学校编码：10384　　　　　　　　　　　　分类号______密级______

学号：19020130154175　　　　　　　　　　　　　　UDC______

厦门大学

博　士　学　位　论　文

带子图及其部分对偶若干性质的刻画

Characterization of Some Properties of Ribbon Graphs and Their Partial Duals

买吐肉孜·买司地克

指导教师姓名：　金　贤　安　教授

专 业 名 称：　应　用　数　学

论文提交日期：　2017 年 4 月

论文答辩时间：　2017 年 5 月

学位授予日期：　2017 年　 月

答辩委员会主席：____________

评　　阅　　人：____________

2017 年 4 月

Doctoral Dissertation

Characterization of Some Properties of Ribbon Graphs and Their Partial Duals

Metrose Metsidik

Supervisor: Xian'an Jin

Speciality: Applied Mathematics

Institution: School of Mathematical Sciences

Xiamen University

Xiamen, P.R. China

April, 2017

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　）1. 经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2. 不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

带子图及其部分对偶若干性质的刻画

摘 要

带子图可被看作是一个具有图结构的有边界的曲面, 是胞腔嵌入图的一种表示形式. 部分对偶推广了数学基本概念—-胞腔嵌入图的几何对偶, 它通过纽结的 Jones 多项式与图的 Tutte 型多项式之间建立关系, 将纽结理论中各种版本的 Thistlethwaite 定理统一起来. 部分对偶不但是几何对偶的深远扩展, 而且在图论, 拓扑学和物理学中有重要的应用.

本文刻画带子图及其部分对偶的欧拉和偶面图等若干性质. 全文共分五章:

第一章首先概述本学位论文所研究问题的相关背景、国内外研究现状以及预备知识, 然后简单介绍本文的主要结果、主要研究方案及结构安排.

第二章首先给出带子图严格的定义和例子, 并且说明带子图与胞腔嵌入图的等价性以及相互转换; 其次说明在描述几何对偶 (胞腔嵌入图的 Euler-Poincare 对偶) 等方面上带子图比胞腔嵌入图优越性的同时给出带子图的公共线段、顶点线段和边线段等本文常用的新概念; 再次简约说明胞腔嵌入图部分对偶的重要性; 然后给出带子图的箭头标记和带子图部分对偶严格的定义以及带子图部分对偶的基本性质并且利用例子展示带子图中具体求部分对偶的方法.

众所周知, 一个平图是欧拉图当且仅当它的几何对偶是二部图是图论中的一个经典结论. 2013 年 Huggett 和 Moffatt 两人把这经典结论推广到平图的部分对偶, 利用中间图的全十字定向刻画了平图的全部二部图部分对偶, 并且指出了刻画平图的全部欧拉图部分对偶是一个公开问题. 第三章首先介绍中间图的半十字定向以及确定中间图的半十字定向数目上下确界, 然后利用中间图的半十字定向刻画平图的全部欧拉图部分对偶, 即解决了 Huggett 和 Moffatt 提出的公开问题.

第四章我们将更深入的研究这方面的问题, 把这个图论经典结论完整的推

广到胞腔嵌入图和嵌入图以及胞腔嵌入图的部分对偶, 并且提供两种方法刻画胞腔嵌入图的所有欧拉图部分对偶和偶面图 (所有面的度都为偶数的胞腔嵌入图, 包含胞腔嵌入二部图) 的部分对偶.

Robertson-Seymour 定理 (图子式定理), 即所有图组成的集合对图子式关系构成良半序, 是图论中最深刻的结论之一. 图子式定理也可以这样陈述: 每个图子式封闭图族有有限个禁子式. 虽然我们知道每个图子式封闭图族可被禁子式刻画, 然而只有非常少的精确的刻画是已知的. 最著名的结论就是 Wagner 定理: 一个图 G 是可平面的当且仅当 G 没有同构于 K_5 或 $K_{3,3}$ 的图子式. 2016 年 Chudnovsky 等人引入了二部图的一个封闭运算 — 二部图子式, 二部图任何一个二部图子式也是一个二部图, 并且给出了 Wagner 定理的二部图版本: 一个二部图 G 是可平面的当且仅当 G 没有同构于 $K_{3,3}$ 的二部图子式.

第五章首先介绍欧拉图子式, 欧拉图子式也是欧拉图的一个封闭运算, 欧拉图子式把一个欧拉图变成另一个欧拉图, 并且以欧拉图禁子式的形式刻画欧拉图和可平面欧拉图; 其次给出胞腔嵌入图子式即带子图子式、抽象图子式和带子图子式的区别以及带子图子式与部分对偶的关系, 并且介绍 Moffatt 的用带子图禁子式刻画表示链环的带子图的工作; 最后介绍带子图的两种保持带子图的偶面图或欧拉图性质的带子图子式运算, 并且用偶面和欧拉带子图禁子式刻画偶面和欧拉带子图以及偶面和欧拉平面带子图.

关键词：带子图; 部分对偶; 欧拉图; 偶面图; 二部图; 平面图; 图子式.

Characterizations of Eulerian and Even-face Ribbon Graphs and Their Partial Duals

ABSTRACT

A ribbon graph is a surface with boundary and a cellularly embedded graph can be realized as a ribbon graph. The concept of partial dual generalizes the fundamental concept of the geometric dual of a cellularly embedded graph. It was introduced to unify various versions of Thistlethwaite theorems in knot theory that relate the Jones polynomial of knots with a Tutte-like polynomial of graphs. Partial duality is far-reaching extensions of geometric duality and has found a number of significant applications in graph theory, topology, and physics.

