

# 电学开路挠曲电悬臂梁自振频率分析

林晓辉<sup>1</sup>, 苏雅璇<sup>2</sup>, 周志东<sup>1</sup>, 杨建培<sup>3</sup>

- (1. 厦门大学 材料学院, 福建省特种先进材料重点实验室, 福建 厦门 361005;
2. 集美大学 诚毅学院, 福建 厦门 361021;
3. 厦门大学 建筑与土木工程学院, 福建 厦门 361005)

**摘要:** 挠曲电效应是一种新兴的机电耦合效应, 在微纳米尺度的传感器、致动器和俘能器方面有广阔的应用前景. 本文基于挠曲电材料的变分原理和电吉布斯自由能, 推导了表面覆盖电极的挠曲电悬臂梁在电学开路条件下的机电耦合动力学控制方程和相应的力电边界条件. 进一步获得了求解电学开路条件下挠曲电悬臂梁自振频率的超越方程. 以聚偏氟乙烯(PVDF)材料为算例, 讨论了挠曲电系数、末端质量块和梁尺寸对结构自振频率和电学开路/短路条件下结构自振频率有效频移的影响. 计算结果表明, 挠曲电系数的增大会提高梁的自振频率; 末端质量的增大可以降低梁的自振频率, 并且末端质量块的转动效应对悬臂梁自振频率的影响很小; 悬臂梁结构的有效频移随着结构尺寸减小而增加, 并在某一厚度尺寸趋于饱和值.

**关键词:** 挠曲电效应; 压电悬臂梁; 变分法; 开路自振频率

中图分类号: O343.9

文献标志码: A 文章编号: 0254-0053(2018)02-0383-12

## Analysis of the Natural Frequency for Flexoelectric Cantilever Beams under the Open-Circuit Condition

LIN Xiaohui<sup>1</sup>, SU Yaxuan<sup>2</sup>, ZHOU Zhidong<sup>1</sup>, YANG Jianpei<sup>3</sup>

- (1. Fujian Key Laboratory of Advanced Materials, College of Materials, Xiamen University, Xiamen 361005, Fujian, China
2. Chengyi University College, Jimei University, Xiamen 361021, Fujian, China
3. Department of Civil Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, Fujian, China)

**Abstract:** Flexoelectricity is a newly-developing electromechanical coupling effect and has a wide application prospect in sensors, actuators and energy harvesters in the micro and nano scale. In this paper, based on the electric Gibbs free energy and the variational principle of the flexoelectric material, the dynamic electromechanical coupling govern-equation and the corresponding electromechanical boundary conditions of the flexoelectric cantilever beams with surface electrodes under open-circuit condition are derived. Furthermore, the transcendental equation about the natural frequency of the beam is obtained as well. Using PVDF as an example, we discuss the effects of flexoelectric coefficient, the tip mass and the size of beams on the natural frequency and the effective shift of natural frequency between short and open-circuit conditions. Simulated results show that the increase of flexoelectric coefficient could increase the natural frequency of the beam, and the increase of the tip mass would decrease the natural frequency of the beam. The rotation effect of the tip mass on the natural frequency could be neglected reasonably. The effective shift of natural frequency increases with the decrease of the size of beams, and will approach a stable value at a special thickness.

**Key words:** flexoelectricity; piezoelectric cantilever beam; variational method; open-circuit natural frequency

收稿日期: 2017-11-21

基金项目: 国家自然科学基金(11572271)

作者简介: 林晓辉, 硕士生. 研究方向: 挠曲电俘能器性能研究. Email: 490708963@qq.com

通信作者: 周志东, 副教授. Email: zdzhou@xmu.edu.cn

近年来,随着纳米技术的发展和应用,电子元器件的尺寸微型化和低功率化促进了振动能量收集技术的迅速发展.在微纳米机电系统(MEMS和NEMS)中,Williams等<sup>[1]</sup>的研究认为一般有3种基本的振动能量收集方式,分别是磁电式<sup>[1-3]</sup>、静电式<sup>[4-5]</sup>和压电式<sup>[6-7]</sup>.其中,压电式能量收集凭借其具有直接的力电转换特性而能够实现快速响应、高的能量输出和应用方便等优点,受到相关研究人员的重点关注.

压电式俘能器主要是在环境振动下自由电荷发生定向移动而产生电流、输出电能<sup>[8]</sup>,从而实现机械能向电能的转化.随着俘能器应用尺寸的减小,需要更软的材料来降低结构的自振频率以匹配环境的振动频率,而柔性压电材料的机电转换效率远低于陶瓷压电材料,因此压电式俘能器在微纳尺度的应用存在一定局限性.近年来,一种基于应变梯度与极化强度之间的机电耦合关系-挠曲电效应,逐渐受到研究者的重视.早在1964年,Kogan<sup>[9]</sup>对应变梯度和电场之间的耦合关系进行了报道,而Indenbom<sup>[10]</sup>首次提出了“挠曲电效应”的概念.但在宏观块体材料中,应变梯度非常小,挠曲电效应相对于压电效应显得十分微弱.而在微纳结构中,应变梯度通常较大,挠曲电效应对结构的力电耦合行为有很大影响.相比压电式俘能器,挠曲电俘能器可以采用更广泛的电介质材料<sup>[11]</sup>,并具有明显的尺寸效应,在微纳尺度下能显著增强材料的等效压电效应<sup>[12]</sup>.而且,挠曲电材料不需要进行预极化处理,不依赖于剩余极化强度和温度,也不存在极化衰退的缺陷<sup>[13]</sup>.此外,挠曲电俘能器不需要被固定在弹性基础层上,也就不存在压电双晶型俘能器中由于机械或者热膨胀而导致连接处出现错配或者脱层等机械失效问题<sup>[14]</sup>.

目前,对于挠曲电效应已经进行了大量的实验测试<sup>[15-16]</sup>和理论分析<sup>[17-18]</sup>工作.Majdoub等<sup>[19]</sup>分别使用分子动力学与线性压电理论,研究了压电纳米悬臂梁在非均匀应变下的力学和电学行为,结果显示挠曲电效应能够显著影响梁的弹性行为和等效压电性能.Shen和Hu<sup>[20]</sup>通过变分原理建立了介电材料包含表面效应和挠曲电效应的力电耦合理论框架,并在此基础上,Liang等<sup>[21]</sup>分析了电学开路压电纳米梁的静态机电响应,发现挠曲电效应能显著增强梁结构的等效抗弯刚度.Yan等<sup>[22]</sup>讨论了不同机械约束条件下,挠曲电效应对压电致动器力电耦合性能的影响.Liang等<sup>[23]</sup>基于欧拉梁模型,讨论了外加电压对挠曲电压电梁振动和屈曲行为的影响.Zhang等<sup>[24]</sup>基于Kirchhoff板模型讨论了挠曲电效应对板振动响应的影响,结果表明挠曲电效应的尺寸效应随着板厚度的减小变得更加明显.Wang等<sup>[25]</sup>采用数值方法研究了挠曲电效应对悬臂板的力电耦合响应的影响.最近,Zhou等<sup>[26]</sup>基于电吉布斯自由能,采用变分方法统一求解了3种不同电学边界条件下挠曲电悬臂梁力电耦合响应的解析表达式,首次阐明了电学开路条件下诱导电势与挠曲电系数和结构尺寸的相互关系.Deng等<sup>[27]</sup>根据欧拉-伯努利梁模型和变分原理,采用假设模态法数值分析了挠曲电悬臂梁俘能器动力学和电学响应.压电式和挠曲电式俘能器的研究都表明,最大输出电压相对应的最优激励频率随着外加负载电阻的增加往高频平移<sup>[27-28]</sup>.而与压电式俘能器不同,挠曲电式俘能器自振频率的移动与结构的尺寸密切相关:在大尺度下频移不明显,而在微小尺度下频移非常显著<sup>[27]</sup>.此外,为了研究俘能器的末端响应,通常需要在其末端安装加速度传感器,也就意味着在结构上附加了质量,从而可能影响结构的动态特性<sup>[29]</sup>.因而,分析结构电学开路自振频率,并阐明结构频移与结构尺寸、挠曲电系数和末端质量块等的关系,对研究接高外加负载电阻的俘能器性能具有十分重要的意义.

