

## Beyond-BP 译码算法综述：原理与应用

吕毅博 胡伟 王琳\*  
(厦门大学通信工程系 厦门 361005)

**摘要：**低密度奇偶校验码因其具有逼近香农限的优异性能，现已在多种标准和系统中得到广泛的应用。但为了使其能够满足不同应用场景下通信系统对纠错性能、计算复杂性、译码时延、硬件资源损耗以及功耗等方面的要求，需要对用于 LDPC 码译码的置信传播算法进行进一步的研究与改进。该文从译码算法的改进动机、方法论、计算复杂度以及性能表现等角度入手，对近些年出现的一些 Beyond-BP 译码算法进行了综述。并在最后对用于迭代接收系统的译码算法改进工作进行了讨论，为未来算法的改进工作提供一点思路。

**关键词：**低密度奇偶校验码；置信传播算法；改进的置信传播算法；陷阱集；可靠性；迭代接收

中图分类号：TN911.22

文献标识码：A

文章编号：1009-5896(2017)06-1503-12

DOI: 10.11999/JEIT161288

## Survey of Beyond-BP Decoding Algorithms: Theory and Applications

LÜ Yibo HU Wei WANG Lin

(Communication Engineering Department of Xiamen University, Xiamen 361005, China)

**Abstract:** Low Density Parity Check (LDPC) codes are employed in several standards and systems, due to their Shannon limit approaching ability. However, in order to satisfy the communication systems' requirements at the aspects of error correction ability, computing complexity, decoding latency, hardware source consumption and power consumption under different application circumstances, the Belief Propagation (BP) algorithm used for decoding LDPC codes needs to be further investigated and improved. In this survey, authors summarize several different Beyond-BP algorithms from the aspects of motivation, methodology, complexity and performance. Moreover, this survey also discusses the optimization of decoding algorithms for iterative receive system, which can provide a reference for further investigation on this topic.

**Key words:** Low Density Parity Check (LDPC) codes; Belief Propagation (BP) algorithm; Beyond-BP algorithm; Trapping set; Reliability; Iterative receive

### 1 引言

低密度奇偶校验(Low Density Parity Check, LDPC)码是由 Gallager<sup>[1]</sup>教授于 1962 年首次提出,但受当时计算能力与硬件发展水平的限制,该码在当时并未引起重视。自从 1996 文献[2]重新发现 LDPC 码之后,该码因具有逼近香农限的优异纠错性能,与 Turbo 码一起得到了学者们的关注,成为一个新的研究热点。经过近 20 年的深入研究与发展,LDPC 码现已在多种标准中得到了应用,比如 DVB-S2 标准<sup>[3]</sup>,Wi-Fi 802.11 标准<sup>[4]</sup>,WiMax 802.16 标准,近地空间与深空通信标准<sup>[5]</sup>等。而 2016 年里

斯本 3GPP RAN1 会议进一步确定 5G 将使用 LDPC 码作为移动宽带(eMBB)业务数据信息的编码方案。这预示着对于 LDPC 码编译码方面的研究将具有更加重要的理论与实际意义。

为了确保基于 LDPC 码的通信系统能够满足不同应用场景对纠错性能、时延、硬件资源占用以及功耗等方面的要求,需要对 LDPC 码编译码算法进行深入的研究与改进工作。关于 LDPC 码的研究可以分为码型构造和译码算法改进这两类。而本文主要就近些年出现的一些译码算法的改进工作进行了初步的总结。

对于 LDPC 码,当采用最大似然(Maximum Likelihood, ML)算法进行译码时,能够获得最优的纠错性能,但是此算法巨大的计算工作量阻碍了其在实际中的应用。因此,作为 ML 算法的一种次优解,置信传播(Belief Propagation, BP)译码算法被用来对 LDPC 码进行译码<sup>[2,6]</sup>。迄今为止,BP 算法

收稿时间: 2016-11-28; 改回日期: 2017-03-21; 网络出版: 2017-04-25

\*通信作者: 王琳 wanglin@xmu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61271241, 61671395)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61271241, 61671395)

成为一种重要的 LDPC 码译码方法。这是由 BP 算法以下几个特点所决定的：(1)BP 译码算法计算复杂度与 LDPC 码的码长成线性关系，较 ML 算法相比明显降低了计算复杂度；(2)当 LDPC 码码长足够长时，BP 译码算法纠错性能将接近于 ML 算法；(3)BP 译码算法的鲁棒性强，能够在多种环境中得到应用。但是 BP 译码算法在实际应用过程中仍需要依据具体的业务要求进行算法上的改进，以期得到超越标准 BP 算法的效果，即进行 Beyond-BP 算法的设计。这里所提到的“Beyond-BP 算法”是一个多维度上的概念，它既包含着在纠错性能以及收敛速度上优于 BP 算法的改进算法，也指代那些针对硬件实现而设计的译码算法。BP 算法的主要核心思想是信息迭代传递思想。除了在译码领域，该思想也能在通信系统接收端其他方面得到应用，如消除由多径衰落引起的符号间干扰的均衡技术，迭代信道估计和载波同步算法，包含检测-译码操作的迭代接收(Iterative Receive, IR)设计以及采用迭代译码方法的联合信源信道译码系统。而针对上述多层迭代系统的译码算法改进，能够让该系统具有更强的纠错性能以及更低的收敛门限，以此来满足如无线传感网这类系统在功耗、时延以及数据传递可靠度等方面的要求。

本文将从算法的改进思路与方法、译码效果以及计算复杂度等方面入手，对近些年出现的一些 Beyond-BP 算法进行综述。继而在文中通过举例来说明针对多层迭代系统进行算法优化能够给该系统性能带来显著的改善，以此为面向 5G 的 LDPC 码译码算法的研究工作提供些许思路。

## 2 LDPC 码的表示与标准 BP 算法

二元 LDPC 码可以由一个  $M \times N$  稀疏的校验矩阵  $\mathbf{H}$  来表示。而此时该 LDPC 码的码率则为  $R = (N - M)/N$ 。而对于任意一个校验矩阵，都存在一个 Tanner 图<sup>[7]</sup>与之相对应。借助于 Tanner 图，人们能够更直观地理解 BP 算法迭代过程。以图 1 为例，图中圆圈表示变量点与  $\mathbf{H}$  中的列相对应，方块表示校验点与  $\mathbf{H}$  中的行相对应，变量点与校验点之间的连线则称为边与  $\mathbf{H}$  中的 1 相对应，而每个节点连接边的总数则称为该点的度。

在本文中，所有的算法都是工作于对数域上。这里首先给出一些与算法相关符号的说明。 $L_{ch}(j)$  为关于第  $j$  个变量点的信道初始对数似然值(Log-Likelihood Ratio, LLR);  $L_c(i, j)$  为第  $i$  个校验点向第  $j$  个变量点传递的 LLR 值;  $L_v(j, i)$  为第  $j$  个变量点向第  $i$  个校验点传递的 LLR 值;  $L_v(j)$  为关于第  $j$  个变量点的后验 LLR 值;  $\mathcal{N}(c_i) \setminus j$  为与第  $i$  个校验

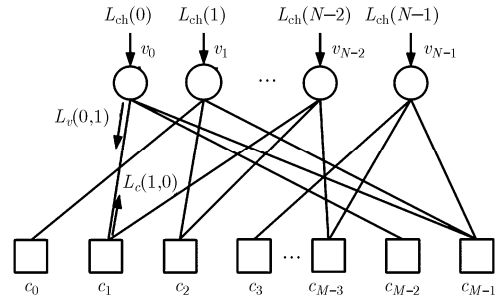


图 1 Tanner 图与 BP 译码算法

点相连接的除去第  $j$  个变量点后的其他邻居变量点的集合;  $\mathcal{N}(v_j) \setminus i$  为与第  $j$  变量点相连接的除去第  $i$  个校验点后的其他邻居校验点的集合。

系统采用 BPSK 调制，令与第  $j$  个变量点相对应的来自信道的变量为  $y_j$ 。BP 译码中节点 LLR 值的计算方法与迭代停止法则如下：

(1)变量点译码初始 LLR 值计算：

$$L_{ch}(j) = \lg \left( \frac{p(y_j | v_j = 0)}{p(y_j | v_j = 1)} \right) \quad (1)$$

