

几何信息均分的 B 样条曲线节点设置

张毓华^{1,2)}, 曹娟^{1,2)*}, 陈中贵³⁾, 曾晓明^{1,2)}

¹⁾(厦门大学数学科学学院 厦门 361005)

²⁾(福建省数学建模与高性能科学计算重点实验室 厦门 361005)

³⁾(厦门大学计算机科学系 厦门 361005)

(juancao@xmu.edu.cn)

摘要: 受每个节点区间应该具有相同建模能力的启发, 提出一种基于几何信息均分的 B 样条曲线节点设置算法. 首先放置少量节点, 以每个节点区间具有相等的几何信息量准则来确定节点的位置; 为了提高样条的建模能力, 根据上一次迭代中的拟合误差确定加细节节点区间并使新节点均分该节点区间的几何信息. 该算法可以快速有效地得到用户指定精度的逼近曲线. 通过对一些具有不同几何复杂度的实例进行实验的结果表明, 文中算法是有效的; 与现有的 2 种算法相比, 该算法在相同控制顶点的情况下能够得到更高精度的逼近结果.

关键词: B 样条; 曲线拟合; 节点设置; 最小二乘
中图法分类号: TP391.41

Knot Placement of B-spline Curves with Equally Spaced Geometric Information

Zhang Yuhua^{1,2)}, Cao Juan^{1,2)*}, Chen Zhonggui³⁾, and Zeng Xiaoming^{1,2)}

¹⁾(School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005)

²⁾(Fujian Provincial Key Laboratory of Mathematical Modeling and High-Performance Scientific Computing, Xiamen 361005)

³⁾(School of Information Science and Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005)

Abstract: Motivated by the observation that each knot interval should be of the same modeling ability, a knot placement algorithm based on equally spaced geometric information for B-spline curves is proposed. In the algorithm, a few of knots are determined according to the principle that each knot interval is of the same amount of geometric information at the initial iteration. In order to improve the modeling ability of the B-splines, the knot interval needed to be refined is determined by the last fitting errors and the new knot inserted is placed to equally space the accumulated geometric information in the knot interval. Via the adaptive knot placement algorithm, approximated curve with specified tolerance can be produced rapidly and efficiently. Several models with distinct geometric complexities are tested to demonstrate the efficacy of our algorithm in fitting curves. Comparing to other two available methods, more accurate results can be obtained by our method with the same number of control points.

Key words: B-spline; curve fitting; knot placement; least square

近几十年来, 随着扫描技术以及设备的发展, 包含更多细节的数据获取成为可能, 并且成为高

精度测量建模的一个重要发展方向. 由于实际应用的需要, 将采集的离散数据重建为连续的表达

收稿日期: 2016-05-15; 修回日期: 2016-08-26. 基金项目: 国家自然科学基金(61100105, 61572020, 61472332); 福建省自然科学基金(2015J01273); 中央高校基本科研业务费专项资金(20720150002, 20720140520). 张毓华(1984—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为 CAGD/CG; 曹娟(1983—), 女, 博士, 副教授, 论文通讯作者, 主要研究方向为 CAGD/CG; 陈中贵(1982—), 男, 博士, 副教授, 主要研究方向为计算机图形学; 曾晓明(1956—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为逼近论、CAGD.

形式自然也受到了极大的关注。在这些重建技术中, 曲线拟合作为从一组有序的离散数据中恢复成原始曲线的重建过程, 在计算机图形学、逆向工程、几何造型、几何处理以及计算机辅助几何设计等众多领域中都有着广泛的应用。在曲线拟合中, B 样条曲线由于具有显式的参数表示、几何直观性、自动连续性等众多优点而被广泛采用。

在 B 样条曲线拟合中, 由于无法预知节点的准确数量及具体位置, 因此如何合理地确定节点的分布是面临的主要挑战之一。一个不好的节点设置可能导致拟合曲线严重偏离原始曲线或计算效率低下。例如, 在特征明显区域, 节点分布过少将导致在这一区域的自由度过少, 从而无法构建出复杂的形状。相反地, 如果在无明显特征区域节点分布过多, 将导致控制顶点的整体数量增多从而降低计算效率。因此, 设计一种能够有效地反映数据点本身几何复杂度的节点设置算法, 对 B 样条曲线拟合有着重要的意义。

本文提出一种根据输入数据点的几何复杂度以及拟合误差来确定节点分布的 B 样条自适应节点算法。通过该算法, 越来越多的节点将自动地添加到几何复杂度大和误差大的参数域中, 以提高拟合曲线的逼近质量。

