

学校编码：10384
学号：15420141151974

分类号____密级____
UDC____

厦 门 大 学

硕 士 学 位 论 文

稀疏事件模拟方法与操作风险管理研究

**Study on Rare Event Simulation Method and Operational
Risk Management**

程昌松

指导教师姓名：黄长全 副教授

校外导师：李成武

专业名称：应用统计学

论文提交日期：2017年4月

论文答辩时间：2017年4月

学位授予日期：2017年6月

答辩委员会主席：

评 阅 人：

2017年4月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果,均在文中以适当方式明确标明,并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范(试行)》。

另外,该学位论文为()课题(组)的研究成果,获得()课题(组)经费或实验室的资助,在()实验室完成。(请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称,未有此项声明内容的,可以不作特别声明。)

声明人(签名):
年 月 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于 年 月 日解密，解密后适用上述授权。

2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年 月 日

摘要

在近几十年金融行业的快速发展过程中，操作风险事件呈现高发性特点。操作风险在银行业发展时就已经存在，但相关的理论和实证研究是最近几十年才有的。随着国内操作风险损失事件与日俱增的影响，金融机构也逐渐认识到操作风险的严重性，但是相关研究并不多，大多研究停留在政策讨论层面，对风险的认识和分析较为感性。在操作风险的实证研究方面，国内外相关研究大多采用 Basel III 提出的方法对损失资本金进行估计，稀疏事件模拟方法在操作风险损失计算问题方面具有较大的优势，越来越多的模拟算法被应用到风险损失的估计中。本文主要关注的是发生概率极低但是损失极大的风险事件，希望通过稀疏事件模拟算法对操作风险尾部概率值进行估计。针对厚尾的损失程度分布，重要性抽样算法下传统的指数测度变换无法实施，而混合分布法对似然权重的限定可以较好的避免估计方差不收敛的问题，且易于实施。在最小化方差基础上，结合交叉信息熵准则确定辅助抽样分布，并利用统计经典算法中的最大化期望算法对辅助抽样分布参数进行迭代求解。其中，损失程度的阈值以及损失事件数量都会对辅助抽样分布产生影响，为了分析这些变量的影响并验证算法的稳定性，本文将这些变量也设定在参数的更新迭代中。文中也给出了其他交叉信息熵算法下的估计，进行对比模拟实验，最后结合实际操作损失数据对总体损失分布尾部概率进行估计，结果表明本文尝试的算法优于其他交叉信息熵算法。

关键词：稀疏事件 重要性抽样 操作风险

Abstract

In recent decades, the rapid development of the financial industry in the process, the operational risk events show high characteristics. Operational risk arises at the beginning of the development of the banking industry, but the relevant theoretical and empirical research is the last few decades. With the increasing impact of the loss of domestic operational risk, financial institutions are increasingly aware of the seriousness of operational risk, but the related research is not much, mostly stay in the policy discussion level, the risk perception and analysis are more emotional. In the empirical study of operational risk, Most of the related researches at home and abroad use the method proposed by the Basel III to estimate the operational risk capital, The rare event simulation method has a great advantage in the estimation of operational risk loss, and more and more simulation algorithms are applied to the estimation of risk loss. In this paper, we mainly focus on the occurrence of risk events with extremely low probability but great loss. We hope to estimate the tail risk probability of the operational risk through rare event simulation. For the severity of losses with thick tails, the traditional exponential measure under the importance sampling algorithm can not be implemented, but the mixed distribution method can avoid the problem that the variance of estimating is not convergent and easy to implement. Based on the variance minimization, the auxiliary sampling distribution is determined by the cross entropy criterion, and the auxiliary sampling distribution parameters are solved iteratively using the EM algorithm in the classical statistical algorithm. In order to analyze the effect of these variables and verify the stability of the algorithm, we also set these variables in the update iteration of the parameters. The results show that the thresholds of the loss degree and the number of events have an influence on the auxiliary sampling distribution. In this paper, we give the estimation under the cross-entropy of other algorithms, and compare the simulation results. Finally, we estimate the tail probability of the total loss distribution according to the actual loss data. The results show that this algorithm outperforms other cross- Entropy algorithm.