(2)校验点  $c_i$  向变量点  $v_j$  传递的 LLR 值计算：

$$L_c(i, j) = 2 \tanh^{-1} \left( \prod_{j' \in \mathcal{N}(c_i) \setminus j} \tanh \left( \frac{1}{2} L_v(j', i) \right) \right) \quad (2)$$

(3)变量点  $v_j$  向校验点  $c_i$  传递的 LLR 值计算：

$$L_v(j, i) = \sum_{i' \in \mathcal{N}(v_j) \setminus i} L_c(i', j) + L_{ch}(j) \quad (3)$$

(4)关于  $v_j$  的后验 LLR 值计算：

$$L_v(j) = \sum_{i \in \mathcal{N}(v_j)} L_c(i, j) + L_{ch}(j) \quad (4)$$

(5)译码码字的判定与译码迭代终止法则：

$$\hat{v}_j = \begin{cases} 0, & L_v(j) > 0 \\ 1, & \text{其他} \end{cases} \quad (5)$$

根据式(5)得到译码后的码字  $\hat{\mathbf{V}}$ 。如果对于校验矩阵  $\mathbf{H}$  有  $\hat{\mathbf{V}}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$  成立或者算法迭代次数达到最大值，则停止迭代输出  $\hat{\mathbf{V}}$ ；否则，返回步骤(2)继续迭代。

继二元 LDPC 码被重新发现之后不久，学者们就进一步提出了需要在有限域  $\text{GF}(q)$  上进行编译码操作的多元 LDPC 码。众多研究表明，多元 LDPC 码在纠错性能方面强于前者，尤其当码长为中等长度或较短时。

关于多元 LDPC 码的译码算法，最早是由文献[8]中提出的概率域上的 Q-ary BP 算法，而文献[9]提出了对数域 Q-ary BP 算法。虽然 Q-ary BP 算法能够提供最优的译码性能，但是该算法具有很高的计算复杂度，这制约了多元 LDPC 码在实际中的应

用。因此如何降低多元 LDPC 码译码算法的复杂度,引起了众多学者的关注。

扩展 Min-Sum(Extended Min-Sum, EMS)算法<sup>[10]</sup>, Min-Max 算法<sup>[11]</sup>以及基于网格的 EMS(Trellis base EMS, T-EMS)算法<sup>[12]</sup>一方面能有效地降低译码复杂度,但另一方面也造成了纠错性能的下降。基于大数逻辑译码(Majority-Logic Decoding, MLgD)技术的多元 LDPC 码译码算法,也具有较低的算法复杂度且便于硬件实现。文献[13]提出了迭代 MLgD(Iterative MLgD, I-MLgD)算法,该算法在迭代过程中采用外信息累加操作来计算码字符号的可靠度。文献[14]则提出基于软可靠度的迭代 MLgD(Iterative Soft Reliability Based MLgD, ISRB-MLgD)算法与基于硬可靠度的迭代 MLgD(Iterative Hard Reliability Based MLgD, IHRB-MLgD)算法,它们都利用外部加权参数来反映外信息累加值的可靠度。虽然上述 MLgD 算法具有较低的算法复杂度,但它们对适用的多元 LDPC 码具有限制。基于比特可靠性的 MLgD 译码算法<sup>[15]</sup>则消除了这一缺点,进一步推动了多元 LDPC 码译码算法的发展。而另一方面,将遗传算法与基于快速傅里叶变换的 BP(FFT-BP)算法相结合的多元置信传播遗传算法<sup>[16]</sup>,也为多元 LDPC 码译码算法的研究提供了思路。

迄今为止已经涌现出了不少关于多元 LDPC 码编译码技术的研究成果,而这些成果有力地推动了多元 LDPC 码的发展,因此有必要专一地对它们进行更为详细的总结。而本文则重点对一些用于二元 LDPC 码的改进译码算法进行了总结,以期能够从侧面为多元 LDPC 码的译码研究提供帮助。

### 3 译码性能优化的 Beyond-BP 算法

#### 3.1 基于图模型的 Beyond-BP 译码算法

BP 算法是一种基于树型结构提出的渐进边缘概率计算方法,它要求不同节点之间传递的外信息相互独立。但是对于有限长 LDPC 码而言,与其对应的 Tanner 图中必然会有环形结构的出现,这样当外信息在环形结构上经过多次传递后,它们之间将必然产生联系,从而会导致错误信息的传递与叠加,进而导致 BP 算法的译码失败<sup>[17]</sup>。而错误信息累加现象在存在较多短环时,会表现得更加明显。综上所述,BP 译码算法的译码性能较 ML 算法相比存在差距,且该差距将随着 LDPC 码码长的降低而增大。

因此,为了降低 BP 算法所带来的负面作用,一方面可以借助于图型构造算法来减少短环出现的数量;另一方面则可以借助于加权 BP 算法来抑制错误信息的叠加。

**3.1.1 基于环形结构的加权 BP 算法** 文献[17]首先就置信信息累加现象进行了研究,并提出了一种树型加权 BP(Tree ReWeighted BP, TRW-BP)算法,来加强 BP 译码算法的纠错能力。此算法的核心思想是通过计算 Tanner 图上成对节点间的边在扩展树上出现的概率(Edge Appearance Probabilities, EAPs),并将运算结果作为加权值作用于 LLR 值的更新操作中。

但 EAPs 的计算实质上是一个多维优化问题,本身具有相当高的计算复杂度。因此为避免 EAPs 的计算,归一化加权 BP(Uniformly ReWeighted BP, URW-BP)算法被学者们所提出<sup>[18]</sup>。该算法用一个预先确定的值  $\rho$ , 来代替 EAPs 作为加权值参与变量点 LLR 计算,即如式(6),式(7)所示。

$$L_v(j, i) = \sum_{i' \in \mathcal{N}(v_j)} \rho L_c(i', j) - L_c(i, j) + L_{ch}(j) \quad (6)$$

$$L_v(j) = \sum_{i \in \mathcal{N}(v_j)} \rho L_c(i, j) + L_{ch}(j) \quad (7)$$

需要注意的是,  $\rho$  的取值直接影响着 URW-BP 算法的译码性能。通过仿真发现,在加性高斯白噪声(Additive White Gaussian Noise, AWGN)信道上采用 URW-BP 算法对码率为 1/2 码长为 504 bit 的二元(3,6)规则 LDPC 码进行译码时,不同的  $\rho$  值对于算法译码效果具有影响。正如图 2 可见,存在一个最优  $\rho$  值使得 URW-BP 算法具有最小的误比特率(Bit Error Rate, BER)。因此在使用 URW-BP 算法之前,需要首先确定最优的  $\rho$  值。

考虑到 LDPC 码中不同节点的连接关系存在一定的差异性,即有的节点连接了更多的短环。而由于短环对 BP 算法的阻碍作用会更加明显,因此通过对具有不同连接关系的节点赋不同的  $\rho$  值,则可进一步改善 URW-BP 算法的性能。根据此思路,  $\rho$  值可变的加权 BP(Variable FAP-BP, VFAP-BP)算

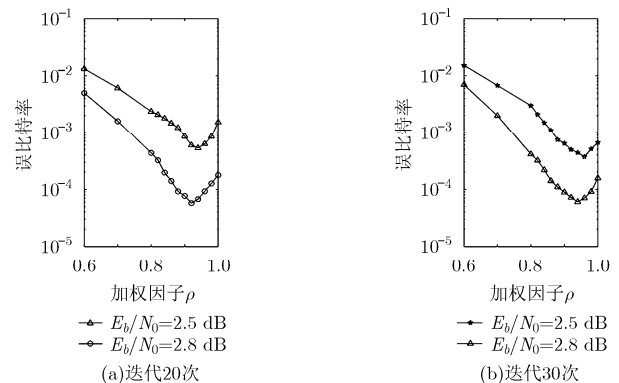


图2 不同的 FAPs 值对于 URW-BP 算法的影响<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>本文中除了图 9 曲线引用自文献[52],其余的性能曲线皆是笔者实际仿真得到

