

卷积码的活性距离特性及其应用*

魏琴芳¹, 王琳^{1,2}, 余格非¹, 赵春雨¹

(1. 重庆邮电学院 编码技术研究所, 重庆 400065; 2 厦门大学 电子工程系, 福建 厦门 361000)

摘要: 用卷积码的活性距离来分析卷积码的性能是随着分析 Turbo 码的性能而开始的, 卷积码的活性距离是自由距离的扩展, 它主要是由一个参数来决定的, 即活性距离的斜率 α 。在对卷积码的活性距离进行简要介绍后, 主要针对应用 α 对编织卷积码进行优化作出了探讨, 指出了卷积码的活性距离 α 是分析用卷积码作为成员码的组合编码性能的重要参数。这对优化用卷积码作为成员码的组合编码, 降低其编码复杂性有重要作用, 也对推动该类组合码的应用有较高的价值。最后给出了仿真结果。

关键词: 卷积码; 活性距离; 斜率; 组合编码; Woven 卷积码

中图分类号: TN911.22 文献标识码: A 文章编号: 1001-3695(2006)03-0047-03

Characteristic and Application of Convolutional Codes

WEI Q in-fang¹, WANG Lin^{1,2}, YU Ge-fei¹, ZHAO Chun-yu¹

(1. Institute of Compile Code Chongqing University of Posts & Telecommunications Chongqing 400065 China; 2 Dept. of Electronic Engineering, Xiamen University, Xiamen Fujian 361000 China)

Abstract The active distance of the convolutional codes is used to analyse the performance of the convolutional codes with the turbo codes was discovered. The active distance of convolutional codes is the extension of the free distance, and it is determined by the parameter α , viz. the slope of the active distance. The active distance of the convolutional codes are presented in this paper. This paper discusses how to optimize woven convolutional codes. It also points that the parameter α is important to analyse and optimize the performance of combinational codes with convolutional codes as the component codes, which also simplifies the encoding complication. This promotes the application of combined codes. Finally the simulation results are shown.

Key words Convolutional Codes; Active Distance; Slope; Combined Encode; Woven Convolutional Codes

卷积码由于其在编码过程中充分利用了各组信息之间的相关性, 且各组信息位 k_0 和码字长 n_0 也较小, 故在与分组码同样的设备复杂性条件下, 无论从理论上还是从实际上均已证明, 卷积码的性能不比分组码差, 且实现最佳和准最佳译码也比分组码容易。所以, 从信道编码定理来看, 卷积码是一种非常具有应用前景且能达到信道编码定理所提出的码类。在当今 IS95 及 3G 等通信系统中都使用了卷积码。而 1993 年 Berou 等人提出的 Turbo 码是一种组合码类, 它把卷积码作为一种成员码使用, 这种由卷积码并行级联而成的码类在某些参数下可获得接近 Shannon 限的性能^[1]。故而 Turbo 码在移动通信领域中获得了广泛的重视, 特别是在 3G 体制中, 非实时的数据通信广泛采用该码。由于 Turbo 码的优良特性, 使得人们对该码进行了大量的深入研究, 从而对卷积码的认识也更进一步。

卷积码的纠错性能与其自由距离有关, 自由距离越大, 其纠错能力越强。而卷积码的自由距离又与该卷积码的编码器的寄存器个数 m 相关, m 与自由距离成正比。但编码器的复杂性随 m 的增加而增加。所以, 在自由距离和 m 之间需折中考虑^[2,3]。尤其在对 Turbo 码等组合编码进行分析时, 只考虑成员卷积码的自由距离已不够, 需考虑其活性距离。卷积码的

活性距离是其自由距离的扩展, 它主要由其斜率 α 决定, 活性距离的计算较复杂, 详细内容见文献 [2]。

最早的组合类编码是级联码, 最初由 D. Fomey 提出, 他使用两个或更多相对简单的分量码来构成级联码, 其纠错性能与许多非级联的长码相当, 这种级联码在获得低的差错概率方面非常有效, 但编码效率离 Shannon 所指的信道容量相差较大^[4]。1993 年 Bernou 等人提出了 Turbo 码。Turbo 码可看作对级联码的修正, 而 Turbo 码的优异性能很快被业界认同, Turbo 码的编译码的思想也被推广到其他的编码方案中。随后出现的串行级联卷积码不但在低信噪比时保持了 Turbo 码的性能, 且在高信噪比时消除了 Turbo 码的地板效应^[5]。1997 年 Stefan Host 提出了编织卷积码 (Woven Convolutional Codes, WCCs)^[6]。WCCs 是对级联卷积码与 Turbo 码的综合, 级联卷积码及 Turbo 码都可看成 WCCs 的特例^[7]。所以, 这里我们主要介绍用卷积码活性距离参数 α 在对 WCCs 优化中的应用。

