀应变下的力学和电学行为,结果显示挠曲电效应显著影响梁的弹性行为和等效压电性能.Liang 等^[19]基于欧拉梁模型,讨论了外加电压对挠曲电压电梁振动和屈曲行为的影响.Zhang 等^[20]分析了 Timoshenko 介电梁的挠曲电效应,讨论了不同机械边界条件对挠度和转角的影响.Zhou 等^[21]基于电吉布斯自由能,采用变分方法统一求解了 3 种电学边界条件下挠曲电悬臂梁力电耦合响应的解析表达式,首次阐明了电学开路条件下诱导电势与挠曲电系数和结构尺寸的相互关系.杨昌平等^[22]讨论了挠曲电效应对简支梁式压电传感器的力电耦合响应的影响.Li 等^[23]在应变梯度弹性理论的基础上分析了挠曲电致动器在不同外加电荷载荷下的振动

收稿日期: 2018-03-15 录用日期: 2018-08-10

基金项目: 国家自然科学基金(11572271)

*通信作者: zdzhou@xmu.edu.cn

引文格式: 林晓辉,苏雅璇,陈本强,等.端部质量块对悬臂梁型挠曲电俘能器性能的影响[J].厦门大学学报(自然科学版),2019,58(1):87-95.

Citation: LIN X H, SU Y X, CHEN B Q, et al. Effects of tip mass on performance of cantilever beam flexoelectric energy harvesters[J]. J Xiamen Univ Nat Sci, 2019, 58(1): 87-95. (in Chinese)



<http://jxmu.xmu.edu.cn>

行为。目前,对挠曲电俘能器性能的研究也有了一些进展。Deng 等^[24]基于内能理论,根据 Euler-Bernoulli 梁模型和变分原理,采用假设模态法数值分析了挠曲电悬臂梁俘能器的力学和电学响应。Liang 等^[25]基于 Timoshenko 复合梁理论,研究了挠曲电效应对串联和并联电路条件的压电双晶型俘能器性能的影响,发现在并联电路中压电效应的作用消失,而在串联电路中挠曲电效应则可以显著地增强系统的能量转换效率。Yan^[26]讨论了压电/压磁复合梁俘能器中挠曲电效应的影响,分析了机械-电-磁之间的相互转换。上述研究均没有考虑端部质量块的影响,而 Erturk 等^[27]对压电俘能器的研究发现,结构端部质量块的尺寸和重量变化会改变结构的振动频率和模态,从而影响系统整体的性能和效率。Tang 等^[28]以压电俘能器为研究对象,讨论了端部质量块质量和偏心距对压电式俘能器机电耦合性能的影响,发现端部质量块可以显著调节压电式俘能器的力学和电学响应。挠曲电俘能器相比于压电俘能器具有很显著的尺寸效应,而端部质量块对挠曲电俘能器的尺寸效应是否有影响目前还不清楚,端部质量块质量和尺寸的偏心距如何影响挠曲电俘能器的性能和效率目前也鲜见报道。

本研究以带端部质量块的悬臂梁型挠曲电俘能器为模型,并以电吉布斯自由能为基础,推导挠曲电俘能器的机电耦合动力学控制方程和相应的力电边界条件;结合模态叠加法推导挠曲电俘能器在简谐激励条件下的机电响应解析形式;最后通过数值算例进一步讨论端部质量块的质量和偏心距对挠曲电俘能器功率输出性能的影响。

1 挠曲电俘能器的动力学控制方程

本研究以带端部质量块的悬臂梁型挠曲电俘能器为研究对象。结构如图 1 所示,悬臂梁(简称梁)的长度为 L ,宽度为 B ,厚度为 h ,梁的端部带有质量为 M_t 的质量块,质量块为边长 $d = 2|y|$ 的立方体,其中 y 为端部质量块体心相对梁自由端的纵向距离(即偏心距),并规定如图中所示的偏心距为负值^[28],同时保持梁的长宽厚比($L : B : h$)为 $100 : 10 : 1$ 。图 1 中灰色部分为梁的上下表面完好覆盖的电极层,且电极的厚度和刚度相对于梁可以忽略。上下表面电极通过导线和外加电阻负载 R 进行连结,忽略梁本身的电阻,其可以视为与外加电阻负载 R 串联的电阻。建立相应的笛卡尔坐标系,梁被固定在可沿 x_3 方向移动的基座上,基座位移为 $w_b(t)$ 。梁受到基座的振动激励产生相

应的振动响应,动态弯曲变形的梁内产生动态的应变梯度,由于挠曲电效应使得在梁的上下电极表面产生动态的自由电荷,形成输出电势。

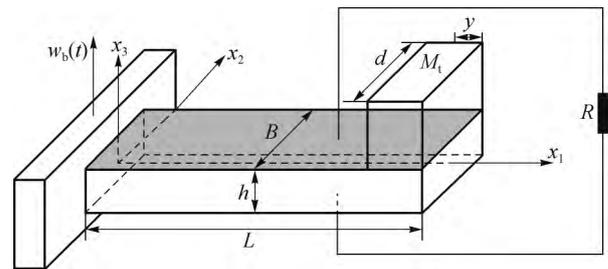


图 1 末端激励条件下带端部质量块的挠曲电俘能器模型
Fig.1 A model of flexoelectric energy harvester with a tip mass subjected to the base excitation

基于梁的长、宽、厚的比例,该梁可以视为薄梁结构,结合 Euler-Bernoulli 梁模型的小变形假设,得出应变梯度中的非零项为:

$$\begin{cases} \epsilon_{11,1} = -x_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}, \\ \epsilon_{11,3} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \end{cases} \quad (1)$$

其中, $w = w(x_1, t)$ 为梁的中性层在 x_1 处沿 x_3 方向的位移,即梁的挠度。从式(1)中可以看出, $\epsilon_{11,3}$ 与梁的曲率相关,而 $\epsilon_{11,1}$ 与曲率的梯度相关。在 Euler-Bernoulli 梁模型中, $\epsilon_{11,1}$ 相对于 $\epsilon_{11,3}$ 足够小以至于可以被忽略。本研究也仅考虑沿 x_3 方向的电场强度 E_3 而忽略沿着 x_1 方向的电场强度 E_1 。