法被提出来<sup>[19,20]</sup>。该算法根据 LDPC 码校验点的度分布以及校验点的连接关系动态地分配加权值。

图 3 是对数域 BP(Log-BP)算法, URW-BP 算法与 VFAP-BP 算法对规则以及非规则 LDPC 码在 AWGN 信道上进行译码时的 BER 曲线图。这里规则 LDPC 码依旧采用码率为 1/2, 码长为 504 bit 的(3,6)LDPC 码为代表。而具有相同码率与码长的不规则 LDPC 码则选用原模图 AR4JA 码<sup>[21]</sup>作为基础矩阵, 通过 PEG 算法<sup>[22]</sup>得到对应的校验矩阵。所有译码算法的最大迭代次数是 30 次。由图 3 可见, VFAP-BP 算法对 LDPC 码进行译码时具有更好的 BER 表现。这是因为 VFAP-BP 算法较 URW-BP 算法更多地注意到了校验点之间的差异性。但是由于 VFAP-BP 算法在译码操作前需要对 LDPC 码进行环长的计算, 所以算法的复杂度略有上升。

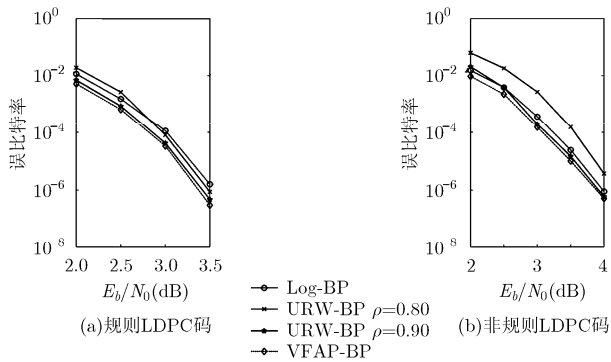


图 3 多种译码算法对规则和非规则 LDPC 码进行译码的 BER 曲线

**3.1.2 基于陷阱集的 Beyond-BP 算法** 考虑到深空通信系统、数据存储系统以及光纤通信系统等要求数据在传输过程中具有极低误比特率 (BER < 10<sup>-10</sup>)。但是由于 LDPC 码中一种特殊的环形结构——陷阱集的存在, 将导致译码算法错误地板的出现<sup>[23-26]</sup>。

为了便于理解, 首先给出陷阱集的定义:

**定义 1** 陷阱集假定  $H$  是一个  $M \times N$  的 LDPC 码的校验矩阵, 其对应的 Tanner 图为  $\mathcal{G} = (\mathcal{V} \cup \mathcal{C}, \mathcal{E})$ 。假定有  $1 \leq a \leq N$  个变量点以及  $1 \leq b \leq M$  个度为奇数的校验点以及任意数量的度为偶数的校验点组成一个  $\mathcal{G}$  的子图  $T(a, b)$ , 则该子图被称为陷阱集。陷阱集之所以对 BP 算法起着阻碍作用, 从变量点的角度理解, 是因为那些属于陷阱集的变量点所接收到的信道信息是错误; 同时, 那些变量点通过校验点相互连接形成环形结构。这样在译码过程中, 这些变量点不停地向邻居节点发送错误信息, 并经由环形结构进一步加剧错误的积累与传递, 从而阻碍译码算法的收敛, 导致错误地板现

象的出现。

迄今为止, 已有一些文献讨论了基于陷阱集的译码算法。文献[25]中提出了 3 种基于陷阱集的译码算法。它们通过对 BP 译码后得到的结果再额外地进行迭代操作, 以此改善译码性能。该算法随后被推广到了磁记录信道中<sup>[26]</sup>。而文献[27]和文献[28]也分别提出了两种基于译码-后处理的多阶段迭代译码算法。这些算法都能够有效地减少陷阱集的存在对 BP 算法的阻碍作用, 但是都需要额外的操作, 提高了算法的计算复杂性。

由于陷阱集的存在将导致错误信息的积累与传递, 因此通过在译码过程中区分可靠信息与不可靠信息, 并借助动态加权操作来抑制不可靠信息的积累与传递, 无疑可以提高算法的纠错性能。以可靠度为导向的 BP(Reliability Oriented BP, RO-BP)算法<sup>[29]</sup>正是出于此种思路的一个算法。

令变量点与校验点发出的 LLR 值的可靠度可分别由  $S_v$  和  $S_c$  表示, 它们通过取值 1, 2, 3 来反映可靠度的从低到高。在每次迭代过程中  $S_v$  和  $S_c$  分别遵循表 1 和表 2 中所列的法则进行更新并与发送的 LLR 值合并组成新的外信息。

在变量点进行更新过程中, 根据已经计算好的  $S_c$  的值, 动态地进行加权操作, 以此抑制不可靠信息的累加与传递。即

$$\rho(i, j) = 1.0 + (S_c(i, j) - 3) \cdot \alpha \quad (8)$$

式中,  $\alpha$  为步进因子。

$$L_v(j, i) = \sum_{i' \in \mathcal{N}(v_j) \setminus i} \rho(i', j) L_c(i', j) + L_{ch}(j) \quad (9)$$

而变量点后验 LLR 值更新算法如式(10):

表 1  $S_v(j, i)$  更新法则

法则 1	$S_v(j, i)$ 更新法则
(1)	For $\forall c_r \in \mathcal{N}(v_j) \setminus i$ do
(2)	$S_v(j, i) = \min_r(S_c(i', j))$
(3)	If $\text{sign}(L_c(i', j)) < \text{sign}(L_{ch}(j))$ then
(4)	$S_v(j, i) = S_v(j, i) - 1$ until 1;
(5)	Else
(6)	$S_v(j, i) = S_v(j, i) + 1$ until 3;
(7)	End for

表 2  $S_c(i, j)$  更新法则

法则 2	$S_c(i, j)$ 更新法则
(1)	For $\forall v_r \in \mathcal{N}(c_i) \setminus j$ do
(2)	$S_c(i, j) = \min_r(S_v(j', i))$
(3)	End for

$$L_v(j) = \sum_{i \in \mathcal{N}(v_j)} \rho(i, j) L_c(i, j) + L_{ch}(j) \quad (10)$$

对于任意变量点, 假设其参与的校验方程中不成立的方程的个数为  $\varphi$ 。对于第  $j$  个变量点, 它的度为  $d(j)$ , 关于该节点的可靠度指数为  $\phi(j)$ 。

$$\phi(j) = \sum_{c_i \in \mathcal{N}(v_j)} S_v(j, i) / d(j) \quad (11)$$

在每次迭代后不可靠变量点可如下确定: (1) 将所有  $N$  个变量点中可靠度指数  $\phi < 2.0$  的节点组成集合  $\mathbf{A}$ ; (2) 将集合  $\mathbf{A}$  中节点按照各自  $\varphi$  的大小进行降序排列并将前  $Q = \lfloor N/50 \rfloor$  个变量点抽出来形成集合  $\mathbf{A}_1$ , 如果集合  $\mathbf{A}$  中变量点的个数小于  $Q$  则将  $\mathbf{A}$  中全部节点抽出来形成集合  $\mathbf{A}_1$ , 于是得到一组不可靠变量点。对于这些不可靠变量点, 将额外进行一次信息更新操作以进一步纠正它们的错误。RO-BP 算法的伪代码参见表 3。

表 3 RO-BP 算法伪代码

算法 1 RO-BP 算法	
(1)	初始化对于任意 $i$ 和 $j$ 有 $S_v(j, i) = S_c(i, j) = 1$
(2)	初始化对于任意 $i$ 和 $j$ 有 $L_v(j, i) = L_{ch}(j)$ 和 $L_c(i, j) = 0$
(3)	对于任意校验点, 按照式(2)计算 $L_c(i, j)$ 并根据校验点可靠度指数更新法则计算可靠度指数 $S_c(i, j)$ , 其中 $v_j \in \mathcal{N}(c_i)$
(4)	对于任意变量点, 按照式(9)计算 $L_v(j, i)$ 并根据变量点可靠度指数更新法则计算可靠度指数 $S_v(j, i)$ , 其中 $c_i \in \mathcal{N}(v_j)$
(5)	按照式(10)计算所有变量点的后验 LLR 值并通过硬判决得到码字 $\hat{\mathbf{v}}$
(6)	如果迭代停止条件满足则停止迭代, 否则确定不可靠变量点
(7)	对于任意不可靠变量点 $v_s \in \mathbf{A}_1$ 以及校验点 $c_a \in \mathcal{N}(v_s)$ , 计算 $L_c(a, s), S_c(a, s), L_v(s, a)$ 以及 $S_v(s, a)$
(8)	返回步骤 3

