

学校编码: 10384

分类号\_\_\_\_\_ 密级\_\_\_\_\_

学号: 19020130154166

UDC\_\_\_\_\_

廈門大學

博士学位论文

一类燃烧和相分离模型的数学建模与  
数值模拟

Numerical and mathematical analysis of  
some combustion and phase separation  
models

张文

指导教师姓名: Claude-Michel Brauner 教授

专业名称: 计 算 数 学

论文提交日期: 2017 年 4 月

论文答辩日期: 2017 年 5 月

学位授予日期: 2017 年 月

答辩委员会主席: \_\_\_\_\_

评 阅 人: \_\_\_\_\_

2017年5月

厦门大学博硕士学位论文摘要库

# 厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（ ）课题（组）的研究成果，获得（ ）课题（组）经费或实验室的资助，在（ ）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年 月 日

厦门大学博硕士学位论文摘要库

# 厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

- 1、经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，  
于 年 月 日解密，解密后适用上述授权。
- 2、不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

厦门大学博硕士学位论文摘要库

## 中文摘要

本文先后讨论了两类自由边界问题：热-扩散燃烧模型和高阶广义 Cahn-Hilliard 方程，并针对这两类问题进行稳定性分析和数值模拟。

## (I) 热-扩散燃烧模型:

该模型描述了在二维带型区域  $\mathbb{R} \times (-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2})$  中，零阶反应和分段温度动力机制的预混火焰热-扩散燃烧现象，模型表示为：

$$\begin{cases} \Theta_t = \Delta\Theta, & \Phi \equiv 0, & x < G(t, y), \\ \Theta_t = \Delta\Theta + \kappa, & \Phi_t = \frac{1}{Le}\Delta\Phi - \kappa, & G(t, y) < x < F(t, y), \\ \Theta_t = \Delta\Theta, & \Phi_t = \frac{1}{Le}\Delta\Phi, & x > F(t, y), \end{cases}$$

我们针对自由边界的胞状不稳定情况 (即 Lewis 数满足  $0 < Le < 1$ ) 展开研究。

为了解决该问题中两个自由界面 (着火边界  $F(t, y)$  和跟踪边界  $G(t, y)$ ) 造成的困难，我们将自由边界问题转化为一个完全非线性边值问题，进而得出研究火焰锋稳定性的一种新方法；通过采用离散 Fourier 变换，我们计算出了用来控制稳定性阈值  $Le_c^*$  的解析表达式，从而得出简便的稳定性判断法则：

- (1) 当 Lewis 数满足关系  $Le_c^* < Le < 1$  时，平面行波解是线性渐近稳定的；
- (2) 当 Lewis 数满足关系  $0 < Le < Le_c^*$  时，平面行波解是线性渐近不稳定的。

同时可以看出，可取的 Fourier 模式数量的多少取决于带宽  $\ell$  的大小。

最后，针对渐近不稳定情况 (即  $0 < Le < Le_c^*$ )，我们利用数值算例验证了稳定性分析结果，数值结果表明，在快速过渡期后，得到了着火界面和跟踪界面形成的“双峰”形式的火焰锋。

## (II) 高阶广义 Cahn-Hilliard 方程:

该方程表示为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta \sum_{i=1}^k (-1)^i \sum_{|\alpha|=i} a_\alpha \mathcal{D}^{2\alpha} u - \Delta f(u) + g(x, u) = 0.$$

在 Dirichlet 边界条件下，我们进行了关于方程解的适定性和正则性的理论分析，证明了解算子的耗散性以及全局吸引子的存在性。

针对该类方程在生物、医学等领域中的实际应用，我们对高阶晶体相场以及肿瘤细胞的生长情况进行了数值模拟，根据数值结果可以看出，高阶广义 Cahn-Hilliard 方程的高阶项能够有效控制各向异性特征；

另外，针对高阶广义 Cahn-Hilliard 方程的双曲松弛形式：

$$\epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta \sum_{i=1}^k (-1)^i \sum_{|\alpha|=i} a_\alpha \mathcal{D}^{2\alpha} u - \Delta f(u) + g(x, u) = 0.$$

我们利用二阶精度的完全离散格式开展了数值实验，数值结果显示，该类方程的高阶项对于控制各向异性特征同样有效。

**关键词：**燃烧模型； Cahn-Hilliard 方程；吸引子；相分离；数值模拟



## Abstract

In this thesis, we will successively consider two free-interface problems: one is a thermo-diffusive combustion model, the other is a higher-order generalized Cahn-Hilliard equation. In both cases, we are interested in the stability analysis and numerical simulations.