对于挠曲电材料,其广义的哈密尔顿变分为^[29]:

$$\delta \int_0^T [K - G + W] dt = 0, \quad (2)$$

其中, K 为系统的动能, G 为系统的电吉布斯自由能, W 为外加载荷对系统所做的功。考虑端部质量块尺寸的影响,则式(2)中的 K 、 G 和 W 可以分别表示为:

$$\begin{cases} K = \int_V \frac{1}{2} \rho |\dot{w}^m|^2 dV + \left[\frac{1}{2} M_t \left| \frac{\partial(w + y w')}{\partial t} + \frac{\partial w_b}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{2} I_t \left| \frac{\partial \dot{w}^m}{\partial x_1} \right|^2 \right]_{x_1=L}, \\ G = \int_V \alpha dV, \\ W = \oint_A \bar{\omega} \psi dS, \end{cases} \quad (3)$$

其中, ρ 为材料的密度, $w^m(x_1, t) = w_b(t) + w(x_1, t)$ 为梁的绝对位移, \dot{w}^m 表示 w^m 对时间的一次偏导, w' 表示 w 对空间坐标 x_1 的一次偏导, M_t 为端部质量块

的质量, I_t 为端部质量块的转动惯量, α 为梁的电吉布斯自由能密度, $\bar{\omega}(x_1, t)$ 为梁表面电极上的电荷密度, $\psi = \psi(x_1, t)$ 为梁表面电势, V 为梁的体积, A 为梁的上下表面.

设梁内电势分布为 $\Phi(x_1, x_3, t)$, 结合挠曲电悬臂梁的本构方程^[21-22], 并设定梁上下表面电极上的电学边界条件为: $\Phi(x_1, x_3 = h/2, t) = \psi_1(x_1, t)$, $\Phi(x_1, x_3 = -h/2, t) = \psi_2(x_1, t)$. 若考虑梁内部没有自由电荷, 则梁内部电位移 D_3 应满足高斯定律 $D_{3,3} = 0$, 经过求解可以获得梁内部的电势 Φ 和电场 E_3 分别为:

$$\begin{cases} \Phi(x_1, x_3, t) = \frac{e_{31}}{2 a_{33}} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \left(\frac{h^2}{4} - x_3^2 \right) + \\ (1/2 + x_3/h) \psi + C(x_1, t), \\ E_3 = -e_{31} \varepsilon_{11} / a_{33} - \psi/h, \end{cases} \quad (4)$$

其中, e_{31} 是材料的压电系数, a_{33} 是材料的介电系数, $\psi(x_1, t) = \psi_1(x_1, t) - \psi_2(x_1, t)$ 为上下电极之间的电势差, 即由挠曲电效应产生的输出电势或电压, $C(x_1, t)$ 为与 x_1 和 t 相关的未知函数.

将挠曲电悬臂梁的本构方程代入电吉布斯自由能密度的表达式中^[21], 结合式(2)和(4), 通过变分运算可以推导出带端部质量块的悬臂梁型挠曲电俘能器的广义哈密顿变分方程为:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left[\int_V \rho(\ddot{w} + \ddot{w}_b) \delta w dV + M_t \ddot{w}_b \delta(x_1 - L) \delta w - \right. \\ & M_{t,y} \frac{d\delta(x_1 - L)}{dx_1} \ddot{w}_b \delta w \left. \right] dt + \int_0^T \int_0^L \left[\left(G_p \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} \right. \right. \\ & \left. \left. - \mu_{3,113} B \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} \right) \delta w - \left(\mu_{3,113} B \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + a_{33} \frac{\psi B}{h} \right) \cdot \right. \\ & \left. \delta \psi \right] dx_1 dt + \int_0^T \left[G_p \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \mu_{3,113} B \psi + (I_t + \right. \\ & \left. M_t y^2) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} + M_{t,y} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_1=L} dt - \\ & \int_0^T \left(G_p \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} - M_t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - M_{t,y} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} \right) \delta w \Big|_{x_1=L} dt - \\ & \int_0^T dt \int_{\frac{A}{2}} \bar{\omega} \delta \psi dS dt = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

其中, T 为时间区间的上限, \ddot{w} 和 \ddot{w}_b 分别表示 w 和 w_b 对时间的二次偏导, $\delta(x_1)$ 为狄拉克 δ 函数, $G_p = B h^3 (c_{11} + e_{31}^2 / a_{33}) / 12$ 为挠曲电悬臂梁的等效抗弯刚度^[21-22], 表示梁的抗弯能力, c_{11} 为材料的弹性模量, $\mu_{3,113}$ 是材料的挠曲电系数. 当端部质量块为立方体时, 其 I_t 可以根据平行轴定理得到:

$$I_t = M_t d^2 / 6 + M_t (d + h/2)^2 / 4. \quad (6)$$

同时, 在推导式(5)时采用了如下运算:

$$\left\{ \begin{aligned} & \delta \int_0^T \frac{1}{2} M_t \left| \frac{\partial(w + y w')}{\partial t} + \frac{\partial w_b}{\partial t} \right|^2 dt \Big|_{x_1=L} = \\ & - M_t \left[\int_0^T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w + y \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} \delta w + \right. \right. \\ & \left. \left. y \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta \frac{\partial w}{\partial x_1} + y^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} \delta \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) dt \Big|_{x_1=L} \right] - \\ & M_t \delta(x_1 - L) \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} \delta w + \\ & M_{t,y} \frac{d\delta(x_1 - L)}{dx_1} \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} \delta w, \\ & \delta \int_0^T \left(\frac{1}{2} I_t \left| \frac{\partial \dot{w}^m}{\partial x_1} \right|^2 \right) dt \Big|_{x_1=L} = \\ & - \int_0^T I_t \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right) dt \Big|_{x_1=L}. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