图 4 的曲线展示了不同参数设定对于 RO-BP 算法的影响。其中图 4(a)展示了步进因子对 RO-BP 算法的影响。系统采用 BPSK 调制方式, 最大迭代次数是 20 次。这里分别选用  $N = 1000$  的 1/2-AR4JA 码以及  $N = 1050$  的 2/3-AR4JA 码。与 URW-BP 算法类似, 对于 RO-BP 算法, 依旧存在一个最优步进因子使得该算法具有最好的译码性能。图 4(b)展示 RO-BP 算法与其他算法在 AWGN 信道上的收敛速度。这里选用  $N = 1000$  的 1/2-AR4JA 码。结果显示 RO-BP 算法较其他算法在迭代收敛速度上有着更加明显的优势。

图 5 展示了不同译码算法在 AWGN 信道上的 BER 曲线图。通过对比发现, RO-BP 算法在高

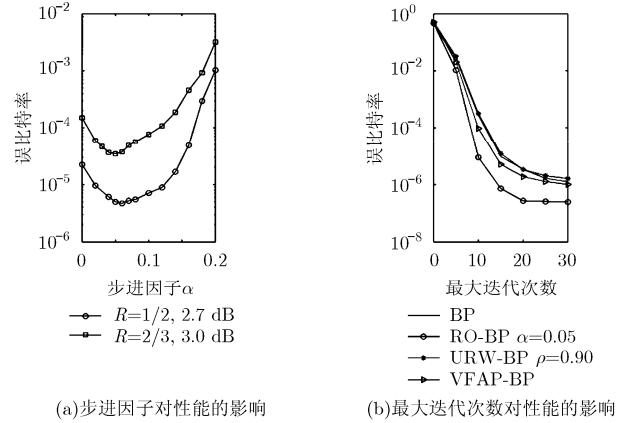


图 4 不同译码参数对 RO-BP 算法性能的影响

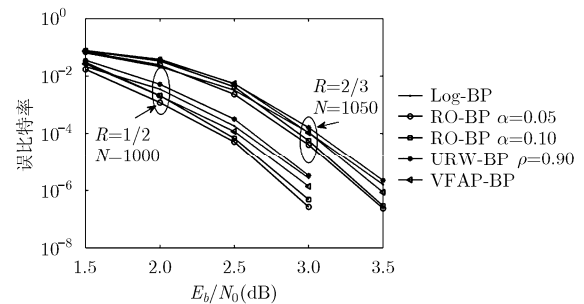


图 5 不同译码算法在 AWGN 信道上的 BER 曲线

$E_b / N_0$  区域的纠错性能优于 BP 算法, URW-BP 算法以及 VFAP-BP 算法。但需要注意的是在低  $E_b / N_0$  区域由于节点与外信息不可靠度误判的出现, 会导致该算法性能的损失。

### 3.2 具有快收敛特性的 Beyond-BP 算法

传统的 LDPC 码 BP 译码算法是分为两步进行: 首先进行全部变量点外信息的更新, 然后再进行全部校验点外信息的更新。而这种两步译码更新方法也被称为扩散更新策略。研究表明, 迭代过程中节点的更新策略的改变将能有效地提高译码算法的收敛特性<sup>[30]</sup>。比如文献[31]中提出的便于硬件实现的分层 BP(Layer BP, LBP)译码算法。实验结果表明, LBP 算法收敛速度是传统 BP 算法的两倍。与 BP 算法一样, LBP 算法中节点的更新顺序是固定的, 但研究进一步指出, 如果动态安排节点的更新顺序, 更能够进一步地提高译码算法的收敛速度。文献[32]中提出的基于残余量的 BP(Residual BP, RBP)算法正是此类算法的代表。

RBP 算法中用校验点发出的 LLR 的残余量作为参考来动态地安排每次迭代中优先更新的校验点。用  $r_c(i, j)$  表示与  $L_c(i, j)$  相对应的 LLR 残余量, 则

$$r_c(i, j) = |L_c^{\text{pre}}(i, j) - L_c(i, j)| \quad (12)$$

其中， $L_c^{pre}(i, j)$  表示上次已进行传递的校验点外信息。

RBP 算法中认为具有最大残余量的外信息是不可靠的。此时，便需要记录下该信息以及与它相对应的变量点以及校验点。然后通过对该外信息进行单独的迭代而加以纠正。正因 RBP 算法对不可靠外信息给予了更多的迭代资源，其能较传统的 BP 译码算法有着两倍以上收敛速度。

RBP 算法具有更快的收敛特性，但是也存在着较高译码错误地板的情况。为了能够进一步改进 RBP 算法的纠错能力，学者们提出了以节点为导向的 RBP(Node-Wise RBP, NW-RBP)算法<sup>[33]</sup>。该算法首先像 RBP 算法一样确定最不可靠的校验点以及变量点。然后对最不可靠校验点所产生的所有 LLR 值进行更新而非单独对最不可靠外信息进行计算。相较 RBP 算法而言，NW-RBP 算法在一次信息更新过程中需要对更多的外信息进行更新操作，因此进一步加快了收敛速度。

由于陷阱集的存在，导致 RBP 算法会将大量的迭代运算资源集中于少数几个校验点上，即贪婪环路现象的存在。针对此现象，LEE 等人<sup>[34]</sup>提出了定额 RBP(Quota-RBP, Q-RBP)算法。通过对每个校验点的最大更新次数进行限定，使得算法能够跳出贪婪环路。而该团队又进一步对 RBP 以及 NW-RBP 算法迭代过程中变量点的更新情况进行了分析，并发现在迭代过程中一些变量点并未进行外信息更新，因此将这些变量点称为静默变量点。而通过消除这些静默变量点，迭代过程中将会有更多节点进行 LLR 值的更新从而促进对不可靠信息的纠正，也可以进一步改进 RBP 算法的纠错性能。该团队据此提出了静默变量点消除 RBP 算法(Silent Variable Node Free RBP, SVNF-RBP)<sup>[34]</sup>。

所有 RBP 算法的核心内容在于不可靠节点的确立。显而易见，当能从更多方面来对节点的可靠度进行判定而非单纯的凭借 LLR 残存量时，不可靠节点的判定会变得更加准确从而进一步提升算法的收敛性能。比如文献<sup>[35,36]</sup>中提出的基于震荡变量点的 RBP(Oscillating Variable nodes based RBP, OV-RBP)译码算法。该算法从(1)变量点是否发生震荡(即变量点后验 LLR 值在迭代前后发送反转)；(2)变量点参与的校验方程中不成立的数目；以及(3)变量点的后验残余量这 3 个方面出发来确定最不可靠变量点。而随后将得到的最不可靠变量点为起始节点进行 LLR 更新操作。

图 6 显示了 IEEE 802.16e 标准<sup>[37]</sup>中给出的  $R=1/2$  的 QC-LDPC 码基础矩阵。其中 -1 表示零矩阵，

0 表示单位阵，剩下的整数表示单位阵右移的位数。在下面的测试中笔者选取码长为 576 bit 的 QC-LDPC 码。

Rate 1/2:

-1	94	73	-1	-1	-1	-1	55	83	-1	-1	7	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	27	-1	-1	22	79	9	-1	-1	12	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	24	22	81	-1	33	-1	-1	0	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
61	-1	47	-1	-1	-1	-1	65	25	-1	-1	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	39	-1	-1	84	-1	41	72	-1	-1	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	46	40	-1	82	-1	-1	79	0	-1	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	95	53	-1	-1	-1	-1	14	18	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
-1	11	73	-1	-1	2	-1	47	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
12	-1	-1	83	24	-1	43	-1	-1	51	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	94	-1	59	-1	-1	70	72	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0
-1	-1	7	65	-1	-1	-1	39	49	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0
43	-1	-1	-1	66	-1	41	-1	-1	26	7	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0

图 6  $R = 1/2$  QC-LDPC 码基础矩阵

图 7 是不同译码算法在 AWGN 信道上的 BER 的对比图。其中选用的译码算法有：(1)标准 BP 算法；(2)纠错性能与 RBP 算法相近的变量点到校验点残余 BP(Variable-to-Check RBP, VC-RBP)算法<sup>[38]</sup>；(3)NW-RBP 算法；(4)OV-RBP 算法；(5)SVNF-RBP 算法。所有算法的最大迭代次数为 5 次，采用 BPSK 调制。通过仿真对比发现，在 AWGN 信道上所有的 RBP 算法都较传统 BP 算法有着更好的译码性能。其中尤以 OV-RBP 算法性能最佳，与之相近的是 SVNF-RBP 算法。

