学校编码：10384 分类号________密级________
学 号：27720141152785 UDC________

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

期权定价及其风险对冲：偏微分方程数值解法结合光滑函数的解决方案

Pricing and Hedging Options: A Numerical PDE Approach with Smoothing

刘耀筠

指导教师姓名： 赵宏飙 副教授

专 业 名 称： 应 用 统 计

论文提交日期： 2017 年 4 月

论文答辩时间： 2017 年 4 月

学位授予日期： 2017 年 6 月

答辩委员会主席：__________

评 阅 人：__________

2017 年 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外,该学位论文为(　　　　　　　　　　　　　　　)课题(组)的研究成果，获得（　　　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

摘 要

期权作为最常见的一类金融衍生品，它的定价和风险对冲的问题已经有一套比较成熟的研究体系。但是对于一些奇异期权的研究却还不太成熟，而金融市场的期权类产品也越来越多，形式越来越复杂。因此，用一种比较通用的方法去解决这类期权的定价和风险对冲就显得尤为重要。

本文主要研究了欧式看涨期权，数字看涨期权和特殊障碍期权这三类期权在偏微分方程下的定价和风险对冲问题。首先，本文将 B-S 偏微分方程转换成了热传导方程求解，这使得数值计算在技术上变得更简单。其次，本文主要讨论了偏微分方程数值定价最常用的两种方法：隐式差分法和 Crank-Nicolson 法在期权定价中的应用。发现虽然隐式差分法的收敛速度不及 Crank-Nicolson，但是它的定价比 Crank-Nicolson 法更稳定，因此我们推荐在期权定价的过程中采用隐式差分法。同时，我们发现在期权的支付函数存在不连续的点和一阶导不存在的点的时候，如果这些点不再偏微分方程的数值解的网格上，会导致定价的解的误差偏大，并且不收敛。为了解决这个问题，本文提出了支付函数光滑处理的方法，将这种点在网格上左右两边的值修改掉，以此作为数值定价初始条件。这样就使得最后的定价更接近与真实值，并且定价方法的收敛阶数也是趋近于理论值的。本文最后也讨论了这三种期权在光滑处理前后的风险对冲指标与初始股价之间的函数关系，发现光滑处理后的这些函数关系更加的平滑，更加接近于理论值。

关键词： 偏微分方程数值解；光滑函数；隐式差分法；Crank-Nicolson 法

Abstract

There are many mature studies on options pricing since options are one of the most widely traded financial products. However, the study on exotic options is relatively rare. As the development of financial market, there will be much more complex option products. Thus, finding a general method to solve the option pricing and hedging problems is essential.

This paper mainly focuses on the pricing and hedging problems of European call option, digital call option and a special case of barrier option via numerical solution of partial differential equations (PDEs). Firstly, this paper transfers the B-S PDE of option pricing into heat equation, which makes the numerical solving much easier than solving the B-S PDE directly. Besides, this paper discusses the most widely used numerical approach in solving PDEs, the implicit scheme and the Crank-Nicolson scheme and their implications in option pricing. The speed of convergence in implicit scheme is slower than that in Crank-Nicolson scheme, but the solution of implicit scheme is more stable. Thus, we recommend the implicit scheme in numerical option pricing. Also, the errors of numerical solution are huge and order of convergence in space dimension does not approximate theoretical value when the payoff function of option is not continuous or its first order derivative does not exist, especially when these discontinuous points are not on the grid of numerical solution. To handle this problem, this paper proposes a smoothing function approach. This approach changes the payoff of points near the discontinuous points via a smoothing function. Finally, this paper shows the relationship of Greeks and initial stock price. The Greeks change much more smoothly with initial stock price after smoothing payoff function than the case without smoothing payoff function.

Key words: PDE Numerical Solution; Smoothing Function; Implicit Scheme; Crank-Nicolson Scheme

目 录

Table of Contents

第一章 引言

1.1 研究背景与意义

奇异期权是一类根据投资者需求的不同在场外市场进行交易的期权，他与一般期权的不同点在于他是路径依赖的一类期权，比如障碍期权和回望期权。这就导致了他的定价（Pricing）和对冲（Hedging）会与我们常见的欧式看涨（European Call）和欧式看跌期权（European Put）有很大不同，并且更加的困难。而期权的定价和对冲是期权交易里面最核心的工作，如果一个期权的定价不是公允的将会导致市场存在套利空间，而如果交易员在对冲的时候头寸不对也会给投资带来很大的风险。由此可见，对于这类期权的定价和对冲的研究是非常必要的。

