

# 基于非线性随机最优控制的大跨度斜拉桥地震响应 Benchmark 问题研究

余友熙<sup>1,2</sup>, 刘中华<sup>2</sup>, 余香林<sup>3,4</sup>, 王守强<sup>3</sup>

(1. 悉地国际设计顾问(深圳)有限公司, 深圳 518057; 2. 厦门大学 建筑与土木工程学院, 厦门 361005;  
3. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 4. 华盛顿大学 土木与环境工程系, 西雅图 98195)

**摘要:** 大跨度斜拉桥 Benchmark 问题的振动控制研究是当前国际结构控制研讨会的重要议题之一。以美国 Bill Emerson Memorial 斜拉桥第二阶段 Benchmark 模型为研究对象, 在非线性和随机动力学与控制的拟哈密顿理论体系框架下, 运用基于随机平均法和随机动态规划原理的非线性随机最优 (NSO) 控制策略, 对地震作用下的 Benchmark 模型进行 MATLAB 仿真分析。将最优控制力和性能评价指标与线性二次型 Gauss (LQG) 控制的计算结果进行对比, 得出非线性随机最优控制策略能够更加有效地抑制斜拉桥的地震响应, 提高结构的动力稳定性和抗震能力, 具有更好的控制效果, 对实际桥梁工程的振动控制具有较强的指导意义和适用价值。

**关键词:** 非线性随机最优控制; 地震响应; 斜拉桥; benchmark 模型; LQG 控制

中图分类号: O328; U448.27

文献标志码: A

DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2016.08.007

## Benchmark-problem investigation for seismic response of a large-span cable-stayed bridge based on nonlinear stochastic optimal control

YU You-xi<sup>1,2</sup>, LIU Zhong-hua<sup>2</sup>, YU Xiang-lin<sup>3,4</sup>, WANG Shou-qiang<sup>3</sup>

(1. CCDI Group, Shenzhen 518057, China; 2. School of Architecture and Civil Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China;  
3. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;  
4. Department of Civil & Environmental Engineering, University of Washington, Seattle 98195, USA)

**Abstract:** Investigation of vibration control for benchmark problems on large-span, cable-stayed bridge is one of the most important research topics in the current International Symposium on Structural Control. This paper studied second-stage benchmark problems on the Bill Emerson Memorial cable-stayed bridge. In terms of Hamiltonian theory for nonlinear stochastic dynamics and control, the benchmark model under seismic excitations was investigated using MATLAB simulation analysis, based on the stochastic averaging method and stochastic dynamic-programming principle. Comparison of analysis results for optimal forces and performance-evaluation indices between the nonlinear stochastic optimal (NSO) control strategy and the linear quadratic Gaussian (LQG) control strategy revealed that the former control strategy mitigates the seismic response of the cable-stayed bridge more effectively than the latter, thereby enhancing structural dynamic stability and earthquake resistance. In conclusion, the NSO control strategy demonstrates better control effect and presents instructive references and practical significance for vibration control of bridge-engineering applications.

**Key words:** NSO control; seismic response; cable-stayed bridge; benchmark model; LQG control

随着大跨度桥梁的不断兴建,地震激励下与结构主动控制相关的控制策略应运而生<sup>[1-4]</sup>。其中常见的控制策略包括线性二次型经典最优控制(LQR)、线性二次型 Gauss(LQG) 最优控制、模态控制、 $H_2$ 和  $H_\infty$  控制

等<sup>[5]</sup>。然而,大跨桥梁的地震响应基本呈现多自由度、强非线性随机振动。因此,在 Hamilton 理论体系框架下,朱位秋等<sup>[6]</sup>不断发展并形成了以非线性随机最优(NSO)控制策略为重点的非线性随机动力学与控制理论。尽管非线性随机最优控制研究,包括动态规划方程求解、系统状态部分可观测、控制的时滞与有界性、系统模型与参数的不确定性等问题的研究进展甚微<sup>[7]</sup>,但 NSO 控制策略的出现无疑为解决多自由度强非线性随机振动与控制问题提供了强有力的理论支

基金项目: 福建省青年人才项目(2008F3100)

收稿日期: 2014-12-16 修改稿收到日期: 2015-04-21

第一作者 余友熙 男 硕士 工程师,1986年7月生

通信作者 余香林 男 博士生,1984年3月生

E-mail: 6yux@tongji.edu.cn

撑。且已有结果表明,其控制效果明显优于 LQG 控制<sup>[8-12]</sup>。

以美国 Bill Emerson Memorial 斜拉桥第二阶段 Benchmark 模型为研究对象,在非线性随机动力学拟 Hamilton 系统理论框架下,运用随机平均法和随机动态规划原理对斜拉桥模型进行非线性随机最优控制仿真分析。主要步骤为:先将增广系统即解耦后的模态方程模型转化为  $I\hat{t}$  随机微分方程,再应用分离原理并解决滤波问题将部分可观测随机最优控制问题等价于完全可观测随机最优控制问题,从而可以运用拟可积 Hamilton 系统随机平均法得到随机平均方程,进而通过解动态规划方程得出最优控制率反带回动态规划方程得最后的动态规划方程,并在终值条件下求解最优控制力。将计算得出的性能指标与 LQG 结果进行对比,表明 NSO 控制策略的控制效果比 LQG 控制更佳。

