学校编码：10384　　　　　　　　　　　　　　　　分类号_______密级_______
学号：19020130154173　　　　　　　　　　　　　　　　　　UDC_______

厦门大学

博　士　学　位　论　文

图的目标集选取

Target Set Selection on Graphs

姜　海　宁

指导教师姓名：　钱　建　国　教授

专　业　名　称：　应　用　数　学
论文提交日期：　2017 年　　月
论文答辩时间：　2017 年　　月
学位授予日期：　2017 年　　月

答辩委员会主席：______________
评　　阅　　人：______________

2017 年　　月

Doctoral Dissertation

Target Set Selection on Graphs

By

Haining Jiang

Supervisor: Professor Jianguo Qian

Speciality: Applied Mathematics

Institution: School of Mathematical Sciences

Xiamen University

Xiamen, P.R. China

*, 2017

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

本人声明该学位论文不存在剽窃、抄袭等学术不端行为，并愿意承担因学术不端行为所带来的一切后果和法律责任。

声明人（签名）：

指导老师（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　）1. 经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　）2. 不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

图的目标集选取

摘　要

目标集选取问题 (TSS) 最初是由 Kempe 等提出的，用于研究信息、思想或影响在社交网络上的传播. 这类模型因其在经济、社会、医药和计算机科学等方面的广泛应用而备受关注.

在目标集选取问题的研究中，网络通常被抽象为一个无向图，且每个点都被赋予一个阈值函数 $\theta(v): V(G) \to \mathbb{N}$, 其中 $V(G)$ 是 G 的点集, $\mathbb{N}$ 是整数集. G 中的点通过一个动态过程被依次激活: 在初始步骤，选择 G 的一个顶点子集 S 作为初始激活集，在步骤 i ($i > 0$)，G 中未被激活的点遵行下面的原则激活：

顺序更新规则: 当一个未激活点有至少 $\theta(v)$ 个已激活邻点，则这个点被激活. 一旦这个点被激活，则在整个过程中保持激活状态. 如果 S 通过激活过程激活了 G 中所有的点，则称 S 是 G 的 θ-目标集. 目标集选取问题的目标是选取基数最小的 θ-目标集 S, 其基数称为 G 的 θ- 目标数，记为 $\min_\theta(G)$.

在目标集选取问题中，为了满足某些特殊需要设定了各种类型的阈值函数. 特别地，当阈值函数 $\theta(v) = d(v) - 1$ 时，该问题与点反馈集问题（即，破圈集问题）有着密切的关系. 已经证明目标集选取问题是 NP-困难的（即使对于特殊的二部图）. 因此，对该问题的研究主要集中在特殊图类，例如块状仙人掌图、弦图、哈明图、弦环、轮胎面、六边形网格、稀疏图、集团图、树、多部图和网格.

论文共分六章：

第一章给出了论文所涉及的基本概念和记号；介绍了研究背景及研究现状；最后介绍了本文的主要工作. 第二章对满足 $\min_3(G) = 3$ 的平面图进行

了刻画，并证明这样的平面图的最小度最多是 4. 在第三章中，对于阈值函数 k, 我们给出了 $\min_k(G\square H)$ 的上界，改进了 Adams 等的结果. 特别地，对于 $k=2$，给出了紧的下界和更紧的上界. 后者对于几乎所有在文献中已确定的卡氏积图都是可达的. 在第四章和第五章中，我们对平面、柱状、环面及莫比乌斯型的四边形网格和三角形网格进行研究，其中阈值函数 $\theta=2,3,4$. 在最后一章中，我们先给出了零强制集与连通控制集之间的关系，并对 Davila 关于零强制集的猜想给出了一种证明方法.

关键词： 目标集选取；平面图；卡氏积；四边形网格；三角形网格；强制集

Target Set Selection on Graphs

ABSTRACT

Target Set Selection (TSS) was initially proposed by Kempe et al. to study the social network analysis involving the problem of the spread of information, ideas or influence through a social network. This model can also formulate many problems arising in economy, sociology, medicine and computer science and, therefore, receives much attention from both theoretical and practical interests.