本研究基于挠曲电悬臂梁模型,以电吉布斯自由能为基础,采用挠曲电材料的变分方法,导出表面覆盖电极的挠曲电悬臂梁结构在电学开路条件下的力电耦合动力学控制方程和相应的力电耦合边界条件;进一步推导获得了求解电学开路条件下梁结构自振频率的超越方程;并通过计算讨论了挠曲电系数、外加末端质量块及梁尺寸对挠曲电梁电学开路自振频率和有效频移(相对于短路自振频率的移动)的影响.

# 1 挠曲电悬臂梁的机电动力学控制方程

本文中以挠曲电悬臂梁结构为研究对象. 如图 1 所示, 悬臂梁的长度为  $L$ , 宽度为  $B$ , 厚度为  $h$ , 梁的末端带有质量为  $M_t$  的质量块, 质量块设定为边长  $d$  的立方体, 同时保持梁的长宽厚比 ( $L:B:h$ ) 为 100:10:1. 图 1 中灰色所示部分为梁的上下表面完好覆盖的电极层, 且电极的厚度和刚度相对于悬臂梁可以忽略. 如图 1 中所示建立相应的笛卡尔坐标系, 梁被固定在可沿  $x_3$  方向移动的基座上, 基座位移为  $w_b(t)$ . 悬臂梁受到基座的振动激励产生相应的振动响应, 动态弯曲变形的梁内产生动态的应变梯度, 由于挠曲电效应使得在梁的上下表面产生动态的自由电荷, 形成输出电势.

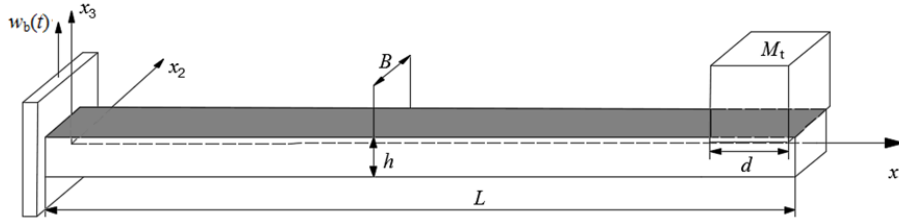


图 1 基座激励条件下带末端质量的挠曲电悬臂梁模型

Fig.1 Model of flexoelectric cantilever beam with a tip mass subjected to the base excitation

对于挠曲电材料, 其广义的 Hamilton 变分原理可以写成如下形式<sup>[30]</sup>

$$\delta \int_0^T [K - G + W] dt = 0 \tag{1}$$

其中,  $K$  为系统的动能,  $G$  为系统的电吉布斯自由能,  $W$  为外力对系统所做的功. 在没有外加体力和电场作用下, 带末端质量块的挠曲电悬臂梁结构的广义 Hamilton 变分方程可以改写为

$$\delta \int_0^T dt \int_V \left[ \frac{1}{2} \rho |\dot{w}^m|^2 - g \right] dV + \delta \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} M_t |\dot{w}^m|^2 + \frac{1}{2} I_t \left| \frac{\partial w^m}{\partial x_1} \right|^2 \right\} dt \Big|_{x_1=L} + \int_0^T dt \oint_S \varpi \delta \phi dA = 0 \tag{2}$$

其中,  $\rho$  是材料的密度,  $w^m(x_1, t) = w_b(t) + w(x_1, t)$  是梁的绝对位移,  $\dot{w}^m$  上的点表示对时间的一次偏导,  $w(x_1, t)$  是梁的中性层在  $x_1$  处的横向位移, 即梁的挠度,  $g$  是悬臂梁的电吉布斯自由能密度,  $I_t$  是末端质量块的转动惯量,  $\varpi(x_1, t)$  是结构表面电荷密度,  $\phi(x_1, t)$  是由于表面电荷移动产生的上下表面电势,  $V$  是梁的体积,  $A$  是梁的上下表面.

基于梁的长宽厚比例, 该梁可以视为薄梁结构, 结合 Euler-Bernoulli 梁的小变形假设, 则其相对位移

$$\mathbf{u} = \left\{ -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}, 0, w \right\} \tag{3}$$

将式(3)代入小变形几何方程, 其中非零应变项为

$$\varepsilon_{11} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \tag{4}$$

相应地, 应变梯度中的非零项为

$$\begin{cases} \varepsilon_{11,1} = -x_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} \\ \varepsilon_{11,3} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \end{cases} \tag{5}$$

从式(5)中可以看出,  $\varepsilon_{11,3}$  与梁的曲率相关, 但  $\varepsilon_{11,1}$  与曲率的梯度相关. 在 Euler-Bernoulli 梁模型中,  $\varepsilon_{11,1}$  相对于  $\varepsilon_{11,3}$  足够小以至于可以被忽略. 同样的, 本研究也只考虑沿着  $x_3$  方向的电场强度  $E_3$  而忽略沿着

$x_1$ 方向的电场强度 $E_1$ .

在挠曲电悬臂梁的本构方程中, 应力、高阶应力和电位移可以表示为<sup>[23, 26]</sup>

$$\begin{cases} \sigma_{11} = c_{11}\varepsilon_{11} - e_{31}E_3 \\ \sigma_{113} = -\mu_{3113}E_3 \\ D_3 = a_{33}E_3 + e_{31}\varepsilon_{11} + \mu_{3113}\varepsilon_{11,3} \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $c_{11}$ 是材料的弹性模量,  $e_{31}$ 是材料的压电系数,  $\mu_{3113}$ 是材料的挠曲电系数,  $a_{33}$ 是材料的介电系数.  $\sigma_{11}$ 和 $D_3$ 分别为应力和电位移, 而 $\sigma_{113}$ 为由挠曲电效应产生的电场所引起的高阶应力(higher order stress). 类似于弹性应变梯度理论中的高阶应力,  $\sigma_{113}$ 将会在平衡方程和边界条件中出现<sup>[20]</sup>. 在本研究中, 由挠曲电效应产生的高阶应力将出现在边界条件中.