使用斜拉桥雪荷载模型验证了控制策略的鲁棒性,表明总体控制效果相当稳定,有力地提高了大跨斜拉桥的抗震能力。

## 1 大跨度斜拉桥 Benchmark 模型建立

地震激励下斜拉桥第二阶段 Benchmark 问题的研究对象为一座位于美国密苏里州开普吉拉多(Cape Girardeau)的 Emerson Memorial 大桥<sup>[13]</sup>,如图 1 所示。Emerson Memorial 大桥为双塔双面索结构,共计 128 根斜拉索, Illinois 方向引桥为有 12 个桥墩的连续梁桥。全桥长 1 205.8 m,主跨为 350.6 m,主桥边跨为 142.7 m,引桥长 570.0 m。桥塔为 H 型桥塔,桥墩 2 处桥塔高度为 102.4 m,桥墩 3 处桥塔高度 108.5 m,每个桥塔有 64 根斜拉索。

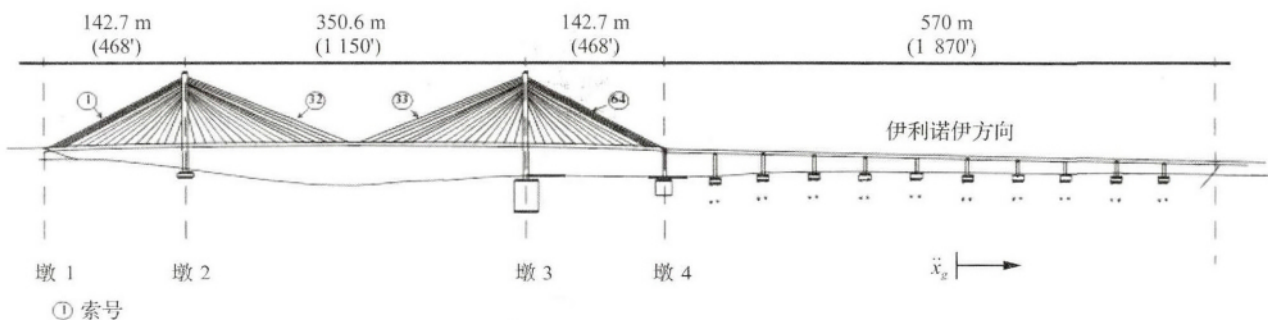


图 1 Emerson Memorial 斜拉桥模型(m)

Fig. 1 Emerson Memorial cable-stayed bridge model(m)

桥面板、桥塔等细部参数详见文献[13]。运用 ABAQUS 软件对 Emerson Memorial 斜拉桥进行非线性静动力分析,有限元模型如图 2 所示。梁和塔采用三维梁单元 B31 模拟,斜拉索采用桁架单元 T3D2 模拟,斜拉索与主梁、主塔之间采用刚性连接。全桥共有 579 个节点,420 个刚性连接,134 个质量节点和 162 个 Beam 单元,

128 个索单元。其中桥塔有 50 个节点,43 个 Beam 单元和 74 个刚性连接。以顺桥向为 X 轴,横桥向为 Z 轴,竖向为 Y 轴。有限元计算模型在墩 2、墩 3 和墩 4 处约束其桥面结构横向位移,在 1 号桥台处仅允许纵向位移和绕 Y、Z 轴的转动。有限元模型不包括 Illinois 方向的引桥,故墩 4 处不限制纵向位移和绕 X 轴的转动。