For Target Set Selection problem, a network is mathematically modeled as an undirected graph with its vertices equipped with a threshold function $\theta(v) : V(G) \to \mathbb{N}$, where $V(G)$ is the vertex set of G and $\mathbb{N}$, the set of positive integers. A θ-*activation* of a vertex in TSS is defined via the course of a dynamic process, namely the θ-activation process: at phase 0 of the process, we select an initial set S of vertices to be active while all other vertices are inactive. Starting from S, at every phase $i > 0$, vertices become active according to the following rule:

Sequential updating rule: Choose exactly one inactive vertex v that has at least $\theta(v)$ already-active neighbors to become active. Once a vertex becomes active, it remains active for the entire process. If a set S of vertices can activates all the vertices of G in an activation process then we call S a θ-*target set* of G. The goal of Target Set Selection (TSS) is to select a θ-target set S with minimum number of vertices. The cardinality of such S is called the θ-*target number* of G and denoted by $\min_\theta(G)$.

In Target Set Selection problem, various types of thresholds were introduced to meet some specific requirements. In particular, the threshold $\theta(v) = d(v) - 1$ has a close relation to the 'vertex feedback problem', also known as the 'hitting cycle problem' or 'decycling problem'. It is known that the Target Set Selection problem is NP-hard even for bounded bipartite graphs. Therefore, much research interests on this subject focus on particular graph structures, e.g., block-cactus graph, chordal graph and Hamming graph, chordal ring, tori, hexagonal grid, sparse graph and 'cliquish' graph; tree, multipartite graph and grid.

The dissertation includes six chapters summarized as follows:

The first chapter gives some basic definitions, notations involved in the thesis, and gives an overview of the previous work in the literatures and our main work in the thesis. In the second chapter, we give a characterization of those plane graphs G for which $\min_3(G) = 3$. Consequently, we show that the minimum degree of such plane graphs is at most 4. In Chapter 3 we establish an upper bound on the k-target number $\min_k(G\Box H)$ in terms of that of G and H for general k, which improves the upper bound established by Adams et al. In particular, a lower bound and a much tight upper bound for $k = 2$ are also given and the latter is attained by almost all the Cartesian product graphs $G\Box H$ for which $\min_2(G\Box H)$ is known in the literatures. In chapter 4 and chapter 5, we focus on some particular grids including planar, cylindrical, toroidal, Mobious quadrilateral grids and triangular grids for $\theta = 2, 3, 4$. In the last chapter, we give a connection between zero forcing set and connected dominating set and give a proof for Davila's conjecture on zero forcing number.

Key Words: Target set selection; plane graph; Cartesian product; quadrilateral grid; triangular grid; forcing set

目 录

CONTENTS

符号表

X	集合
$\|X\|$	集合 X 包含的元素个数
$X \subseteq Y$	集合 Y 的子集 X
$X \subset Y$	集合 Y 的真子集 X
$X \cup Y$	集合 X 与 Y 的并集
$X \cap Y$	集合 X 与 Y 的交集
$X \setminus Y$	集合 X 与 Y 的差
$X \square Y$	集合 X 与 Y 的卡氏积
$X \times Y$	集合 X 与 Y 的弱积
$\lceil x \rceil$	不小于实数 x 的最小整数
$\lfloor x \rfloor$	不大于实数 x 的最大整数
$\mathbb{Z}$	整数集
$V(G)$	图 G 的顶点集
$E(G)$	图 G 的边集
$N_G(v)$ 或 $N(v)$	图 G 中顶点 v 的邻集
$\delta(G)$	图 G 的最小度
$\Delta(G)$	图 G 的最大度
$d_G(v)$	图 G 中顶点 v 的度
$d(u, v)$	顶点 u 和 v 之间的距离

T	树
P_n	包含 n 个顶点的路
C_n	包含 n 个顶点的圈
$H \subseteq G$	图 G 的子图 H
$G[V']$	图 G 的由顶点集 $V' \subseteq V(G)$ 导出的子图
$G - V'$	图 G 的由顶点集 $V(G) \setminus V'$ 导出的子图
$G[E']$	图 G 的由边集 $E' \subseteq E(G)$ 导出的子图
$G - E'$	图 G 的删去 E' 中的边后得到的子图
$F_{\min}(G)$	图 G 的最小反馈数
$\min_k(G)$	图 G 的最优目标数

第一章　绪论

随着信息网络和大数据时代的到来，图论在社会生活上得到了广泛的应用. 目标集选取问题和强制集问题在众多实际应用中有着重要的现实意义.

目标集选取问题最初是由 Kempe、 Kleinberg 和 Tardos [1] 在 2003 年提出的. 它主要通过社交网络来研究信息、思想及影响的传播问题 [2, 3]. 这些模型能在经济、社会、医药和计算机科学方面解决很多实际问题. 因此，它在理论和实践都引起了广泛的关注. 比如病毒式营销 [4–10]；动态垄断 [11–15]；传染病在人群中的传播 [16]；病毒在计算机网络中的传播 [17, 18]; 各种策略的游戏设置 [19–21] 等. 目标选取集问题是 NP-hard 问题.