考虑到体系内部没有自由电荷, 因此在梁内部电位移满足高斯定律 $D_{3,3} = 0$ , 即电势满足如下方程

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = \frac{e_{31}}{a_{33}} \varepsilon_{11,3} \quad (7)$$

其中,  $\Phi = \Phi(x_1, x_3, t)$ 是梁内部电势, 与电场的关系为 $E_3 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}$ . 设定梁上下表面电势的电学边界条件为:  $\Phi(x_1, x_3 = \frac{h}{2}, t) = \psi_1(x_1, t)$ ,  $\Phi(x_1, x_3 = -\frac{h}{2}, t) = \psi_2(x_1, t)$ , 则有:  $\psi(x_1, t) = \psi_1(x_1, t) - \psi_2(x_1, t)$ . 通过求解式(7)可以获得悬臂梁内部的电势 $\Phi$ 和电场 $E_3$ 分别为

$$\begin{cases} \Phi(x_1, x_3, t) = \frac{e_{31}}{2a_{33}} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \left( \frac{h^2}{4} - x_3^2 \right) + \left( \frac{1}{2} + \frac{x_3}{h} \right) \psi + C(x_1, t) \\ E_3 = \frac{e_{31}}{a_{33}} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} x_3 - \frac{\psi}{h} = -\frac{e_{31}}{a_{33}} \varepsilon_{11} - \frac{\psi}{h} \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $\psi(x_1, t) = \psi_1(x_1, t) - \psi_2(x_1, t)$ 是上下电极之间的电势差, 为挠曲电效应产生的输出电势或电压;  $C(x_1, t)$ 是与 $x_1$ 和 $t$ 相关的未知函数.

将式(8)代入式(6), 则电位移、应力和高阶应力分别可以表示为

$$\begin{cases} D_3 = \mu_{3113}\varepsilon_{11,3} - a_{33} \frac{\psi}{h} \\ \sigma_{11} = \left( c_{11} + \frac{e_{31}^2}{a_{33}} \right) \varepsilon_{11} + e_{31} \frac{\psi}{h} \\ \sigma_{113} = \frac{\mu_{3113}e_{31}}{a_{33}} \varepsilon_{11} + \frac{\mu_{3113}\psi}{h} \end{cases} \quad (9)$$

上式中的量都为时间和空间坐标的函数. 把式(9)代入悬臂梁的电吉布斯自由能密度表达式中<sup>[26]</sup>, 可以得到

$$g = \frac{1}{2} \left( c_{11} + \frac{e_{31}^2}{a_{33}} \right) \varepsilon_{11}^2 + \frac{e_{31}\mu_{3113}}{a_{33}} \varepsilon_{11} \varepsilon_{11,3} + \frac{\mu_{3113}\psi}{h} \varepsilon_{11,3} - \frac{1}{2} a_{33} \frac{\psi^2}{h^2} \quad (10)$$

结合式(4)和式(5), 把式(10)代入电吉布斯自由能的变分表达式, 通过变分运算可以得到

$$\begin{aligned} \delta \int_0^T dt \int_V g dV &= \int_0^T \int_0^L \left\{ \left[ \frac{Bh^3}{12} \left( c_{11} + \frac{e_{31}^2}{a_{33}} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} - \mu_{3113} B \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} \right] \delta w - \left[ \mu_{3113} B \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + a_{33} \frac{\phi B}{h} \right] \delta \psi \right\} dx_1 dt \\ &\int_0^T \left\{ \frac{Bh^3}{12} \left( c_{11} + \frac{e_{31}^2}{a_{33}} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \mu_{3113} B \psi \right\} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_1=L} dt - \int_0^T \left\{ \frac{Bh^3}{12} \left( c_{11} + \frac{e_{31}^2}{a_{33}} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} \right\} \delta w \Big|_{x_1=L} dt \end{aligned} \quad (11)$$

当末端质量块为立方体时, 末端质量块的转动惯量 $I_t$ 可以根据平行轴定理得到

$$I_t = \frac{1}{6} M_t d^2 + M_t \left( \frac{d+h}{2} \right)^2 \quad (12)$$

将式(11)代入式(2), 得到挠曲电悬臂梁振动的广义 Hamilton 变分方程

$$\int_0^T dt \left\{ \int_V \rho(\dot{w} + \dot{w}_b)\delta w dV + M_t \dot{w}_b \delta(x_1 - L)\delta w \right\} + \int_0^T dt \int_0^L \left\{ G_p \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} - \mu_{3113} B \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} \right\} \delta w - [\mu_{3113} B \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + a_{33} \frac{\psi B}{h} \delta \psi] \delta x_1 + \int_0^T \left\{ G_p \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \mu_{3113} B \psi + I_t \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} \right\} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_1=L} dt - \int_0^T \left\{ G_p \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} - M_t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\} \delta w \Big|_{x_1=L} dt + \int_0^T dt \int_S \varpi \delta \psi dAdt = 0 \tag{13}$$

其中,  $\dot{w}$ 和 $\dot{w}_b$ 分别代表 $w$ 和 $w_b$ 对时间的二次偏导,  $G_p = \frac{Bh^3}{12} (c_{11} + \frac{e_{31}^2}{a_{33}})$ 是压电梁的等效抗弯刚度, 表示梁的抗弯能力. 在推导式(13)时, 采用了如下两个运算

$$\begin{cases} \delta \int_0^T \frac{1}{2} M_t |\dot{w}^m|^2 dt \Big|_{x_1=L} = - \int_0^T M_t \dot{w}_b \delta(x_1 - L)\delta w dt - \int_0^T M_t \dot{w} \Big|_{x_1=L} \delta w dt \\ \delta \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} I_t \left| \frac{\partial \dot{w}^m}{\partial x_1} \right|^2 \right\} dt \Big|_{x_1=L} = - \int_0^T I_t \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) dt \Big|_{x_1=L} \end{cases} \tag{14}$$

其中,  $\delta(x_1)$ 为狄拉克 $\delta$ 函数(Dirac delta function).

本文研究的悬臂梁结构上下表面覆盖电极, 因此上下表面均为等势体, 电势差 $\psi(x_1, t)$ 与 $x_1$ 无关, 仅为时间 $t$ 的函数. 式(13)中的 $\delta w$ 可以任意选择, 因此可以得到挠曲电悬臂梁结构的机电耦合动力学控制方程

$$G_p \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + [m + M_t \delta(x_1 - L)] \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{15}$$

其中,  $m = \rho Bh$ 是梁单位长度的质量. 同样, 式(13)中的 $\delta \psi$ 也可以任意选择, 因此挠曲电悬臂梁结构还存在如下关系

$$\int_0^L \varpi - \left( \mu_{3113} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + a_{33} \frac{\psi}{h} \right) dx_1 = \int_0^L (\varpi - D_3) dx_1 = 0 \tag{16}$$

上式表明, 挠曲电悬臂梁表面上的平均自由电荷与平均电位移相等. 在电学开路条件下, 当梁结构弯曲时, 表面电荷将在电极上重新分布, 但总电荷量还是要保持为零, 即

$$\int_0^L -D_3 dx_1 = \int_0^L - \left( \mu_{3113} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + a_{33} \frac{\psi}{h} \right) dx_1 = 0 \tag{17}$$

同时, 从式(13)中也可以得到悬臂梁两端的机械约束条件为

$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = 0 \\ \left\{ G_p \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \mu_{3113} B \psi + I_t \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} \right\} \Big|_{x_1=L} = 0 \\ \left\{ G_p \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} - M_t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\} \Big|_{x_1=L} = 0 \end{cases} \tag{18}$$

从上式的第三式可以看出, 挠曲电效应引起的诱导电势将在悬臂梁的自由端产生一个反向的机械力矩, 是高阶应力的影响. 因此, 产生的诱导电势将减小悬臂梁的变形, 即增加了悬臂梁结构的抗弯能力.