图 8 展示了不同译码算法的收敛速度。采用码型不变与信道类型不变， $E_b/N_0 = 2.5$  dB。由图 8 可以看出所有的 RBP 算法都较 BP 算法有更快的收敛速度。其中尤其以 OV-RBP 算法以及 SVNF-RBP 算法更为明显。而当迭代的次数相对增加之后，OV-RBP 算法，SVNF-RBP 算法以及 NW-RBP 算法的译码性能将会逐渐达到相同。

表 4 是上述几个 RBP 算法的计算复杂度统计。同样假定每个变量点的平均度为  $d_v$ ，校验点的度为  $d_c$ ，码长为  $N$ ，一共有  $M$  个校验点。同样有  $E = Nd_v = Md_c$  条边。RBP 算法较 BP 算法有更快的收敛速度，以及更强的纠错性能，但作为代价是这些 RBP 算法有着更高的计算复杂度。

通过将标准 BP 译码算法中对所有节点平等对待的操作改变为对具有不同可靠度的节点进行差异性处理，得到的译码算法能够在纠错性能与收敛速度上超越原始 BP 算法。需要注意的是，这些改进算法中节点可靠度的判定对算法是至关重要的。

### 4 面向硬件实现的 Beyond-BP 译码算法

#### 4.1 低计算复杂度的译码算法

对于硬件实现而言，BP 译码算法校验点 LLR 值更新过程中  $\tanh(x)$  函数的运算可以采用查表法

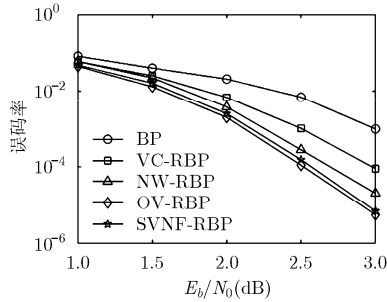


图 7 不同译码算法在 AWGN 信道上的译码性能

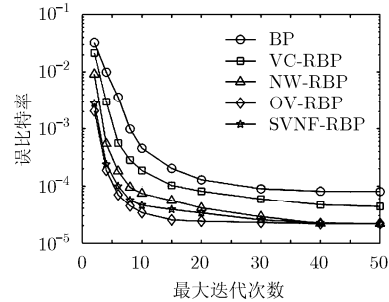


图 8 BER 与不同译码算法最大迭代次数的关系

表 4 几个 RBP 译码算法的计算复杂度统计

译码算法	变量点计算	校验点计算	残存量计算
BP	$E$	$E$	0
VC-RBP	$[E/(d_c - 1)](d_v - 1)(d_c - 1)$	$E$	0
NW-RBP	$(d_v - 1)E$	$E$	$(d_v - 1)(d_c - 1)E$
OV-RBP	$E$	$E$	$(d_c - 1)E$
SVNFB-RBP	$(d_v - 1)E$	$E$	$(d_v - 1)(d_c - 1)E$

(Look Up Table, LUT)的方式加以实现。但是 LUT 的规模对于译码器硬件资源的消耗及性能有直接影响: 当 LUT 规模较小时硬件资源消耗会相应降低, 但译码器纠错性能会受到损失; 而扩大 LUT 的规模, 又会占用硬件大量的存储空间。因此基于硬件实现的低复杂度译码算法是当前迫切需求。

因此, 为了降低  $\tanh(x)$  函数实现的复杂度, 可以采用两种方式: (1)通过拟合方式, 即用加减和移位操作来完成  $\tanh(x)$  函数的近似计算; (2)采用 Min-Sum 算法, 即用比较操作来代替  $\tanh(x)$  函数的计算。

对于第(1)种方式, 文献[39]提出了用 2 维折线法逼近  $\tanh(x)$  函数, 通过应用加法和移位操作实现了校验点 LLR 值的计算从而节省了大量的硬件资源。

为了进一步提高 Min-Sum 算法的性能, 学者们也就 Min-Sum 算法的改进进行了大量的研究。文献[40]提出了基于动态树型规划的加权 Min-Sum 算法, 并研究了其收敛特性。东南大学姜明等人[41]则根据校验点的度分布情况和变量点振荡状态提出了振荡抑制归一化 Min-Sum 算法。而在 2 维磁记录信道上, 利用密度进化技术对偏置 Min-Sum 与归一化 Min-Sum 算法进行优化, 可使这两个算法具有等同于 BP 算法的纠错性能[42]。

比特翻转(Bit Flipping, BF)算法是一种基于硬判决码字的译码算法, 在迭代过程中通过对反转函数进行计算, 并从中寻找到具有最大值的反转函数

以及与之相对应的变量点进行比特翻转。由于 BF 算法中不涉及置信传递操作, 故较 Min-Sum 算法具有更低的运算复杂度, 但性能有所损失。为了改善 BF 算法性能, 学者们提出了加权 BF(Weighted BF, WBF)算法和改进修正加权 BF(Improved Modified Weighted BF, IMWBF), 即将变量点所接收到的所有信息作为权重系数参与反转函数的运算[43]。而文献[44]更是理论证明了 WBF 算法中权重系数的计算实质是 BP 算法中校验点更新操作的低复杂度映射。

近几年, 关于 WBF 算法的研究已有大量的成果涌现。在国际方面, 文献[45]首先提出了基于可靠度比率的译码算法(Reliability Ratio based WBF, RRWBF), 在对变量点度比较低的 LDPC 码进行译码时, 性能较 IMWBF 优秀; 而最近文献[46]则提出了一种动态加权 BF(Dynamic WBF, DWBF)算法, 该算法具有靠近归一化 Min-Sum 算法的性能。国内方面, 电子科技大学周亮教授团队在文献[47]中提出基于平均幅度的 WBF(Average Magnitude based WBF, AMWBF)算法和文献[48]中提出了基于幅度和的 WBF(Sum of the Magnitude based WBF, SMWBF)算法; 而华中科技大学陶雄飞等人则于文献[49]中提出了基于变量点的 SMWBF(Variable Node based SMWBF, VN-SMWBF)算法, 通过对已反转变量点的幅值进行调整来抑制该节点震荡现象的出现。

#### 4.2 有限精度译码算法

将基于浮点运算的 BP(Min-Sum)算法进行硬

件的实现, 首先需要进行量化操作。此时的译码算法便可被称为基于量化的 BP(Min-Sum)算法或有限精度译码算法。显而易见, 受到量化误差的影响, 有限精度译码算法的译码性能必然变差, 尤其是错误地板现象将变得更为明显。

因此文献[50]中提出了用于偏置 Min-Sum (Offset Min-Sum)算法的 6 bit 量化方案, 该方案使得偏置 Min-Sum 算法具有近似浮点计算的 BP 算法的性能。文献[51]中提出了用于 BP 算法的 6 bit 量化方案, 该方案明显地降低了有限精度译码的错误地板。

自 2011 年起, 亚利桑那大学的 Vasic 教授团队提出并发展了有限字典迭代译码算法 (Finite Alphabet Iterative Decoder, FAID)<sup>[52,53]</sup>。虽然 FAID 算法仅限于在 BSC 信道上对变量点度为 3 的规则 LDPC 码进行译码, 但是该算法以及其性能的分析工作, 能够为面向其他应用场景或者码型而进行的专一译码算法优化工作提供思路。

与其他有限精度译码算法类似, FAID 算法中节点间交互的外信息取值也是离散的。但是在 FAID 算法中, 所有的外信息都是在一个有限字典  $M$  中取值。即  $M = \{-L_s, \dots, -L_2, -L_1, 0, L_1, L_2, \dots, L_s\}$ , 其中  $L_i$  是正实数且当  $i < j$  时有  $L_i < L_j$ , 而字典中元素的个数称为阶数。

考虑到 FAID 算法仅仅是针对变量点度为 3 的规则 LDPC 码而设计的, 那么变量点的更新操作其本质上是一个三元函数的求解过程, 即

$$L_v(j, i) = \Phi_v [L_{ch}(j), L_c(s, j), L_c(t, j)] \quad (13)$$

其中,  $s \in \mathcal{N}(v_j) \setminus i$  以及  $t \in \mathcal{N}(v_j) \setminus i$ 。