较级联码、Turbo 码等码类而言, WCCs 是一类编码复杂性较高的码, 因为它所具有的较优性能, 优化 Woven 卷积码, 降低其编码复杂性就显得比较突出且重要, 这对推动 WCCs 的应用有较高的价值。

1 卷积码的活性距离特性

1.1 卷积码的活性距离

卷积码的活性距离是自由距离的扩展, 它一般只考虑那些

收稿日期: 2005-03-24 修返日期: 2005-05-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60272005); 重庆邮电学院青年教师基金资助项目 (2005-29)

编码器不连续经过两个 0 状态的码字距离。活性距离决定了码的纠错能力, 并且在涉及到以卷积码为成员码的组合类编码时, 活性距离是一个非常重要的参数。

通常, 一个码率 $R = b/c$ ($b \leq c$)、寄存器个数为 m 的卷积码编码器, 其输入信息序列是 b 元二进制序列, $u = \dots u_{-1} u_0 u_1 u_2 \dots$, 其中 $u_i = u_i^{(1)} u_i^{(2)} \dots u_i^{(b)}$ 。输出码字序列是 c 元二进制序列 $v = \dots v_{-1} v_0 v_1 v_2 \dots$, 其中 $v_i = v_i^{(1)} v_i^{(2)} \dots v_i^{(c)}$ 。信息序列与码字序列间的联系与编码器的生成矩阵 G 有关, 即 $v = uG$ 。 G 是一半无限生成矩阵, 其子矩阵 G_i ($0 \leq i < m$) 是二进制 $b \times c$ 阶矩阵, 如式 (1) 所示, 式 (1) 中空白的地方都是 0

$$G = \begin{pmatrix} G_0 & G_1 & \dots & G_m \\ & G_0 & G_1 & \dots & G_m \\ & & G_0 & G_1 & \dots & G_m \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1)$$

卷积码活性距离的讨论是基于卷积码编码器的状态图进行的。控制规范形式^[8]下, 一个码率 $R = b/c$ ($b \leq c$)、寄存器个数为 m 的卷积码编码器对每一个信息序列 u 有相应的编码器状态序列 $\sigma = \dots \sigma_{-1} \sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots$, 这里 σ_i 是一个二进制 $b \times m$ 阶矩阵。设 $S_{[t_1, t_2]}^{\sigma_1, \sigma_2}$ 表示状态序列 $\sigma_{[t_1, t_2]}$ 的集合。 $\sigma_{[t_1, t_2]}$ 表示起始于状态 σ_1 且深度为 t_1 , 终于状态 σ_2 且深度为 t_2 的状态序列, 同时 $\sigma_{[t_1, t_2]}$ 间没有两个连续的 0 状态, 即

$$S_{[t_1, t_2]}^{\sigma_1, \sigma_2} \triangleq \{ \sigma_{[t_1, t_2]} \mid \sigma_{t_1} = \sigma_{t_1}, \sigma_{t_2} = \sigma_{t_2}, (\sigma_i, \sigma_{i+1}) \neq (0, 0), t_1 \leq i < t_2 \}$$

下面介绍活性距离的定义。

一个有理生成矩阵为 $G(D)$, 寄存器个数为 m , 且以控制规范形式实现的卷积码编码器, 它的活性距离的定义如下:

(1) 第 j 阶活性行距

$$a_j^r \triangleq \min_{u \neq 0} \min_{S_{[0, j+1]}^{\sigma_0, \sigma_1}} \{ W_H(u_{[0, j]} G_j^r) \} \quad (2)$$

这里, σ 表示状态 σ_{j+1} 的任何值, 且 $\sigma_{j+1}^{(1)} = u_j \neq 0$,

$$G_j^r = \begin{pmatrix} G_0 & G_1 & \dots & G_m \\ & G_0 & G_1 & \dots & G_m \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & G_0 & G_1 & \dots & G_m \end{pmatrix} \quad \text{是一个对式 (1) 的}$$

$(j+1) \times (j+1+m)$ 截断矩阵, 可见对一个多项式生成矩阵的 j 阶活性行距是与一个长 $j+1$ 的突发信息序列相应的码序列的最小重量。

