

学校编码: 10384

分类号_____密级_____

学号: 19020141152628

UDC_____

廈門大學

碩 士 學 位 論 文

图的Tutte和Jones多项式的极端项系数

On extreme coefficients of the Tutte and Jones polynomials of graphs

李 梦 琛

指导教师姓名: 金 贤 安 教授

专业名称: 应 用 数 学

论文提交日期: 2017 年 4 月

论文答辩时间: 2017 年 5 月

学位授予日期:

答辩委员会主席: 张福基 教授

评 阅 人: _____

2017 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果,均在文中以适当方式明确标明,并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范(试行)》。

另外,该学位论文为()课题(组)的研究成果,获得()课题(组)经费或实验室的资助,在()实验室完成。(请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称,未有此项声明内容的,可以不作特别声明。)

声明人(签名):

年 月 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（ ） 1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，
于 年 月 日解密，解密后适用上述授权。

（ ） 2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年 月 日

中文摘要

本文研究了无割边无环的连通图 $G = (V, E)$ 的Tutte多项式和Jones多项式的极端项系数。

设 $t_{i,j}$ 为图 G 的Tutte多项式 $T(G; x, y)$ 中 $x^i y^j$ 项的系数。我们通过色多项式的圈格和流多项式的键格的第0层至第3层元素,修正了已知结果 $t_{0,m-n-1}$ 及 $t_{1,m-n-1}$ 的值,并且得到了 $t_{0,m-n-2}$ 和 $t_{n-4,0}$ 。

利用Jones多项式与Tutte多项式的关系,将Tutte多项式极端项的系数特殊化到Jones多项式,验证了已知结果,并进一步给出了Jones多项式中 $t^{|E|-3}$, t^2 和 t^3 项的系数。

关键词: Jones多项式, Tutte多项式, 系数, Möbius函数, 色多项式, 流多项式。

Abstract

In this paper, we study expressions of several extreme coefficients of the Tutte and Jones polynomials of a graph G , which is bridgeless, loopless and connected.

Let $t_{i,j}$ be the coefficient of $x^i y^j$ in the Tutte polynomial $T(x, y)$ of G . With the aid of bond lattice and circuit lattice, we first revise the expressions of $t_{0,m-n-1}$ and $t_{1,m-n-1}$ obtained by Gong and Jin, and then obtain $t_{0,m-n-2}$ and $t_{n-4,0}$.

Using the relation between the Jones polynomial and the Tutte polynomial, we check some known results on the extreme coefficients of Jones polynomials and further obtain coefficients of $t^{|E|-3}$, t^2 and t^3 .

Key Words: Jones polynomial; Tutte polynomial; extreme coefficients; Möbius function; chromatic polynomial; flow polynomials.

目 录

摘要	I
Abstract	II
目录	IV
Contents	V
第一章 预备知识	1
1.1 基本符号	1
1.2 图的序列类与平行类	1
1.3 偏序集、格与Möbius函数	1
1.4 Tutte多项式与Jones多项式	2
1.5 色多项式与流多项式	3
第二章 Tutte多项式极端项系数结果的修正与推广	5
2.1 已知结果	5
2.2 修正与推广	6
2.3 对偶性	13
2.4 一些例子	14
第三章 图的Jones多项式极端项系数	17
3.1 已知结果	17
3.2 新结果	18

第四章 小结	21
4.1 色多项式的键格结构	21
4.2 流多项式的圈格结构	21
参考文献	23
致谢	24

厦门大学博硕士论文摘要库

Contents

Chinese Abstract	I
English Abstract	II
Chinese Contents	IV
English Contents	V
1 Preliminaries	1
1.1 Basic definitions and terminologies	1
1.2 Parallel classes and series classes	1
1.3 Poset, lattice and Möbius function	1
1.4 Tutte polynomial and Jones polynomial	2
1.5 Chromatic polynomial and flow polynomial	3
2 Revision and generalization of extreme coefficients of the Tutte polynomial of graphs	5
2.1 Known results	5
2.2 Revision and generalization	6
2.3 Duality	13
2.4 Some examples	14
3 Extreme coefficients of the Jones polynomial of graphs	17
3.1 Known results	17
3.2 New results	18
4 Concluding remarks	21
4.1 The bond lattice of the chromatic polynomial	21
4.2 The circuit lattice of the flow polynomial	21
References	23
Acknowledgements	24