对于 BP 算法, 式(13)表示的函数是一个累加过程。但是对于 FAID 算法, 其通过一个精心设计的 LUT 来实现 LLR 更新计算操作<sup>[52]</sup>。

FAID 算法的核心思想便在于根据一些可能出现的陷阱集来进行 LUT 的设计。这样该算法能够实现对这些陷阱集的纠正功能。故该算法会较标准 BP 算法具有更强的陷阱集纠正能力, 因此实现了在高信噪比区域性能的改善。同时 FAID 算法校验点更新规则与 Min-Sum 算法相同, 这样就消除了复杂函数的运算, 利于硬件实现<sup>[54]</sup>。

图 9 是关于 BP 算法、Min-Sum 算法和 FAID 算法对(155,64)Tanner 码在 BSC 信道上进行译码时的误帧率(Frame Error Rate, FER)对比图<sup>[52]</sup>。通过对比发现, 7 阶 FAID 算法译码效果优于采用浮点计算的标准 BP 算法, 尤其是在反转概率较低的时候更加明显。同时, 该结果也表示不同设计的 LUT 对于 FAID 算法的性能有着直接的影响。

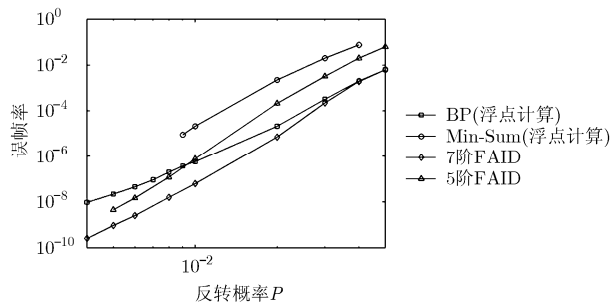


图 9 BSC 信道上多种算法的性能比较

通过重新设计译码过程中节点的更新规则, 可实现译码算法在计算复杂度与纠错性能之间的折中, 而在某些特定的情况下, 良好设计的更新规则甚至能够使得面向硬件实现的低复杂度或量化译码算法具有靠近甚至超越采用浮点计算的标准 BP 算法的纠错性能。

## 5 Beyond-BP 算法在多层迭代系统中的应用

因 IR 设计具有有效对抗信道衰落, 易于实现以及鲁棒性强等优点, 故其可在多种系统中得到应用<sup>[55-60]</sup>。而将 Beyond-BP 算法用于 IR 设计并进行相应的改进, 则该 IR 系统的性能能够得到明显的提升。比如文献[58]中提出的针对块衰落信道的用于 MIMO 系统的 IR 优化设计。首先在接收端, 该系统利用针对块衰落信道的变量节点的 LLR 处理策略 (LLR Processing Strategy over Block Fading channel, LLR-PS-BF) 来进行来源于信道的译码初始信息计算。考虑到在块衰落信道中, 并非所有的变量点在译码过程中能够接收到完全的信道信息, 因此 LDPC 码译码器采用基于残存量排序的分层 BP (Residual Ordered LBP, ROLBP) 译码算法。实验结果证实, 采用 ROLBP 算法的 IR 设计具有更好的译码效果。

同样在多径衰落信道上, 对基于多元差分混沌移位键控 (M-ary Differential Chaotic Shift Keying, M-ary DCSK) 调制的 IR 系统<sup>[59,60]</sup>进行译码算法优化也能够得到类似的结论。

混沌调制是一种利用混沌信号作为载波的调制方式, 因混沌信号自身具有扩频特性, 故其在对抗多径干扰、安全通信以及与现存窄带通信系统共存性方面具有优异的表现。作为超宽带 (Ultra-WideBand, UWB) 技术的一种参选调制方案, 混沌调制方式能够与 UWB 技术一起在以无线传感网为代表的众多功率受限系统中得到应用。

图 10 是多元 DCSK-IR 系统的模型示意图。为了避免复杂的载波恢复操作, M-ary DCSK 通信系



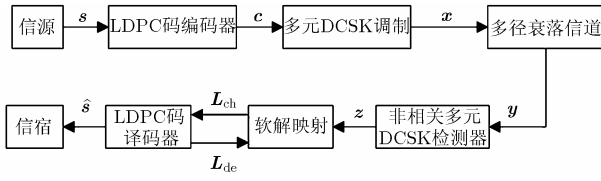


图 10 多元 DCSK-IR 系统模型示意图

统可采用非相干解调方式进行解调，即从接收符号中分离出参考信号与传输信号，并使两者相乘来得到检测器输出变量向量  $z$ 。

在软解调方面，可采用高斯近似 (Gaussian Approximation, GA) 方法<sup>[59]</sup>，在不需要知道具体的信道衰落状态信息的情况下，利用  $z$  和译码器反馈 LLR 向量  $L_{de}$  计算得到信道 LLR 向量  $L_{ch}$ 。

当对 LDPC 码进行译码之后，可以得到一个变量点后验 LLR 向量  $L_v$  并经过计算得到  $L_{de}$ 。采用 RO-BP 算法时，我们可以确定一些不可靠变量点。用  $L_v(j)$  表示第  $j$  个变量点经过译码迭代操作后得到后验 LLR 值，而用  $L_{de}(j)$  表示与之对应的译码器反馈 LLR。如果变量点  $v_j$  是可靠的，则有

$$L_{de}(j) = L_v(j) - L_{ch}(j) \quad (14)$$

否则需要对  $L_v(j)$  进行进一步修正以缓解其所引发的错误传递情况，即

$$L_{de}(j) = L_v(j) - L_{ch}(j) - \text{sign}(L_v(j)) \cdot \gamma \quad (15)$$

这里， $\gamma$  表示修正因子。

基于 RO-BP 算法的多元 DCSK-IR 系统伪代码可参见表 5。

表 5 RO-IR 迭代算法伪代码

算法 2 RO-IR 迭代算法	
(1)	初始化接收到非相干检测器输出向量 $z=[z_1, \dots, z_m, \dots, z_M]$ ;
(2)	采用 GA 方法计算 $L_{ch}$ ;
(3)	采用 RO-BP 算法进行译码并得到 $L_v$ ;
(4)	如果译码成功或达到最大 IR 迭代次数则结束迭代，反馈所译码字 $\hat{s}$ ;
(5)	否则根据变量点可靠度的判定利用式(14)和式(15)得到译码反馈 LLR 向量 $L_{de}$ ;
(6)	返回步骤 2，完成一次 IR 迭代。

图 11 是笔者在多径瑞利衰落信道上采用 16-ary DCSK 调制时测试得到的系统的 BER 曲线图。采用 3 径瑞利衰落信道，每条径的时延分别是 0, 3, 5，与之对应的平均信道增益是 4/7, 2/7, 1/7。16-ary DCSK 调制的扩频因子数是 40。采用 1/2 码率的码长为 500 的 AR4JA 码对传输数据进行保护。设定最大 IR 迭代次数为 5 次，LDPC 码本地译码迭代次数是 20 次，定义步进因子与修正因子都是  $\alpha =$

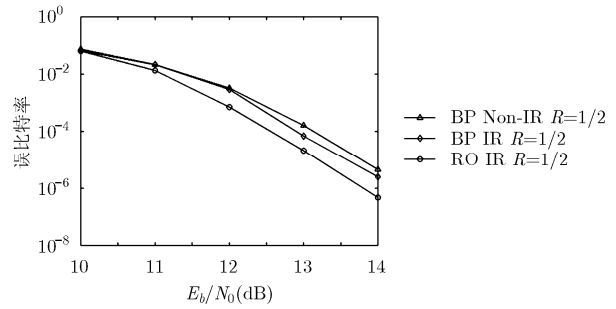


图 11 多径瑞利衰落信道上采用 16-ary DCSK 调制时 BER 曲线

$\gamma = 0.10$ 。由图 11 可见，采用 IR 结构能够保证 M-ary DCSK 系统具有更强的纠错性能，而将 RO-BP 算法引入 IR 设计则能够进一步提高该系统的迭代增益。

随着通信系统对于吞吐量以及频带利用率要求的提高，多元调制方式在通信系统中的应用将变得更加普遍。因此，针对多元调制系统进行的迭代接收机设计以及进一步针对 IR 设计进行编译码算法的研究是有着重要意义的工作。