Key words: rare event importance sampling operational risk

目录

第一章 绪论	1
1.1 选题背景	1
1.2 文献综述	1
1.2.1 国内研究情况	2
1.2.2 国外研究情况	3
1.3 论文结构	5
1.4 可能的创新点	6
第二章 蒙特卡罗模拟和稀疏事件模拟	7
2.1 蒙特卡罗模拟	7
2.1.1 蒙特卡罗模拟介绍	7
2.1.2 蒙特卡罗算法分析	7
2.2 稀疏事件和重要性抽样	9
2.2.1 稀疏事件	9
2.2.2 重要性抽样	11
第三章 对数正态分布与重要性抽样	16
3.1 混合分布法	16
3.2 最优分布选取规则	19
3.2.1 渐进有效规则	19
3.2.2 最小化估计值方差	21
3.2.3 交叉信息熵准则	24
第四章 交叉信息熵算法组合调整	26
4.1 EM 算法	26
4.2 交叉信息熵算法组合调整	27
4.3 标准交叉信息熵算法	30
4.4 适应性交叉信息熵算法	31
第五章 算法模拟实验	33
5.1 模拟方案	33
5.2 模拟结果分析	33
第六章 操作风险尾部概率估计	41
6.1 操作风险分布拟合	41
6.2 操作风险模拟	43
6.3 模拟结果分析	45
第七章 总结与展望	49
附录	50
参考文献	55
致谢	59

Contents

Chapter 1 Introduction.....	1
1.1 Background	1
1.2 Literature review.....	1
1.2.1 Domestic Research.....	2
1.2.2 Overseas research situation.....	3
1.3 The structure of the paper.....	5
1.4 Possible innovation	6
Chapter 2 Monte Carlo simulation and Rare event simulation.....	7
2.1 Monte Carlo simulation	7
2.1.1 Introduction to MC.....	7
2.1.2 Monte Carlo algorithm analysis.....	7
2.2 Rare events and importance sampling.....	9
2.2.1 Rare events.....	9
2.2.2 Importance sampling.....	11
Chapter 3 Lognormal Distribution and Sampling of Importance....	16
3.1 Mixture distribution method.....	16
3.2 Optimal Distribution Selection Rule.....	19
3.2.1 Asymptotic Effective Rules.....	19
3.2.2 Minimize Estimated Variance.....	21
3.2.3 Cross-Entropy Guidelines.....	24
Chapter 4 Adjust the Combination of Cross Entropy.....	26
4.1 EM algorithm	26
4.2 Adjust the Combination of Cross Entropy	27
4.3 Standard Cross Entropy Algorithm.....	30
4.4 Adaptive Cross Entropy Algorithm.....	31
Chapter 5 Algorithm Simulation Experiment.....	33
5.1 Simulation scheme.....	33
5.2 Simulation results analysis.....	33
Chapter 6 Operational Risk Tail Probability Estimation.....	41
6.1 operational risk distribution fitting.....	41
6.2 operational risk simulation.....	43
6.3 simulation results analysis.....	45
Chapter 7 Summary and Prospect.....	49
Appendix.....	50
REFERENCES.....	55
Acknowledgement.....	59

厦门大学博硕士学位论文摘要库

第一章 绪论

1.1 选题背景

长期以来金融业把信用风险和市场风险作为关注的重点，但是近些年由操作风险引起的一系列损失让机构也不得不时刻对其防范。事实上，过去几十年金融机构发生的灾难性损失事件几乎都和操作风险相关，包括巴林银行，长期资本管理公司，爱尔兰第一联合银行，贝尔斯登，雷曼兄弟和美国保险集团（AIG）等一系列事件。对中国而言，近些年操作风险事件也呈现增加的趋势。2010年中行北分违规贷款 13 亿；2013 年光大自营“乌龙指”事件，大幅拉升大盘 5%；2014 年“扇贝绝收，巨亏 8 亿元”的獐子岛事件，这些事件都反映了目前国内操作风险管理的混乱与不完善状态。

目前国内在有关操作风险理论和政策方面的研究较多，和国外相比实证方面研究结果的适用性还有所欠缺。在实证方面，国内研究主要集中在操作风险损失分布类型的确定上，通过拟合出适合的分布并以此计算商业银行的在险价值，风险敞口。