第一章 预备知识

1.1 基本符号

本文中我们所讨论的图均为有限图，允许平行边和环的存在。设 $G = (V, E)$ 是顶点集为 V ，边集为 E 的图，分别将图 G 的顶点数、边数和分支数记为 $n = n(G)$ 、 $m = m(G)$ 和 $c = c(G)$ 。对于 $A \subseteq E$ ， $G[A]$ 表示由边子集 A 诱导出的子图。 G/A 表示 G 收缩 A 中所有的边得到的图。从 G 中删除 A 中所有的边，我们得到 $G - A$ ，从 G 中删除 E 中 A 外所有的边得到的子图我们记为 $G|_A$ ，即 $G|_A = G - (E \setminus A)$ 。用 $\rho(G|_A)$ 表示图 $G|_A$ 的秩 $n - c(G|_A)$ ， $\gamma(G|_A)$ 表示图 $G|_A$ 的零度 $|A| - n + c(G|_A)$ 。顶点数为 n 的空图、完全图、路以及圈分别记为 E_n 、 K_n 、 P_n 和 C_n 。

1.2 图的序列类与平行类

图 $G = (V, E)$ 的边集 E 中所有具有共同顶点的极大边子集称为 G 的一个平行类。如果一个平行类只含有一条边，我们称这个平行类是平凡的平行类。我们用 $p(G)$ 和 $p^*(G)$ 分别表示图 G 的平行类及非平凡的平行类的数目。显然所有平行类是一种 G 的边划分。

序列类是图 G 的一个极大边子集，满足去掉这个边子集中的任意两条边都会增加图的连通分支数。设 G 是无割边的连通图， $C \subseteq E$ ， C 是图 G 的一个序列类的充要条件是 $c(G - C) = |C|$ 且 $G - C$ 无割边。只含有一条边的序列类是平凡序列类。序列类和非平凡序列类的数目记为 $s(G)$ 和 $s^*(G)$ 。所有序列类也是一种边划分[1]。

序列类 $S = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ 可以表示为下图所示结构， $G - S = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ 并且每个 $G_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 连通无割边[1]。

1.3 偏序集、格与 Möbius 函数

对于偏序集 (P, \leq) ，若 P 中存在最小元和最大元，则分别将其记为 $\hat{0}$ 和 $\hat{1}$ 。闭区间 $[x, y] = \{z | x \leq z \leq y\}$ 。任意两个元素都可进行比较的子偏序集称作链。对于任意 $x \in P$ 若所有将 x 作为最大元的极长链都有相同的长度 l ，那么我们说 P 是一个分次偏序集， l 是 x 的秩，记作 $rk(x)$ 。若 P 中任意两个元素都有最小上界和最大下界，我们称 P 是关于偏序 \leq 作成一个格。如果 P 中的每一个区间都是有限的则说 P 是局部有限的。

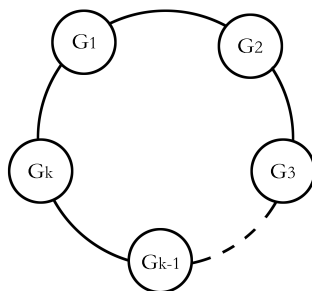


图 1.1 序列类结构

定义在局部有限的偏序集 P 上的 Möbius 函数为:

$$\begin{aligned} \mu(x, y) &= 1, \text{ 如果 } x = y, \\ \mu(x, y) &= 0, \text{ 如果 } x \not\leq y, \\ \sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) &= 0, \text{ 如果 } x < y. \end{aligned}$$

1.4 Tutte 多项式与 Jones 多项式

1. 内活动度与外活动度

用 $1, 2, \dots, m$ 对 G 的边进行标号。设 T 是 G 的生成树，对于 $e \in T$ ， e 是其所确定的图 G 的键中标号最小的边，称 e 相对于 T 是内活动的， T 上内活动边的条数是 T 的内活动度。对于 $e \notin T$ ， e 是与 T 所确定的圈中标号最小的边，称 e 相对于 T 是外活动的， T 上外活动边的条数是 T 的外活动度。