式(5)中的 δw 可以任意选择, 因此可以得到挠曲电俘能器的无阻尼机电耦合动力学控制方程为:

$$\begin{aligned} G_p \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + [m + M_t \delta(x_1 - L)] \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \\ M_{t,y} \frac{d\delta(x_1 - L)}{dx_1} \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} - \mu_{3,113} B \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

其中, $m = \rho B h$ 为梁单位长度的质量. 然而, 真实的结构中阻尼不仅是系统的重要组成部分, 也是一个较为复杂的问题. 为了抓住研究的重点, 本文中只考虑黏性空气阻尼(外部阻尼)和应变率阻尼(内部阻尼)^[24,27-28], 并且不考虑端部质量块变化对阻尼的影响^[28]. 因此系统带阻尼的机电耦合动力学控制方程可以表示为:

$$\begin{aligned} G_p \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + [m + M_t \delta(x_1 - L)] \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \\ M_{t,y} \frac{d\delta(x_1 - L)}{dx_1} \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} - \mu_{3,113} B \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + c_s \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3 \partial t} + \\ c_a \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

其中, c_a 是黏性空气阻尼系数, c_s 是应变率阻尼系数.

同样, 式(5)中的 $\delta \psi$ 也可以任意选择, 因此系统还存在如下关系:

$$\begin{aligned} \int_0^L \bar{\omega} - \left(\mu_{3,113} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + a_{33} \frac{\psi}{h} \right) dx_1 = \\ \int_0^L (\bar{\omega} - D_3) dx_1 = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)表明, 挠曲电悬臂梁表面的平均自由电荷密度 $\bar{\omega}$ 与平均电位移 D_3 相等. 当俘能器外接负载电阻 R 时, 电路中的电流 ψ/R 必须等于单位时间内平均正电

荷的变化量 $-\frac{1}{h} \int_V \dot{\omega} dV$. 利用式(10)并结合高斯定律^[24,27],可以得到系统的机电耦合电路方程为:

$$\int_0^L a_{33} B \frac{\dot{\psi}}{h} dx_1 + \frac{\psi}{R} = - \int_0^L \mu_{3,113} B \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial t} dx_1, \quad (11)$$

其中, $\dot{\psi}$ 表示 ψ 对时间求一次偏导. 同理,可以得到悬臂梁型挠曲电俘能器系统的机电耦合边界条件:

$$\begin{cases} w(0) = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = 0, \\ \left[G_p \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \mu_{3,113} B \psi + M_t y \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (I_t + M_t y^2) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} \right] \Big|_{x_1=L} = 0, \\ \left(G_p \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} - M_t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - M_t y \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} \right) \Big|_{x_1=L} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

从式(9)和(12)可以看出,端部质量块的质量大小 M_t 和偏心距 y 对系统的控制方程以及边界条件均有影响.

2 模态分析与机电耦合响应

2.1 自由振动模态

对于自由振动模态分析,一般可以采用分离变量法求解带端部质量块的悬臂梁型挠曲电俘能器的频率特征方程和质量归一化振型.当梁的上下表面直接通过导线连接,即电学短路条件,则上下表面由于挠曲电效应产生的诱导电势为零,此时其自由振动模态类似于一般弹性梁.基于分离变量法,考虑到控制方程的形式,系统的位移动力学响应可以设为^[27]:

$$w(x_1, t) = \phi(x_1) \eta(t), \quad (13)$$

$$\begin{cases} \phi(x_1) = C_1 \cos(\beta x_1 L^{-1}) + C_2 \sin(\beta x_1 L^{-1}) + C_3 \cosh(\beta x_1 L^{-1}) + C_4 \sinh(\beta x_1 L^{-1}), \\ \eta(t) = C_5 e^{i\omega t}, \end{cases} \quad (14)$$

其中, $\phi(x_1)$ 为质量归一化振型, $\eta(t)$ 为广义坐标变量, C_1, C_2, C_3, C_4 和 C_5 均为与 x_1 和 t 无关的参数; i 为虚数单位, β 为振动的特征值, λ 是振动的圆频率. 将 $\eta(t)$ 代入式(8)和(12),可得到如下形式的控制方程和边界条件:

$$\frac{d^4 \phi(x_1)}{d x_1^4} - \lambda^2 \frac{m}{G_p} \phi(x_1) = 0, \quad (15)$$

$$\begin{cases} \phi(0) = 0, \\ \left(\frac{d\phi(x_1)}{d x_1} \Big|_{x_1=0} \right) = 0, \\ \left[G_p \frac{d^2 \phi(x_1)}{d x_1^2} - \lambda^2 (I_t + M_t y^2) \frac{d\phi(x_1)}{d x_1} - \lambda^2 M_t y \phi(x_1) \right] \Big|_{x_1=L} = 0, \\ \left[G_p \frac{d^3 \phi(x_1)}{d x_1^3} + \lambda^2 M_t \phi(x_1) + \lambda^2 M_t y \frac{d\phi(x_1)}{d x_1} \right] \Big|_{x_1=L} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

将式(14)的第一式代入式(16)后可以得到:

$$\begin{cases} C_1 A_1 + C_2 A_2 = 0, \\ C_1 A_3 + C_2 A_4 = 0, \end{cases} \quad (17)$$

其中:

$$\begin{cases} A_1 = -[G_p \beta^2 L^{-2} (\cos \beta + \cosh \beta) - \lambda^2 (I_t + M_t y^2) \beta L^{-1} (\sin \beta + \sinh \beta) - \lambda^2 M_t y (\cosh \beta - \cos \beta)], \\ A_2 = -G_p \beta^2 L^{-2} (\sin \beta + \sinh \beta) - \lambda^2 (I_t + M_t y^2) \beta L^{-1} (\cos \beta - \cosh \beta) - \lambda^2 M_t y (\sin \beta - \sinh \beta), \\ A_3 = G_p \beta^3 L^{-3} (\sin \beta - \sinh \beta) + \lambda^2 M_t (\cos \beta - \cosh \beta) - \lambda^2 M_t y \beta L^{-1} (\sin \beta + \sinh \beta), \\ A_4 = -G_p \beta^3 L^{-3} (\cos \beta + \cosh \beta) + \lambda^2 M_t (\sin \beta - \sinh \beta) + \lambda^2 M_t y \beta L^{-1} (\cos \beta - \cosh \beta). \end{cases} \quad (18)$$