1 相关工作

在 B 样条曲线拟合中, 参数化、节点位置和控制顶点的位置是影响拟合曲线逼近质量的 3 个重要因素。根据对这 3 个因素处理的不同, 可以得到几类不同的 B 样条曲线拟合算法。在这些算法中, 最普遍的做法是依次进行以下 4 个步骤^[1-2]: 选择一种合适的参数化; 选择逼近曲线的次数和控制顶点个数; 设置参数方向上的节点序列; 通过求解一个最小二乘优化问题得到控制顶点的位置, 进而得到拟合曲线。在这些算法中节点序列的设置通常也较为简单: 在每个节点区间上包含数量差不多的参数点, 由此得到的曲线拟合问题可以通过最小二乘法稳定地求解。但这种简单的节点设置规则无法根据数据点的几何复杂度自适应地在特征大的区域设置更多的节点。因此, 对于具有显著特征的数据点, 这类算法一方面难以得到用户指定精度的拟合结果; 另一方面, 由于这种均匀的节点选取算法使得在平坦区域分配过多的节点, 从而导致计算效率低下。

为了得到更加准确的逼近结果, 一种直接的方法是将数据点的参数化、节点个数与位置及控制顶点的位置都作为未知量, 通过求解一个非线性的最优化问题来得到最终的拟合曲线。在这种情况下, 由于 B 样条基函数是关于局部节点的高度非线性函数, 因此通常采取人工智能算法来求解这类优化问题, 如遗传算法^[3-4]、人工免疫系统算法^[5]、模拟退火算法^[6]、分布评估算法^[7]和粒子群算法^[8]等。另外, 也可以用迭代的算法交替优化参数化和节点^[9-10]进行求解。虽然这些全局优化算法能够得到更好的逼近曲线, 但它们各自存在一些固有的缺点, 如计算效率低下(需要几分钟甚至几个小时不等), 并且不能保证得到全局最优解。另外, 这类算法通常需要事先确定节点数。但在实际应用中, 特别是在给定逼近精度的条件下, 很难在优化前准确估计出所需节点的数量。

另一类更加高效的优化策略是将最小二乘优化问题中的参数化或节点位置固定, 从而使拟合问题得到简化。对于前一种情形, Ma 等^[11]在用最小二乘法优化拟合 B 样条曲线控制顶点的算法中提出了为随机测量得到的数据指定参数的算法。对于后一种情形, 由于最小二乘拟合问题关于节点位置是高度非线性, 并且对于给定精度所需节点的准确个数一般也无法预知, 因此一般采用启发式或自适应的算法来设置节点。例如, Li 等^[12]提出一种采用 B 样条曲线逼近稠密和噪声数据的自适应节点设置算法。Park 等^[13]提出了在输入数据中选取所谓的主导点(dominant points), 用于生成节点的算法。

通常, 在给定节点分布和参数化的情况下, 控制顶点的位置只需要简单地通过求解一个最小二乘系统得到。Wang 等^[14]提出二次误差函数的概念, 将传统的线性最小二乘优化问题转化为非线性的最优化问题来求解, 即在节点数量和位置都给定的情况下, 交替优化控制顶点的位置和参数化。

本文提出一种在参数化固定的情况下基于几何信息均分的自适应节点设置算法, 即在初次迭代中选择少量节点并根据数据本身的几何复杂度来确定这些节点的位置, 使得每一个节点区间包含相等的累积几何复杂度; 在后面的迭代中, 根据上一次迭代得到的拟合误差确定需要加细的节点区间, 并根据均分加细节点区间的几何信息来确定新增节点的位置。一般来说, 新增的节点总是位于误差最大所在节点区间中的几何复杂度大的地方, 从而逐步提高拟合曲线的逼近质量。

2 B 样条曲线的最小二乘拟合

B 样条曲线拟合作为计算机辅助设计领域的经典理论, 在众多领域中有着广泛的研究和应用. 下面简单介绍 B 样条的概念和引入一些符号以便后面的讨论.

$k(\geq 0)$ 次 B 样条曲线定义为

$$C(t) = \sum_{i=0}^{m+k} N_{i,k}(t)c_i, \quad t \in [u_0, u_m];$$

其中, $\{N_{i,k}(t)\}_{i=0}^{m+k}$ 为定义在节点序列 $\{u_i\}_{i=-k}^{m+k}$ 上的 k 次 B 样条基函数, 而 $\{c_i\}_{i=0}^{m+k}$ 为与 $\{N_{i,k}(t)\}_{i=0}^{m+k}$ 相对应的控制顶点.