(2) 第 j 阶活性突发距离

$$a_j^b \triangleq \min_{S_{[0, j+1]}^{\sigma_0, \sigma_1}} \{ W_H(u_{[0, j]} G_j^b) \} \quad (3)$$

这里 $j \geq v_{min}$, v_{min} 是编码器的最小约束长度。且

$$G_j^b = \begin{pmatrix} G_0 & G_1 & \dots & G_m \\ & G_0 & G_1 & \dots & G_m \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & G_0 & G_1 & \dots & G_m \\ & & & & G_0 & \dots & G_{m-1} \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & G_0 \end{pmatrix} \quad \text{是一个 } (j+1) \times (j+1+m)$$

m 的对式 (1) 的截断矩阵。

(3) 第 j 阶活性列距

$$a_j^c \triangleq \min_{S_{[0, j+1]}^{\sigma_0, \sigma_1}} \{ W_H(u_{[0, j]} G_j^c) \} \quad (4)$$

式 (4) 中 σ 表示编码器的任意状态, $G_j^c = G_j^b$ 。

(4) 第 j 阶活性反列距

$$a_j^{rc} \triangleq \min_{S_{[0, j+1]}^{\sigma_0, \sigma_1}} \{ W_H(u_{[0, j+m]} G_j^{rc}) \} \quad (5)$$

$$\text{式中 } G_j^r = \begin{pmatrix} G_m & & & & \\ G_{m-1} & G_m & & & \\ \vdots & \vdots & G_{m-1} & \ddots & \\ G_0 & \vdots & \vdots & \ddots & G_m \\ & G_0 & & & G_{m-1} \\ & & & & \vdots \\ & & & & G_0 \end{pmatrix} \quad \text{是一个对式 (1) 的 } (j+m+1) \times (j+1) \text{ 阶截断矩阵。}$$

(5) 第 j 阶活性段距

$$a_j^s \triangleq \min_{S_{[m, m+j+1]}^{\sigma_1, \sigma_2}} \{ W_H(u_{[0, j+m]} G_j^s) \} \quad (6)$$

σ_1 和 σ_2 都表示编码器的任意状态, $G_j^s = G_j^{rc}$ 。

不难看出, 活性突发距离与活性行距是相关联的, 当式 (1) 中多项式生成矩阵 G 的最小约束长度 $v_{min} = m$ 时, 有 $a_j^r = a_{j+m}^b$ 。且活性突发距离是起始于 0 状态, 终于 0 状态的最小码字序列, 所以有 $\min(a_j^b) = d_{free}$, d_{free} 是卷积码的自由距离。

1.2 卷积码活性距离特性

斜率 α 最早是由 Huth 和 Weber 在文献 [9] 中提出来的, 指的是随着卷积码译码深度 (网格深度) 的增加, 非融合码序列最小汉明距离增长的速度。一般地, α 越大, 距离增长的速度越大, 则卷积码的纠错性能也越好。所以 α 在我们考虑卷积码的纠错性能时是一个非常重要的参数。对一个码率为 R , 寄存器个数为 m 的卷积码编码器, 其活性距离渐进斜率 α 的上、下限为^[9]

$$\frac{1}{m} \leq \alpha \leq \left(\frac{1}{R} - 1 \right) \frac{2^m - 1}{2^m - 1}$$

可见 α 的上、下限都随 m 的增加而减少。通常我们知道, 一个卷积码的自由距离是随其编码器的寄存器个数 m 的增加而增加, 在采用 Viterbi 译码或序列译码时, 自由距离是衡量卷积码的纠错性能的一个重要参数。但是当采用迭代译码时, 仅仅使用自由距离已不能充分描述一个卷积码的纠错性能, 必须借助于卷积码扩展距离——活性距离 (Active Distance) 来进行分析。斜率 α 是确定活性距离上、下限的重要参数。在分析级联卷积码时, 成员卷积码的 α 值决定了该级联卷积码的性能。

由卷积码活性距离的定义, 可知活性行距和活性突发距离有小部分是减函数, 但其整体是非减函数, 而活性列距、反列距及段距都是非减函数。对于非灾难性生成矩阵, 卷积码编码器的活性距离总体上是非减函数, 可以用式 (7) 的仿射函数来表示其下限。式 (7) 中 α 是活性距离的渐进斜率, β 尽可能选大一些^[3]。

$$\begin{cases} a_j^r \geq f^r(j) \triangleq \alpha j + \beta^r \\ a_j^b \geq f^b(j) \triangleq \alpha j + \beta^b \\ a_j^c \geq f^c(j) \triangleq \alpha j + \beta^c \\ a_j^{rc} \geq f^{rc}(j) \triangleq \alpha j + \beta^{rc} \\ a_j^s \geq f^s(j) \triangleq \alpha j + \beta^s \end{cases} \quad (7)$$