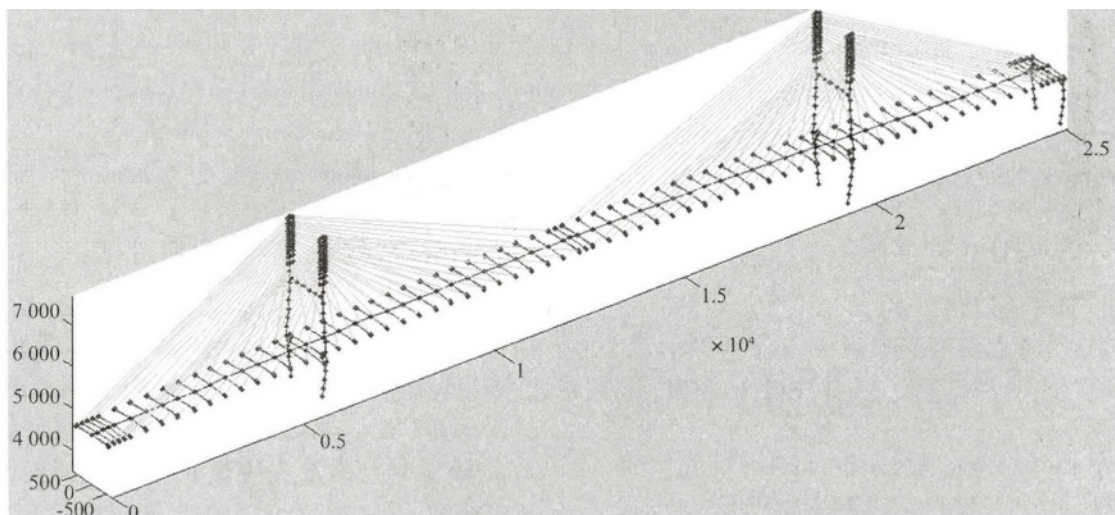


图 2 Emerson Memorial 大桥有限元模型

Fig. 2 Finite element model of Emerson Memorial cable-stayed bridge

在结构上布置 14 个加速度传感器 4 个速度传感器。其中 6 个加速度传感器布置于塔顶 8 个加速度传感器布置于桥面板位置,速度传感器则布置于桥台 II 和桥台 III 与桥面板间。使用 24 个液压控制器来加载径向力,控制器布置位置为:4 个位于桥面板与桥台 1 之间;8 个位于桥面板与桥台 2 之间;8 个位于桥面板与桥台 3 之间;4 个位于桥面板和桥台 4 之间。典型控制器于桥台处的平面示意图如图 3 所示<sup>[13-14]</sup>。控制器所能提供的最大控制力为  $F = 1\ 500\ \text{kN}$ 。

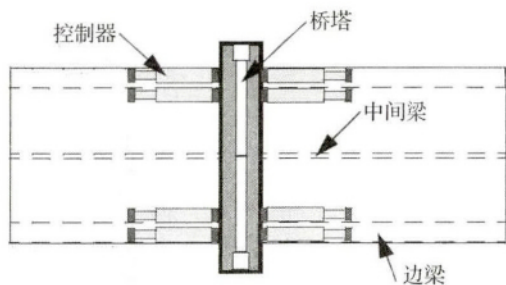


图 3 典型控制器示意图  
Fig. 3 Diagram of typical tower actuator

选取了 4 个降阶模型,降阶后的阶数分别为 323 阶 63 阶 45 阶 23 阶,并选取伯德图与单位阶跃响应曲线与原模型进行比较,伯德图与单位阶跃响应均选择在 1 号桥台处输入,输出取桥塔 II 基础剪力作为比较。通过比较原模型与各降阶模型的幅频曲线和相频曲线发现,323 阶模型和 63 阶模型与原模型曲线吻合得很好,而降阶模型在小于 60 阶之后,幅频曲线与相频曲线则跟原模型发生了比较大的差别,不再符合使用要求,故本文选取 63 阶模型作为最终计算模型。

## 2 非线性随机最优(NSO)控制理论

### 2.1 NSO 控制问题的建立

地震激励下斜拉桥 Benchmark 模型的运动方程<sup>[6]</sup>为

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = -M\ddot{X}_g + AU \quad (1)$$

式中  $M, C, K$  分别为  $n \times n$  系统质量、阻尼及刚度矩阵;  $\Gamma, A$  为地震力与控制力位置矩阵,  $U = [U_1\ U_2\ \dots\ U_k]^T$ ,  $U_j$  为第  $j$  个控制执行机构产生的控制力。

$\ddot{X}_g(t)$  可看成如下线性滤波器对 Gauss 白噪声的响应

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X}_g &= \left( \sum_{j=0}^{r-1} d_j \frac{d^j}{dt^j} \right) f \\ \left( \sum_{j=0}^r c_j \frac{d^j}{dt^j} \right) f &= \sigma(\tau) W(t) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中,  $W(t)$  为单位强度高斯白噪声;  $c_j, d_j$  为常数,与  $a_j, b_j$  之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i_1+i_2=2i} (-1)^{i_1+i_2} c_{i_1} c_{i_2} &= a_i \\ \sum_{i_1+i_2=2i} (-1)^{i_1+i_2} d_{i_1} d_{i_2} &= b_i \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

引入模态变换

$$X = \Phi Q \quad (4)$$

式中  $\Phi$  为  $n \times n$  归一化系统实模态矩阵,式(1)可解耦为

$$\ddot{Q} + 2\xi\Omega\dot{Q} + \Omega^2 Q = -\beta\ddot{X}_g + u \quad (5)$$

式中  $Q = [Q_1\ Q_2\ \dots\ Q_n]^T$  为广义位移矢量,  $\Omega^2 = \text{diag}[\omega_i^2] = \Phi^T K \Phi$ ,  $\omega_i$  为第  $i$  个模态的固有频率,  $2\xi\Omega = \Phi^T C \Phi$ ,  $\xi = \text{diag}[\xi_i]$ ,  $\xi_i$  为第  $i$  个模态的阻尼比,  $\beta = \Phi^T M A$ ;  $u = \Phi^T P U$ ,  $\mu_i$  为第  $i$  个模态的广义控制力。

引入状态向量  $Z = [Q^T\ \dot{Q}^T\ F^T]^T$  与  $F = [f\ \dot{f}\ f^{(r-1)}]^T$ , 增广系统式(2)和(5)可模型化为如下随机微分方程

$$\begin{aligned} dZ &= (AZ + Bu) dt + CdB(t) \\ Z(0) &= Z_0 \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)即为所研究控制问题的受控系统方程。经