给定一顶点集 $X = \{x_i \in \mathbb{R}^3\}_{i=0}^l$ 及其相应参数化 $\Phi = \{t_i \in [0,1]\}_{i=0}^l$, 可以通过极小化以下线性最小二乘问题来得到 X 的 B 样条逼近曲线 $C(t)$

$$\min \sum_{i=0}^l \|C(t_i) - x_i\|^2.$$

对于给定参数化, 则 B 样条曲线 $C(t)$ 对 X 的逼近程度取决于样条节点的分布和控制顶点的位置. 本文把问题分成两部分: 1) 确定节点序列 $U = \{u_i\}_{i=0}^m$ 中的节点位置; 2) 解优化问题就等价于求解一个线性系统, 可以通过奇异值分解或 QR 分解来求解.

3 本文算法概述

在 B 样条曲线拟合中, 节点的数量、位置和参数化都影响着最终拟合曲线的逼近质量. 本文主要讨论如何自适应地设置节点以生成反映数据几何复杂度的 B 样条空间, 以便更好地逼近原始的离散数据. 在节点设置过程中, 由于无法预知具体需要多少节点才能达到用户的要求, 因此本文采用启发式的算法: 首先在参数域中放置少量的节点, 然后在后面的迭代中根据拟合误差来判断是否需要加入更多的节点. 如果需要, 根据拟合误差来确定加细节点区间. 在每一次迭代中, 根据原始数据的几何复杂度来确定新节点的准确位置. 在节点确定后, 采用某种优化算法来解最小二乘问题就可以得到拟合曲线. 本文采用 QR 分解算法解优化问题并获得控制顶点 $\{c_i\}$, 重复节点插入过程, 直到拟合曲线达到给定精度或迭代次数超过某个预设值. 本文算法步骤如下:

Step1. 基于几何信息均分原则确定 K_0 个节点的位置, 转 Step3.

Step2. 根据拟合误差确定需要加细的节点区间, 并根据新节点均分区间内的几何信息来确定新节点的位置.

Step3. 使用由目前节点序列生成 m 次样条基函数, 用这组基函数拟合 X 并更新均方根误差 (root mean square error, RMSE).

Step4. 如果 $RMSE > \varepsilon$ 且迭代次数小于最大迭代次数, 则转 Step2; 否则, 输出拟合曲面, 算法结束.

图 1a 所示为人脸轮廓线的输入数据; 而图 1b 所示为使用本文算法生成的 18 个节点分布, 以及使用这些节点拟合得到的三次 B 样条曲线.

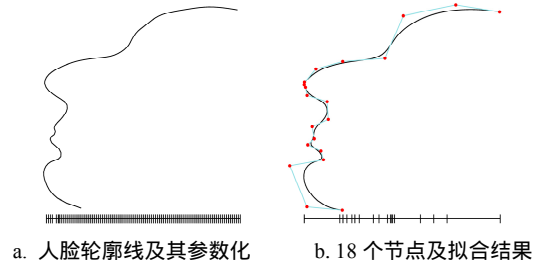


图 1 人脸轮廓线数据及三次 B 样条拟合结果

4 自适应节点加入

在样条曲线拟合中, 节点的个数和节点的位置对拟合曲线的逼近质量起着至关重要的作用. 由于通常无法准确预知拟合曲线达到指定精度所需节点的具体数量以及准确位置, 因此一般的做法是采用启发式的算法来设置节点. 本文提出一种自适应确定节点数量和位置的算法, 可将更多的节点放置到几何复杂度大的区域和拟合误差大的区域, 渐进地提高拟合曲线的逼近质量.

本文算法基于如下的观察: 对于参数域中的每个节点区间 $[u_i, u_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, m-1$ 都对应到原始曲线中的一条曲线段, 并且影响到的 B 样条基函数和控制顶点的个数也是一样的. 换句话说, 在这种意义下, 每个节点区间所对应的曲线段都有着相同的自由度和建模能力, 即每个节点区间所对应的曲线段具有相同的几何复杂度. 曲率是描述曲线弯曲程度的内蕴几何量, 曲率绝对值越大, 曲线的弯曲程度也就越大. 因此, 本文使用一个曲率相关函数来量化原始曲线的几何复杂度. 具体地, 采用 $\kappa(s) = |k(s)|^\alpha$ 来度量曲线在弧长 s 处的几何复杂度, 称 $\kappa(s)$ 为几何复杂度度量函数; 其中, $k(s)$ 是曲线在弧长 s 处的曲率, α 是调节因子. 这样, 每个节点区间所对应的曲线段具有相同的几何复杂度就等价于极小化以下目标函数

$$E(U) = \sum_{i=0}^{m-1} [K(u_i, u_{i+1}) - C]^2 \quad (1)$$

其中 $K(u_i, u_{i+1}) = \int_{t^{-1}(u_i)}^{t^{-1}(u_{i+1})} \kappa(s) ds$, 表示的是在 $t^{-1}(u_i)$