要使得式(17)有非零解,其系数矩阵的行列式必须等于零,同时由式(15)可得 $\lambda = \beta^2 G_p \frac{1}{2} m^{-\frac{1}{2}} L^{-2}$, 将其代入系数矩阵行列式后,经化简可得系统自由振动的特征方程:

$$\begin{aligned} & (1 + \cos \beta \cosh \beta) + \beta L^{-1} M_t m^{-1} (\sinh \beta \cos \beta - \sin \beta \cosh \beta) - \beta^3 L^{-3} m^{-1} (I_t + M_t y^2) \cdot \\ & (\sin \beta \cosh \beta + \cos \beta \sinh \beta) - \\ & 2\beta^2 L^{-2} M_t y m^{-1} \sin \beta \sinh \beta + \\ & \beta^4 L^{-4} M_t m^{-2} I_t (1 - \cos \beta \cosh \beta) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

上述方程有无穷多个解,因此系统自由振动的特征值、对应的振型以及广义坐标变量也有无穷多个. 设第 r 阶振动的特征值为 β_r , 其对应阶的振型和广义坐标变量分别为:

$$\begin{cases} \phi_r(x_1) = X_r \{ [\cos(\beta_r x_1 L^{-1}) - \cosh(\beta_r x_1 L^{-1})] + \ell_r [\sin(\beta_r x_1 L^{-1}) - \sinh(\beta_r x_1 L^{-1})] \} = X_r \bar{\phi}_r(x_1), \\ \eta_r(t) = Z_r e^{i\omega t}, \end{cases} \quad (20)$$

其中, $\ell_r = -A_3 A_4^{-1}$, Z_r 为与时间 t 无关的参数, X_r 为待求的未知参量.

2.2 振型正交条件与归一化振型参数

考虑到分布参数系统具有无穷多个振动模式, 因而系统的位移响应可以写成所有振动模式的线性组合形式, 即:

$$w(x_1, t) = \sum_{r=1}^{\infty} w_r(x_1, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x_1) \eta_r(t). \quad (21)$$

将系统的第 r 阶和第 s 阶振动模式分别代入式(15), 再分别左乘 $\phi_s(x_1)$, 右乘 $\phi_r(x_1)$, 并沿梁的长度方向进行积分, 结合边界条件式(16)可得挠曲电悬臂梁系统振型的正交条件为:

$$\int_0^L \phi_s(x_1) m \phi_r(x_1) dx_1 + \left[\phi_s(x_1) M_t \phi_r(x_1) + \phi_s(x_1) M_t y \frac{d\phi_r(x_1)}{dx_1} \right] \Big|_{x_1=L} + \left[\frac{d\phi_s(x_1)}{dx_1} (I_t + M_t y^2) \frac{d\phi_r(x_1)}{dx_1} + \frac{d\phi_s(x_1)}{dx_1} M_t y \phi_r(x_1) \right] \Big|_{x_1=L} = \delta_{rs}, \quad (22)$$

$$\int_0^L \frac{d^2 \phi_s(x_1)}{dx_1^2} G_p \frac{d^2 \phi_r(x_1)}{dx_1^2} dx_1 = \lambda_r^2 \delta_{rs}. \quad (23)$$

进一步地令 $s = r$, 可以解得系统质量归一化振型参数为:

$$X_r = \left\{ \int_0^L \bar{\phi}_r^2(x_1) m dx_1 + \left[2 \bar{\phi}_r(L) M_t y \frac{d\bar{\phi}_r(x_1)}{dx_1} \Big|_{x_1=L} + (I_t + M_t y^2) \left(\frac{d\bar{\phi}_r(x_1)}{dx_1} \right)^2 \Big|_{x_1=L} + \bar{\phi}_r^2(L) M_t \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

2.3 挠曲电俘能器响应的封闭式解

在挠曲电俘能器模型中考虑到阻尼均满足比例阻尼假设, 则模型的机械动力学响应同样可以设成式(21)的形式. 由于挠曲电俘能器上下表面覆盖电极, 因此上下表面为等势体, 即电势差 $\phi(x_1, t)$ 与 x_1 无关, 仅为 t 的函数, 因而对式(9)进行微分时将会消失, 需要对电势 ϕ 进行特殊处理. Erturk 等^[27]通过设 $\phi = \phi(x_1, t) = V(t)[H(x_1) - H(x_1 - L)]$ 来避免上述问题, 其中 $V(t)$ 为俘能器的输出电压, $H(x_1)$ 为 Heaviside 函数. 将式(24)代入式(20)的第一式后得到电学短路条件下的振型, 再将此振型代入式(9)和(11)中, 最后结合式(22)和(23)的正交条件, 系统的

动力学控制方程和电学方程可以在模态坐标下表示为:

$$\frac{d^2 \eta_s(t)}{dt^2} - \int_0^L \mu_{3,113} B V(t) \phi_s(x_1) \left[\frac{d\delta(x_1)}{dx_1} - \frac{d\delta(x_1 - L)}{dx_1} \right] dx_1 + \lambda_s^2 \eta_s(t) + 2 \xi_s \lambda_s \frac{d\eta_s(t)}{dt} = f_s, \quad (25)$$

$$\frac{a_{33} B L}{h} \frac{dV(t)}{dt} + \frac{V(t)}{R} = - \sum_{s=1}^{\infty} U_s \frac{d\eta_s(t)}{dt}. \quad (26)$$

其中, $f_s = -M_t y \frac{d\phi_s(x_1)}{dx_1} \Big|_{x_1=L} \frac{d^2 w_b(t)}{dt^2} - m \int_0^L \phi_s(x_1) dx_1 \frac{d^2 w_b(t)}{dt^2} - M_t \phi_s(L) \frac{d^2 w_b(t)}{dt^2}$, $U_s = \mu_{3,113} B \frac{d\phi_s(x_1)}{dx_1} \Big|_{x_1=L}$, ξ_s 为模态阻尼比, 由 s 模态的黏性空气阻尼系数和应变率阻尼系数构成. 通常来说, 模态阻尼比可通过模态分析实验从测量频率响应直接识别出, 可避免直接求解两个阻尼系数^[27].