Amos等 [22] 在 2015 年将零强制集 [23] 推广到 k-强制集. 零强制集问题来源于最大零度和量子系统的控制 [23, 24]，这个问题的应用延伸到功率控制集问题. 它是由利用基尔霍夫定律监控电力网络引来的 [17]，此外它还可以应用到疾病或信息的传播 [17]、网络监控 [25, 26]、量子逻辑 [24]等方面. 还有很多文献涉及零强制数 [27–29]，零强制数问题也是 NP-Hard [30] 的.

本文主要研究目标集选取问题和强制集问题，本章主要介绍本文需要的基本概念、术语和记号，其次，综述所研究问题的相关背景及研究进展，最后介绍本文所得到的主要结果.

§ 1.1　基本概念和记号

本文所考虑的无向图均为简单和有限的，一个无向图 G 的点集和边集分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示.

给定一个图 $G = (V(G),\ E(G))$，如果点 u 和 v 关联一条边 e，则称 u 和 v 相邻，e 关联 u 和 v. 点 u 和 v 称为边 e 的端点.

一个无圈的连通图是树，记为 P_n. 树的叶子是指度数为 1 的点. 如果一个

连通图包含 q 个点不交的圈，这些圈通过 $q-1$ 个边相连，则称其为圈树. 圈树有 n 个点和 $n+q-1$ 条边. 如果一个图的点集可以被分为两部分 X 和 Y，且每条边的端点一个在 X 中，另一个在 Y 中，则称这个图是二部图. 如果任意一个点都只与另一部分的所有点相连，则称完全二部图，记为$K_{m,n}$. 类似地可以推广到 m-部图.

G 中与点 v 关联的边的数目称为点 v 的度，记为 $d(v)$. 用 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示图 G 中的点的最小度和最大度. 如果对于图中所有的点 $d(v)=k$，则称其为 k-正则图.

图 G 的一条 (v_0, v_k) 途径是指一个有限非空序列 $W=v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$，它的项交替地为点和边，使得对 $1\le i\le k$，e_i 的端点是 v_{i-1} 和 v_i. 其中 v_0 和 v_k 称为 W 的起点和终点， k 称为 W 的长.

如果途径 W 的边 $e_1, e_2, \cdots, e_k$ 互不相同，则 W 称为迹；如果途径 W 的点 $v_0, v_1, \cdots, v_k$ 互不相同，则 W 称为路 P_n. 如果路 P_n 的点 $v_0, v_1, \cdots, v_k$ 只有首末两个点相同，则 P_n 称为圈 C_n，圈的长度是指它的边数.

设 G 是一个图，若 $V(H)\subseteq V(G)$ 且 $E(H)\subseteq E(G)$，则称 H 是 G 的子图. 设 V' 是 $V(G)$ 的一个非空子集，以 V' 为顶点集，以两端点均在 V' 中的所有边为边集，其组成的 G 的子图，称为 G 的由 V' 导出的子图，记为 $G[V']$.

如果图 G 中的两个点 u 和 v 之间存在一条路，则称 u 和 v 是连通的. 若图 G 的任意两个点均由路相连，则称 G 是连通的.

设 $P_m\Box P_n$ 为 $m\times n$ 四边形网格. 在这里，点记为 $v_{i,j}$ 且 $0\le i\le m-1$, $0\le j\le n-1$. 如果点 $v_{i,j}$ 和 $v_{p,q}$ 之间有边当且仅当 $|i-p|+|j-q|=1$.

柱状四边形网络 $P_m\Box C_n$ 是在四边形网格 $P_m\Box P_n$ 的基础上加边 $v_{i,0}v_{i,n-1}$，其中 $0\le i\le m-1$.

设轮胎面四边形网络 $C_m\Box C_n$ 有 $m\times n$ 个点. 其中点 $v_{i,j}$, $0\le i\le m-1$, $0\le j\le n-1$. 点 $v_{i,j}$ 与四个点 $v_{(i-1)\bmod n,j}$， $v_{(i+1)\bmod n,j}$， $v_{i,(j-1)\bmod m}$， $v_{i,(j+1)\bmod m}$ 相连.

Torus cordalis 网络 $C_m\oslash C_n$ 类似于轮胎面四边形网格除了第 i 行的最后一