2017年6月 伊犁师范学院学报(自然科学版) Jun.2017
第11卷 第2期 Journal of Yili Normal University(Natural Science Edition) Vol.11 No.2

伦德伯格指数上确界的下极限表示

张伟伟[1],陈 维[1,2*]

(1.伊犁师范学院 数学与统计学院,新疆 伊宁 835000;2.厦门大学 数学科学学院,福建 厦门 361005)

摘 要:给出并证明伦德伯格指数的上确界的下极限表示.

关键词:伦德伯格指数;拉普拉斯-斯蒂尔切斯变换收敛的横坐标;上确界;下极限

中图分类号:O187.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1673—999X(2017)02—0020—02

1 引言与介绍

在风险理论中,克拉默-伦德伯格(Cramer-Lundberg)模型里的破产概率与索赔额的分布有密切关系.给出索赔额的分布 $F(x)$,如果常数 $\gamma>0$ 满足

$$\int_0^{+\infty} e^{\gamma x}\bar{F}(x)\mathrm{d}x<+\infty,$$

就称 γ 为伦德伯格(Lundberg)指数[1],而 γ 的存在性主要取决于下面的拉普拉斯-斯蒂尔切斯变换(Laplace-Stieltjes)

$$\int_0^{+\infty} e^{\gamma x}\mathrm{d}F(x)$$

的收敛的横坐标(abscissa)[1].文献[2-8]分别从一般的Laplace-Stieltjes变换理论、复分析与概率论方面研究了上述相关问题.本文研究Lundberg指数 γ 的上确界的下极限表示.

以下我们只研究定义在 $[0,+\infty)$ 上具有无界支撑的适正分布函数,如对适正分布函数 F 简称分布,是指 $F(+\infty)=1$ 且对任意的 $x\in[0,+\infty)$, F 的尾函数 $\bar{F}\equiv F(x,+\infty)>0$.对于 $\gamma\geqslant 0$,作分布 F 的拉普拉斯-斯蒂尔切斯指数矩变换

$$\varphi_F(\gamma)=\int_0^{+\infty} e^{\gamma y}F(\mathrm{d}y)\in[0,+\infty),$$

记
$$\hat{\gamma}_F=\sup\{\gamma:\varphi_F(\gamma)\in[0,+\infty)\}. \tag{1.1}$$

下面是一些不同情况下的例子[9].

例1 如果 $\bar{F}(x)=e^{-cx^2}(c>0)$,则

$$\hat{\gamma}_F=+\infty,\varphi_F(\hat{\gamma}_F)=+\infty.$$

例2 如果对参数为 c 的指数分布,

$$\bar{F}(x)=e^{-cx}(c>0),\text{则 }\hat{\gamma}_F=c,\varphi_F(\hat{\gamma}_F)=+\infty.$$

例3 如果 $\bar{F}(x)=l(x)e^{-cx}$, $l(x)$ 是正的慢变函数且可积,则 $\hat{\gamma}_F=c,\varphi_F(\hat{\gamma}_F)<+\infty$.

注1 称 $l(x)$ 是慢变函数[10],如果 $l(x)$ 是一个在 $[0,\infty)$ 上的正函数,且对任意 $t>0$ 满足下列条件:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{l(tx)}{l(x)}=1.$$

2 主要结果的证明

命题1 $\hat{\gamma}_F=\liminf\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\ln\bar{F}(x)}{x}\right).$

注2 对于上述例1~3可以验证命题1中的等式右边 $\liminf\limits_{x\to+\infty}\left(-\ln\bar{F}(x)/x\right)=+\infty,c,c,$ 其中对于慢变函数 $l(x)$ 要用到其一个性质(见文献[11],Theorem1.3.3).

证明:记 $\alpha=\liminf\limits_{x\to+\infty}\left(-\ln\bar{F}(x)/x\right)$,我们分 $\alpha<+\infty$ 与 $\alpha=+\infty$ 两种情况证明.

(1)当 $\alpha<+\infty$ 时,我们先证明 $\hat{\gamma}_F\leqslant\alpha$.若对 $\gamma\geqslant 0$ 有 $\varphi_F(\gamma)<+\infty$,即 $\int_0^{+\infty}e^{\gamma y}F(\mathrm{d}y)<+\infty$,则对任意给定 $\varepsilon>0$,存在 $A>0$ 使当 $x>A$ 时,

$$\int_x^{+\infty}e^{\gamma y}F(\mathrm{d}y)<\varepsilon. \tag{2.1}$$

由(2.1)知

$$e^{\gamma x}\bar{F}(x)\leqslant\int_x^{+\infty}e^{\gamma y}F(\mathrm{d}y)<\varepsilon,$$

对上式两边取对数可得

收稿日期:2016-11-01

基金项目:2016年度伊犁师范学院研究生科研创新项目"伦德伯格指数的若干讨论"(2016YSY014).

作者简介:张伟伟,女,在读硕士研究生,研究方向:概率论.

***通信作者**:陈维,男,副教授,硕士生导师,在读博士研究生,研究方向:概率论.

$$\gamma x + \ln \bar{F}(x) \leqslant \ln \varepsilon ,$$

$$\gamma - \frac{\ln \varepsilon}{x} \leqslant -\frac{\ln \bar{F}(x)}{x} . \tag{2.2}$$

当 $x \to +\infty$ 时,对(2.2)两边取下极限可得 $\gamma \leqslant \alpha$,再由满足 $\varphi_F(\gamma) < +\infty$ 的 γ 的任意性及(1.1)得 $\hat{\gamma}_F \leqslant \alpha$.