悬臂梁式挠曲电俘能器固定端的位移可以分解为小角度的转动位移与横向的平动位移, 而本研究中仅考虑横向的平动位移激励. 假设激励的形式为简谐形式, 即 $w_b(t) = W_0 e^{i\omega t}$, 其中 W_0 为激励的振幅, $\omega = 2\pi/f$ 为激励的圆频率, f 为激励的频率. 根据线性理论, 俘能器的力学与电学响应应为同频率的简谐量, 因此可以设电压响应 $V(t) = v e^{i\omega t}$, 而广义坐标变量 $\eta_s(t) = H_s e^{i\omega t}$, 其中 v 和 H_s 均为复数. 将它们代入式(25)和(26)中可得:

$$\begin{cases} [(\lambda_s^2 - \omega^2) + 2 \xi_s \lambda_s i\omega] H_s - v U_s = F_s, \\ (a_{33} B L h^{-1} i\omega + R^{-1}) v + i\omega \sum_{s=1}^{\infty} U_s H_s = 0. \end{cases} \quad (27)$$

其中, $F_s = W_0 \omega^2 \left[m \int_0^L \phi_s(x_1) dx_1 + M_t \phi_s(L) + M_t y \frac{d\phi_s(x_1)}{dx_1} \Big|_{x_1=L} \right]$. 进一步求解式(27)可得:

$$V(t) = [-i\omega \sum_{s=1}^{\infty} U_s F_s (\lambda_s^2 - \omega^2 + 2i\omega \xi_s \lambda_s)^{-1}] \cdot e^{i\omega t} [(R^{-1} + i\omega a_{33} B L h^{-1}) + \sum_{s=1}^{\infty} i\omega U_s (\lambda_s^2 - \omega^2 + 2i\omega \xi_s \lambda_s)^{-1}]. \quad (28)$$

$$\eta_s(t) = \left[\frac{F_s}{(\lambda_s^2 - \omega^2) + 2i\omega \xi_s \lambda_s} - V(t) \frac{U_s}{(\lambda_s^2 - \omega^2) + 2i\omega \xi_s \lambda_s} \right] e^{i\omega t}. \quad (29)$$

式(29)给出了模态空间中机械位移和输出电势相应的解析形式.

3 数值分析与讨论

本研究以聚偏氟乙烯(PVDF)材料制成的微纳米悬臂梁式挠曲电俘能器为算例,其材料参数选择如下:密度 $\rho = 1.78 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 弹性模量 $c_{11} = 3.7 \text{ GPa}$, 压电系数 $e_{31} = -0.01 \text{ N/(V} \cdot \text{m)}$, 介电系数 $a_{33} = 8.15 \times 10^{-11} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$ ^[30]. 一般 PVDF 的挠曲电系数在 $10^{-1} \sim 10^{-3} \mu\text{C/m}$ 之间^[31-32], 本文中选取挠曲电系数为 $2.3 \times 10^{-2} \mu\text{C/m}$. 梁的厚度取 $h = 0.3 \mu\text{m}$; 端部质量块的质量大小按照占整个梁质量的比例选取, 即 $M_t = m \times L \times K_n$, 其中 $K_n = 0.05n (n = 1, 2, \dots, 4)$; 端部质量块的尺寸 d 按照占整个梁长度的比例选取, 即 $d = 2|y| = 2L \times |y_n|$, 同时选取的端部质量块的边长不超过梁的宽度, 因此 $y_n = (n-1) \times 10^{-2} (n = 1, 2, \dots, 5)$, 其中 $y_1 = 0$ 代表将端部质量块视为质点. 算例中选取前两阶的阻尼比 $\xi_1 = \xi_2 = 0.0285$, 则其他阶的阻尼比也将随之确定^[27]. 为了方便讨论, 所有的数值结果将通过频率响应函数(FRFs)的形式给出, 即所有的结果均根据激励加速度 $\ddot{w}_b = -\omega^2 W_0 e^{i\omega t}$ 进行归一化处理. 同时, 频率响应函数图中的激励加速度已经根据重力加速度 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ 做了归一化处理, 故下文图中的 $|S_{\max}|$ 与 $|S|$ 均为实际的功率密度最大值与功率密度除以 9.81^2 得到. 因此, 挠曲电俘能器系统的输出功率密度频率响应函数 S 可以表示为如下形式:

$$S = R^{-1}V^{-1}[-i\omega \sum_{s=1}^{\infty} U_s O_s (\lambda_s^2 - \omega^2 + 2i\omega \xi_s \lambda_s)^{-1}]^2 \cdot [(R^{-1} + ia_{33}BLh^{-1}\omega) +$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} i\omega U_s^2 (\lambda_s^2 - \omega^2 + 2i\omega \xi_s \lambda_s)^{-2}], \quad (30)$$

其中, $O_s = -\left[m \int_0^L \phi_s(x_1) dx_1 + M_t \phi_s(L) + M_{t,y} \frac{d\phi_s(x_1)}{dx_1} \Big|_{x_1=L} \right]$. 需要说明的是, 后续所有的频率响应函数将均以模数的形式给出. 结构振动过程中, 其第一阶振动行为往往是最受关注的, 因此本节将只讨论端部质量块对挠曲电俘能器第一阶共振频率点对应的功率密度的影响.