### (I) Thermo-diffusive combustion:

The problem models a thermo-diffusive combustion of premixed flame with zero-order reaction and stepwise temperature kinetics in a two-dimensional strip  $\mathbb{R} \times (-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2})$ , which reads:

$$\begin{cases} \Theta_t = \Delta\Theta, & \Phi \equiv 0, & x < G(t, y), \\ \Theta_t = \Delta\Theta + \kappa, & \Phi_t = \frac{1}{Le}\Delta\Phi - \kappa, & G(t, y) < x < F(t, y), \\ \Theta_t = \Delta\Theta, & \Phi_t = \frac{1}{Le}\Delta\Phi, & x > F(t, y), \end{cases}$$

We restrict our analysis to cellular instabilities of the free interfaces, that is only to parameter regimes where the Lewis number is within  $0 < Le < 1$ .

To overcome the difficulty due to the presence of two interfaces (respectively the ignition interface  $F(t, y)$  and the trailing interface  $G(t, y)$ ), we introduce in this framework a new method to study the stability of the fronts, based on the reduction of the free-interface problem to a fully nonlinear boundary value problem.

Using a discrete Fourier transform, we compute explicitly the stability threshold, namely a critical value of Lewis number,  $Le_c^*$ , such that the planar traveling front is linearly asymptotically unstable for  $0 < Le < Le_c^*$ , stable for  $Le_c^* < Le < 1$ . It transpires that the number of admissible Fourier modes relies heavily on the strip width  $\ell$ .

We complement our analysis with numerical simulations, to explore the instability patterns produced by the model. Numerically, we observe that, after a rapid transition period, a steady configuration consisting of “two-cell” patterns for the ignition and trailing interfaces is established.

**(II) Higher-order Cahn-Hilliard equation:**

This type of equation reads:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta \sum_{i=1}^k (-1)^i \sum_{|\alpha|=i} a_\alpha \mathcal{D}^{2\alpha} u - \Delta f(u) + g(x, u) = 0.$$

We devote ourselves to some theoretical analysis under Dirichlet boundary conditions, such as the well-posedness and regularities. We also prove the dissipativity of corresponding operators, as well as existence of a global attractor.

On the one hand, we will give some numerical results for a higher-order Cahn-Hilliard-Oono equation, arising from areas like biology and medicine, to be specific, a phase-field crystal equation coupled with a Cahn-Hilliard equation with a mass source, to simulate tumor growth. Our results show that anisotropy may be strongly influenced by the choice of coefficients in the higher-order terms.

On the other hand, we consider a hyperbolic relaxation of the higher-order Cahn-Hilliard equation:

$$\epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta \sum_{i=1}^k (-1)^i \sum_{|\alpha|=i} a_\alpha \mathcal{D}^{2\alpha} u - \Delta f(u) + g(x, u) = 0.$$

We perform our numerical simulations with a second-order fully discrete scheme. The results also illustrate the effects of higher-order terms on the anisotropy.

**Key words:** Combustion Model; Cahn-Hilliard Equation; Attractor; Phase Separation; Simulations

## 目 录

中文摘要	I
英文摘要	III
中文目录	V
英文目录	VII
<b>第一章 绪论</b>	1
1.1 自由边界问题简介	1
1.2 自由边界的典型例子	2
1.3 本文概述	3
1.4 研究内容和结构安排	8
<b>第二章 双自由界面燃烧模型</b>	9
2.1 自由边界问题	9
2.2 一维平面行波解	11
2.3 平面行波解扰动模型	13
2.4 完全非线性模型的推导	16
<b>第三章 燃烧模型的线性稳定性分析与数值模拟</b>	27
3.1 预备知识	27
3.2 线性化的方程组	29
3.3 线性系统的数值模拟	37
3.4 非线性系统的数值模拟	42
<b>第四章 高阶广义 Cahn-Hilliard 方程稳定性分析</b>	59
4.1 预备知识	59
4.2 Cahn-Hilliard 方程简介	60
4.3 问题的设置	61
4.4 先验估计	66
4.5 耗散半群	70
<b>第五章 两类高阶 Cahn-Hilliard 方程数值模拟</b>	75
5.1 高阶广义 Cahn-Hilliard 方程的数值模拟	75
5.2 高阶 C-H 方程双曲松弛形式的数值模拟	82