我国于 2015 年 2 月 9 日开始了第一个股票期权上证 50ETF 期权的交易。这是我国期权市场所迈出的第一步，也是具有划时代的关键的一步。因为期权的交易有助于降低市场的风险，促进更多金融衍生品的开发。但是由于目前市场刚刚起步，产品较少，在交易过程中的风险对冲和资产定价都很难完成，这就导致了期权作为一种避险工具并不能发挥出其应有的效果。并且拥有期权相关知识储备的人才较少，交易还不活跃。标准化场内市场的期权仅有上证 50ETF 的期权也导致了场外市场的期权的定价和风险对冲困难。因为场外市场所交易的大多数期权是奇异期权，其本身的定价和风险对冲就很困难。并且场内市场的期权种类较少会让期权的风险对冲很难实现。因为场外市场的期权的 Delta 的风险是能够靠买卖标的资产来对冲的，但是 Gamma 所带来的风险却没办法用标的资产来对冲，因为标的资产 Delta 和 Gamma 分别是 1 和 0，Gamma 风险的对冲就只能通过买卖其他的衍生品，如标准市场内的期权来实现对冲。而现在标准市场有两个问题：1.标准市场的期权种类太少，投资者很有可能找不到对应的期权来对冲；2.交易量太少，这会导致在对冲的时候即便是有对应的期权可供选择，但是我并不能找到对手方来完成交易。这些问题都会导致场外市场的期权对冲会变得更加的困难。但是这些问题都会随着市场的发展慢慢的解决掉。

即使场内市场比较完善，标准市场的期权种类很多，市场的流动性也好，场外市场的这类奇异期权也是很难定价和对冲的。如前文所述，这类期权一般是路

径依赖的障碍期权之类的期权。而障碍期权的定价和风险对冲一般是没有显示解的，特别是当障碍是不连续的时候。因此利用数值方法去定价就显得很有必要了。而场外市场的合约是针对不同客户的需求所定制的合约，他的种类和需求量将会比场内市场的期权合约更大。因此提前做好对此类期权的定价和风险对冲的方法的研究是非常有必要的。

而目前比较普遍的对于奇异期权定价采用最多的是蒙特卡洛模拟的方法。但是蒙特卡洛模拟的缺点是需要模拟大量的次数，否则定价的结果不显著。并且蒙特卡洛模拟的结果相对来说是不平滑的。因为他是每次模拟很多条路径最后取平均值，这就导致了模拟本身出来的结果会有一些波动。而偏微分方程的数值解则没有上述的问题，它不需要模拟大量的路径，并且解是更稳定的，更接近于真实值。但是他的问题在于，需要根据不同的期权调整不同的边界条件和初值条件。因此，我们希望能找到一种更加普适的偏微分数值方法对于期权的定价和风险对冲。

欧式看涨期权和数字看涨期权是非常常见的两种期权，他们的定价和风险对冲指标都是有显示表达式的。在做偏微分数值定价的时候我们可以用它的理论值在校对我们的数值计算的值。进而以他们为实例建立起偏微分方程的数值解的框架，在进一步扩展到一般的奇异期权上去，是非常可行和有效的方式。并且很多奇异期权可以拆分为一些常见期权的组合。因此，我们以一个特殊的障碍期权为例来讨论偏微分方程的数值方法也是非常有意义的。

综上所述，按我国期权市场的发展来看，提前掌握处理障碍期权的定价和风险对冲问题的方法是非常有意义的。其次，用偏微分方程的数值解来处理这方面的问题会更加的稳定和便利。因此，本文以欧式看涨期权，数字看涨期权和特殊障碍期权为实例，用偏微分方程的数值解来处理其定价和风险对冲问题。这在理论和实际中都有重要意义的。

1.2 本文贡献

从目前已有的研究来看，障碍期权的定价和风险对冲的问题主要用的是用蒙特卡洛模拟的方法来研究的，利用偏微分数值解的方法来研究的还比较少，R Zvan 和 KR Vetzal (2000) [54]提出利用偏微分方程数值解的方法来对障碍期权进

行定价，但是他们并没有对期权的风险对冲问题进行研究。因为用偏微分方程的方法对这类期权的风险对冲需要对它对应的支付函数（Payoff Function）必须是光滑的（Smooth）,但是我们这里的支付函数一般不是光滑的，因此我们需要去将不光滑点附近的支付函数的值修改掉，作为一个近似的处理。因此，本文的贡献主要有以下两个方面：

首先，本文在 B-S 偏微分方程(1973) [9]做了一个变换，把它化简为热传导方程。这样做的好处是我们只需要每次对偏微分方程的初值条件和边界条件做一个简单的变换就能用热传导方程求解，而热传导方程的数值求解要比相对复杂的 B-S 偏微分方程的数值求解速度更快。Wilmott (1995) [52]做了一个热传导方程的一个变换，但是他这个变换不能用于偏微分实际的数值解的求解，因为它的变换里面多引进了一个变量敲定价格（Strike Price）,这会导致这种情况下的热传导方程数值求解对于空间变量x和时间变量u细分以后的误差并不会收敛。这会使我们的数值解的误差无法控制，甚至是错误。因此，本文推导了另外一种变换方式，这种变换方式引入的新变量和老变量的个数是相等，就不会出现上述的问题。