## 2 电学开路下的自振特征方程

在电学短路条件下, 由于上下电极表面相连接, 串联或并联双晶压电和单层挠曲电悬臂梁结构在弯曲变形时不会在梁内产生诱导电势或电压<sup>[26, 28]</sup>. 因此, 电学短路下挠曲电悬臂梁自由振动行为与弹性梁类似, 此时自振频率特征方程为<sup>[28]</sup>

$$1 + \cos\beta \cosh\beta + \beta \frac{M_t}{mL} (\cos\beta \sinh\beta - \sin\beta \cosh\beta) - \frac{\beta^3 I_t}{mL^3} (\cosh\beta \sin\beta + \sinh\beta \cos\beta)$$

$$+ \frac{\beta^4 M_t I_t}{m^2 L^4} (1 - \cos\beta \cosh\beta) = 0 \quad (19)$$

其中,  $\beta$  是结构振动的特征值. 而在电学开路下, 挠曲电悬臂梁弯曲变形时会在电极表面产生诱导电势. 由式(18)可知, 诱导电势将对梁的机械变形产生反向作用, 即逆挠曲电效应. 此时, 电学开路下悬臂梁的自振频率与电学短路下不同, 将与结构尺寸, 挠曲电系数等密切相关.

当考虑挠曲电悬臂梁在电学开路下的自由振动时, 外加基础激励  $w_b(t)$  应设为零, 因而系统的动力学控制方程式(15)可以简写成

$$G_p \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (20)$$

并且由式(17)可得  $\psi(t) = -\frac{\mu_{3113} h}{a_{33} L} \frac{\partial w}{\partial x_1} |_{x_1=L}$ , 将其代入式(18)的第三式中可得机械的边界条件

$$\left\{ G_p \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\mu_{3113} B h}{a_{33} L} \frac{\partial w}{\partial x_1} + I_t \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} \right\} |_{x_1=L} = 0 \quad (21)$$

此时, 动态控制方程和边界条件简化为力电解耦形式. 根据控制方程式(20)和相应的边界约束条件, 可以得到带末端质量块的挠曲电悬臂梁在电学开路条件下的自振频率特征方程 (推导过程参见附录)

$$\begin{aligned} & G_p \left( \frac{\mu_{3113}^2 B h}{a_{33} L} - I_t \omega^2 \right) \left( \frac{\beta}{L} \right)^3 (\sinh\beta \cos\beta + \cosh\beta \sin\beta) + (G_p)^2 \left( \frac{\beta}{L} \right)^4 (1 + \cos\beta \cosh\beta) \\ & + \omega^2 M_t \left( \frac{\mu_{3113}^2 B h}{a_{33} L} - I_t \omega^2 \right) (\cos\beta \cosh\beta - 1) + \omega^2 M_t G_p \left( \frac{\beta}{L} \right) (\sinh\beta \cos\beta - \sin\beta \cosh\beta) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

其中, 结构振动的圆频率  $\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{G_p}{m L^4}}$ . 式(22)是一个关于特征值  $\beta$  的超越方程, 无法通过常规的方式写出  $\beta$  的解析解, 但很容易通过数值的方法求解一系列  $\beta$  的值. 电学开路下的结构自振频率对研究外接高负载电阻的能量俘获装置性能很关键. 通常的研究是以电学短路的自振频率和模态为基准, 采用数值或解析的方法分析各种俘能器的性能<sup>[27-28]</sup>. 但是, 对于高外接负载电阻的结构, 以电学开路自振频率激励结构能获得更大的能量和功率输出.

值得注意的是, 式(22)也可为测量材料的挠曲电系数提供一种新的思路. 目前测量固体材料的挠曲电系数主要采用静态弯曲法<sup>[11]</sup>、纳米压缩法<sup>[31-32]</sup>、电致弯曲法<sup>[16]</sup>和低频振动法<sup>[33]</sup>等. 由于挠曲电效应在微纳尺度才显著, 在上述实验方法中, 测量到的都是微纳结构的微小位移和微弱电荷或电压, 这使得测量的挠曲电系数存在不确定、误差较大等问题. 根据式(22), 可以基于表面覆盖电极的悬臂梁模型动态共振法来测量材料的挠曲电系数. 可以设想: 预先测试材料的弹性系数, 压电系数和介电系数, 将材料制成悬臂梁的结构, 设定一定的结构尺寸; 在悬臂梁结构的上下表面覆盖电极, 并保持结构的电学开路条件; 利用扫频法引发结构共振或者采用共振测试仪测定结构各阶的自振频率, 将各阶的频率分别代入式(22)中, 计算出一组挠曲电系数, 并取其平均值作为此结构尺寸下的挠曲电系数; 改变悬臂梁的尺寸, 采用相同的方法再测得一个挠曲电系数; 多次改变悬臂梁厚度获得多组数据, 将这些数据再取平均值, 获得材料最终的挠曲电系数测试值. 这种实验方法可以避免过去实验中需要捕捉微小物理量所带来的不准确性和不稳定性, 也不再需要测试微弱电荷和微小变形的精密仪器, 提高了挠曲电系数测量的准确度和操作性.

### 3 数值计算与讨论

高分子多功能材料聚偏氟乙烯(PVDF)具有制作成本低、易成型、重量轻、柔软可弯曲以及良好的力电耦合特性等特点<sup>[34-35]</sup>, 常被制成压电式和挠曲电式智能结构. 因此, 本研究以 PVDF 材料制成的微纳米挠曲电悬臂梁为算例, 其材料参数选择如下: 密度  $\rho = 1.78 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , 弹性模量  $c_{11} = 3.7 \text{ GPa}$ , 压电系数  $e_{31} = -0.01 \text{ N/(V} \cdot \text{m)}$ , 介电系数  $a_{33} = 8.15 \times 10^{-11} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$ <sup>[36]</sup>. 材料的挠曲电系数依照不同的测

试方法, 得到的结果会有所偏差, 一般 PVDF 的挠曲电系数大概在  $10^{-1} \sim 10^{-3} \mu\text{C}/\text{m}$  之间<sup>[37-38]</sup>. 为了在理论上探讨挠曲电系数对悬臂梁自振频率的影响, 文中选取了两种不同数量级的挠曲电系数, 分别为  $0.1 \mu\text{C}/\text{m}$ 、 $0.01 \mu\text{C}/\text{m}$ . 在数值计算过程中, 当梁厚度改变时, 保持梁的长宽厚比值不变. 末端质量块的边长取  $d = B$ , 质量大小按照占整个悬臂梁质量的比例选取, 即  $M_t = m \times L \times K_n$ , 其中  $K_n$  分别取  $K_1 = 0$ 、 $K_2 = 0.05$ 、 $K_3 = 0.15$  和  $K_4 = 0.25$ , 其中 0 代表无末端质量的情况. 需要说明的是, 本节中所讨论的自振频率均为结构的第一阶自振频率.