本文通过对国内和国外相关文献进行梳理发现，有关操作风险方面的研究，出发角度大都为商业银行资本金的估算，但是针对发生概率极低的操作风险研究并不多，而这类风险引起的损失却是致命的，需要引起广泛的注意。根据在险价值的定义与估计方法，我们知道在险价值无法估算这样的风险带来的损失，因为这类事件发生概率极低，可能不会出现在在险价值的计算中，即在险价值无法对超出自己范围的损失进行估计。本文所要研究的就是这类风险事件，希望估计损失事件的发生概率，更精确地刻画操作风险尾部的概率。本文通过结合现有的方法优点并加以改进，尝试获得更精确稳定的模拟方法，对操作风险尾部概率进行有效估计。

1.2 文献综述

1.2.1 国内研究情况

稀疏事件模拟在金融领域的应用主要集中在信用风险违约的估计方面和期权的定价模拟方面。陈荣达在外汇期权组合的研究中，结合重要性抽样方法对组合的非线性模型进行了求解并获得较好的结果。王婷（2012）研究了服从不变方差弹性模型的股票价格形成机制，并通过模拟方法进行定价，利用目前使用最多的方差缩减技术之一的重要性抽样来提高模拟效果。王松（2012）研究类似 Black-Scholes 公式的解析解时，在期权的定价过程中直接采用重要性抽样方法予以求解，能够获得较为稳定的结果。刘果，顾桂（2014）基于前人的研究，针对美式期权在正态性假设前提下的定价问题，通过重要性抽样算法找到一种方差缩减效果显著的估计方法，提高了定价的精度。徐承龙，吴倩，孙丽华（2015）研究了商业银行资产配置中的市场风险以及信用风险。对资产组合任意边缘分布的高斯联结模型，通过对资产损失进行转化变换为高维空间上的正态分布函数，再利用重要性抽样算法进行模拟求解。虞欢欢（2015）对风险资产组合进行相关性结构分析，把重要性抽样方法应用到风险资产组合损失的估算中，通过测度变化将原始取样空间变换到新的取样空间，在这种新的取样空间中，损失事件出现的概率提高了，模拟不再是稀有事件，模拟的效率性和精确性方面也将会大大提升。

目前国内对于操作风险分布的模拟基本使用的是早期标准的蒙特卡罗模拟或者改进的贝叶斯马尔科夫蒙塔卡罗（MCMC）等方法。宾建成，吴俊通过对商业银行的损失数据进行分布拟合，利用贝叶斯 MCMC 方法对风险损失分布对参数进行估计，结果表明操作风险对应的损失分布近似服从广义极值分布（GEV）分布。刘睿，詹原瑞，刘家鹏在此分布类型基础下，为了解决风险分布尾部事件数据较为匮乏的难题，使用基于 Gibbs 抽样的贝叶斯 MCMC 方法来对 POT 模型的参数进行估计，解决了由于样本数据不足导致的估计误差增大的问题。李晶晶（2014）为了估算商业银行应对所有操作风险应该准备的资本金，在损失分布法（LDA）方法下采用蒙特卡罗模拟对损失资本金进行度量，通过损失数据分别拟合出最优的损失频率分布和损失额分布，再估计其在险价值。考虑到尾部“低频高损”的数据较少的问题，可以采用 Bootstrap 进行抽样来解决，王宗润，汪武超，陈晓红等结合 Bootstrap 抽样对损失额分段的 LDA 进行估

计。同样，周艳菊，彭俊，王宗润在 LDA 方法的基础上，将分布划分为两阶段，分阶段对风险损失额分布进行拟合，参数可以通过 Gibbs 抽样来求解得到，同时 Gibbs 抽样可以减少估计的误差。在此基础之上，宋坤，刘天伦主要采用了 MCMC 模拟的贝叶斯方法，尝试动态模拟操作风险损失频率分布和损失额分布的后验分布函数，其中关于马尔科夫链采用吉布斯抽样来构造出，再利用构造的后验分布来计算出风险资本金。

1.2.2 国外研究情况

针对稀疏事件问题的研究，国外使用较多的一种方法为方差缩减技术 VRTs，其中 IS 已经在海外获得了广泛成功的应用 (biondini et al., 2004; Li et al., 2007; Moore et al.)。S.Juneja 和 P.Shahabuddin (2005) 主要给出了稀疏事件方法在排队论和厚尾的 VaR、信用风险、保险风险中的应用。Blanchet, J.Glynn, P.Liu 在顾客等待时间满足厚尾分布的排队论系统中，提出了一种有效性的重要性抽样算法来计算稳态下的尾部概率，同时也证明了算法较为稳定可靠。