另一方向,只需证明 $\hat{\gamma}_F \geqslant \alpha$.使用反正法,即假设 $\hat{\gamma}_F < \alpha$,取 γ_1 使 $\hat{\gamma}_F < \gamma_1 < \alpha$,由(1.1)知

$$\varphi_F(\gamma_1) = +\infty . \tag{2.3}$$

取 ε 使 $\gamma_1 < \alpha - \varepsilon \triangleq \alpha_1$,由 $\alpha = \liminf\limits_{x \to +\infty} \left(-\ln \bar{F}(x)/x \right)$ 及下极限的性质知,存在 $A > 0$,当 $x > A$ 时有 $\left(-\ln \bar{F}(x)/x \right) > \alpha_1$,即有 $\bar{F}(x) < e^{-\alpha_1 x}$,因此可得

$$\begin{aligned}
\varphi_F(\gamma_1) &= \int_0^{+\infty} e^{\gamma_1 y} F(\mathrm{d}y) \\
&= \int_0^{A} e^{\gamma_1 y} F(\mathrm{d}y) + \int_A^{+\infty} e^{\gamma_1 y} F(\mathrm{d}y) \\
&= \int_0^{A} e^{\gamma_1 y} F(\mathrm{d}y) + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A+n}^{A+n+1} e^{\gamma_1 y} F(\mathrm{d}y) \\
&\leqslant e^{\gamma_1 A} F(A) + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\gamma_1 (A+n+1)} \left[\bar{F}(A+n) - \bar{F}(A+n+1) \right] \\
&< e^{\gamma_1 A} F(A) + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\gamma_1 (A+n+1)} \bar{F}(A+n) \\
&< e^{\gamma_1 A} F(A) + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\gamma_1 (A+n+1)} e^{-\alpha_1 (A+n)} \\
&= e^{\gamma_1 A} F(A) + e^{-(\alpha_1 - \gamma_1) A + \gamma_1} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(\alpha_1 - \gamma_1) n} .
\end{aligned} \tag{2.4}$$

由(2.4)及 $\gamma_1 < \alpha_1$ 知,级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-(\alpha_1 - \gamma_1) n}$ 收敛,故 $\varphi_F(\gamma_1) < +\infty$,但这与(2.3)矛盾,故假设 $\hat{\gamma}_F < \alpha$ 不成立,因此 $\hat{\gamma}_F \geqslant \alpha$.这样就完成了证明.

(2)当 $\alpha = +\infty$ 时,显然 $\hat{\gamma}_F \leqslant +\infty$.若 $\hat{\gamma}_F < +\infty$,取 γ_1 使 $\hat{\gamma}_F < \gamma_1 < +\infty$,则 $\varphi_F(\gamma_1) = +\infty$.由

$$\liminf_{x \to +\infty} \left(-\ln \bar{F}(x)/x \right) = +\infty$$

知,存在 $A > 0$,当 $x > A$ 时有

$$\left(-\ln \bar{F}(x)/x \right) > \gamma_1 + \varepsilon \triangleq \alpha_1 ,$$

这里 $\varepsilon > 0$,于是 $\bar{F}(x) < e^{-\alpha_1 x}$,类似于(2.4)前后的证明可得 $\hat{\gamma}_F < +\infty$ 不成立,故 $\hat{\gamma}_F = +\infty$,即 $\hat{\gamma}_F = \alpha$.

参考文献:

[1] EMBRECHTS P, KLUPPELBERG C, MIKOSCH T. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

[2] WIDDER D V. The Laplace transform[M]. Princeton: Princeton University Press, 1941.

[3] 余家荣. Laplace-Stieltjes变换所定义的整函数之Borel线[J]. 数学学报, 1963, 13(3): 471-484.

[4] KONG Y Y, HONG Y. On the growth of Laplace-Stieltjes transforms and the singular direction of complex analysis[M]. Guangzhou: Jinan University Press, 2010.

[5] 罗茜,孔荫莹. 全平面上慢增长的Laplace-Stieltjes变换的级与型[J]. 数学物理学报, 2012, 32A(3): 601-607.

[6] CSÖRGŐ S, TEUGELS J L. Empirical Laplace transform and approximation of compound distributions[J]. J. Appl. Prob., 1990, 27: 88-101.

[7] PETER H, TEUGELS J L, VANMARCKE A. The Abscissa of Convergence of the Laplace Transform[J]. Journal of Applied Probability, 1992, 29: 353-362.

[8] JENA R P, KYOUNG-KUK K, HAO XING. Long-term and blow-up behaviors of exponential moments in multi-dimensional affine diffusions[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2012, 122: 2961-2993.

[9] FOSS S, KORSHUNOV D. Lower limits and equivalences for convolution tails[J]. Ann. Probab., 2007, 35: 366-383.

[10] FELLER W. An Introduction to Probability Theory and its Applications: volume II[M]. 2nd ed. New York: Wiley, 1971.

[11] BINGHAM N H, GOLDIE C M, TEUGELS J L. Regular Variation[M]. New York: Cambridge University Press, 1987.

[责任编辑:张建国]

Representation of the Inferior Limit as the Supremum of Lundberg Exponent

ZHANG Wei-wei[1], CHEN Wei[1,2]

(1.College of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining, Xinjiang 835000, China; 2.School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen, Fujian 361005, China)

Abstract: We give and show that representation of the inferior limit as the supremum of Lundberg exponent.

Key words: Lundberg exponent; abscissa of convergence on Laplace-Stieltjes transform; supremum; inferior limit