与 $t^{-1}(u_{i+1})$ 之间几何复杂度度量函数 $\kappa(s)$ 的累积弧长积分. $t^{-1}(\cdot)$ 表示原始曲线参数化 $t(\cdot)$ 的逆映射(其中 $t^{-1}(u_0) = x_0, t^{-1}(u_m) = x_l$), 即参数域与原始曲线之间的对应关系. 常数 $C = K(t_0, t_l) / m$ 表示的是每个节点区间对应曲线段的平均累积几何复杂度度量.

易知, 当 $K(u_i, u_{i+1}) = C, i = 0, 1, \dots, m-1$ 时, 式(1)取得最小值 0. 因此, 本文通过对几何复杂度度量函数 $\kappa(s)$ 进行曲线积分, 以使每一个节点区间所对应曲线段的累积几何复杂度度量相等来确定节点的分布. 在实际应用中, 由于原始曲线的确切表达未知, 本文采用近似的方法来计算 $K(\cdot, \cdot)$. 具体地, 采用局部方法^[15]来计算有序数据点 x_i 的离散曲率 k_i , 通过线性插值数据点 x_i 的离散几何复杂度度量 $\kappa_i = |k_i|^\alpha$ 来近似得到几何复杂度度量函数 $\kappa(s)$, 并用弦长积分来近似代替弧长积分 $K(\cdot, \cdot)$. 由此得到的几何复杂度度量函数 $\kappa(s)$ 为分段线性函数, 整条曲线的累积几何复杂度度量近似为

$$K(t_0, t_l) = \int_{x_0}^{x_l} \kappa(s) ds \approx \sum_{k=0}^{l-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \kappa(s) ds.$$

同样地, 由于原始曲线的具体表达未知, $t^{-1}(\cdot)$ 的准确表达通常无法得到. 本文采用分段线性插值的方法来近似 $t^{-1}(\cdot)$, 即当 $K(t_0, t_j) \leq i \times C < K(t_0, t_{j+1})$ ($0 \leq j < l$) 时, 通过

$$t^{-1}(u_i) \approx x_j + \frac{i \times C - K(t_0, t_j)}{K(t_j, t_{j+1})} (x_{j+1} - x_j)$$

来近似计算 $t^{-1}(u_i)$ ($1 \leq i < m$). 类似地, 采用分段线性插值来近似得到式(1)极小化所对应的节点分布. 具体地, 设 $u_0 = t_0, u_m = t_l$, 当 $K(t_0, t_j) \leq i \times C < K(t_0, t_{j+1})$ ($0 \leq j < l$) 时, 节点 u_i ($1 \leq i < m$) 的近似

计算公式为

$$u_i \approx t_j + \frac{i \times C - K(t_0, t_j)}{K(t_j, t_{j+1})} (t_{j+1} - t_j) \quad (2)$$

从式(2)可知, 在数据点参数化已知的情况下, 节点的分布取决于对原始曲线几何复杂度度量函数的选择. 由于在实际的计算中 $\kappa(s)$ 是通过线性插值数据点 x_i 的离散几何复杂度度量 $\kappa_i = |k_i|^\alpha$ 来近似得到的, 这样节点的分布就随着调节因子 α 选择的不同而不同. α 越大, 几何复杂度度量对比就越突出, 通过极小化式(1)所得到的节点在曲率大的地方分布也就越集中; 反之, 几何复杂度度量对比就越不明显, 通过极小化式(1)所得到的节点分布就越平均. 因此, 合适地选择 α 选择变得非常重要. B 样条曲线是关于节点的高度非线性函数, 求解最佳的调节因子以得到最佳节点分布是一个高度非线性的优化问题, 求解异常耗时, 而这将大大降低算法的实用性. 为使算法简单高效, 本文采用统一的调节因子, 并使用启发式的方法来寻求次优的节点分布. 本文通过大量的实验发现, $\alpha = 3$ 是一个好的选择. 图 2a 所示为图 1a 中人脸轮廓线 $\alpha = 3$ 时的离散几何复杂度分布. 由于通常无法准确地预知要使拟合曲线达到指定精度所需节点的具体数量, 因此本文采用迭代的方式来渐近地确定节点的分布. 在初始迭代中, 加入少量 (K_0 个) 节点测试所得拟合曲线是否满足要求, 来决定是否需要迭代加入更多的节点, 以增加 B 样条空间的建模能力. 图 3a 所示为人脸轮廓线初始迭代中 10 个节点的确定过程, 而图 4a 所示为使用这些节点拟合得到的 3 次 B 样条逼近曲线及控制网格.