许多其他的方差减小技术也被成功的应用在各种领域，如多规则的蒙特卡罗方法 (Yevick, 2002)，马尔可夫链蒙特卡罗 (MCMC) 方法 (Secondini, Forestieri, 2005) 和吉布斯采样。在这些 VRTs 方法中，他们的共同点是算法都是自适应的。在本质上，这样的方法试图在数值上寻找重要区域的样本空间。Ahamed, T.P.I.Borkar (2004) 等人对马尔科夫链随机近似处理采用适应性重要性抽样方法，但是这些方法的问题是没有合适的已知抽样分布。当重要性抽样是合适的时候，它一般优于其他方法，因为：(i) 如果需要的话，重要性抽样可以精确的计算估计误差；(ii) 自适应方法通常需要调整某些参数，而重要性抽样的依赖性较小；(iii) 重要性抽样通常比自适应方法更快，因为自适应方法在数值模拟的某一部分需要被用来寻找状态空间最重要的区域。事实上，重要性抽样的速度优势可以直接通过不同方法之间的详细比较 (biondini, Kath, 2005; Lima, 2005) 来验证。Henk A.P. Blom, G.J.(Bert)Bakker 和 aroslav Krystul (2009) 将稀疏事件模拟方法应用到空中交通管制中，利用分割 (splitting) 的方法解决这个问题，避免撞机的灾难，同时建立了 IPS (粒子交互系统) 算法的框架模拟大范围的受控随机混合系统。Kong, Liu, Wong 提出

了序列模拟方法结合 Bayesian 模拟解决数据缺失的问题，并应用序列蒙特卡罗模拟（SMC）的方法研究大量随机混合过程。Krystul, Blom 证实了 IPS 方法非常适合模拟扩散过程，但是当应用到离散状态大偏差的交换扩散过程时却有局限。为了解决这个局限，Krystul, Blom 将 IPS 扩展到混合 IPS 版本。在此基础上，H.A.P.Blom, J.Krystul 和 G.J.Bakker 在大范围的随机混合系统中采用序列 MC 方法模拟稀疏事件概率。F.Cadini, D.Avrani (2012) 基于神经网络建立了 SS-NN (Neural Network-based SS) 方法，解决在使用子集模拟（SS）时模拟结果稳定性的大幅波动问题。James Beck (2015) 则对稀疏事件的方法进行了梳理，同时比较了重要性抽样，子集模拟，MC，MCMC 各种方法的优缺点以及适用范围。Hong-Shuang Li, Yuan-Zhuo Ma, Zijun Cao (2014) 等人合作研究了在可靠性分析中，针对单一子集模拟无法解决多维随机稀疏事件概率的计算问题，提出广义子集模拟（GSS）的方法，利用统一的中间子集失败事件能够同时处理这些子集失败区域的条件概率问题。在此基础上，Arul (2015) 将子集模拟和重要性抽样的思想结合起来，通过引入重要性抽样概率密度函数产生条件分布样本，解决子集条件概率难以求解的问题。

近些年随着统计算法在机器学习中应用的不断发展，重要性抽样模拟也逐渐引进相关算法来解决模拟中出现的问题。Asmussen, P.Kroese (2003) 开始使用交叉信息熵的规则来寻找最优重要性抽样分布并采用期望最大化算法求解出分布参数，同时给出了分布服从帕累托和威布尔分布情况下的模拟应用。Olivier Cappe, Arndal Douc 等 (2008) 在分布服从厚尾的 T 分布时，提出了一种适应性的迭代算法去同时更新抽样权重和混合分布的参数，迭代过程中同样采用了交叉信息熵作为最优抽样分布函数的判断标准。

交叉熵方法 (Biondini 2005, Rubinstein, Kroese 2004) 在最近几年已经被证明特别有效。虽然交叉熵方法本身就是一个有用的方差减小技术，在某些情况下，交叉熵方法也可结合重要性抽样，即同时拥有重要性抽样与自适应技术两者的优点。