模型化后的 Itô 随机微分方程为

$$\begin{aligned} dV &= (DV + Gu) dt + \sigma_1(\tau) dB_1(t) \\ V(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

式中  $dV/dt = [a^T\ d^T]^T B_1(t)$  是  $m$  维标准 Wiener 过程,与  $B(t)$  及  $Z_0$  独立。假设  $\sigma(\tau)$  和  $\sigma_1(\tau)$  分别为常数与常数矩阵,则受控系统有遍历平稳解,且

$$\begin{aligned} D_{(l_1+l_2) \times (2n+r)} &= P_0 \begin{bmatrix} -\Phi\Omega^2 & -2\Phi\xi\Omega & 0 \\ \Phi & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ G_{(l_1+l_2) \times n} &= P_0 \begin{bmatrix} \Phi \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

$D$  为测量矩阵。式(7)即为所研究控制问题的观测方程。

对于半无限长时间区间控制,性能指标为

$$J(u) = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} f(Q, \dot{Q}, u) dt \quad (9)$$

式(5)、(7)及(9)构成一个部分可观测线性系统随机最优控制问题的数学提法。当  $f$  与  $g$  为  $Q, \dot{Q}$  及  $u$  的二次型时,就是一个部分可观测 LQG 控制问题。此处设  $f, g$  为  $Q, \dot{Q}$  的二次型,因而反馈控制将是系统状态的非线性函数。

### 2.2 等价的完全可观测随机最优控制问题

部分可观测随机最优控制问题可通过分离原理转化为完全可观测随机最优控制。系统的状态由给定观测数据  $V(s)$ ,  $0 \leq s \leq t$ , 经 Kalman-Bucy 滤波得到的原系统状态  $Z(t)$  的条件均值  $\hat{Z}(t)$ , 受控系统方程为

$$d\hat{Z} = (A\hat{Z} + Bu) dt + F(t) \sigma_1(t) dB(t)$$

$$\hat{Z}(0) = \hat{Z}_0 \quad (10)$$

式中  $\hat{B}(t)$  为  $m$  维向量标准维纳过程。

$$F(t) = R_e(t) D^T S_a^{-1} \quad (11)$$

$S_a = \sigma_1 \sigma_1^T R_e(t)$  是估计误差  $\tilde{Z} = Z - \hat{Z}$  的协方差矩阵,  $S_c = C C^T$ 。转换后的完全可观测随机最优控制问题的性能指标是原问题性能指标的加权平均, 对有限时间区间无界控制, 有

$$\hat{J}(u) = E \left[ \int_0^{t_f} f(\hat{Q}, \hat{Q}, u) dt + g(\hat{Q}(t_f), \hat{Q}(t_f)) \right] \quad (12)$$

对半无限长时间区间无界控制, 有

$$\hat{J}(u) = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} f(\hat{Q}, \hat{Q}, u) dt \quad (13)$$

### 2.3 随机平均法

式(10)中  $\hat{Q}, \hat{Q}$  的  $2n$  个方程表示一个受控的、随机激励的、耗散的可积 Hamilton 系统, 令

$$\hat{H}_i = (\hat{Q}_i^2 + \omega_i^2 \hat{P}_i^2) / 2, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

它表示第  $i$  个模态能量的条件均值。引入变换

$$\begin{aligned} \omega_i \hat{Q}_i &= \sqrt{2\hat{H}_i} \cos \Theta_i, \\ \hat{P}_i &= -\sqrt{2\hat{H}_i} \sin \Theta_i, \quad \dot{\Theta}_i = \omega_i t + \varphi_i \end{aligned} \quad (15)$$

关于  $\hat{H}_i$  与  $\Theta_i$  的 Itô 方程可由式(10)导出  $d\hat{H}_i$  和  $d\Theta_i$  的表达式见文献[6]。设地面加速度强度、阻尼力及控制力所引起的  $\hat{H}_i$  在振动一周内的增量与  $H_i$  相比更小, 且  $n$  个  $\omega_i$  不满足形如下的共振关系  $k_i \omega_i = o(\varepsilon)$  这里  $k_i$  为小整数  $\rho(\varepsilon)$  表示  $\varepsilon$  阶小量。应用拟可积 Hamilton 系统随机平均法, 得如下随机平均方程

$$d\hat{H}_i = \left[ m_i(\hat{H}_i, \pi) + \left( \frac{\partial \hat{H}_i}{\partial \hat{Q}} u_i \right) \right] dt + \sigma_i(\hat{H}_i, \pi) d\bar{B}_i(t) \quad (16)$$

式中  $\bar{B}_i(t)$  为标准 Wiener 过程, 且

$$m_i(\hat{H}_i, \pi) = -2\xi_i \omega_i \hat{H}_i + \sigma_i^2(\hat{H}_i, \pi) / (2\hat{H}_i) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_i^2(\hat{H}_i, \pi) &= \hat{H}_i \sum_{k=1}^m [\omega_i^2 (F \sigma_1)_{i,k}^2 + (F \sigma_1)_{n+i,k}^2] + \\ &\beta_i^2 \hat{H}_i S_{\hat{X}_g}(\omega, \pi) \end{aligned} \quad (18)$$