---

第六章 总结与展望 .....	93
6.1 论文总结 .....	93
6.2 论文展望 .....	93
参考文献 .....	95
.....	105
.1 一维行波解 $\{\Theta^{(0)}(\xi), \Phi^{(0)}(\xi)\}$ 的常用关系 .....	105
.2 积分公式的推导 .....	108
在学期间发表的学术论文与研究成果 .....	111
致谢 .....	113

厦门大学博硕士论文摘要库

## Contents

Chinese Abstract .....	I
English Abstract .....	III
Chinese Contents .....	V
English Contents .....	VII
<b>1 Preface .....</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction to Free Boundary Problems .....	1
1.2 Some Typical Examples of Free Boundary Problems .....	2
1.3 Overview of the Dissertation .....	3
1.4 Main Work and Outline .....	8
<b>2 Two-Interface Combustion Model .....</b>	<b>9</b>
2.1 Free Boundary Problem .....	9
2.2 One-Dimensional Traveling Wave (Planar) Solution .....	11
2.3 Mathematical Model of Perturbation on the Planar Front .....	13
2.4 Derivation of the Fully Nonlinear Problem .....	16
<b>3 Linear Stability Analysis and Numerical Simulation for Combustion Model .....</b>	<b>27</b>
3.1 Preliminaries .....	27
3.2 The Linearized System .....	29
3.3 Numerical Scheme for the Linear System .....	37
3.4 Numerical Scheme for the Fully Nonlinear System .....	42
<b>4 Stability Analysis for Higher-Order Generalized Cahn- Hilliard Equations .....</b>	<b>59</b>
4.1 Preliminaries .....	59
4.2 Brief Introduction for Cahn-Hilliard Equation .....	60
4.3 Setting of the Problem .....	61

4.4 A Priori Estimates . . . . .	66
4.5 The Dissipative Semigroup . . . . .	70
<b>5 Simulation for Two Higher-Order Cahn-Hilliard Equations . . . . .</b>	<b>75</b>
5.1 Simulations for Higher-Order Generalized Cahn-Hilliard Equation . . . . .	75
5.2 Simulations for Hyperbolic Relaxation of the Higher-Order Cahn-Hilliard Equation . . . . .	82
<b>6 Concluding Remarks . . . . .</b>	<b>93</b>
6.1 Summary . . . . .	93
6.2 Prospecion . . . . .	93
References . . . . .	95
<b>APPENDIX . . . . .</b>	<b>105</b>
.1 Computation of the one-dimensional Traveling Wave . . . . .	105
.2 Derivation for Quadrature Formulas . . . . .	108
Major Academic Achievements . . . . .	111
Acknowledgements . . . . .	113

## 第一章 绪论

### 1.1 自由边界问题简介

针对一个偏微分方程(组)的定解问题,通常需要限制在某个特定区域上求解。如果(部分)区域随着时间和空间不断变化,且区域的边界是待定的,需要和定解问题的解一起确定,称该问题为移动边界问题(Moving Boundary Problem);相比于移动边界问题,求解区域相对固定的问题,称为自由边界问题(Free Boundary Problem);也有许多学者将这两类问题统称为FBP(自由边界问题)。通常,自由边界问题的求解需要两个条件:一个用来确定自由边界,另一个则用来满足偏微分方程<sup>[1-3]</sup>,该条件往往是超定的<sup>[4]</sup>。

斯蒂芬(Stefan)问题,作为自由边界问题的其中一类,源于奥地利物理学家Josef Stefan<sup>[5,6]</sup>于19世纪末,在研究极地海洋中冰的融化问题时,建立固体-液体两相相变过程的抛物型方程数学模型。