稀疏事件在操作风险方面的应用，研究者通常采用传统的频率模型并依靠 Monte Carlo 模拟来实现。Annalisa 和 Claudio 为了测试银行的操作风险，基于传统的频率模型使用 Monte Carlo 模拟来获取损失分布和相关的风险测度，如在险价值和期望短缺值的测度，对分布的左尾和中心采用对数正态分布进行拟合，

分布的右尾采用极值理论进行拟合，左右组合为完整的风险损失程度的分布。右尾的处理有效的避免了风险的低估，通过实际数据测试拟合效果较好。Sachin K Manglaa, Pradeep Kumarb 等（2014）在研究绿色供应链操作管理中涉及的风险，为了控制其中由操作风险因素导致的损失，使用 MC 模拟估计捕获风险的损失分布。Shubharthi Barua, Xiaodan Gao 等考虑到随机过程的动态特征，操作原随时间的响应，侦查测试的时间间隔，设备的使用年限，季节变化以及系统安全操作的时限性等都对动态系统有影响，为了处理计算时间依赖的风险效应，在贝叶斯网络的基础上设计出了动态系统的风险核算算法，模拟这种风险的变化情况。

1.3 论文结构

论文一共分为七章，主要研究内容和结构如下：

第二章回顾蒙特卡罗模拟方法的优缺点以及估计中存在的问题，同时分析了稀疏事件模拟中重要性抽样的关键性问题，似然比无界时可能导致估计值有无限的方差，所以需要辅助抽样分布相对于原始抽样分布具有更厚的尾部特征。

第三章，针对似然比无界时可能导致估计值的方差无限的问题，本文通过混合分布法来限定似然比的界限，同时确定最优分布函数的选取规则。渐进有效性规则不能保证在给定的参数下得到的重要性抽样估计值有效，直接最小化估计值方差涉及参数的影响且混合积分难以直接求解，所以最终将最小交叉信息熵作为本文辅助抽样分布选取判定的标准。

第四章，利用期望最大化算法迭代求解辅助抽样分布参数。根据第三章的分析最优抽样分布函数受阈值，损失事件次数的影响，且似然权重的分布对概率估计也有较大的影响，所以本文通过引理将阈值和事件发生个数同时考虑到交叉信息熵算法的参数更新迭代过程中，即在抽样过程设计抽取更符合预期样本的方案。同时为了比较本文算法的有效性，给出了标准交叉信息熵和适应性交叉信息熵算法下的参数估计算法。

第五章，设定不同算法下的模拟方案并进行模拟实验，比较本文提出的算法和其他同类型算法的优劣，结果验证了本文的交叉信息熵调整算法的有效性和精确性。

第六章，利用提出的方法对实际操作风险的尾部概率进行模拟估计。

第七章，总结分析模拟算法，并提出下一步可能完善和改进的方向。

1.4 可能的创新点

本文可能存在以下三个创新点：

- (1) 通过本文第二章和第三章的分析，损失阈值和损失事件个数对辅助抽样分布函数有影响，而现有的模拟算法中并没有同时考虑其带来的影响，本文在期望最大化算法中将损失阈值和损失事件个数融入到最优分布参数的求解过程中，用以分析这些外在变量的变化对估计结果的影响。
- (2) 通过文献梳理我们发现，在有关操作风险损失额分布的相关研究中，现在更倾向于使用厚尾的分布对损失额进行拟合，但是在采用重要性抽样时对辅助抽样分布的选取基本采用的都是单一分布或者混合的正态分布，根据第二章和第三章似然权重对概率估计的影响分析，本文将采取混合对数分布作为辅助抽样分布。
- (3) 针对操作风险，大多研究的角度为风险资本金的估算，一般通过在险价值来确定，但是当操作风险属于本文所研究的稀疏事件时，在险价值无法处理这类风险损失。本文直接从损失事件发生的概率角度出发，希望通过模拟的方法对操作风险尾部概率进行估计，更加精确刻画这种极端风险的概率。

第二章 蒙特卡罗模拟和稀疏事件模拟

尽管在过去的六十多年里，研究者在蒙特卡罗模拟方面已经做出了大量的工作，但是随着要求的不断提高，估计的方法也需要与时俱进。在操作风险领域，传统上正态分布或者轻尾的分布假设已经不适合现在操作风险的分布特征了，各界对风险损失服从厚尾的分布也已经有了一致的认识（McNeil, Frey, 2015），稀疏事件模拟方案也需要不断改进完善以应对新的要求。