### 3.1 挠曲电悬臂梁的自振频率与有效频移

结构在受到外加振动激励时会发生运动而产生形变, 并且当激励频率在结构的自振频率附近时, 运动形变响应将非常剧烈. 因此在实际应用中, 希望俘能器能够在其自振频率附近工作, 以充分利用其机电耦合特性来获得最大的能量或功率输出. 因而, 电学开路自振频率对研究外加高负载电阻的俘能器结构的性能至关重要. 图 2 给出了挠曲电系数分别为  $0.1 \mu\text{C}/\text{m}$  和  $0.01 \mu\text{C}/\text{m}$  时, 带不同末端质量块的挠曲电悬臂梁的开路自振频率  $f_{oz}$  随厚度的变化趋势, 其中  $f_{oz} = \omega/2\pi$ ,  $\lg(h/m)$  为梁的厚度数量级. 从图 2(a) 中可以看出, 挠曲电悬臂梁的开路自振频率随着厚度的减小而增加, 而在同一厚度情况下, 开路自振频率随着末端质量块的增大而降低, 这些规律与一般弹性梁和双晶压电梁相一致. 比较图 2(a) 和 2(b) 可以发现, 对于相同尺寸的挠曲电悬臂梁, 其开路自振频率随着挠曲电系数的增大而有所提高. 这是因为大挠曲电系数材料制备的悬臂梁结构在相同条件下能诱导更大的输出电势, 输出电势在电学开路条件下反作用于悬臂梁结构, 使其抗弯能力增加, 进而提高了结构的自振频率.

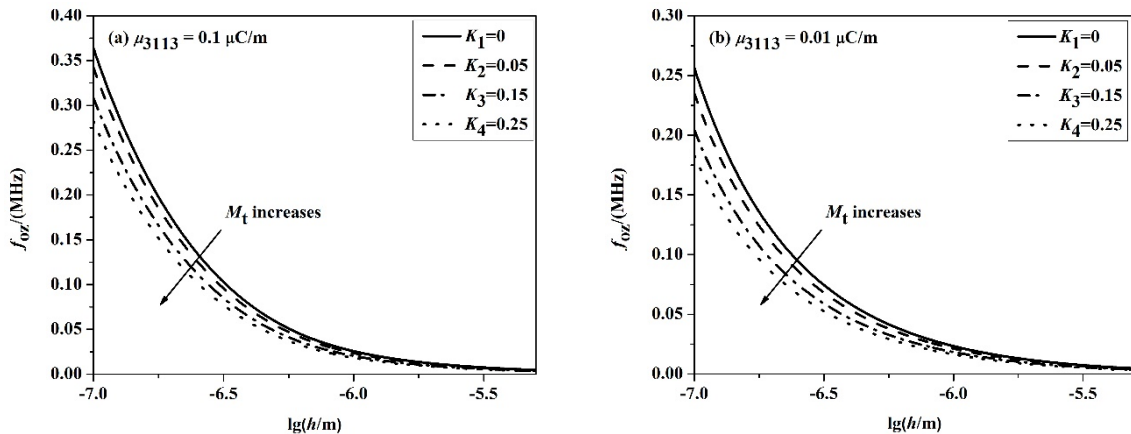


图 2 电学开路条件下不同末端质量块的挠曲电悬臂梁自振频率变化曲线 (a) $\mu_{3113} = 0.1 \mu\text{C}/\text{m}$ , (b) $\mu_{3113} = 0.01 \mu\text{C}/\text{m}$

Fig.2 With the open-circuit condition and the different tip masses, the variation of resonance frequency of the flexoelectric cantilever beam vs beam thicknesses (a) $\mu_{3113} = 0.1 \mu\text{C}/\text{m}$ , (b) $\mu_{3113} = 0.01 \mu\text{C}/\text{m}$

压电和挠曲电悬臂梁结构在电学短路条件下并不能在电极表面产生诱导电势, 因此其自振频率与电学开路条件下的值不同. 在压电俘能器结构中, 自振频率平移值是衡量其系统机电耦合性能的一个重要标准<sup>[27-28]</sup>. 这里定义挠曲电悬臂梁结构短路和开路的有效频移为:  $F = \frac{f_{oz}}{f_{sz}}$ , 其中  $f_{sz}$  为短路条件下的自振频率, 其可由式(19)获得. 图 3 中给出了悬臂梁厚度从  $1 \text{ nm}$  变化到  $1 \mu\text{m}$  时, 不同挠曲电系数和末端质量下, 结构有效频移随厚度变化的曲线. 从图 3 可以看出, 随着悬臂梁厚度的减小, 有效频移随之增加, 当厚度减小至某一临界值时, 有效频移趋向于一饱和值. 值得注意的是, 这一饱和值与材料的挠曲电系数无关. 对于较薄的梁, 在振动时会产生较大的应变梯度, 从而产生较大的诱导电势, 但如果梁的厚度太小, 由挠曲电效应产生的较大诱导电势反馈作用在梁上, 使得梁振动时变形反而减小很多, 从而削弱其电学响应. 因此, 挠曲电悬臂梁的有效频移不会随着厚度的减小而无限增加, 而是趋于某一个定值. 对于长宽厚比确定的挠曲电悬臂梁, 从静态力电耦合分析可以看出, 当厚度很小时, 文献[26]中式(28)的诱导电势正比于  $h/\mu_{3113}$ . 代入边界条件式(18)的第三式可知, 控制方程和边界条件中都不含有挠曲电系数. 因此, 在不同



挠曲电系数下, 相同挠曲电悬臂梁结构在很小厚度下的有效频移饱和值一致. 该饱和值随着末端质量块的增大而增大, 这是由于当厚度不变时, 末端质量块的增大将使得悬臂梁的振动响应扩大, 从而产生更大的应变梯度, 其通过挠曲电效应更加显著地影响梁在电学开路条件下的自振频率. 随着悬臂梁厚度的增加, 结构的有效频移最终趋向于 1, 这是因为, 对于大尺寸结构, 由于弹性极限应变的存在, 悬臂梁内振动产生的应变梯度较小, 因此电学开路条件下表面的诱导电势很小, 不足以影响结构的自振频率. 比较图 3(a)~(c)可以看出, 有效频移达到饱和值时的悬臂梁厚度随着挠曲电系数的减小而明显减小. 这是因为, 挠曲电系数较小时, 需要较大的应变梯度(较薄的梁容易产生较大的应变梯度)才能使得挠曲电效应对梁的自振频率产生较大的影响, 而当挠曲电系数较大时, 只需要较小的应变梯度(较厚的梁产生较小的应变梯度)就能使得挠曲电效应显著影响梁的自振频率.