2. Tutte 多项式

图 $G = (V, E)$ 的 Tutte 多项式 $T(G; x, y)$ 是一个双变量的多项式[2]，定义如下：

$$T(G; x, y) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } E = \emptyset \\ xT(G/e; x, y) & \text{如果 } e \text{ 是割边} \\ yT(G - e; x, y) & \text{如果 } e \text{ 是环} \\ T(G/e; x, y) + T(G - e; x, y) & \text{如果 } e \text{ 非割边非环。} \end{cases}$$

在对图 G 进行删缩边直至空图的过程中，边的选取顺序不影响 Tutte 多项式的表达式。

Tutte多项式也可以通过用图的秩与零度来定义

$$T(G; x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{\rho(E)-\rho(G|_A)} (y-1)^{\gamma(G|_A)}.$$

连通图 G 的Tutte多项式还可以利用该图的生成树来计算:

$$T(G; x, y) = \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j,$$

这里 t_{ij} 是图 G 的内活动度为 i 外活动度为 j 的生成树的数目。当边数大于 0 时, $t_{00} = 0$ 。当边数大于 1 时, $t_{01} = t_{10}$, 被称为 β 不变量。 β 不变量不为 0, 则该图是无环并且 2-连通[3][4]。

同时, Tutte多项式还可以用卷积公式表示如下[5]:

$$T(G; x, y) = \sum_{A \subseteq E} T(G/A; x, 0) T(G|_A; 0, y). \quad (1.1)$$

当图 G 为平面图时, 我们有Tutte多项式的对偶公式

$$T(G; x, y) = T(G^*; y, x),$$

这里 G^* 是 G 的对偶图。

3. Jones多项式

图 G 的Jones多项式 $J_G(t)$ 可以表示为Tutte多项式的一种特殊形式[1]:

$$J_G(t) = (-1)^{n-c} t^{m-n+c} T(-t, -t^{-1}). \quad (1.2)$$

1.5 色多项式与流多项式

1. 色多项式、流多项式与Tutte多项式的关系

图 G 的色多项式 $C(G; \lambda)$ 用来计算图 G 的正常 λ 着色的数目, 流多项式 $F(G; \lambda)$ 给出了 G 的处处非零 A 流的数目, 其中 A 是有限 Abelian 群, 该群的单位元是 $\mathbf{0}$, $|A| = \lambda$ 。色多项式和流多项式与Tutte多项式的关系如下:

$$C(G; \lambda) = (-1)^{\rho(E)} \lambda^c T(G; 1-\lambda, 0), \quad (1.3)$$

$$F(G; \lambda) = (-1)^{\gamma(E)} T(G; 0, 1-\lambda). \quad (1.4)$$

2. 色多项式、流多项式用Möbius函数表示

(1) 与色多项式有关的图 $G = (V, E)$ 的键格构造: 若图 $G = (V, E)$ 是一个无环的图。图 G 的一个键 H 为 G 的一个生成子图, $H \subseteq G$, 其中 H 的每个连通分支

都是 G 的一个点导出子图, 偏序集 $L(G) = \{H : H \text{ 是一个键}\}$ 构成了一个格, 偏序关系是顶点细分的程度, 即: $L(G)$ 中的两个元素 K 和 H , $K \leq H$ 表示 K 的顶点划分 $\{V(K_1), \dots, V(K_s)\}$ 比 H 的顶点划分 $\{V(H_1), \dots, V(H_t)\}$ 更为精细, 其中 K_1, \dots, K_s 均为 K 的连通分支, H_1, \dots, H_t 为 H 的连通分支。格 $L(G)$ 为分次格, 元素的秩为 $rk(H) = \rho(H)$ 。

定理 1.1 (Gian-Carlo Rota [6]) 如果 G 是一个无环图, 那么

$$C(G; \lambda) = \sum_{H \in L(G)} \mu(E_n, H) \lambda^{c(H)}. \quad (1.5)$$

当 G 出现重边时, 我们只需把 G 中的重边替换为单边, 则定理依然成立。

(2) 与流多项式有关的图 $G = (V, E)$ 的圈格构造: 若图 $G = (V, E)$ 无割边, 存在一个格 $L'(G) = \{H : H \text{ 是 } G \text{ 的无割边的生成子图}\}$, 如果 H_1, H_2 是 $L'(G)$ 中的两个元素且 $E(H_1) \supseteq E(H_2)$, 那么 $H_1 \leq H_2$ 。这个格中元素的秩 $rk(H) = \gamma(G) - \gamma(H)$ 。