式中,  $S_{\hat{X}_g}(\omega, \pi)$  是  $\hat{X}_g$  的条件均值  $\hat{X}_g$  的渐近谱密度

$$\begin{aligned} S_{\hat{X}_g}(\omega, \pi) &= \\ \sigma^2(\tau) &\frac{\left| \sum_{i=0}^{r-1} d_i (j\omega)^i \right|^2 \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^r \left| \sum_{i=i}^r c_i (j\omega)^{i-1} \right|^2 (F \sigma_1)_{2n+i,k}^2}{\left| \sum_{i=0}^r c_i (j\omega)^i \right|^2} \end{aligned} \quad (19)$$

### 2.4 最优控制力

设性能指标为

$$J(\bar{u}) = E \left[ \int_0^{t_f} \hat{f} dt + \hat{g} \right] \quad (20)$$

其中

$$\hat{f} = f_1(\hat{H}) + \bar{u}^T R u \quad \hat{g} = g(\hat{H}(t_f)) \quad (21)$$

式中  $R$  为  $n_1 \times n_1$  正定对称矩阵。

对半无限时间区间无界遍历控制, 可导出如下动态规划方程

$$\begin{aligned} \gamma &= - \inf_u \left\{ f_1(\hat{H}) + \langle \bar{u}^T R u \rangle + \right. \\ &\left( \frac{\partial V}{\partial \hat{H}} \right)^T \left[ m(\hat{H}) + \left( \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{Q}} \bar{u} \right) \right] + \\ &\left. \frac{1}{2} tr \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial \hat{H}^2} \sigma^T(\hat{H}) \sigma(\hat{H}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

式中

$$\gamma = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} [f_1(\hat{H}) + (\bar{u}^*{}^T R \bar{u}^*)] dt \quad (23)$$

由式(22)左边对  $U$  的极小的必要条件得最优控制律

$$\bar{u}^* = - \frac{1}{2} \bar{\Phi}^T P R_p^{-1} P^T \bar{\Phi} \left( \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{Q}} \right)^T \frac{\partial V}{\partial \hat{H}} \quad (24)$$

式中  $R_p = P^T \bar{\Phi} R \bar{\Phi}^T P$  是  $\Phi$  中对应于  $\bar{Z}$  的子模态矩阵。将式(24)代入式(22)中, 得最后动态规划方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \left[ f_1(\hat{H}) + \sum_{i=1}^{n_1} \bar{m}_i(\bar{H}_i, \pi) \frac{\partial V}{\partial \hat{H}_i} - \right. \\ &\left. \frac{1}{4} \bar{\Phi}_i^T P_u \bar{\Phi}_i \bar{H}_i \left( \frac{\partial V}{\partial \hat{H}_i} \right)^2 + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_i^2(\hat{H}_i, \pi) \frac{\partial^2 V}{\partial \hat{H}_i^2} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\gamma = f_1(\hat{H}) + \left[ \sum_{i=1}^{n_1} \bar{m}_i(\bar{H}_i) \frac{\partial V}{\partial \hat{H}_i} - \right.$$

$$\left. \frac{1}{4} \bar{\Phi}_i^T P_u \bar{\Phi}_i \bar{H}_i \left( \frac{\partial V}{\partial \hat{H}_i} \right)^2 + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_i^2(\hat{H}_i) \frac{\partial^2 V}{\partial \hat{H}_i^2} \right] \quad (26)$$

式中  $P_u = P R_p^{-1} P^T$ 。在终值条件下求解式(25)或求解

式(26) 将所得  $\partial V / \partial \hat{H}$  代入式(24) 得最优控制力。式(25)一般需数值求解, 而式(26)有可能求得近似解析解。设

$$\begin{aligned} f_1(\hat{H}) &= s_0 + \sum_{i=1}^{n_1} \hat{H}_i (s_{1i} + s_{2i} \hat{H}_i + \\ &s_{3i} \hat{H}_i^2) + \sum_{i \neq j}^{n_1} s_{2ij} \hat{H}_i \hat{H}_j + \\ &s_{331} \hat{H}_1^2 \hat{H}_2 + s_{332} \hat{H}_1 \hat{H}_2^2 + o(\hat{H}_i \hat{H}_j \hat{H}_k) \end{aligned} \quad (27)$$

则可得如下多项式解

$$V(\hat{H}) = \sum_{i=1}^{n_1} \hat{H}_i [p_{1i} + p_{2i} \hat{H}_i] + \sum_{i \neq j}^{n_1} p_{bij} \hat{H}_i \hat{H}_j \quad (28)$$

式(27)中  $s_{1i}$ 、 $s_{3i}$  及  $s_{2ij}$  可预定, 而其他系数需由式(26)确定。将式(28)代入式(24)得最优控制力, 且知其为非线性的。

### 3 NSO 控制实例分析

在地震力输入时, 需考虑行波效应的影响, 数值模拟时, 考虑地震波传输速度及桥墩基础间的距离, 此处桥台 I 与桥墩 II 距离为 142.7 m, 桥墩 II 与桥墩 III 距离为 350.6 m, 桥墩 III 与桥墩 IV 距离为 142.7 m。考虑地震初始速度为 3 km/s, 则在桥台 I 处先输入地震力, 之后在桥墩 II、桥墩 III 及桥墩 IV 处分别考虑滞后时间为 0.05 s、0.16 s 及 0.20 s。