3.1 端部质量块的质量对挠曲电俘能器最大输出性能的影响

俘能器的输出功率密度是评价俘能器性能优劣的一个重要指标^[24]. 本小节将端部质量块的偏心距固定为 $y_6 = -0.05$, 讨论不同质量对挠曲电俘能器全频域最大输出性能的影响. 从图 2(a) 可以发现, 随着负载电阻的增大, 挠曲电俘能器的最大输出功率密度先增加后减小, 存在一个较宽大的平台区, 即在较大的负载电阻范围内, 最大输出功率密度可以达到最优值. 而在此平台区, 所对应的外加激励频率随负载电阻的增加而增大(图 2(b)). 结合图 2(a) 和 (b) 可以发现, 随着端部质量块质量的增加, 挠曲电俘能器的最大输出功率密度对应的激励频率相应地降低, 而最大输出功率密度的数值却升高. 这表明, 可以通过适当地增加端部质量块的质量来提高挠曲电俘能器功率输出能力, 同时降低挠曲电俘能器的共振频率来匹配环境频率. 这为挠曲电俘能器的性能优化提供了一个方向, 类似的现象在压电俘能器中也有发现^[28].

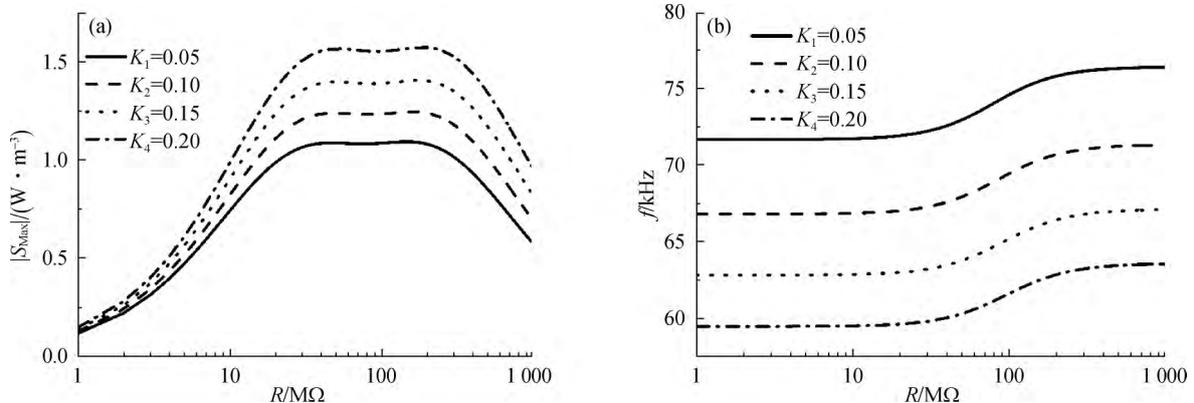


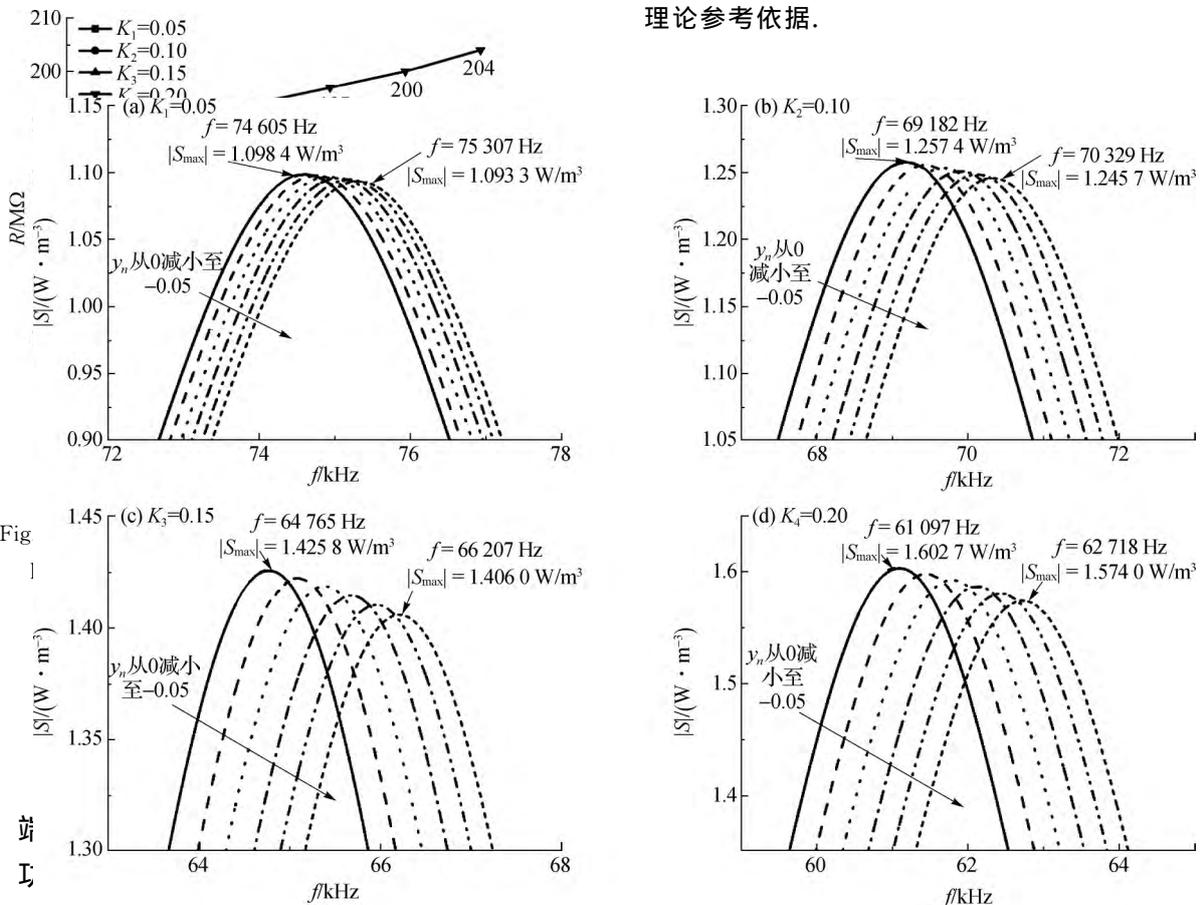
图 2 带有不同质量端部质量块的挠曲电俘能器最大输出功率密度 $|S_{\max}|$ (a) 和相应外加激励频率 f (b) 随外加负载电阻的变化
 Fig.2 The variations of maximum power density $|S_{\max}|$ (a) and the corresponding excitation frequency f (b) of the flexoelectric energy harvester with the different value of mass of the tip mass vs resistances