自由距离为 d_{free} 的卷积码的活性突发距离 a_j^b 满足

$$a_j^b \geq \max(\alpha j + \beta, d_{free}), \quad \beta \leq d_{free} \quad (8)$$

式 (8) 在斜率 α 和卷积码的纠错性能之间建立一种联系^[3]。

2 卷积码活性距离在 WCCs 中的应用

2.1 WCCs 的编码结构

WCCs 的编码器结构如图 1 所示, 外编码器由 l_0 个码率为

$R_o = b_o / c_o$ 的二进制卷积编码器并联组成, 内编码器由 l_i 个码率为 $R_i = b_i / c_i$ 的二进制卷积编码器并联组成, b_o, c_o 分别为外编码器的信息序列和码字序列, b_i, c_i 分别为内编码器的信息序列和码字序列。当 $l_o = 1$ 且 $l_i \neq 1$ 时为内经结构; 当 $l_o \neq 1$ 且 $l_i = 1$ 时为外经结构; 当 $l_o \neq 1$ 且 $l_i \neq 1$ 同时 l_o 和 l_i 互素时为斜纹结构; 当 $l_o = l_i = 1$ 时则为普通的级联卷积码。

2.2 α 在 WCCs 中的应用

由 Woven 卷积码的编码结构可知, 该码整体可看作几个卷积码, 具有卷积码的特性。当外编码器个数 l_o 足够大时, 整体码字的自由距离满足^[10]

$$d_{free}^{out} \geq d_{free}^o d_{free}^i \quad (9)$$

其中 d_{free}^{out} 为 WCCs 的自由距离, d_{free}^o, d_{free}^i 分别为外码和内码的自由距离。但 l_o 的大小关乎 WCCs 的编码复杂性。如何降低 l_o 而又不影响 WCCs 的纠错性能就成了一个影响 WCCs 的实用问题。

由式 (8) 可知, 我们可以考虑利用最大斜率卷积码去优化 WCCs 的编码器构成。最大斜率卷积码指的是通过计算相同的寄存器个数的卷积码的斜率, 将最大斜率的卷积码挑选出来所组成的一类卷积码。

鉴于篇幅, 本文仅对外经结构的 WCCs 的优化进行讨论。现在考虑 WCCs 的其中一个编码器的输出序列具有两个非零比特的情况。这时, 内编码器的输入序列是以列的方式从缓冲器中读取信息, 这使得两个非零比特被 $l_o - 1$ 个比特分开。如果内编码器具有反馈 (通常都有反馈), 第一个非零比特会使编码器偏离零状态, 而第二个非零比特会使编码器回到零状态。为保证这两个非零比特使得内编码器的输出汉明重量至少为 $2d_{free}^i$, 则 l_o 必须满足

$$l_o \geq (j_{2d_{free}^i}^{b_i} + 1) b_i \quad (10)$$

其中 b_i 表示内编码器输入信息比特的个数, $j_{2d_{free}^i}^{b_i}$ 表示最小的使得 $f^{b_i(j)} \geq 2d_{free}^i$ 的内码网格深度 j (即在计算活性距离时的 j 值)。如果 WCCs 的其中一个编码器的输出序列具有三个或更多的非零比特, 为保证内编码器的输出序列的汉明重量至少为内码的自由距离 d_{free}^i , 即 $J_{free}^o + 1$ 个附加的信息码字保证其活性距离的下限至少增加了 d_{free}^o , J_{free}^o 表示最小的满足式 (11) 的 j

$$\alpha_j \geq d_{free}^o \quad (11)$$

根据式 (10) 和式 (11), 我们可以最终确定出外经形式的 WCCs 的外编码器所需的个数:

$$l_o \geq \max\{ (j_{2d_{free}^i}^{b_i} + 1) b_i, (J_{free}^o + 1) b_i \} \quad (12)$$

该个数能保证式 (9) 成立。

3 仿真结果及结论

卷积码的活性距离的计算较复杂, 在此我们采用寄存器个数 m 相同, 码率为 $R = 1/2$ 的最大斜率卷积码和非最大斜率卷积码为成员码分别作出仿真, 得到结果。