定理 1.2 (Gian-Carlo Rota [6]) 如果图 G 无割边, 则

$$F(G; \lambda) = \sum_{H \in L'(G)} \mu(G, H) \lambda^{\gamma(H)}. \quad (1.6)$$

第二章 Tutte多项式极端项系数结果的修正与推广

2.1 已知结果

Helin Gong和Xian'an Jin在文章[7]中关于Tutte多项式的极端项系数得到如下结论:

定理 2.1 设 $G = (V, E)$ 是一个无割边无环的连通图, 则:

$$(1) t_{0, m-n+1} = 1.$$

$$(2) t_{0, m-n} = n + s(G) - m - 1.$$

(3) $t_{0, m-n-1} = \binom{m-n+1}{2} - (m-n)s(G) + \sum_{C \in \mathcal{C}_G} [s(G; C) - 1]$, $s(G; C)$ 是包含在边集 C 中的 G 的序列类的数目。

$$(4) t_{1, m-n} = s^*(G).$$

$$(5) t_{1, m-n-1} = -s^*(G)(m-n) + \sum_{\substack{A \subseteq E \\ E \setminus A \text{ 是非平凡的序列类}}} s(G|_A) + |\mathcal{C}_G^*|.$$

\mathcal{C}_G 表示集合 $\{C \subseteq E : c(G-C) = |C| - 1, G-C \text{ 无割边}\}$, \mathcal{C}_G^* 表示集合 $\{C \subseteq E : c(G-C) = |C| - 1, G-C \text{ 无割边且 } G/(E-C) \text{ 无环}\}$ 。

定理中的(5)存在一些小问题, 下文中将说到对这项的修改, 同时我们对(3)进行了改写, 另外还表示出了 y^{m-n-2} 的系数 $t_{0, m-n-2}$, 也将在下文中进行说明。

文[7]中, 作者还得到:

定理 2.2 设 $G = (V, E)$ 是一个无割边无环的连通图, 则:

$$(1) t_{n-1, 0} = 1.$$

$$(2) t_{n-2, 0} = p(G) - n + 1.$$

(3) $t_{n-3, 0} = \binom{n-1}{2} - (n-2)p(G) + \binom{p(G)}{2} - \Delta(\tilde{G})$, 这里图 \tilde{G} 是将图 G 中的每一个平行类都用单边替代得到的图, $\Delta(\tilde{G})$ 是图 \tilde{G} 中三角形的数目。

$$(4) t_{n-2, 1} = p^*(G).$$

$$(5) t_{n-3, 1} = -p^*(G)(n-2) + \sum_{\substack{A \subseteq E \\ A \text{ 是非平凡的平行类}}} p(G/A) + \Delta(\tilde{G}).$$

我们在下一节中进一步得到了 $t_{n-4, 0}$ 的表达式。

2.2 修正与推广

1. 符号介绍

总假设 G 是连通、无割边、无环的图。

两个顶点之间由三条不交的长为 $k_1, k_2, k_3 \geq 1$ 路连接形成的图为 Θ 图(图2.1), 记为 $\Theta(k_1, k_2, k_3)$ 。 $S \subseteq E(G)$, 称 S 为 S_Θ 类型的边子集, 若 $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, $S_i \subseteq E(i = 1, 2, 3)$, $k_1, k_2, k_3 \geq 1$ 且 G 的结构如图2.2所示, 还需满足 $G - S = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_{k_1+k_2+k_3-1}$, 每个 $G_i (i = 1, 2, \dots, k_1+k_2+k_3-1)$ 连通且无割边。(S_1, S_2, S_3 的边分别用红色、黑色、绿色表示。)用 $\Theta(G)$ 表示图 G 中边集为 S_Θ 类型的边子集数目。