其次本文将以欧式期权，数字期权和特殊障碍期权为实例来做定价和风险对冲的研究。但是因为这些期权的支付函数都不是光滑的，在标的资产的某些取值时，支付函数不可导的，甚至是不连续的，这回造成偏微分方程的定价是不准确和错误的。因此，本文的一个重要任务就是去找到这些期权对应的光滑函数，即一个合理的函数去逼近不光滑点的期权支付函数值。比如数字期权（Digital Option）的看涨期权，它在股票价格趋近于敲定价格时的支付时不存在的，因为他的左极限是 0，右极限是 1。这样就会导致我们在期权定价的时候数值解的初值条件在某个点的时候出现跳跃，而这会使数值计算的解不收敛，因此我们将把期权的支付函数光滑处理，这样就可以保证他的数值解的收敛性。

1.3 研究框架

本文的研究框架如下：

第一章为引言部分，这个部分主要介绍了本文的研究背景与意义，本文的贡献以及本文的研究框架和思路。

第二章为文献综述，主要介绍了障碍期权的定价和风险对冲的主要方法，以及各种方法的优缺点和主要贡献。

第三章为偏微分方程的数值解的理论和实例分析部分，主要讨论了隐式差分法和 Crank-Nicolson 法在期权的偏微分方程定价中的应用。

第四章为支付函数光滑处理的部分，主要对比了在支付函数存在不可以导和不连续点的时候，光滑处理对期权定价和时间与空间维度收敛阶数的影响。

第五章为风险对冲部分，主要介绍和对比了在支付函数存在不可以导和不连续点的时候，光滑处理前后期权定价和风险对冲指标希腊字母与初始股价之间的关系。

第六章为结论，这部分主要阐述了本文的研究意义，结论以及扩展和不足的地方。

第二章 文献综述

2.1 期权

期权（Options）是金融市场里的一类产品，他给了期权持有者在未来既定的时间和既定的价格买入或者卖出标的资产的一项权利，但是不是义务。这就意味着期权的持有者可以选择行使或者放弃这项权利。期权只有两种形式，看涨期权和看跌期权，看涨期权给期权持有者在既定时间和价格买入标的资产的权利，而看跌期权则是给期权的持有者在既定的时间和价格卖出标的资产的权利。

欧式看涨期权（European Call）是一类非常常见的期权。它给期权的持有者在到期时间，一个以事先敲定的价格买入标的资产的权利。这类期权最初设计的目的是为了规避标的资产在到期时间价格上涨的风险。签了这份期权合约以后，期权的持有者就可以在当前时间将标的资产的价格锁定在敲定价格的水平，如果到期时间资产的价格大于敲定价格，那么期权持有者就能以低于现货市场的价格水平，以敲定价格买到标的资产；而如果到期时间资产的价格小于敲定价格，期权持有者可以选择放弃执行期权的权益，转而直接从现货市场上买入标的资产，而他的损失只是签订期权合约时候的合约费用而已，但是这样就能达到规避标的资产上涨带来的风险。

数字看涨期权（Digital Call Option）是一类奇异期权，它到期时间的偿付是固定的 0 和 1，即当标的资产的价格低于敲定价格时，期权持有者在到期时间的偿付是 0；但是如果标的资产的价格高于敲定价格时，期权持有者会在到期时间收到固定为 1 的偿付。从它的支付形式我们能看出，数字期权更像是一场赌博，期权的持有者和卖出者双方对标的资产的未来的价格是否会超过某个值的一场赌博。由于它的这种特性，因为被称为奇异期权。数字期权主要在场外市场上交易，由于它的这种简单的损益结构，在场外市场非常受欢迎。那么将数字看涨期权作为场外奇异期权的一个特例来作为研究也是非常有意义的。

障碍期权（Barrier Options）是一类路径依赖期权，它的支付函数是跟预先设定的障碍值有关。例如，向上敲出期权，它的标的资产价格在既定的时间内超

过预先设定的边界值的话，就会导致期权合约的价值变为 0，如果在这个既定的时间内没有达到这个边界值的话，那么这个期权合约就是普通的期权合约。

本文后续研究的特殊的障碍期权实际上是两个有相同到期时间，不同敲定价格的期权的组合。当这两种期权的敲定价格非常接近的时候通过调整买卖份数，可以把看作是 Arrow-Debreu 证券的一个近似价格。Arrow-Debreu 证券是一种特定的证券，他的特点是在某个既定的状态的支付是 1，而其他的状态的取值都是 0，而本文提出到的这种特殊障碍期权在敲定价格和期权的障碍边界非常接近的时候，这种期权的支付也就可以近似地看作是在敲定价格，即期权的障碍边界的状态有一个支付。那么再去调整期权的头寸就能得到近似的 Arrow-Debreu 证券的价格。因此，研究这种期权定价也是非常有意义的。另外，这种期权可以看作是一类特殊的有离散边界的障碍期权，解决了它的数值定价的问题，可以将数值方法进一步扩展到别的更复杂的有离散障碍边界的期权定价上去。