上述例子表明，针对 IR 系统进行译码算法的改进，能够给系统带来性能上的明显提升。而对基于 LDPC 码的联合信源信道译码系统的算法优化，也能够明显提升系统的纠错性能和收敛速度。因此针对多层迭代系统译码算法的改进工作也可以是未来工作的主要方向之一。

## 6 结论

5 G 确定采用 LDPC 码对 eMBB 业务中数据进行编码保护，这将有力地推动 LDPC 码的发展与应用。可以预期，LDPC 码未来将会在更多系统中得到应用。因此根据不同系统对于 LDPC 码的纠错性能、复杂度、时延和功耗等方面的要求，必然需要对译码算法进行改进。鉴于此种情况，本文主要对一些面向二元 LDPC 码的改进 BP 算法从改进思路、译码效果、计算复杂度等方面入手进行了综述。从整体来看，通过译码过程中对具有不同可靠度的节点进行区别对待，能够有效地提高算法的纠错能力或加快译码收敛速度。而通过对迭代译码过程中外信息的更新规则进行优化设计，则能实现译码性能与算法复杂性的折中，进而推动面向硬件实现的 LDPC 码译码算法的发展。最后通过一个例子证明，将优化算法引入多层迭代系统中能够给系统带来显著的性能改善。因此，针对多层迭代系统的算法的优化工作也可以成为未来算法研究的一个方向。

## 参考文献

- [1] GALLAGER R G. Low density parity check codes[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1962, 8(1): 21–28. doi: 10.1109/TIT.1962.1057683.
- [2] MACKAY D J C and NEAL R M. Near Shannon limit performance of low density parity check codes[J]. *Electronics Letters*, 1996, 32(18): 1645–1646. doi: 10.1049/el:19961141.
- [3] DVB Organization. ETSI EN 302 307 V1. 2. 1. Digital Video Broadcasting (DVB); second generation framing structure, channel coding and modulation systems for broadcasting, interactive services, news gathering and other broadband satellite applications (DVB-S2)[S]. 2009.
- [4] IEEE P802.11 Task Group ad. Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) specifications[S]. 2010.
- [5] CCSDS. CCSDS 230.2-G-1-next generation uplink[R]. Washington, DC, USA, 2014.
- [6] FOSSORIER M, MIHALJEVIC M, and IMAI H. Reduced complexity iterative decoding of low density parity check codes based on belief propagation[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 1999, 47(5): 673–680. doi: 10.1109/26.768759.
- [7] TANNER R M. A recursive approach to low complexity codes[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1981, 27(5): 533–547. doi: 10.1109/TIT.1981.1056404.
- [8] DAVEY M and MACKAY D. Low density parity check codes over  $GF(q)$ [J]. *IEEE Communications Letters*, 1998, 2(6): 165–167. doi: 10.1109/4234.681360.
- [9] WYMEERSCH H, STEENDAM H, and MOENECLAHEY M. Log-domain decoding of LDPC codes over  $GF(q)$ [C]. IEEE International Conference on Communications, Paris, France, 2004: 772–776.
- [10] WANG C, CHEN X, LI Z, *et al.* A simplified min-sum decoding algorithm for non-binary LDPC codes[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2013, 61(1): 24–32. doi: 10.1109/TCOMM.2012.101712.110709.
- [11] 杨威, 张为. 一种基于分层译码和Min-max的多进制LDPC码译码算法[J]. *电子与信息学报*, 2013, 35(7): 1677–1681. doi: 10.3724/SP.J.1146.2012.01634.
- YANG W and ZHANG W. A decoding algorithm based on layered decoding and min-max for non binary LDPC codes[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2013, 35(7), 1677–1681. doi: 10.3724/SP.J.1146.2012.01634.
- [12] LI E, DECLERCQ D, and GUNNAM K. Trellis-based extended min-sum algorithm for non-binary LDPC codes and its hardware structure[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2013, 61(7): 2600–2611. doi: 10.1109/TCOMM.2013.050813.120489.
- [13] ZHAO D, MA X, CHEN C, *et al.* A low complexity decoding algorithm for majority-logic decodable nonbinary LDPC codes[J]. *IEEE Communications Letters*, 2010, 14(11): 1062–1064. doi: 10.1109/LCOMM.2010.100810.101403.
- [14] CHEN C, HUANG Q, and CHAO C. Two low-complexity reliability based message-passing algorithms for decoding non-binary LDPC codes[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2010, 58(11): 3140–3147. doi: 10.1109/TCOMM.2010.091310.090327.
- [15] HUANG Q, ZHANG M, WANG Z, *et al.* Bit-reliability based low-complexity decoding algorithms for non-binary LDPC codes[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2014, 62(12): 4230–4240. doi: 10.1109/TCOMM.2014.2370032.
- [16] LIU X, LIANG C, ZHANG Y, *et al.* Decoding of non-binary low-density parity-check codes based on the genetic algorithm and applications over mobile fading channels [J]. *IET Communications*, 2015, 9(16): 1941–1948. doi: 10.1049/iet-com.2015.0085.
- [17] WAINWRIGHT M, JAAKKOLA T, and WILLSKY A. A new class of upper bounds on the log partition function [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, 51(7) : 2313–2335. doi: 10.1109/TIT.2005.850091.
- [18] WYMEERSCH H, PENNA F, and SAVIC V. Uniformly reweighted belief propagation for estimation and detection in wireless networks[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2012, 11(4): 1587–1595. doi: 10.1109/TWC.2012.021412.111509.
- [19] LIU J and DE LAMARER C. Low-latency reweighted belief propagation decoding for LDPC codes[J]. *IEEE Communications Letters*, 2012, 16(10): 1660–1663. doi: 10.1109/LCOMM.2012.080312.121307.
- [20] WYMEERSCH H, PENNA F, SAVIC V, *et al.* Comparison of reweighted message passing algorithms for LDPC decoding [C]. IEEE International Conference on Communications, Budapest, Hungary, 2013: 3264–3269.
- [21] DIVSALAR D, DOLINAR S, JONES C R, *et al.* Capacity approaching protograph codes[J]. *IEEE Journal on Select Areas in Communications*, 2009, 27(6): 876–888. doi: 10.1109/JSAC.2009.090806.
- [22] HU X Y, ELEFTHERIOU E, and ARNOLD D M. Regular and irregular progressive edge-growth tanner graphs [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, 51(1): 386–398. doi: 10.1109/TIT.2004.839541.
- [23] RYAN W E and LIN S. Channel Codes: Classical and Modern[M]. Cambridge University Press, 2009.
- [24] VASIC B, CHILAPPAGARI S K, NGUYEN D V, *et al.* Trapping set ontology[C]. 47th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing, Monticello, USA, 2009: 1–7.
- [25] HAN Y and RYAN W E. Low-floor decoders for LDPC