2.1 蒙特卡罗模拟

2.1.1 蒙特卡罗模拟介绍

蒙特卡罗模拟（Monte Carlo, MC）本质上来讲是以概率论为基础的模拟算法，依靠计算机的高速计算产生随机数对模型进行数值计算。自从蒙特卡罗方法在二战中第一次成功应用以来，模拟方法已经引起了广泛的关注。模拟算法已经大量应用在物理，生物，通信技术，交通系统和保险风险评估等领域。MC 的成功主要是由于计算机计算速度的提升使得在可接受的时间内使执行变得更为可能。在应用领域很多复杂模型没有分析解，某些积分无法求解，我们采取随机模拟的方法来近似求解将更为直接有效，MC 的应用也越来越广泛。

2.1.2 蒙特卡罗算法分析

当我们处理稀疏事件时标准的 MC 估计效果并不理想。例如现在需要估计某些分布尾部的概率值， $p = P(X \geq c)$ ， c 为尾部的阈值，标准的 MC 方法直接从分布 X 中模拟 N 个观测值 X_1, \dots, X_N ，概率估计为

$$\hat{p}^{\text{MC}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I\{X_i \geq c\} \quad (1)$$

其中 I_A 是集合 A 的示性函数，如果 c 是分布的 α 分位数，我们希望 $\sum_{i=1}^N I\{X_i \geq c\}$ 中仅仅包含 $N * (1 - \alpha)$ 个非零数，所以对于较大的 α ， N 也要足够大才可以得到一个较好的估计。我们对概率估计值优劣的评判标准可以采用相对误差指标来

衡量, $\tau = \sqrt{\text{Var}(I\{X_i \geq c\})} / E(I\{X_i \geq c\})$ (Asmussen 和 Binswanger, 1997)。当 $p \rightarrow 0$ 时, 标准的 MC 估计的相对误差是发散的:

$$\tau = \sqrt{p(1-p)/p} \approx 1/\sqrt{p} \rightarrow \infty \text{ as } p \rightarrow 0$$

当我们需要在一定阈值条件下对尾部概率进行估计时, 这个问题更严重。

假如考虑对数正态分布, $X \sim \text{lognormal}(0,1)$, 条件分布估计为 $\hat{u}^{\text{MC}} = E(X|X \geq c)$ 。标准的 MC 估计由下式给出

$$\hat{u}^{\text{MC}} = \frac{\sum_1^N X_i * I\{X_i \geq c\}}{\sum_1^N I\{X_i \geq c\}} \quad (2)$$

X_1, \dots, X_N 是从分布 X 中随机抽取的 N 个样本。模拟过程如下:

1. 模拟 N 个标准对数正态的随机数;
2. 利用 (2) 式计算 \hat{u}^{MC} 的标准 MC 估计;
3. 将以上两个步骤模拟 B 次;
4. 计算均值 $\hat{u}_c = \sum_{i=1}^B \hat{u}_c^{[i]} / B$ 和方差 $\text{Var}(\hat{u}_c) = \sum_{i=1}^B (\hat{u}_c^{[i]} - \hat{u}_c)^2 / B$ 。

其中 $\hat{u}_c^{[i]}$ 为第 i 次模拟产生的估计值, $i = 1, \dots, B$, 最终估计偏差为 $b(\hat{u}_c) = \hat{u}_c - u^c$ 。对数正态分布下, 随机变量 X 在阈值 c 下的条件期望实际值为:

$$u^c = E(X|X \geq c) = e^{u+\sigma^2/2} \cdot \frac{1 - \Theta[t - \sigma]}{1 - \Theta[t]} \quad (3)$$

$\Theta(x)$ 为标准正态分布函数, $t = (\log(c) - u)/\sigma$, 所以标准对数正态分布时 (3) 为下式

$$E(X|X \geq c) = e^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1 - \Theta[\log(c) - 1]}{1 - \Theta[\log(c)]}$$

Degree papers are in the "[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)". Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to etd@xmu.edu.cn for delivery details.

厦门大学博硕士学位论文摘要库