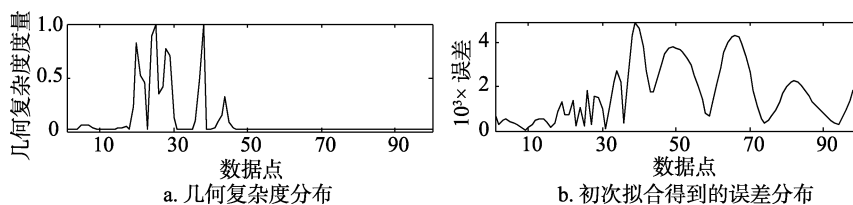


图 2 人脸轮廓线的几何复杂度分布和误差分布

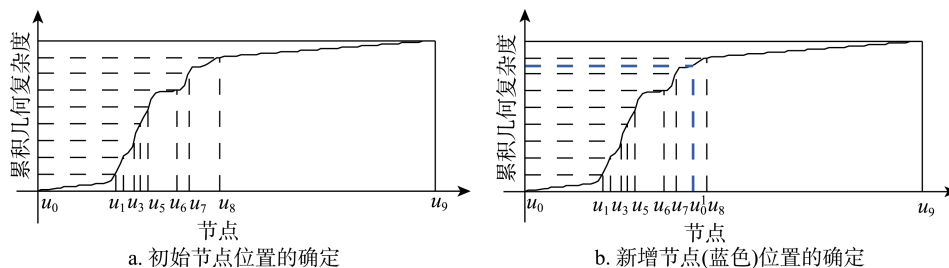


图 3 人脸轮廓线节点的确定过程

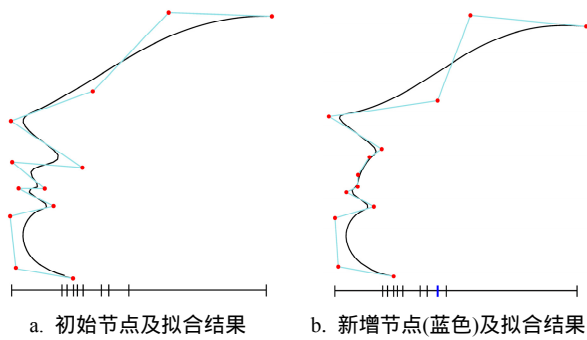


图 4 节点分布及对应的拟合结果

5 新插入节点的确定

对于现有节点, 可以通过求解最小二乘问题得到曲线 $C(t)$. 如果得到的曲线 $C(t)$ 不能满足精度要求, 需要增加更多的节点以提高曲线的逼近质量, 因此需要考虑如何选择新的节点区间进行节点加细. 直观上来说, 误差大的区域应该添加更多的节点以增加样条空间在该区域的逼近能力, 从而提高拟合曲线的逼近质量. 本文选择最大偏离点所在的节点区间进行加细. 由于 Greville Abscissae 与控制顶点之间存在一一对应关系^[16], 而 Greville Abscissae 为部分节点的平均, 因此新增节点所对应的曲线上点的附近将分布更多的控制顶点, 从而提高该区域的造型能力. 定义输入顶点 x_i 与 $C(t)$ 的偏离量为 $\|C(t_i) - x_i\|$, 并假设最大偏离点所属节点区间为 $[u_i, u_{i+1}]$, 在这个节点区间中新增一个节点 u_0^1 , 通过优化式(1)来确定新增节点 u_0^1 的位置. 为简单起见, 本文固定现有的节点位置不变. 易知, 当 $[u_i, u_0^1]$, $[u_0^1, u_{i+1}]$ 2 个节点区间包含的累积几何复杂度相等时式(1)达到最小, 即 u_0^1 要满足 $K(u_i, u_0^1) = K(u_0^1, u_{i+1})$. 图 3b 所示为对人脸轮廓线模型根据拟合误差分布(如图 2b 所示)和几何复杂度分布确定新增节点的过程, 图 4b 所示为相应的节点分布及拟合结果.

根据 Schoenberg-Whitney 定理^[17], 为了确保最小二乘优化问题得到稳定的解, 即优化问题中导出的系数矩阵是非奇异的, 每个 B 样条基函数的支集内至少应该包含一个参数点. 对于一些局部具有尖锐特征的输入数据, 本文算法可能会导致某些基函数在其支集内不包含任何参数点, 从而影响到最小二乘解的稳定性. 因此, 在节点加细过程中需要对新增节点的位置增加一些限制, 以保证系数矩阵非奇异. 具体地, 如果在某个节点区间内加入新的节

点后出现基函数在其支集内不包含参数点, 则取消这个新增节点, 而寻找下一个误差大的节点区间进行加细. 如果拟合曲线达不到精度要求且所有的区间都不能被加细, 算法将提前中止.