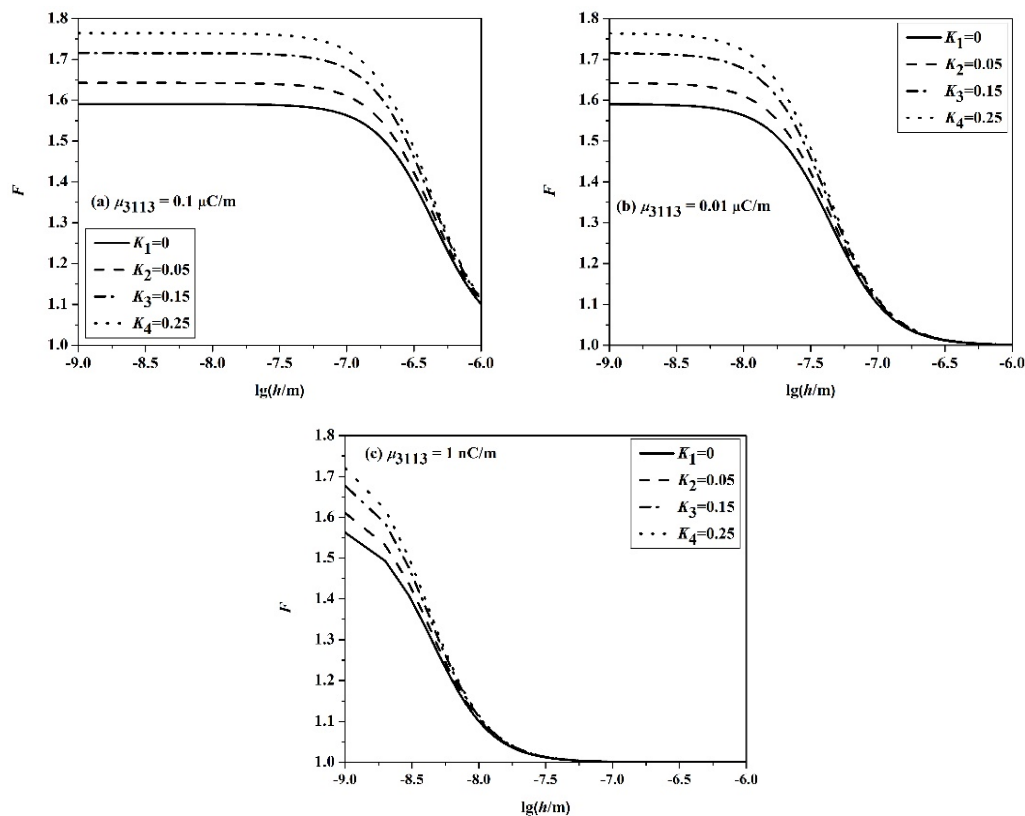


图 3 挠曲电悬臂梁结构短路和开路电学边界情况下的有效频移随厚度的变化  
(a) $\mu_{3113} = 0.1 \mu\text{C}/\text{m}$ , (b) $\mu_{3113} = 0.01 \mu\text{C}/\text{m}$ , (c) $\mu_{3113} = 1 \text{nC}/\text{m}$

Fig.3 The effective variety of frequency between short-circuit and open-circuit conditions of flexoelectric cantilever beam vs beam thicknesses (a) $\mu_{3113} = 0.1 \mu\text{C}/\text{m}$ , (b) $\mu_{3113} = 0.01 \mu\text{C}/\text{m}$ , (c) $\mu_{3113} = 1 \text{nC}/\text{m}$

### 3.2 末端质量块转动效应

从上面的分析可知, 末端质量块对调节挠曲电悬臂梁结构的自振频率具有显著的作用. 末端质量块在受到外加激励时, 随着悬臂梁发生平动和转动. 图 4 给出了考虑末端质量块转动效应的自振频率  $f_{oz}$  与未考虑末端质量块转动的自振频率  $f_{op}$  的差异, 即频率的相对误差  $VF = \frac{f_{op} - f_{oz}}{f_{op}} \times 100\%$  随厚度的变化曲线图. 图 4 中水平线为不考虑挠曲电效应, 即  $\mu_{3113} = 0$ , 的压电悬臂梁的相对误差值, 其与悬臂梁的厚度无关. 从图 4 中可以看出, 所有相对误差的最大值均未超过 0.25%, 并且当存在挠曲电效应时, 随着悬臂梁厚度和末端质量块的增大, 自振频率的相对误差也增加. 当梁厚度超过某个定值, 误差曲线逐渐接近于压电悬臂梁的误差值. 这是因为, 当梁的尺寸较大时, 由于弹性极限应变的存在, 悬臂梁内振动产生的应变梯度较小, 使得挠曲电效应十分微弱, 进一步使得梁的振动行为趋近于一般压电梁. 另外, 这个转变厚度随着挠曲电系数的减小而减小, 这是由于当挠曲电系数较小时, 需要较大的应变梯度(较薄的梁容易产



生较大的应变梯度) 才能产生明显的挠曲电效应, 其显著影响梁的自振频率。

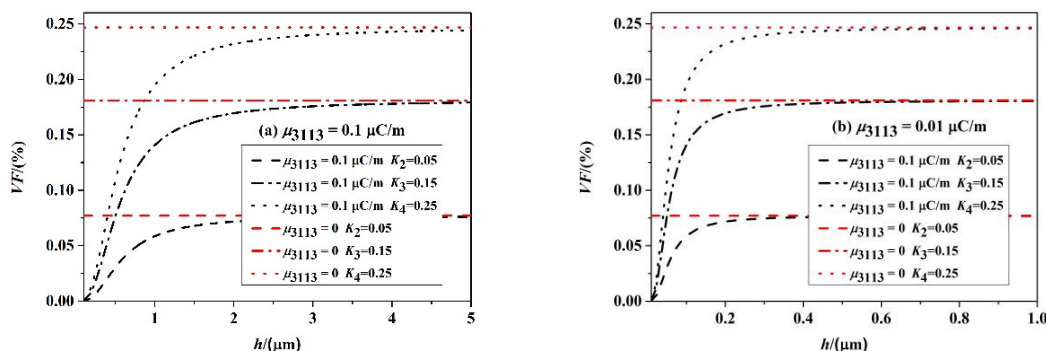


图4 电学开路条件下, 未考虑末端质量块转动对挠曲电悬臂梁自振频率带来的相对误差  
(a) $\mu_{3113} = 0.1 \mu\text{C/m}$ , (b) $\mu_{3113} = 0.01 \mu\text{C/m}$

Fig. 4 Under open-circuit condition, the relative tolerance of the flexoelectric cantilever beam resonant frequency without the rotation of the cubic tip mass (a) $\mu_{3113} = 0.1 \mu\text{C/m}$ , (b) $\mu_{3113} = 0.01 \mu\text{C/m}$

为了与立方体质量块对比, 另选取了一种长方体质量块, 并设长方体的三条边长分别为 $\frac{d}{2}$ 、 $d$ 、 $2d$ , 并让 $(\frac{d}{2} * d)$ 面紧密地贴合梁的上表面, 空间位置保持与原立方体一致, 此时质量块转动惯量为 $I_t = \frac{1}{12}M_t(d^2 + 4d^2) + M_t(d + \frac{h}{2})^2$ 。图5给出了长方体末端质量块转动效应带来的自振频率相对误差变化图。图5中呈现出了与图4类似的曲线, 其最大相对误差不超过0.8%, 大约为同质量立方体质量块的3~4倍, 这是由于质量块本身的转动效应与其形状有较大关系。因此, 对于类似于文中的末端质量块(长高同量级), 在进行数值分析和模拟时可以合理地将末端质量块的转动效应忽略, 这样可以简化模型构建和理论推导, 同时又不影响结果的可靠性。

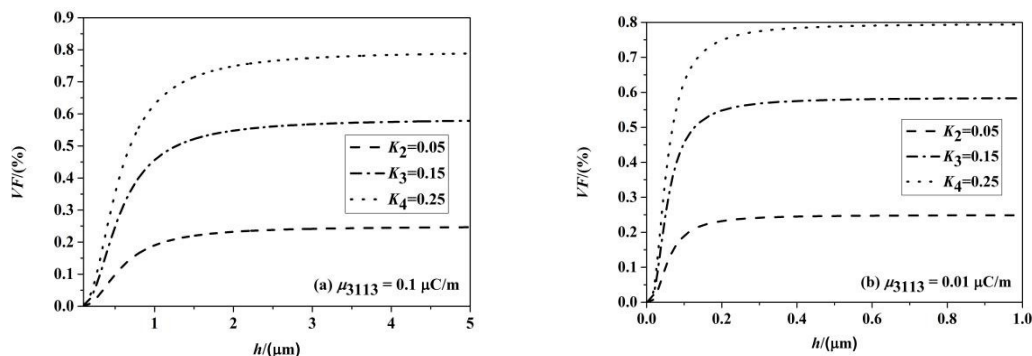


图5 开路条件下, 未考虑末端长方体质量转动对挠曲电悬臂梁的自振频率带来的相对误差  
(a) $\mu_{3113} = 0.1 \mu\text{C/m}$ , (b) $\mu_{3113} = 0.01 \mu\text{C/m}$