In this dissertation, we focus on Eulerian and even-face characterizations of ribbon graphs and their partial duals. The dissertation consists of five chapters.

In Chapter 1, we summarize the background of the field, and state the main results of the present thesis, and give the outline of this dissertation. In order to discuss questions conveniently we also give some basic knowledge in this chapter.

Chapter 2 consists of the following: definition of ribbon graphs and its equivalence of cellularly embedded graphs; advantages of ribbon graphs over cellularly embedded graphs; definitions of some new concepts such as line-segments, vertex-line-segments and edge-line-segments; importance of partial duals; definition of arrow marked ribbon graphs and pictorial illustration of taking a partial dual.

It is well-known that a plane graph is Eulerian if and only if its geometric dual is bipartite. In 2013 Huggett and Moffatt extended this result to partial duals of plane graphs and then characterized all bipartite partial duals of a plane graph using all-crossing directions of its medial graph. They left the characterization of all Eulerian partial duals of a plane graph as an open problem. In Chapter 3 we solve this problem by considering half-edge orientations of medial graphs and allowing some inconsistent edges.

In Chapter 4 we further study this problem and generalize the above well-known theorem to embedded graphs and partial duals of cellularly embedded graphs, and characterize all Eulerian and all even-face (i.e. a cellularly embedded graph with no odd degree faces) partial duals of a cellularly embedded graph by means of half-edge orientations of its medial graph.

One of the deepest results in graph theory, the Robertson-Seymour Theorem (graph minor theory), is that graphs are well-quasi-ordered under the graph minor relation. This theorem may be reformulated as stating that every minor-closed family of graphs is characterized by a finite set of excluded minors. Although we know minor-closed families can be characterized by excluded minors, very few explicit characterizations are known. Perhaps the best-known is Wagner's Theorem which characterizes planar graphs as those with no K_5 or $K_{3,3}$ minors. In 2016 Chudnovsky et al. modified the classical minor operation to introduce a notion of bipartite minors, which is a closed operation of bipartite graphs, and proved a bipartite analog of Wagner's theorem: a bipartite graph is planar if and only if it does not contain $K_{3,3}$ as a bipartite minor.

In Chapter 5, motivated by the above paper, we introduce a special kind of minor operation called an Eulerian-minor such that it keeps Eulerian characteristics of Eulerian graphs and characterize Eulerian graphs and planar Eulerian graphs in terms of excluded Eulerian-minors. We also consider two special kind of minor operations of ribbon graphs such that they keep Eulerian or even-face characteristics of ribbon graphs, and then characterize Eulerian, even-face ribbon graphs and plane Eulerian, plane bipartite ribbon graphs using excluded such minors.

Key Words: Ribbon graphs; Partial duals; Eulerian; Even-face graphs; Bipartite graphs; Plane graphs; Minor.

目 录

CONTENTS

常用记号

G	图 (V, E)
$V(G)$ 或 V	图 G 的顶点集
$E(G)$ 或 E	图 G 的边集
$v(G)$ 或 n	图 G 的阶
$e(G)$ 或 m	图 G 的边数
$k(G)$	图 G 的分支数
$G[V']$	V' 的导出子图
$G[E']$	V' 的边导出子图
$G\|_A$	图 G 限制在边子集 A 上, 等于 $G[A]$
$N_G(v)$ 或 $N(v)$	v 在 G 中的邻集
$\deg_G(v)$	v 在 G 中的度数
K_n	n 阶完全图
$K_{n,m}$	二部图划分阶数为 n, m 的完全二部图
C_n	n-圈
$G_1 \cong G_2$	图 G_1 与 G_2同构
Σ	曲面
S^2	球面
T^2	环面
$\mathbb{R}P^2$	实射影平面
$\Sigma_1 \# \Sigma_2$	Σ_1 和 Σ_2 的连通和
$g(\Sigma)$	曲面 Σ 的亏格
$G_1 = G_2$	胞腔嵌入图 G_1 与 G_2等价
$f(G)$	胞腔嵌入图 G 的面数
$\chi(G)$	胞腔嵌入图 G 欧拉特征
$\gamma(G)$	胞腔嵌入图 G 欧拉亏格

G_m	胞腔嵌入图 G 的中间图
G^*	胞腔嵌入图 G 的几何对偶图
A	$A \subseteq E$
A^*	$\{e^* \mid e \in A\}$
A^c	$E \setminus A$
$G^{\circledast}$	嵌入图 G 的对偶图
G^A	胞腔嵌入图 G 对边子集 A 求部分对偶
G^e	$G^{\{e\}}$
$G \uplus G^*$	胞腔嵌入图 G 和它的几何对偶 G^* 的标准浸入
G/e	图 G 收缩一条边 e
$\mathbf{G}$	带子图
$\mathbf{G}^*$	带子图 $\mathbf{G}$ 的几何对偶
$p(\mathbf{G})$	带子图 $\mathbf{G}$ 的边界分支数
$\mathbf{G}^A$	带子图 $\mathbf{G}$ 对边子集 A 求部分对偶
$\mathbf{G}^e$	$\mathbf{G}^{\{e\}}$
$\mathbf{G}\|_A$	带子图 $\mathbf{G}$ 限制在边子集 A 上
$\mathbf{G} \overset{\rightarrow}{-} A$	带子图中属于 A 边箭头标记
$\mathbf{G} \overset{\rightarrow}{+} A$	带子图中恢复箭头标记 A 的边
$\mathbf{G}/e$	收缩带子图 $\mathbf{G}$ 的一条边 e