6 实验及分析结果

本节使用本文算法对 6 个具有不同几何复杂度的模型数据进行了实验. 实验中, 所有算法都是用 C++ 实现的, 运行平台为 Intel Core i5-3210M CPU @2.5 GHz, 4GB 内存, Windows 7 操作系统. 本文采用三次非均匀 B 样条曲线拟合模型数据. 对于封闭数据点, 采用周期 B 样条进行拟合. 在初次迭代中, 首先放置 10 个节点, 在后续的迭代中, 每次在参数域中增加 1 个节点, 直到拟合曲线的 RMSE $< 1E-4$. 在第 6.1 节, 讨论了参数化对拟合结果的影响. 在第 6.2, 6.3 节, 将本文算法分别与 Park 等^[13]提出的使用主导点生成节点的 B 样条拟合算法(简称 DOM 算法), 以及 Li 等^[12]中提出的使 3 个相邻节点所成的向量之间的夹角 $a \leq \pi/6$ 的一种启发式算法(简称 Li 算法)进行比较, 以说明本文算法的有效性. 为了方便比较曲线的拟合质量, 本文统一缩放算法中实验的数据点到单位立方体中.

6.1 参数化的选择

参数化的选择在曲线插值和曲线逼近问题中起着非常重要的作用, 对非均匀 B 样条曲线拟合问题亦是如此. 一方面, 参数化会直接影响节点位置的确定, 从而影响样条基函数空间的建模能力; 另一方面, 节点序列确定后, 不同的参数化使得基函数在这些参数点的计算得到的向量空间同样也影响最终曲线拟合的质量. 常用的曲线参数化有均匀参数化、弦长参数化以及向心参数化, 其中后 2 个参数化在曲线拟合中用得最多, 因为它们能很好地反映原始数据的几何复杂度. 经过大量的实验发现, 当输入数据来自均匀采样某个模型的时候, 使用均匀参数化得到的拟合结果最好; 否则, 更适宜采用弦长参数化或向心参数化. 在后 2 种参数化中并没有哪一种参数化对拟合结果具有明显的优势. 本文中, 如果输入数据来自于均匀采样, 则采用均匀参数化, 否则使用弦长参数化. 在实验中, 分别对人脸轮廓线、连接抛物线、直线-半圆、摇杆轮廓线、涡轮叶片轮廓线和蒙纳科斯瓦字体 K 进行了实验, 其中连接抛物线均匀采样自 3 条抛物线及 2 条直线段, 所以

采用均匀参数化, 而其余模型均采用弦长参数化.

6.2 与 DOM 算法的比较

表 1~4 分别为使用本文算法与 DOM 算法在相同控制顶点数的情况下对人脸轮廓线、连接抛物线、直线-半圆以及摇杆轮廓线进行拟合得到的结果. 图 5 所示为分别使用本文算法及 DOM 算法对人脸轮廓线进行拟合所得到的 RMSE 随着迭代次数变化. 表 5 列出了对这些模型数据进行拟合相对应的统计信息, 可以看出, 在相同控制顶点数以及运行时间差不多的情况下, 本文算法得到的逼近结果均要好于 DOM 算法得到的结果, 特别是对于

表 1 人脸轮廓线拟合结果(27 个控制顶点)

算法	拟合曲线	控制网格
本文		
DOM		

表 2 连接抛物线拟合结果(28 个控制顶点)

算法	拟合曲线	控制网格
本文		
DOM		

表 3 直线-半圆拟合结果(17 个控制顶点)

算法	拟合曲线	控制网格
本文		
DOM		

表 4 摇杆轮廓线拟合结果(128 个控制顶点)

算法	拟合曲线	控制网格
本文		
DOM		

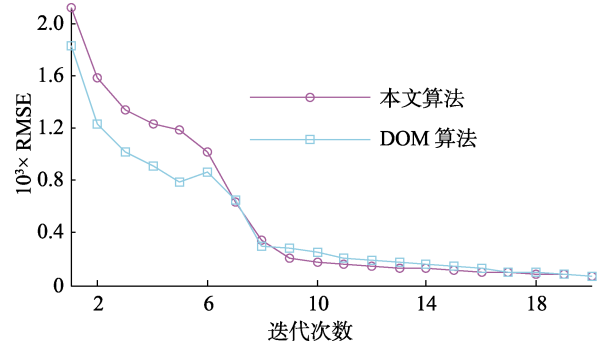


图 5 人脸轮廓线拟合结果比较

连接抛物线来说, 本文算法得到的结果远远优于 DOM 算法的结果.