障碍期权之所以这么吸引人是因为他比对应的标准期权更便宜，在场外市场上非常的受欢迎。因此找到一个比较有效的方法来对它进行定价和风险对冲就显得非常重要。Shreve（2004）[47]总结了向上敲出障碍期权的定价问题，他讨论了在有连续障碍的情况下这种期权的定价，并找到了定价公式的显示表达式。在此之前 Broadie, Glasserman 和 Kou（1997）[12]研究了非连续障碍下的障碍期权的定价问题。由于连续的障碍期权的定价有显示的表达形式，他们考虑如果能把离散的形式的障碍转化为连续的情况的话就能求解了。因此他们采用了相关系数法把离散的障碍转化为了连续的障碍来求解。而后 Ahn, Figlewski 和 Gao（1999）[1]在他们的基础上提出了新的自适应网络模型来对离散的障碍期权进行定价。Petrella 和 Kou (2004) [42]利用了拉普拉斯变换法解决了有离散障碍的回望期权的定价问题，不过这个方法的缺陷在于它只能用有显示解的标准看涨和看跌期权来递归出这类期权的价格，它的优点在于它能解决期权风险对冲问题。对于风险对冲的研究，P Carr, Ellis 和 Gupta (1998) [14]研究了标准奇异期权的静态对冲策略，他的缺陷在于它是静态对冲，不能用于动态对冲，但是我们实际情况中很多情况都是动态的，其次他们的方法只解决了标准的奇异期权，当期权更加复杂以后，同样这种方法也不适用。而 Andersen L, Andreasen J 和 Eliezer (2000) [2]也对一般

的障碍期权做了静态对冲的研究。这些都是障碍期权定价和风险对冲的一些理论研究，并没有讨论数值求解的问题。

偏微分的数值解一般用蒙特卡洛模拟的方法，这种方法的好处在于它不需要知道偏微分怎么去解，只需要知道怎么去把期权的价格路径模拟出来，只要模拟的路径足够大，根据大数定律就能求解出期权的价值，这个方法的缺点是模拟的路径很多，范围很广，很费时，并且它的收敛速度没有偏微分数值解那么快，也没有那么稳定。B Papatheodorou (2005) [41]用蒙特卡洛模拟的方法讨论了障碍期权的定价问题，并且也把支付函数的光滑化。虽然解决了障碍期权的风险对冲问题，但是他的方法不是真正意义上的光滑支付函数，而是修改了无穷多个的支付函数的点，其实相当于修改了支付函数，定的是另外一种产品的价格，本文后续会指出他这种方法的问题。R Zvan 和 KR Vetzal (2000) [54]提出了用偏微分方程的方法去解决障碍期权的定价问题。他们着重比较了偏微分数值解的两种方法:隐式差分法和 Crank-Nicolson 法，发现虽然 Crank-Nicolson 的解更加稳定，但是解得效果并没有隐式差分法好，因此他们推荐用隐式差分法来处理期权的定价问题。Tavella 和 Randall (2000) [48]进一步地详细了偏微分的隐式差分的数值解法，并用它讨论了多种金融产品的定价问题。

下面简单介绍一下障碍期权，以向上敲出看涨期权为例，假设期权的到期时间为T，向上敲出的障碍条件为$B > S_0$，$S_0 > 0$，S_0是股价的初值条件，B是障碍的取值，并且障碍在时间区间$[0, T]$内是连续的。那么他的到期时间T时的支付函数的表达式如下：

$$\text{Payoff}(T) = (S_T - K)^+ \mathbf{1}\{M_T < B\}, \quad M_T = \max_{0 \le u \le T}\{S_u\}$$

$\text{payoff}(T)$表示到期时间的支付，M_T表示整个时间区间内股价的最大值，这种最简单的障碍期权的价格是有显示解的。但是当它的障碍变成了离散的就复杂了，它的支付函数可以如下表示：

$$\text{Payoff}(T) = (S_T - K)^+ \mathbf{1}\{\tau_B < N\}, \quad \tau_B = \inf\{n > 0 : S_i > B\}$$

S_i表示第i个边界多对应时刻的股价（$i = 0, 1, 2, ..., N$）。N表示的是离散边界的总数。τ_B是第一次股价超过边界的时刻。我们可以从图 2-1 中看出这两种障碍的对比效果图。