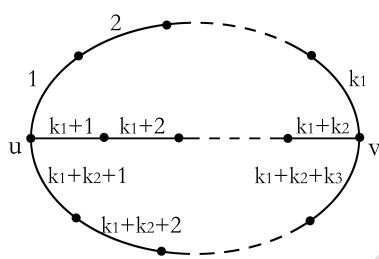


图 2.1 $\Theta(k_1, k_2, k_3)$

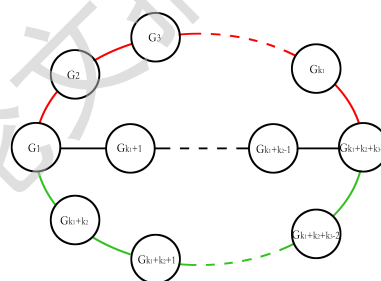


图 2.2 S_Θ 类型的边子集

两个不交的长为 $k_1, k_2 \geq 1$ 的圈在某一顶点进行顶点粘接形成的图为 ∞ 图(图2.3), 记为 $\infty(k_1, k_2)$ 。 S 为 S_∞ 类型的边子集, 若 $S = S_1 \cup S_2$, $S_i \subseteq E(i = 1, 2)$, $k_1, k_2 \geq 1$ 且 G 的结构如图2.4所示, 还满足 $G - S = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_{k_1+k_2-1}$, 每个 $G_i (i = 1, 2, \dots, k_1+k_2-1)$ 连通且无割边。(S_1, S_2 的边分别用红色、黑色表示。)用 $\infty(G)$ 表示图 G 中边子集为 S_∞ 类型的数目。

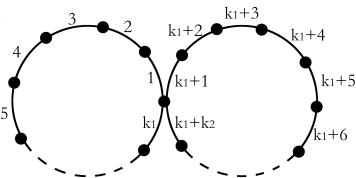


图 2.3 $\infty(k_1, k_2)$

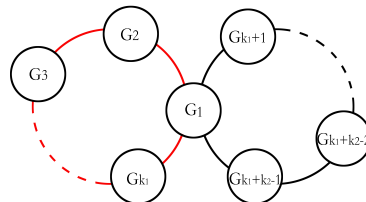


图 2.4 S_∞ 类型的边子集

$$\mathcal{D}_G = \{C \subseteq E : c(G - C) = |C| - 2, G - C \text{ 无割边}\}$$

$\Theta(G; C)$ 是包含在边集 C 中的 S_Θ 类型的边子集的数目, 类似地, $\infty(G; C)$ 是包含在边集 C 中的 S_∞ 类型的边子集的数目, $s(G; C)$ 为包含在边集 C 中的 G 的序列类的数目。

$\mathcal{F}_{\tilde{G}} = \{C \subseteq \tilde{E} : c(\tilde{G}|_C) = n - 3\}$, 图 G 将非平凡的平行类替换为简单边后得到图 \tilde{G} , \tilde{G} 的边集为 \tilde{E} 。

$r_1(C), r_2(C), r_3(C)$ 为边集 C 中包含 $P_3, P_2 \cup P_2, C_3$ 的数目, $p(\tilde{G}; C)$ 是包含在 C 中的 \tilde{G} 的平行类的数目。

2. 主要结论

定理 2.3 设 $G = (V, E)$ 是一个无割边无环的连通图, 则:

$$\begin{aligned} (1) t_{0, m-n-1} &= \binom{m-n+1}{2} - (m-n)s(G) + \binom{s(G)}{2} - \Theta(G) \\ &= \binom{s(G)-m+n}{2} - \Theta(G), \\ (2) t_{0, m-n-2} &= -\binom{m-n+1}{3} + \binom{m-n}{2}s(G) - (m-n-1) \left(\binom{s(G)}{2} - \Theta(G) \right) \\ &\quad + \sum_{C \in \mathcal{G}_G} [2\Theta(G; C) + \infty(G; C) - s(G; C) + 1], \\ (3) t_{1, m-n-1} &= -s^*(G)(m-n) + \sum_{\substack{A \subseteq E \\ E \setminus A \text{ 是非平凡的序列类}}} s(G|_A) + \Theta(G). \end{aligned}$$

令 $\omega_1 = 1 - x, \omega_2 = 1 - y$ 利用等式(1.1)(1.3)和(1.4), 我们得到,

$$\begin{aligned} T(G; x, y) &= \sum_{A \subseteq E} T(G/A; x, 0)T(G|_A; 0, y) \\ &= \sum_{A \subseteq E} \left[(-1)^{n(G/A) - c(G/A) + |A| - n + c(G|_A)} \omega_1^{-c(G/A)} C(G/A; \omega_1) F(G|_A; \omega_2) \right]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