以模态价值分析准则为依据, 出于完备性准则原理与工作量考虑, 选取前五阶进行随机动态规划控制, 则前五阶模态所占的模态能量占总能量的 90.6%, 基本满足完备性准则, 其相关系数为:  $n_1 = 5$ ,  $\sigma = 10$ ,  $R = 50I_{5 \times 5}$ ,  $s_{1i} = 0.5$ ,  $s_{2i} = 1$ ,  $s_{3i} = 0.8$ ,  $s_{212} = 1$ ,  $s_{213} = 1$ ,  $s_{223} = 1$ ,  $s_{2ij} = 0.5$ ,

$i = 1, 2, \dots, 5, j = 4, 5$ , 其它系数均需由式(26)确定。

为评价控制算法的鲁棒性, 建立了一个替代的相似模型, 将雪荷载的影响考虑在内。雪荷载 50 年重现期为 73.3 kg/m<sup>2</sup>, 则在整个区域上增加 24.4 kg/m<sup>2</sup> 的雪荷载, 桥面板上另加载 97.7 kg/m<sup>2</sup> 的雪荷载, 以此来影响模型的质量矩阵, 大约增加了总质量的 3.5%, 原模型前十阶自然频率为: 0.290, 0.370, 0.468, 0.516, 0.581, 0.649, 0.669, 0.697, 0.710, 0.720。经过变换的相似模型前十阶自然频率为: 0.279, 0.356, 0.449, 0.497, 0.559, 0.623, 0.641, 0.681, 0.682, 0.697 Hz, 与原模型前十阶自然频率相比, 最大的频率振幅为 4.38%。通过对原模型与雪荷载相似模型在地震荷载工况下的控制效果进行比较, 当结构动力特性发生较大变化时, 为确保控制效果仍然有效, 故在振动分析中考虑雪荷载作用, 以评价控制系统的鲁棒性。

19 个性能评价指标的表达式和物理意义见表 1, 基于 LQG 算法和 NSO 算法的 Benchmark 问题分析结果见表 2。

表 1 性能评价指标说明

Tab. 1 Explanation of performance evaluation indices

评价指标	表达式	物理意义	评价指标	表达式	物理意义
$J_1$	$\max \left\{ \frac{\max_{i,j}  F_{bi}(t) }{F_{0b}^{\max}} \right\}$	塔基最大剪力	$J_{11}$	$\max \left\{ \max_{i,j} \frac{\ T_{ai}(t) - T_{0i}\  / T_{0i}}{\ T_{0c}\ } \right\}$	斜拉索索力偏差均方根
$J_2$	$\max \left\{ \frac{\max_{i,j}  F_{di}(t) }{F_{0d}^{\max}} \right\}$	桥面板最大剪力	$J_{12}$	$\max \left\{ \max_{i,j} \left( \frac{f_i(t)}{W} \right) \right\}$	控制装置最大控制力
$J_3$	$\max \left\{ \frac{\max_{i,j}  M_{bi}(t) }{M_{0b}^{\max}} \right\}$	塔基最大弯矩	$J_{13}$	$\max \left\{ \max_{i,j} \left( \frac{ y_i^d(t) }{x_0^{\max}} \right) \right\}$	控制装置最大相对位移
$J_4$	$\max \left\{ \frac{\max_{i,j}  M_{di}(t) }{M_{0d}^{\max}} \right\}$	桥面板最大弯矩	$J_{14}$	$\max \left\{ \frac{\max_i [\sum_i P_i(t)]}{\dot{x}_0^{\max} W} \right\}$	控制所需要瞬时能量
$J_5$	$\max \left\{ \max_{i,j} \frac{ T_{ai}(t) - T_{0i}  / T_{0i}}{T_{0c}^{\max}} \right\}$	斜拉索索力偏差	$J_{15}$	$\max \left\{ \frac{\sum_i \left( \int_0^t P_i(t) dt \right)}{x_0^{\max} W} \right\}$	控制所需总能量
$J_6$	$\max \left\{ \max_{i,j} \left  \frac{x_{bi}(t)}{x_{0b}} \right  \right\}$	1#桥台和 4#桥墩处主梁的 X 方向峰值位移	$J_{16}$	24	作动器数量
$J_7$	$\max \left\{ \frac{\max_i \ F_{bi}(t)\ }{\ F_{0b}(t)\ } \right\}$	塔基处桥塔截面剪力均方根	$J_{17}$	14 个加速度传感器, 4 个速度传感器	传感器数量
$J_8$	$\max \left\{ \frac{\max_i \ F_{di}(t)\ }{\ F_{0d}(t)\ } \right\}$	桥面水平位置处桥塔截面剪力均方根	$J_{18}$	$dim(x_k^i)$	所需的计算机资源
$J_9$	$\max \left\{ \frac{\max_i \ M_{bi}(t)\ }{\ M_{0b}(t)\ } \right\}$	塔基处桥塔截面弯矩均方根	$J_{19}$	$\max \left\{ \max_{i,j} \left  \frac{y_{bi}(t)}{y_{0b}^{\max}} \right  \right\}$	斜拉桥跨中的最大竖向位移
$J_{10}$	$\max \left\{ \frac{\max_i \ M_{di}(t)\ }{\ M_{0d}(t)\ } \right\}$	桥面水平位置处桥塔截面弯矩均方根			