Fig.5 Under open-circuit condition, the relative tolerance of the flexoelectric cantilever beam resonant frequency without the rotation of the cubic tip mass (a) $\mu_{3113} = 0.1 \mu\text{C/m}$ , (b) $\mu_{3113} = 0.01 \mu\text{C/m}$

## 4 结论

本研究基于挠曲电材料的电吉布斯自由能和变分原理, 推导了挠曲电悬臂梁结构在电学开路条件下的机电耦合动力学控制方程和相应的力电边界条件。进一步获得了求解电学开路挠曲电悬臂梁结构自振频率的超越方程。通过此方程提出了一种基于电学开路悬臂梁结构动态共振法测量材料挠曲电系数的新思路, 这种实验方法避免了捕捉微小物理量所带来的不准确和不稳定性, 提高了挠曲电系数测量的准确

度和操作性。本研究以 PVDF 材料为算例, 讨论了挠曲电系数、末端质量块和梁尺寸对结构自振频率和电学开路和短路条件下结构自振频率有效频移的影响。计算结果表明, 挠曲电系数的增大会提高梁的自振频率, 而末端质量的增大可以降低梁的自振频率, 并且类似文中的末端质量块的转动效应对悬臂梁的自振频率影响很小。挠曲电悬臂梁结构的有效频移随着结构尺寸减小而增加, 并在某一临界尺寸趋于饱和值, 这个临界厚度尺寸与挠曲电系数相关, 而有效频移的饱和值与末端质量块有关。

#### 参考文献:

- [1] WILLIAMS C B, YATES R B. Analysis of a micro-electric generator for microsystems[J]. *Sensors and Actuators A Physical*, 1996, 52(1-3):8-11.
- [2] GLYNNE-JONES P, TUDOR M J, BEEBY S P, et al. An electromagnetic, vibration-powered generator for intelligent sensor systems[J]. *Sensors and Actuators A Physical*, 2004, 110(1-3):344-349.
- [3] 黄洋, 王宏涛. 基于多模式耦合振动的压磁压电复合材料结构的优化设计[J]. *力学季刊*, 2010, 31(4):460-468.
- [4] XUE X, GONZALEZ-ARGUETA L, SUNDARARAJAN V. Energy scavenging for wireless sensor networks[C]// *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 2007, 96(8):361-366.
- [5] MITCHESON P D, MIAO P, STARK B H, et al. MEMS electrostatic micropower generator for low frequency operation[J]. *Sensors and Actuators A Physical*, 2004, 115(2-3):523-529.
- [6] JEON Y B, SOOD R, JEONG J H, et al. MEMS power generator with transverse mode thin film PZT[J]. *Sensors and Actuators A Physical*, 2005, 122(1):16-22.
- [7] SODANO H A, INMAN D J. A Review of power harvesting from vibration using piezoelectric materials[J]. *Shock and Vibration Digest*, 2004, 36(3):197-205.
- [8] THOMANN H. Piezoelectric ceramics[J]. *Advanced Materials*, 1990, 2(10):458-463.
- [9] KOGAN S M. Piezoelectric effect during inhomogeneous deformation and acoustic scattering of carriers in crystals[J]. *Soviet Physics-Solid State*, 1964, 5(10):2069-2070.
- [10] INDENBOM V L. Flexoelectric effect and crystal-structure[J]. *Kristallografiâ*, 1981, 26(6):1157-1162.
- [11] NGUYEN T D, MAO S, YEH Y W, et al. Nanoscale flexoelectricity[J]. *Advanced Materials*, 2013, 25(7):946-974.
- [12] MAJDOUB M S, SHARMA P, CAGIN T. Dramatic enhancement in energy harvesting for a narrow range of dimensions in piezoelectric nanostructures[J]. *Physical Review B Condensed Matter*, 2008, 78(12):159901.
- [13] HUANG W, KWON S R, YUAN F G, et al. A flexoelectric micro-accelerometer[C]// *International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, New York, 2012, 597-603.
- [14] BHASKAR U K, BANERJEE N, ABDOLLAHI A, et al. A flexoelectric microelectromechanical system on silicon[J]. *Nature Nanotechnology*, 2015, 11(3):263-266.
- [15] CATALAN G, SINNAMON L J, GREGG J M. The effect of flexoelectricity on the dielectric properties of inhomogeneously strained ferroelectric thin films[J]. *Journal of Physics Condensed Matter*, 2004, 16(13):2253.
- [16] MA W, CROSS L E. Large flexoelectric polarization in ceramic lead magnesium niobate[J]. *Applied Physics Letters*, 2001, 79(26):4420-4422.
- [17] MARANGANTI R, SHARMA P. Atomistic determination of flexoelectric properties of crystalline dielectrics[J]. *Physical Review B*, 2009, 80(5):1956-1960.
- [18] SHARMA N D, LANDIS C M, SHARMA P. Piezoelectric thin-film superlattices without using piezoelectric materials[J]. *Journal of Applied Physics*, 2010, 108(2):523.
- [19] MAJDOUB M S, SHARMA P, CAGIN T. Enhanced size-dependent piezoelectricity and elasticity in nanostructures due to the flexoelectric effect[J]. *Physical Review B*, 2008, 77(12):125424.
- [20] SHEN S, HU S. A theory of flexoelectricity with surface effect for elastic dielectrics[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2010, 58(5):665-677.

