

# 解决不确定参数问题的模糊算术方法分析\*

李 峰 张建中

(厦门大学信息科学与技术学院信号处理研究所 厦门 361005)

**摘 要:** 对标准模糊运算方法和最近提出的模糊算术转化方法进行了分析和比较, 结合具体算例, 说明了它们的优缺点和适用范围。标准模糊运算方法在进行模糊参数运算时存在严重缺陷, 而转化方法具有较强的适应性, 能够有效解决标准模糊运算方法存在的缺陷, 是分析不确定参量系统的有效工具。

**关键词:** 模糊数 标准模糊算术 转换方法

中图分类号: TP274

## Analysis of Fuzzy Arithmetic Method in Uncertain Parameters Problem

Li Feng Zhang Jizhong

(Signal Processing Institute, School of Information Science and Technology, Xiamen University, Xiamen 361005)

**Abstract:** The standard fuzzy arithmetic method and the transformation method proposed more recently for the analysis of systems with uncertain parameters are investigated. The advantages and drawbacks of the two methods are illustrated by some typical examples. It can be concluded that the transformation method is more effective and suitable for the investigation of systems with uncertain parameters.

**Key words:** fuzzy number, standard fuzzy arithmetic, transformation method

**Class number:** TP274

## 1 引言

模糊算术是解决含有不确定参数工程问题的有效工具。三角形隶属函数模糊算术运算方法是最早提出的用于计算机处理的模糊算术方法<sup>[1]</sup>, 用三角形隶属函数来近似地等效任意形状的模糊数, 使模糊数的表示和算术运算相当简单, 但运算中对隶属函数的多次三角形等效会导致原始模糊数信息的严重失真。目前, 常用离散  $\mu$ -截集表示任意形状隶属函数的模糊数, 根据 Zadeh 的扩展原理 (Extension Principle) 实现模糊数的四则算术运算, 被称为标准(或经典)模糊运算方法<sup>[2]</sup>。该方法要求参加运算的参量要相对独立, 这样, 实际运算中参量之间的非独立性将导致错误的计算结果。最近, M. Hanss 提出了模糊运算的转换方法 (Transformation Method)<sup>[3, 4]</sup>, 它按一定规则, 把模糊数的运算转化成明晰数的计算, 克服了标准模糊运算方法的缺陷, 是解决涉及模糊数运算问题的有效方法。本文结合具体计算实例, 对这些模糊运算方法

进行了深入分析, 指出各自的优缺点和应用中值得注意的问题。

## 2 标准模糊算术方法分析

模糊数的离散表示。隶属函数在纵轴(即  $\mu$  轴)上一定满足  $\mu \in [0, 1]$ , 如图 1 所示, 将纵轴的  $[0, 1]$  区间等间距划分成  $m$  段, 每段长度为  $\Delta\mu =$

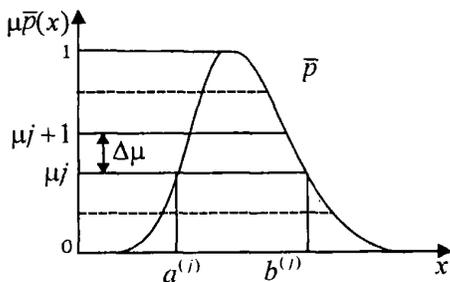


图 1 模糊数  $\tilde{p}$  的离散化

$1/m$ , 对应的参量区间为  $[a^{(j)}, b^{(j)}]$ , 其中,  $a^{(j)} \leq b^{(j)}$ ,  $\mu_j = \mu_{j-1} + \Delta\mu$  ( $j = 1, \dots, m$ ), 且  $\mu_0 = 0, \mu_m = 1$ 。这样, 任意一个模糊数  $\tilde{p}$  就可以用对应截集

\* 收到本文时间: 2005 年 6 月 7 日

基金项目: 1 厦门大学信息 985 二期创新平台项目

2 福建省自然科学基金项目(D0310001)资助

的一组参量区间表示为:

$$\tilde{p} = \{[a^{(0)}, b^{(0)}], [a^{(1)}, b^{(1)}], \dots, [a^{(m)}, b^{(m)}]\}$$