基于 LQG 算法和 NSO 算法的 Simulink 控制仿真模型对比如图 4 所示。5 号控制器的控制力时程图对比如图 5 所示。

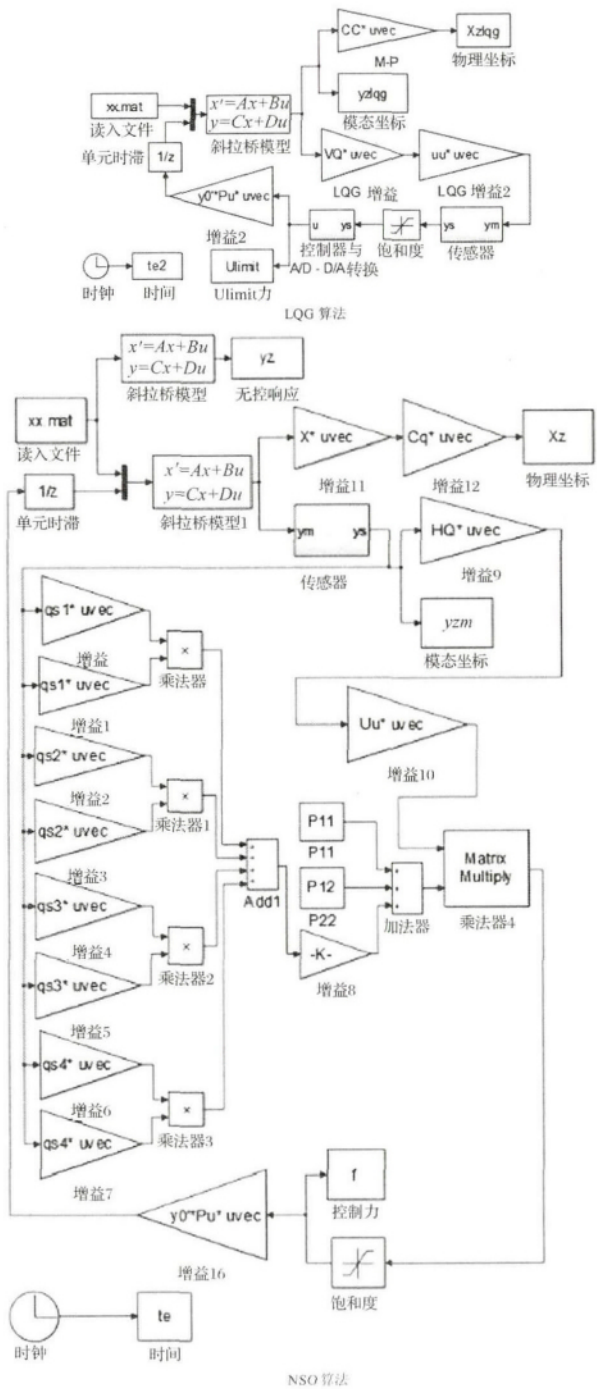


图 4 基于 LQG 算法和 NSO 算法的 Simulink 仿真模型对比  
Fig. 4 Comparison of Simulink models based on LQG and NSO algorithms

### 4 结论

本文围绕大跨度斜拉桥的振动特性,以美国 Bill Emerson Memorial 大桥的第二阶段 Benchmark 模型为研究对象,应用基于拟哈密顿系统随机平均法与动态规划原理的非线性随机最优控制策略,研究其在地震作用下采用 LQG 主动控制与 NSO 控制策略的评价指标并进行对比,得出以下结论:

表 2 Benchmark 问题的性能评价指标分析结果  
Tab. 2 Performance evaluation indices for benchmark problem

性能指标	方向 (不考虑雪荷载时)	NSO 控制	LQG 控制	NSO 控制 (考虑雪荷载时)
$J_1$	X	0.389	0.426	0.403
	Z	0.871	0.897	0.892
$J_2$	X	0.196	0.215	0.187
	Z	0.887	0.7	0.873
$J_3$	X	0.229	0.307	0.302
	Z	0.772	0.882	0.834
$J_4$	X	0.145	0.184	0.231
	Z	0.923	0.71	0.896
$J_5$	-	0.258	0.263	0.219
$J_6$	X	0.368	0.519	0.312
$J_7$	X	0.248	0.291	0.261
$J_8$	Z	1.033	0.775	1.013
	X	0.112	0.124	0.121
$J_9$	Z	0.991	0.72	0.982
	X	0.214	0.255	0.213
$J_{10}$	Z	0.981	0.775	0.986
	X	0.251	0.22	0.231
$J_{11}$	Z	1.058	0.778	1.063
	-	0.091	0.146	0.113
$J_{12}$	X	$2.35 \times 10^{-3}$	$2.10 \times 10^{-3}$	$2.43 \times 10^{-3}$
	Z	0	0	0
$J_{13}$	X	0.368	0.346	0.373
	Z	0	0	0
$J_{14}$	X	$3.63 \times 10^{-3}$	$3.48 \times 10^{-3}$	$3.71 \times 10^{-3}$
	Z	0	0	0
$J_{15}$	X	0.046	0.072	0.051
	Z	0	0	0
$J_{16}$	-	24	24	24
$J_{17}$	-	14	14	14
$J_{18}$	-	10	10	10
$J_{19}$	X	0.238	0.437	0.321