- [21] LIANG X, HU S, SHEN S. Bernoulli-Euler dielectric beam model based on strain-gradient effect[J]. Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME, 2013, 80(4):369-384.
- [22] YAN Z, JIANG L Y. Flexoelectric effect on the electroelastic responses of bending piezoelectric nanobeams[J]. Journal of Applied Physics, 2013, 113(19):014110.
- [23] LIANG X, HU S, SHEN S. Size-dependent buckling and vibration behaviors of piezoelectric nanostructures due to flexoelectricity[J]. Smart Materials and Structures, 2015, 24(10):105012.
- [24] ZHANG Z, YAN Z, JIANG L. Flexoelectric effect on the electroelastic responses and vibrational behaviors of a piezoelectric nanoplate[J]. Journal of Applied Physics, 2014, 116(1):014307.
- [25] WANG X, ZHANG R, JIANG L. A Study of the flexoelectric effect on the electroelastic fields of a cantilevered piezoelectric nanoplate[J]. International Journal of Applied Mechanics, 2017, 9(4):1750056.
- [26] ZHOU Z D, YANG C P, SU Y X, et al. Electromechanical coupling in piezoelectric nanobeams due to flexoelectric effect[J]. Smart Materials and Structures, 2017, 26(9):095025.
- [27] DENG Q, KAMMOUN M, ERTURK A, et al. Nanoscale flexoelectric energy harvesting[J]. International Journal of Solids and Structures, 2014, 51(18):3218-3225.
- [28] ERTURK A, INMAN D J. 压电能量收集[M]. 舒海生, 赵丹, 史肖娜. 北京: 国防工业出版社, 2015.
- [29] 滕悠优, 蔡国平. 具有附加质量的中心刚体-柔性梁的频率特性[J]. 力学季刊, 2005, 26(4):623-628.
- [30] LIANG X, HU S, SHEN S. A new Bernoulli-Euler beam model based on a simplified strain gradient elasticity theory and its applications[J]. Composite Structures, 2014, 111(11):317-323.
- [31] ZHOU H, PEI Y, HONG J, et al. Analytical method to determine flexoelectric coupling coefficient at nanoscale[J]. Applied Physics Letters, 2016, 108(10):101908.
- [32] LU J, LV J, LIANG X, et al. Improved approach to measure the direct flexoelectric coefficient of bulk polyvinylidene fluoride[J]. Journal of Applied Physics, 2016, 119(9):094104.
- [33] 李康, 骆英, 徐晨光, 等. 基于 BST 微悬臂梁横向挠曲电系数的测定[J]. 压电与声光, 2014, 36(5):798-800.
- [34] 张亚红, 张希农, 谢石林. 层叠式 PVDF 压电作动器及圆柱壳的振动主动控制[J]. 力学季刊, 2006, 27(4):591-597.
- [35] 林启荣, 刘正兴, 李红云. 噪声控制压电智能系统研究的现状和展望[J]. 力学季刊, 2000, 21(1):27-32.
- [36] CHU B, SALEM D R. Flexoelectricity in several thermoplastic and thermosetting polymers[J]. Applied Physics Letters, 2012, 101(10):103905.
- [37] BASKARAN S, HE X, WANG Y, et al. Strain gradient induced electric polarization in  $\alpha$ -phase polyvinylidene fluoride films under bending conditions[J]. Journal of Applied Physics, 2011, 111(1):014109.
- [38] ZHOU Y, LIU J, HU X, et al. Flexoelectric effect in PVDF-based polymers[J]. IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation, 2017, 24(2):727-731.

## 附录

考虑到式(20)的形式, 其解可以设为  $w = \phi(x_1)\eta(t)$  的分离变量形式, 其中

$$\phi(x_1) = C_1 \cos \frac{\beta}{L} x_1 + C_2 \sin \frac{\beta}{L} x_1 + C_3 \cosh \frac{\beta}{L} x_1 + C_4 \sinh \frac{\beta}{L} x_1, \quad (\text{A1})$$

$$\eta(t) = C_5 e^{j\omega t}, \quad (\text{A2})$$

其中,  $j$  为虚根,  $j^2 = -1$ . 由悬臂梁的边界约束条件可以得

$$\phi(0) = 0, \quad (\text{A3})$$

$$\left\{ \frac{d\phi(x_1)}{dx_1} \Big|_{x_1=0} \right\} = 0, \quad (\text{A4})$$

$$\left[ G_p \frac{d^2 \phi(x_1)}{dx_1^2} = - \left( \frac{\mu_{3113}^2 B h}{a_{33} L} - I_t \omega^2 \right) \frac{d \phi(x_1)}{dx_1} \right] \Big|_{x_1=L}, \quad (\text{A5})$$

$$G_p \frac{d^3 \phi(x_1)}{dx_1^3} \Big|_{x_1=L} + \omega^2 M_t \phi(x_1) = 0. \quad (\text{A6})$$

将式(A1)代入式(A3)和式(A4)可得

$$\begin{cases} C_1 = -C_3 \\ C_2 = -C_4 \end{cases} \quad (\text{A7})$$

再结合式(A5)后可得

$$\begin{aligned} & G_p \left( \frac{\beta}{L} \right)^2 (-C_1 \cos \beta - C_2 \sin \beta - C_1 \cosh \beta - C_2 \sinh \beta) \\ & = \left( \frac{\mu_{3113}^2 B h}{a_{33} L} - I_t \omega^2 \right) \frac{\beta}{L} (C_1 \sin \beta - C_2 \cos \beta + C_1 \sinh \beta + C_2 \cosh \beta) \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

移项化简后即

$$\begin{aligned} & C_1 \left[ \left( \frac{\mu_{3113}^2 B h}{a_{33} L} - I_t \omega^2 \right) (\sin \beta + \sinh \beta) + G_p \left( \frac{\beta}{L} \right) (\cos \beta + \cosh \beta) \right] + \\ & C_2 \left[ \left( \frac{\mu_{3113}^2 B h}{a_{33} L} - I_t \omega^2 \right) (\cosh \beta - \cos \beta) + G_p \left( \frac{\beta}{L} \right) (\sin \beta + \sinh \beta) \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

同样的, 将式(A1)和式(A7)代入式(A6)后得

$$G_p \left( \frac{\beta}{L} \right)^3 (C_1 \sin \beta - C_2 \cos \beta - C_1 \sinh \beta - C_2 \cosh \beta) = -\omega^2 M_t (C_1 \cos \beta + C_2 \sin \beta - C_1 \cosh \beta - C_2 \sinh \beta) \quad (\text{A10})$$

移项化简后得

$$\begin{aligned} & C_1 \left[ G_p \left( \frac{\beta}{L} \right)^3 (\sin \beta - \sinh \beta) + \omega^2 M_t (\cos \beta - \cosh \beta) \right] - \\ & C_2 \left[ G_p \left( \frac{\beta}{L} \right)^3 (\cos \beta + \cosh \beta) + \omega^2 M_t (-\sin \beta + \sinh \beta) \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

将式(A7)和式(A11)记为如下形式

$$\begin{cases} C_1 A_1 + C_2 A_2 = 0 \\ C_1 A_3 - C_2 A_4 = 0 \end{cases} \quad (\text{A12})$$

其中

$$\begin{cases} A_1 = \left[ \left( \frac{\mu_{3113}^2 B h}{a_{33} L} - I_t \omega^2 \right) (\sin \beta + \sinh \beta) + G_p \left( \frac{\beta}{L} \right) (\cos \beta + \cosh \beta) \right] \\ A_2 = \left[ \left( \frac{\mu_{3113}^2 B h}{a_{33} L} - I_t \omega^2 \right) (\cosh \beta - \cos \beta) + G_p \left( \frac{\beta}{L} \right) (\sin \beta + \sinh \beta) \right] \\ A_3 = \left[ G_p \left( \frac{\beta}{L} \right)^3 (\sin \beta - \sinh \beta) + \omega^2 M_t (\cos \beta - \cosh \beta) \right] \\ A_4 = \left[ G_p \left( \frac{\beta}{L} \right)^3 (\cos \beta + \cosh \beta) + \omega^2 M_t (-\sin \beta + \sinh \beta) \right] \end{cases} \quad (\text{A13})$$

要使得齐次方程组(A12)有非零解, 则其系数矩阵的行列式为零展开后, 经化简得

$$\begin{aligned} & G_p \left( \frac{\mu_{3113}^2 B h}{a_{33} L} - I_t \omega^2 \right) \left( \frac{\beta}{L} \right)^3 (\sinh \beta \cos \beta + \cosh \beta \sin \beta) + (G_p)^2 \left( \frac{\beta}{L} \right)^4 (1 + \cos \beta \cosh \beta) + \\ & \omega^2 M_t \left( \frac{\mu_{3113}^2 B h}{a_{33} L} - I_t \omega^2 \right) (\cos \beta \cosh \beta - 1) + \omega^2 M_t G_p \left( \frac{\beta}{L} \right) (\sinh \beta \cos \beta - \sin \beta \cosh \beta) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A14})$$

上式即为在电学开路条件下挠曲电悬臂梁结构的自由振动特征方程。