本文采用 $m = 3$ 生成矩阵分别为 $(1 + D + D^3, 1 + D)$ 和 $(1 + D + D^3, 1 + D + D^2 + D^3)$ 为成员码, 用八进制表示分别为 (15 14) 和 (15 17)。内外编码器相同。采用 (15 14) 的编码器时, 外编码器个数为 $l_o = 4$ 采用 (15 17) 的编码器时, 外编码器个数为 $l_o = 16$ 且由计算可知 (15, 14) 的活性距离斜率 $\alpha =$

4/7, 而 (15, 17) 的 $\alpha = 1/2$

在采用上述两个不同卷积码生成矩阵的情况下, 同在 AWGN 信道下, BPSK 调制, 仿真结果如图 2 所示。

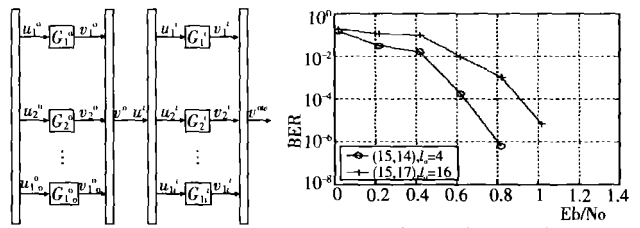


图 1 Woven 编码器结构

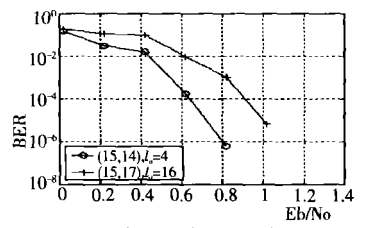


图 2 采用不同生成矩阵和不同外编码器个数的仿真结果

由图 2 可知, 采用有较大斜率 α 的卷积码作为 Woven 卷积码的成员码时可以大大减少外编码器的个数, 从而达到简化 Woven 卷积码编码器的复杂性的目的。

可见, 卷积码的活性距离斜率 α 在优化以卷积码为成员码的组合码类中是一个不可忽略的参数。以卷积码为成员码的组合码类有较优的纠错性能, 但由于其编码器的复杂性较大, 使得这类码型在应用中受到制约, 活性距离的研究将对推动组合码类的应用有较高的价值。

参考文献:

- [1] Claude Berson, Alain Glavieux, et al. Near Shannon Limit Error Correcting Coding and Decoding Turbo Codes [C]. Geneva, Switzerland. Proc. of ICC'93, 1993, 1064-1070.
- [2] Ralph Jordan, Viktor V. Zyablov. Maximum Slope Convolutional Codes [J]. Submitted to IEEE Trans. on Inform. Theory, 2001, (9).
- [3] S. Höst, R. Johannesson, K. Sh. Zigangirov, et al. Active Distance for Convolutional Codes [J]. IEEE Trans. on Information Theory, 1999, IT-45(3): 658-669.
- [4] F. P. F. F. Concatenated Codes [M]. Cambridge, Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 1966.
- [5] S. Benedetto, G. Montorsi. Serial Concatenation of Interleaved Codes: Performance Analysis, Design, and Iterative Decoding [J]. IEEE Trans. on Information Theory, 1998, 44: 909-926.
- [6] S. Höst, R. Johannesson, V. Zyablov. A First Encounter with Binary Woven Convolutional Codes [C]. UK. Proc. Int. Symp. Communication Theory Applications, 1997, 13-18.
- [7] 魏琴芳, 王琳, 罗智勇. 编织码编码原理及其分类 [J]. 无线通信技术, 2004, 13(1): 13-16.
- [8] R. Johannesson, K. Sh. Zigangirov. Fundamentals of Convolutional Coding [M]. IEEE Press, 1999.
- [9] G. K. Huth, C. L. W. eber. Minimum Weight Convolutional Codewords of Finite Length [J]. IEEE Trans. on Information Theory, 1976, IT-22(3): 243-246.
- [10] Stefan Höst, Ralph Jordan, Viktor V. Zyablov. Woven Convolutional Codes I: Encoder Properties [J]. IEEE Trans. on Information Theory, 2002, 48(1).

作者简介:

魏琴芳 (1971-), 女, 云南人, 在职硕士研究生, 主要研究方向为信道编译码技术; 王琳 (1963-), 男, 重庆人, 所长, 教授, 博士, 主要研究方向为宽带无线通信系统, 尤其是信道编译码技术; 余格非 (1977-), 女, 云南人, 硕士研究生, 主要研究方向为信道编译码技术; 赵春雨 (1981-), 女, 重庆人, 主要研究方向为信道编译码及调制技术、信号检测技术。