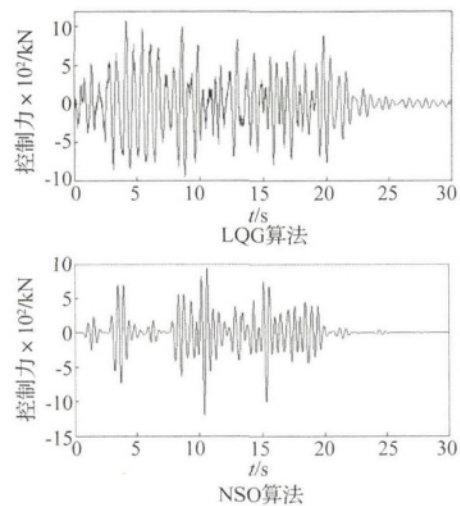


图 5 基于 LQG 算法和 NSO 算法的 5 号控制器控制力时程图对比  
Fig. 5 Comparison of control force time history for No. 5 controller based on LQG and NSO algorithms

(1) 从评价指标可看出,与 LQG 控制方法相比, NSO 控制策略的总体控制效果更佳。

(2) 斜拉桥雪荷载模型验证了控制策略的鲁棒性,表明总体控制效果稳定,有力地提高了大跨斜拉桥的抗震能力。

(3) 对比 NSO 与 LQG 的关于控制器输出的指标(即  $J_{12} \sim J_{15}$ )发现,虽然 NSO 算法所得控制力最大值和瞬时输出功率都较 LQG 算法大,但其总能量输出却比 LQG 算法少,这可以从图 5 看出,两个图均为安装在桥墩 II 与桥面板之间的 5 号控制器的控制力输出时程,控制力峰值前者较后者大,但控制力均值却是后者大,这也保证了在提高控制效率的同时,并未因增加控制器输出而提高整体造价。

(4) LQG 控制仅适用于线性结构系统,而 NSO 控制策略不仅适用于线性结构系统,而且适用于非线性系统。

(5) 从控制资源来看,非线性随机最优控制在主要的 5 个模态的控制资源仅为 10,保证了在实际使用时可以实时地输出计算结果,节省计算时间。

#### 参 考 文 献

- [1] Soong T T. State-of-the-art review: active control in civil engineering [J]. *Engineering Structures*, 1988, 10(2): 74-84.
- [2] Housner G W, Bergman L A, Caughey T K, et al. Structural control: past and present [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1997, 123(9): 897-971.
- [3] Spencer B F, Suhardjo J, Sain M K. Frequency domain optimal control strategies for aseismic protection [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1994, 120(1): 135-159.
- [4] Spencer B F, Timlin T L, Sain M K. Series solution of a class of nonlinear optimal regulators [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1995, 91(2): 321-345.
- [5] 欧进萍. 结构振动控制——主动、半主动和智能控制 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [6] 朱位秋. 非线性随机动力学与控制——Hamilton 理论体系框架 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [7] 朱位秋, 应祖光. 拟哈密顿系统非线性随机最优控制 [J]. *力学进展*, 2013, 43(1): 39-55.
- ZHU Wei-qiu, YING Zu-guang. Advances in research on nonlinear stochastic optimal control of quasi-Hamiltonian systems [J]. *Advances in mechanics*, 2013, 43(1): 39-55.
- [8] Zhu W Q, Ying Z G. Optimal nonlinear feedback control of quasi-Hamiltonian systems [J]. *Science in China Series A*, 1999, 42(11): 1213-1219.
- [9] Zhu W Q, Ying Z G, Soong T T. Optimal nonlinear feedback control of structures under random loading [C]//*Stochastic structural dynamics*, Spencer B F, Johnson E A. Rotterdam: Balkema, 1998: 141-148.
- [10] Zhu W Q, Ying Z G, Soong T T. An optimal nonlinear feedback control strategy for randomly excited structural systems [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2001, 24(1): 31-51.
- [11] Zhu W Q, Ying Z G, Ni Y Q, et al. Optimal nonlinear stochastic control of hysteretic systems [J]. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 2000, 126: 1027-1032.
- [12] Zhu W Q, Ying Z G. Nonlinear stochastic optimal control of partially observable linear structures [J]. *Engineering Structures*, 2002, 24: 333-342.
- [13] Caicedo J M, Dyke S J, Moon S J, et al. Phase II benchmark control problem for seismic response of cable-stayed bridges [J]. *Journal of Structural Control*, 2003, 10(3/4): 137-168.
- [14] Dyke S J, Caicedo J M, Turan G, et al. Phase I benchmark control Problem for seismic response of cable-stayed bridge [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2003, 129(7): 857-872.