- codes[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2009, 57(6): 1663–1673. doi: 10.1109/TCOMM.2009.06.070325.
- [26] HAN Y and RYAN W E. Low-floor detection/decoding of LDPC-coded partial response channels[J]. *IEEE Journal on Select Areas in Communications*, 2010, 28(2): 252–260. doi: 10.1109/JSAC.2010.100214.
- [27] VARNICA N, FOSSORIER M P, and KAVCIC A. Augmented belief propagation decoding of low-density parity-check codes[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2007, 55(7): 1308–1317. doi: 10.1109/TCOMM.2007.900611.
- [28] KANG J, ZHANG L, DING Z, *et al.* A two-stage iterative decoding of LDPC codes for lowering error floors[C]. *IEEE Global Telecommunication Conference, New Orleans, USA, 2008*: 1–4.
- [29] 吕毅博. 多元差分混沌通信系统数字迭代接收关键技术研究[D]. [Ph.D. dissertation], 厦门大学, 2016: 30–37.
- [30] MAO Y Y and BANIHASHEMI A H. Decoding low-density parity-check codes with probabilistic scheduling[J]. *IEEE Communications Letters*, 2001, 5(10): 414–416. doi: 10.1109/4234.957379.
- [31] CASADO A V, GRIOT M, and WESEL R. Informed dynamic scheduling for belief-propagation decoding of LDPC codes[C]. *IEEE International Conference on Communications, Glasgow, UK, 2007*: 932–937.
- [32] HOCEVAR D. A reduced complexity decoder architecture via layered decoding of LDPC codes[C]. *IEEE Workshop on Signal Processing Systems, Austin, USA, 2004*: 107–112.
- [33] CASADO A, GRIOT M, and WESEL R. LDPC decoders with informed dynamic scheduling[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2010, 58(12): 3470–3479. doi: 10.1109/TCOMM.2010.101910.070303.
- [34] LEE H C, UENG Y L, YEH S M, *et al.* Two informed dynamic scheduling strategies for iterative LDPC decoders[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2013: 61(3): 886–896. doi: 10.1109/TCOMM.2013.012313.120172.
- [35] LIU X, ZHANG Y, and CUI R. Variable-node-based dynamic scheduling strategy for belief-propagation decoding of LDPC codes[J]. *IEEE Communications Letters*, 2015, 19(2): 147–150. doi: 10.1109/LCOMM.2014.2385096.
- [36] LIU X, ZHOU Z, CUI R, *et al.* Informed decoding algorithms of LDPC codes based on dynamic selection strategy[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2016, 64(4): 1357–1366. doi: 10.1109/TCOMM.2016.2527642.
- [37] IEEE C802.16e-05/0066r3.LDPC Coding for OFDMA PHY [S]. 2005.
- [38] KIM J H, NAM M Y, and SONG H Y. Variable-to-check residual belief propagation for LDPC codes[J]. *Electronics Letters*, 2009, 45(2): 117–118. doi: 10.1049/el:20092505.
- [39] 马卓, 杜栓义, 王新梅. 基于量化的LDPC译码算法的高效实现[J]. *电子与信息学报*, 2011, 33(9): 2273–2277. doi: 10.3724/SP.J.1146.2011.00041.
- MA Z, DU S Y, and WANG X M. Efficient Implementing of LDPC decoding algorithm based on quantization[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33(9): 2273–2277. doi: 10.3724/SP.J.1146.2011.00041.
- [40] JIAN Y Y and PFISTER H D. Convergence of weighted Min-Sum decoding via dynamic programming on trees[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2014, 60(2): 943–963. doi: 10.1109/TIT.2013.2290303.
- [41] 姜明, 王晨. 基于原型图的低码率LDPC码最小和译码算法改进方案[J]. *电子与信息学报*, 2010, 32(11): 2781–2784. doi: 10.3724/SP.J.1146.2009.01652.
- JIANG M and WANG C. An improvement on the Min-sum algorithm for low-rate protograph LDPC codes[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2010, 32(11): 2781–2784. doi: 10.3724/SP.J.1146.2009.01652.
- [42] KONG L, JIANG Y, HAN G, *et al.* Improved Min-Sum decoding for 2-D intersymbol interference Channels[J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2014, 50(11): 1–4. doi: 10.1109/TMAG.2014.2317749.
- [43] JIANG M, ZHAO C, SHI Z, *et al.* An improvement on the modified weighted bit flipping decoding algorithm for LDPC codes[J]. *IEEE Communications Letters*, 2005, 9(9): 814–816. doi: 10.1109/LCOMM.2005.1506712.
- [44] 张高远, 周亮, 文红. LDPC码加权比特翻转译码算法研究[J]. *电子与信息学报*, 2014, 36(9): 2093–2097. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01622.
- ZHANG G, ZHOU L, and WEN H. Research on weighted bit-flipping decoding algorithm for LDPC codes[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(9): 2093–2097. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01622.
- [45] FENG G and HANZO L. Reliability ratio based weighted bit-flipping decoding for low-density parity-check codes[J]. *Electronics Letters*, 2004, 40(21): 1356–1358. doi: 10.1049/el:20046400.
- [46] CHANG T C and SU Y T. Dynamic weighted bit-flipping decoding algorithms for LDPC codes[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2015, 63(11): 3950–3963. doi: 10.1109/TCOMM.2015.2469780.
- [47] 张高远, 周亮, 苏伟伟, 等. 基于平均幅度的LDPC码加权比特翻转译码算法[J]. *电子与信息学报*, 2013, 35(11): 2572–2578. doi: 10.3724/SP.J.1146.2012.01728.
- ZHANG G Y, ZHOU L, SU W W, *et al.* Average magnitude based weighted bit-flipping decoding algorithm for LDPC codes[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2013, 35(11): 2572–2578. doi: 10.3724/SP.J.1146.2012.01728.
- [48] 张高远, 周亮, 文红. 基于幅度和和的LDPC码加权比特翻转译

- 码算法[J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(4): 752-757. doi: 10.3969/j.issn.1001-506X.2014.04.24.
- ZHANG G Y, ZHOU L, and WEN H. Sum of the magnitude based weighted bit-flipping decoding algorithm for LDPC codes[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2014, 36(4): 752-757. doi: 10.3969/j.issn.1001-506X.2014.04.24.
- [49] 陶雄飞, 王跃东, 柳盼. 基于变量节点更新的LDPC码加权比特翻转译码算法[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(3): 688-693. doi: 10.11999/JEIT150720.
- TAO X F, WANG Y D, and LIU P. Weighted bit-flipping decoding algorithm for LDPC codes based on updating of variable nodes[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(3): 688-693. doi: 10.11999/JEIT150720.
- [50] ZHAO J, ZARKESHVARI F, and BANIHASHEMI A H. On implementation of min-sum algorithm and its modifications for decoding low-density parity-check codes[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2005, 53(4): 549-554. doi: 10.1109/TCOMM.2004.836563.
- [51] ZHANG Z, DOLECEK L, NIKOLIC B, *et al.* Design of LDPC decoders for improved low error rate performance: Quantization and algorithm choices[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2009, 57(11): 3258-3268. doi: 10.1109/TCOMM.2009.11.080105.
- [52] PLANJERY S K, DECLERCQ D, DANJEAN L, *et al.* Finite alphabet iterative decoders—part I: Decoding beyond belief propagation on the binary symmetric channel[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2013, 61(10): 4033-4045. doi: 10.1109/TCOMM.2013.090513.120443.
- [53] DECLERCQ D, VASIC B, PLANJERY S K. *et al.* Finite alphabet iterative decoders — part II: Towards guaranteed error correction of LDPC codes via iterative decoder diversity [J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2013, 61(10): 4046-4057. doi: 10.1109/TCOMM.2013.090513.120444.
- [54] CAI F, ZHANG X, DECLERCQ D, *et al.* Finite alphabet iterative decoders for LDPC codes: Optimization, architecture and analysis[J]. *IEEE Transactions on Circuits & Systems I: Regular Papers*, 2014, 61(5): 1366-1375. doi: 10.1109/TCSI.2014.2309896.
- [55] TRAN N H, NGUYEN H H, and LE-NGOC T. Performance analysis and design criteria of BICM-ID with signal space diversity for keyhole Nakagami-m fading channels[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, 55(4): 1592-1602. doi: 10.1109/TIT.2009.2013001.
- [56] AHMED S. Soft metrics and EXIT chart analysis of non-coherent MFSK with diversity reception in Rician fading channel[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2011, 10(6): 1692-1696. doi: 10.1109/TWC.2011.032411.100499.
- [57] CHOI J and HA J. Iterative demodulation and decoding of uplink multiuser m-ary FSK using OFDMA mapping[J]. *IEEE Communications Letters*, 2013, 17(9): 1842-1845. doi: 10.1109/LCOMM.2013.070913.131359.
- [58] UCHOA A G D, HEALY C, and DELAMARE R C. Iterative detection and decoding algorithms for MIMO systems in block-fading channels using LDPC codes[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2016, 65(4): 2735-2741. doi: 10.1109/TVT.2015.2432099.
- [59] LYU Y, WANG L, CAI G, *et al.* Iterative receiver for m-ary DCSK systems[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2015, 63(11): 3929-3936. doi: 10.1109/TCOMM.2015.2425877.
- [60] LYU Y, WANG L, and XIONG Z. Performance advantage of joint source-channel decoder over iterative receiver under m-ary differential chaotic shift keying systems[C]. *IEEE Vehicular Technology Conference 2016 Spring, Nanjing, China*, 2016: 1-5.
- 吕毅博: 男, 1984年生, 博士生, 研究方向为信道译码算法。
- 胡伟: 男, 1988年生, 博士生, 研究方向为信息论和混沌调制系统。
- 王琳: 男, 1963年生, 博士, 特聘教授, 博士生导师, 研究方向为信息论与宽带无线通信理论。