6.3 与 Li 算法的比较

由于 Li 算法首先选取作为特征点的拐点所对应的参数点作为节点, 然后通过曲率积分对现有节点区间进行加细直到所有的 3 个相邻节点所成的 2 个向量之间所成夹角 $a \leq \pi/6$, 所以能快速地得到拟合曲线. 但这种一次确定所有满足条件的节点算法既不能保证节点数量, 也不能保证得到给定精度的拟合曲线. 为了进行公平的比较, 在 Li 算法得到拟合结果后, 本文采用与之相同数量的控制顶点进行比较. 表 6~7 分别为使用本文算法、DOM 算法以及 Li 算法在相同控制顶点数量的情况下, 对涡轮叶片轮廓线和蒙纳科斯瓦字体 K 进行拟合得到的结果. 从表 5 可以看出, 在相同数量控制顶点的情况下, 与 DOM 算法以及 Li 算法的拟合结果相比, 本文算法得到的拟合结果拥有更高的逼近精度, 特别是对于 Li 算法的拟合结果.

表 5 3 种算法拟合结果比较

模型	顶点数	算法	节点数	控制顶点数	最大误差	RMSE	时间/s
人脸轮廓线	100	本文	25	27	2.17E-4	9.88E-5	0.047
		DOM			3.82E-4	1.31E-4	0.047
		Li					
连接抛物线	80	本文	26	28	1.58E-6	3.53E-7	0.062
		DOM			7.08E-3	1.33E-3	0.062
		Li					
直线-半圆	50	本文	15	17	1.87E-4	8.99E-5	0.016
		DOM			4.18E-3	1.21E-4	0.016
		Li					
摇杆轮廓线	800	本文	126	128	7.21E-4	9.47E-5	0.421
		DOM			1.91E-3	1.25E-4	0.451
		Li					
涡轮叶片轮廓线	250	本文	32	34	2.15E-3	2.91E-4	0.046
		DOM			8.45E-4	4.35E-4	0.046
		Li			3.84E-3	1.75E-3	0.016
蒙纳科斯瓦字体 K 外框线	2870	本文	249	251	3.91E-4	9.94E-5	1.580
		DOM			1.01E-3	1.21E-4	1.350
		Li			1.22E-2	2.16E-3	0.031

表 6 涡轮叶片轮廓线拟合结果(34 个控制顶点)

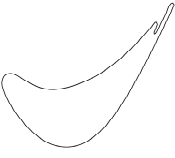
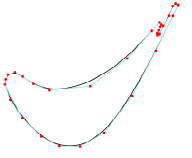
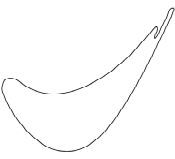
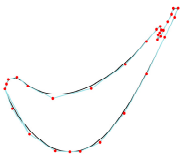

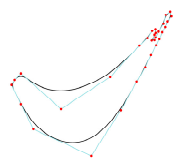
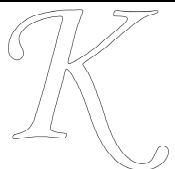
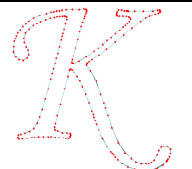
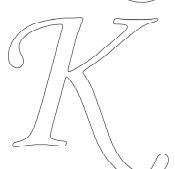
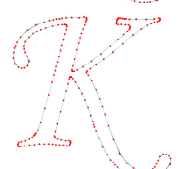
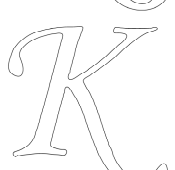
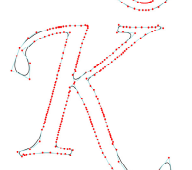
算法	拟合曲线	控制网格
本文		
DOM		
Li		

表 7 蒙纳科斯瓦字体 K 拟合结果(251 个控制顶点)