3.2 端部质量块对挠曲电俘能器最优负载的影响

图 3 给出了在不同质量和尺寸组合的端部质量块下,挠曲电俘能器具有最大输出功率密度所对应的最优负载电阻值(纵坐标表示的参量).从图 3 中可以看出,随着端部质量块质量的增加,挠曲电俘能器的最优负载值整体增加;而随着端部质量块偏心距绝对值的减小(即尺寸的减小),挠曲电俘能器的最优负载值逐渐增大,并随着端部质量块质量的增加,这种趋势更加明显.同时也可以发现,端部质量块的尺寸对挠曲电俘能器最优负载的影响不如端部质量块的质量对其的影响大.在实际工况中,挠曲电俘能器作为供电体,当挠曲电俘能器的梁身尺寸以及外加负载电阻确定以后,可以通过适当地调节端部质量块的质量与尺寸使得供电体更匹配实际的工况,从而精细化地提高挠曲电俘能器的使用效能.

一般将端部质量块视为质点模型来处理^[27,33],这也给结果带来了一定的误差.因此,考虑端部质量块的尺寸,讨论其偏心距对输出功率密度 $|S|$ 的影响很有必要.本节中的所有输出功率密度结果均在俘能器的最优外加负载电阻情况下得到,即不同端部质量块的质量和尺寸的组合所对应挠曲电俘能器的最优负载电阻按照图 3 中的数据选取.图 4 给出了一阶共振点附近,在不同端部质量块质量和尺寸下输出功率密度的变化曲线.

由图 4 可知:一方面,端部质量块尺寸的减小和质量的增加可以提高挠曲电俘能器的输出功率密度,同时也可以降低所对应的外加激励频率,并且质量对俘能器输出响应和频率的影响比尺寸更加明显.另一方面,从端部质量块的尺寸对质点模型带来的误差可以看出,当端部质量块的质量较大时,其被视为质点模型所带来的误差也较大.这可为在建模时是否能够将端部质量块视为质点模型来简化计算提供一定的理论参考依据.



许多关于带端部质量块俘能器的数值模拟分析

图 4 挠曲电俘能器的一阶输出功率密度随外加激励频率和偏心距的变化

Fig.4 The first order of S of the flexoelectric energy harvester vs excitation frequency and eccentricity

4 结 论

针对带端部质量块的悬臂梁型挠曲电俘能器结构,本研究基于 Euler-Bernoulli 梁模型和电吉布斯自由能理论,利用挠曲电材料的变分方法,推导了带端部质量块的悬臂梁型挠曲电俘能器的机电耦合动力学控制方程和相应的力电边界条件.利用分离变量法推导了模型在短路电学条件下的振型正交条件和归一化振型参数;并结合模态叠加法推导出了挠曲电俘能器在简谐激励条件时,模态坐标系下动力学响应的解析形式.通过数值算例分析,进一步讨论了端部质量块的质量和尺寸对挠曲电俘能器的输出功率密度、对应的外加激励频率以及最优负载电阻的影响.结果表明,端部质量块质量的增加可以显著提高挠曲电俘能器的输出功率密度并且降低俘能器所需的外加激励频率.而最优负载电阻随着端部质量块质量的增加、尺寸的减小而增加.通过对端部质量块偏心距的分析发现,当端部质量块质量不太大时,将其视为质点不会出现很大误差.本研究结果可以为挠曲电俘能器端部质量块质量和尺寸的选择提供一定的理论依据.

参考文献:

- [1] WANG X D. Piezoelectric nanogenerators: harvesting ambient mechanical energy at the nanometer scale [J]. *Nano Energy*, 2012, 1(1): 13-24.
- [2] SODANO H A, INMAN D J, PARK G. A review of power harvesting from vibration using piezoelectric materials [J]. *Shock and Vibration Digest*, 2004, 36(3): 197-205.
- [3] MITCHESON P D, MIAO P, STARK B H, et al. MEMS electrostatic micropower generator for low frequency operation [J]. *Sensors and Actuators A Physical*, 2004, 115(2): 523-529.
- [4] WILLIAMS C B, YATES R B. Analysis of a micro-electric generator for microsystems [J]. *Sensors and Actuators A Physical*, 1996, 52(1): 8-11.
- [5] THOMANN H. Piezoelectric ceramics [J]. *Advanced Materials*, 1990, 2(10): 458-463.
- [6] KOGAN S M. Piezoelectric effect during inhomogeneous deformation and acoustic scattering of carriers in crystals [J]. *Soviet Physics—Solid State*, 1964, 5(10): 2069-2070.
- [7] INDENBOM V L. Flexoelectric effect and crystal—structure [J]. *Kristallografiã*, 1981, 26(6): 1157-1162.
- [8] NGUYEN T D, MAO S, YE H Y W, et al. Nanoscale flexoelectricity [J]. *Advanced Materials*, 2013, 25(7): 946-974.
- [9] MAJDOUB M S, SHARMA P, ÇAGIN T. Dramatic enhancement in energy harvesting for a narrow range of dimensions in piezoelectric nanostructures [J]. *Physical Review B*, 2008, 78(12): 121407.
- [10] HUANG W, KWON S R, YUAN F G, et al. A flexoelectric micro-accelerometer [C] // 2012 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, New York: ASME, 2012: 597-603.
- [11] BHASKAR U K, BANERJEE N, ABDOLLAHI A, et al. A flexoelectric microelectromechanical system on silicon [J]. *Nature Nanotechnology*, 2015, 11(3): 263-266.
- [12] CATALAN G, SINNAMON L J, GREGG J M. The effect of flexoelectricity on the dielectric properties of inhomogeneously strained ferroelectric thin films [J]. *Journal of Physics Condensed Matter*, 2004, 16(13): 2253-2264.
- [13] MA W, CROSS L E. Large flexoelectric polarization in ceramic lead magnesium niobate [J]. *Applied Physics Letters*, 2001, 79(26): 4420-4422.
- [14] MARANGANTI R, SHARMA P. Atomistic determination of flexoelectric properties of crystalline dielectrics [J]. *Physical Review B*, 2009, 80(5): 054109.
- [15] SHARMA N D, LANDIS C M, SHARMA P. Piezoelectric thin-film superlattices without using piezoelectric materials [J]. *Journal of Applied Physics*, 2010, 108(2): 424304.
- [16] ZUBKO P, CATALAN G, TAGANTSEV A K. Flexoelectric effect in solids [J]. *Annual Review of Materials Research*, 2013, 43(1): 387-421.
- [17] SHEN S, HU S. A theory of flexoelectricity with surface effect for elastic dielectrics [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2010, 58(5): 665-677.
- [18] MAJDOUB M S, SHARMA P, CAGIN T. Enhanced size—dependent piezoelectricity and elasticity in nanostructures due to the flexoelectric effect [J]. *Physical Review B*, 2008, 77(12): 125424.
- [19] LIANG X, HU S, SHEN S. Size—dependent buckling and vibration behaviors of piezoelectric nanostructures due to flexoelectricity [J]. *Smart Materials and Structures*, 2015, 24(10): 105012.
- [20] ZHANG R, LIANG X, SHEN S. A Timoshenko dielectric beam model with flexoelectric effect [J]. *Meccanica*, 2016, 51(5): 1181-1188.
- [21] ZHOU Z D, YANG C P, SU Y X, et al. Electromechanical coupling in piezoelectric nanobeams due to flexoelectric effect [J]. *Smart Materials and Structures*, 2017, 26(9): 095025.
- [22] 杨昌平, 苏雅璇, 林晓辉, 等. 挠曲电效应对简支梁式压

- 电传感器性能的影响[J].厦门大学学报(自然科学版), 2017,56(6):823-830.
- [23] LI X, LUO Y. Flexoelectric effect on vibration of piezoelectric microbeams based on a modified couple stress theory [J]. Shock and Vibration, 2017. doi: 10.1155/2017/4157085.
- [24] DENG Q, KAMMOUN M, ERTURK A, et al. Nanoscale flexoelectric energy harvesting [J]. International Journal of Solids and Structures, 2014, 51(18): 3218-3225.
- [25] LIANG X, ZHANG R, HU S, et al. Flexoelectric energy harvesters based on Timoshenko laminated beam theory [J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2017, 28(15): 2064-2073.
- [26] YAN Z. Modeling of a piezoelectric/piezomagnetic nano energy harvester based on two dimensional theory [J]. Smart Materials and Structures, 2017, 27(1): 015016.
- [27] ERTURK A, INMAN D J. 压电能量收集[M]. 舒海生, 赵丹, 史肖娜, 译. 北京: 国防工业出版社, 2015: 19-111.
- [28] TANG L, WANG J. Size effect of tip mass on performance of cantilevered piezoelectric energy harvester with a dynamic magnifier [J]. Acta Mechanica, 2017, 228(11): 3997-4015.
- [29] LIANG X, HU S, SHEN S. A new Bernoulli – Euler beam model based on a simplified strain gradient elasticity theory and its applications [J]. Composite Structures, 2014(111): 317-323.
- [30] CHU B, SALEM D R. Flexoelectricity in several thermoplastic and thermosetting polymers [J]. Applied Physics Letters, 2012, 101(10): 103905.
- [31] BASKARAN S, HE X, WANG Y, et al. Strain gradient induced electric polarization in α -phase polyvinylidene fluoride films under bending conditions [J]. Journal of Applied Physics, 2012, 111(1): 014109.
- [32] ZHOU Y, LIU J, HU X, et al. Flexoelectric effect in PVDF – based polymers [J]. IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation, 2017, 24(2): 727-731.
- [33] ALADWANI A, ALDRAIHEM O, BAZ A. A distributed parameter cantilevered piezoelectric energy harvester with a dynamic magnifier [J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2014, 21(7): 566-578.

Effects of tip mass on performance of cantilever beam flexoelectric energy harvesters

LIN Xiaohui¹, SU Yaxuan², CHEN Benqiang¹, ZHOU Zhidong^{1*}

(1. Fujian Key Laboratory of Advanced Materials, College of Materials, Xiamen University, Xiamen 361005, China;

2. Chengyi University College, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: The tip mass has a significant influence on the performance of flexoelectric energy harvesters. In this paper, based on Euler-Bernoulli beam assumption and the electric Gibbs free energy, the dynamic electromechanical coupled governing equations and the corresponding boundary conditions of flexoelectric energy harvesters are derived using the variational principle method. The modal orthometric conditions and parameters for the normalized mode of vibration are obtained by the separation of variable method. Furthermore, the mode superposition method is used to derive the analytical expressions of the displacement and electric potential responses of the flexoelectric energy harvester with the extrinsic harmonic mechanical excitation. Numerical results indicate that the increase of the value of mass and decrease of the size of the tip mass not only can increase the output power density and decrease the resonant frequency of the energy harvester, but also can adjust the optimal resistance. In addition, when the size of mass is fixed, the value of mass of the tip mass is larger, and the error caused by considering the tip mass as a particle becomes more distinct.

Keywords: tip mass; flexoelectric energy harvester; modal analysis; power density; variational method