由于自由边界问题的研究有着广泛的实际背景,早已突破传统斯蒂芬问题所研究的固态-液态两相以及抛物型问题,例如,物理中等离子物理、渗流力学、塑性力学、射流等方面都提出了各种不同形式的定常和不定常自由边界问题<sup>[7-9]</sup>,化学中热裂解碳的蒸汽渗透问题<sup>[10]</sup>;美国期权定价问题<sup>[11-13]</sup>:针对跳扩散模型的美式期权计算最佳实施边界;生物种群的扩张传播问题(或捕食问题)<sup>[14-18]</sup>: (自由界面代表新物种入侵的扩散边界),得出新物种入侵种群后继续蔓延或者灭绝的判断条件;医学中肿瘤的生长问题<sup>[19-25]</sup>:研究肿瘤内营养物、抑制物的反应扩散过程和由此导致的细胞坏死分解行为;以及肌肉中的含氧量<sup>[2]</sup>、伤口愈合问题<sup>[26,27]</sup>:针对表皮细胞密度和化学物质浓度形成的伤口移动边界,研究“生物化学”调控过程等等。

从数学观点出发,无论方程是否线性,自由边界问题都是非线性问题,更为重要的是,自由边界本身就是需要和定解问题的解一起确定的未知量。这类问题与实际应用联系紧密,对科学研究和生产实践有着重大意义。

## 1.2 自由边界的典型例子

我们考虑一维的拟线性抛物型边值问题:

$$\begin{cases} u_t = \mathcal{L}u + f(u, u_x), & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1-1)$$

其中  $\mathcal{L}$  为椭圆型算子。

令  $x = h(t)$  为自由边界, 下面我们列举关于两类自由边界问题的一些重要区别:

(1) 单相“融冰” Stefan 问题:

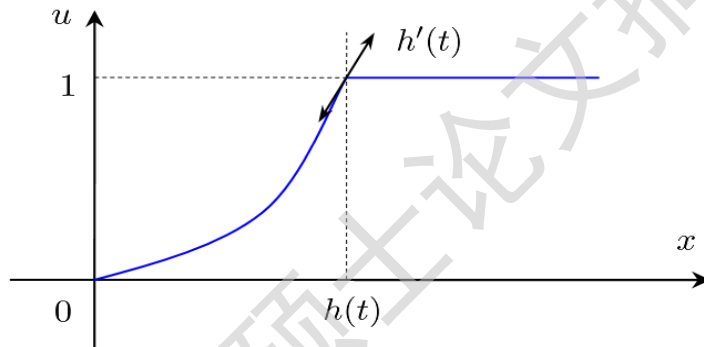


图 1.1 单相 Stefan 问题模型:  $u(t, x)$  为水中归一化的温度;  $h(t)$  表示水相厚度.

附加在自由边界上的两个条件为:

$$\begin{cases} u(t, h(t)) = 1, \\ u_x(t, h(t)) = h'(t) \text{ (一阶 Stefan 条件)}. \end{cases} \quad (1-2)$$

(2) 典型预混火焰的热 - 扩散燃烧模型:

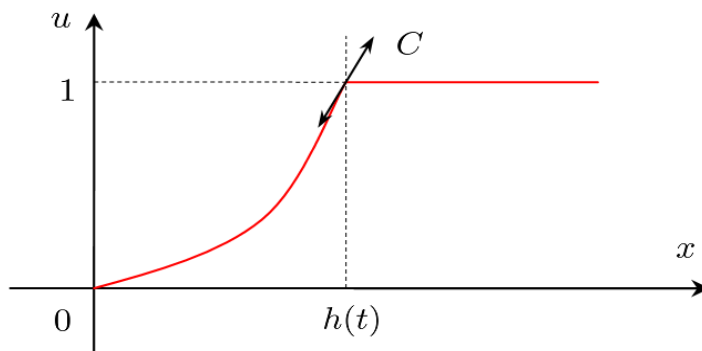


图 1.2 “薄” 预混火焰模型:  $u(t, x)$  为燃料的归一化温度;  $h(t)$  为自由边界.



Degree papers are in the "[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)". Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to [etd@xmu.edu.cn](mailto:etd@xmu.edu.cn) for delivery details.

厦门大学博硕士论文摘要库