算法	拟合曲线	控制网格
本文		
DOM		
Li		

7 结 语

基于每个节点区间应该具有相同建模能力的观察, 本文提出一种根据均分几何信息来设置节点的迭代算法. 需要指出的是, 本文算法是一种启发式的, 因此一般来说, 节点的数量和位置都不能保证是最优的. 从实验结果可以看出, 本文算法对于具有明显特征的特别是具有尖锐特征的数据模型具有明显的优势, 能够快速且有效地拟合出用户指定精度的样条曲线. 与 DOM 算法及 Li 算法相比, 在相同数量控制顶点的条件下, 本文算法能够得到精度更高的拟合曲线. 本文研究的是 B 样条曲线中的节点设置问题, 该算法有望被推广到 B 样条曲面的节点设置问题中, 即优化节点的位置使由节点形成的每个矩形子区域中包含的几何信息量尽可能地相等. 在解决 B 样条拟合问题中, 文献[18]通过重心 Voronoi 剖分来设置节点, 其中主曲率绝对值之和的四次方作为 Voronoi 剖分的密度函数, 而每个区域重心的 2 个坐标分量作为 u, v 方向的节点. 由于 Voronoi 区域重心和拟合曲面的节点并没有直接的联系, 因此将区域重心的坐标作为节点的做法会使拟合结果比较粗糙, 不可避免地引入过密的节点线. 与文献[18]相比, 本文算法有望得到更准确的节点线分布, 这将是今后研究的一个方向.

参考文献(References):

- [1] Piegl L, Tiller W. The NURBS book[M]. 2nd ed. Heidelberg: Springer, 1997

- [2] Weiss V, Andor L, Renner G, *et al.* Advanced surface fitting techniques[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2002, 19(1): 19-42
- [3] Yoshimot F, Moriyama M, Harada T. Automatic knot placement by a genetic algorithm for data fitting with a spline[C] // *Proceedings of the International Conference on Shape Modeling and Applications*. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 1999: 162-169
- [4] Sarfraz M, Raza S A. Capturing outline of fonts using genetic algorithm and splines[C] // *Proceedings of the 5th International Conference on Information Visualisation*. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2001: 738-743
- [5] Ulker E, Arslan A. Automatic knot adjustment using an artificial immune system for B-spline curve approximation[J]. *Information Sciences*, 2009, 179(10): 1483-1494
- [6] Sarfraz M, Riyazuddin M. Curve fitting with NURBS using simulated annealing[M] // *Applied Soft Computing Technologies: The Challenge of Complexity*. Heidelberg: Springer, 2006, 34: 99-112
- [7] Zhao X Y, Zhang C M, Yang B, *et al.* Adaptive knot placement using a GMM-based continuous optimization algorithm in B-spline curve approximation[J]. *Computer-Aided Design*, 2011, 43(6): 598-604
- [8] Gálvez A, Iglesias A. Particle swarm optimization for non-uniform rational B-spline surface reconstruction from clouds of 3D data points[J]. *Information Sciences*, 2012, 192(6): 174-192
- [9] Xie W C, Zou X F, Yang J D, *et al.* Iteration and optimization scheme for the reconstruction of 3D surfaces based on non-uniform rational B-splines[J]. *Computer-Aided Design*, 2012, 44(11): 1127-1140
- [10] Gálvez A, Iglesias A, Puig-Pey J. Iterative two-step genetic algorithm-based method for efficient polynomial B-spline surface reconstruction[J]. *Information Sciences*, 2012, 182(1): 56-76
- [11] Ma W Y, Kruth J P. Parameterization of randomly measured points for least squares fitting of B-spline curves and surfaces[J]. *Computer-Aided Design*, 1995, 27(9): 663-675
- [12] Li W S, Xu S H, Zhao G, *et al.* Adaptive knot placement in B-spline curve approximation[J]. *Computer-Aided Design*, 2005, 37(8): 791-797
- [13] Park H, Lee J H. B-spline curve fitting based on adaptive curve refinement using dominant points[J]. *Computer-Aided Design*, 2007, 39(6): 439-451
- [14] Wang W P, Pottmann H, Liu Y. Fitting B-spline curves to point clouds by curvature-based squared distance minimization[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2006, 25(2): 214-238
- [15] Liu G H, Wong Y S, Zhang Y F, *et al.* Adaptive fairing of digitized point data with discrete curvature[J]. *Computer-Aided Design*, 2002, 34(4): 309-320
- [16] Farin G. *Curves and surfaces for CAGD: a practical guide*[M]. San Francisco: Morgan Kaufmann, 2001
- [17] de Boor C. *A practical guide to splines*[M]. New York: Springer, 1978
- [18] Cao Juan, Ouyang Yongsheng, Chen Zhonggui, *et al.* Adaptive knot placement in non-uniform B-spline surface fitting[J]. *Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics*, 2015, 27(1): 60-67(in Chinese)
(曹娟, 欧阳永昇, 陈中贵, 等. 非均匀 B 样条曲面的自适应节点设置方法[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2015, 27(1): 60-67)