定理证明中我们要求 G/A 是无环的, $G|_A$ 无割边, 否则会有 $C(G/A; \omega_1) = 0$ 或者 $F(G|_A; \omega_2) = 0$ 。

证明: (1) 对 A 的边数进行讨论, 我们发现 y^{m-n-1} 及 y^{m-n-2} 仅出现在 $|A| = m$ 情况中。

当 $|A| = m$ 时, $G/A = K_1$, $G|_A = G$, 这种情况下对2.1式的贡献为:

$$\begin{aligned}
& (-1)^{m-n+1} [\omega_2^{m-n+1} + \sum_{\substack{H \in L'(G) \\ rk(H)=1}} \mu(\hat{0}, H) \omega_2^{m-n} + \sum_{\substack{H \in L'(G) \\ rk(H)=2}} \mu(\hat{0}, H) \omega_2^{m-n-1} \\
& + \sum_{\substack{H \in L'(G) \\ rk(H)=3}} \mu(\hat{0}, H) \omega_2^{m-n-2} + \dots] \\
= & y^{m-n+1} + (-1)[(m-n+1) + \sum_{\substack{H \in L'(G) \\ rk(H)=1}} \mu(\hat{0}, H)] y^{m-n} \\
& + \left[\binom{m-n+1}{2} + (m-n) \sum_{\substack{H \in L'(G) \\ rk(H)=1}} \mu(\hat{0}, H) + \sum_{\substack{H \in L'(G) \\ rk(H)=2}} \mu(\hat{0}, H) \right] y^{m-n-1} \quad (2.2) \\
& + (-1) \left[\binom{m-n+1}{3} + \binom{m-n}{2} \sum_{\substack{H \in L'(G) \\ rk(H)=1}} \mu(\hat{0}, H) \right. \\
& \left. + (m-n-1) \sum_{\substack{H \in L'(G) \\ rk(H)=2}} \mu(\hat{0}, H) + \sum_{\substack{H \in L'(G) \\ rk(H)=3}} \mu(\hat{0}, H) \right] y^{m-n-2} + \dots
\end{aligned}$$

i) 令 $H = G - A \in L'(G)$, $rk(H) = 1$ 可得 $\gamma(H) = m - n$, 即 $|A| = c(G - A)$, 也就是:

$$\sum_{\substack{H \in L'(G) \\ rk(H)=1}} \mu(\hat{0}, H) = \sum_{\substack{A \subseteq E, |A|=c(G-A) \\ G-A \text{ 无割边}}} (-1) = \sum_{A \text{ 是序列类}} (-1) = -s(G).$$

ii) 当 $H' = G - A' \in L'(G)$, $rk(H') = 2$ 时, $A' - A$ 也为 $G - A$ 的一个序列类。若一个不连通图的每一个分支都是无割边的, 则它的序列类定义为各个分支序列类的并。可表示为下图 $A = \{e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1k}\}$, $A' - A = \{e_{21}, e_{22}, \dots, e_{2k_2}\}$, $H' = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_{k_1+k_2-1}$, 每个 $G_i (i = 1, 2, \dots, k_1+k_2-1)$ 连通且无割边。(A 与 $A' - A$ 分别用红色和黑色表示。)

不失一般性, 设 A' 中 e_{11} 与 e_{1k_1} 连接相同的连通分支 $G_i (i = k_1, \dots, k_1+k_2-1)$, 我们得到 A' 是上文所说的 S_∞ 类边, 否则 A' 为 S_Θ 类边。

S_Θ 类边包含图 G 的三个序列类, Möbius 函数值为 2, 此类边的数目为 $\Theta(G)$ 。 S_∞ 类边包含图 G 的两个序列类, Möbius 函数值为 1, 此类边的数目为 $\infty(G) = \binom{s(G)}{2} - 3\Theta(G)$ 。

我们可以得到:

Degree papers are in the "[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)". Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to etd@xmu.edu.cn for delivery details.

厦门大学博硕士学位论文摘要库