模糊数的四则运算法则。设有两个模糊数  $\tilde{p}_1 = \{[a_1^{(0)}, b_1^{(0)}], [a_1^{(1)}, b_1^{(1)}], \dots, [a_1^{(m)}, b_1^{(m)}]\}$  和  $\tilde{p}_2 = \{[a_2^{(0)}, b_2^{(0)}], [a_2^{(1)}, b_2^{(1)}], \dots, [a_2^{(m)}, b_2^{(m)}]\}$ , 根据 Zadeh 的扩展原理, 在截集  $\mu_j (j = 0, 1, \dots, m)$  上的四则运算公式如下:

$$(\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^{\mu_j} = [a_1^{(j)}, b_1^{(j)}] + [a_2^{(j)}, b_2^{(j)}] = [a_1^{(j)} + a_2^{(j)}, b_1^{(j)} + b_2^{(j)}]$$

$$(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2)^{\mu_j} = [a_1^{(j)}, b_1^{(j)}] - [a_2^{(j)}, b_2^{(j)}] = [a_1^{(j)} - a_2^{(j)}, b_1^{(j)} - b_2^{(j)}]$$

$$(\tilde{p}_1 \square \tilde{p}_2)^{\mu_j} = [a_1^{(j)}, b_1^{(j)}] \square [a_2^{(j)}, b_2^{(j)}] = [\min(a_1^{(j)} a_2^{(j)}, a_1^{(j)} b_2^{(j)}, b_1^{(j)} a_2^{(j)}, b_1^{(j)} b_2^{(j)}), \max(a_1^{(j)} a_2^{(j)}, a_1^{(j)} b_2^{(j)}, b_1^{(j)} a_2^{(j)}, b_1^{(j)} b_2^{(j)})]$$

$$(\tilde{p}_1 \oslash \tilde{p}_2)^{\mu_j} = [a_1^{(j)}, b_1^{(j)}] \oslash [a_2^{(j)}, b_2^{(j)}] = [\min(a_1^{(j)} / a_2^{(j)}, a_1^{(j)} / b_2^{(j)}, b_1^{(j)} / a_2^{(j)}, b_1^{(j)} / b_2^{(j)}), \max(a_1^{(j)} / a_2^{(j)}, a_1^{(j)} / b_2^{(j)}, b_1^{(j)} / a_2^{(j)}, b_1^{(j)} / b_2^{(j)})]$$

其中,  $0 \notin [a_2^{(j)}, b_2^{(j)}]$ 。

若把在各个  $\mu_j (j = 0, 1, \dots, m)$  上的模糊运算结果重构在一起, 就得到该模糊运算结果的隶属函数。

下面举例说明标准模糊算术运算的缺陷。

例 1. 已知函数为  $f(\tilde{p}) = \tilde{p}^3 - 7\tilde{p} - 6$ , 为简单起见, 设输入为三角形模糊数  $\tilde{p} = \langle 2, 3, 4 \rangle$ , 试求系统输出。

解:  $f(\tilde{p}) = \tilde{p}^3 - 7\tilde{p} - 6 = \tilde{p}(\tilde{p}^2 - 7) - 6 = (\tilde{p} + 1)(\tilde{p} + 2)(\tilde{p} - 3)$

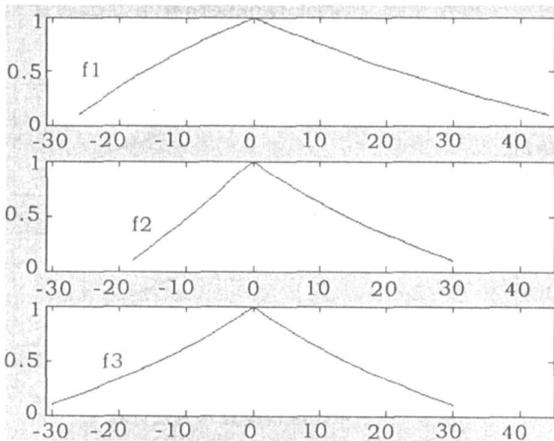


图 2 标准模糊运算方法计算的例 1 输出结果

对  $\tilde{p}$  的隶属函数采用  $\mu_j$  截集水平分割离散, 隶属度分成  $m = 10$  段。把  $\tilde{p}$  分别代入上式的不同表达式  $f(\tilde{p}) = \tilde{p}^3 - 7\tilde{p} - 6, f(\tilde{p}) = \tilde{p}(\tilde{p}^2 - 7) - 6, f(\tilde{p}) = (\tilde{p} + 1)(\tilde{p} + 2)(\tilde{p} - 3)$  中, 模糊计算结果分

别如图 2 中的  $f_1, f_2$  和  $f_3$  所示。实际上,  $\tilde{p}$  在  $[2, 4]$  范围内取值,  $f(\tilde{p})$  是单调递增函数, 其实际模糊范围应为  $[-12, 30]$ , 可见, 这三个计算结果都比实际范围偏大。

例 2. 设函数为  $g(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \frac{\tilde{p}_1 \tilde{p}_2}{\tilde{p}_1}$ , 输入为  $\tilde{p}_1 = \langle 1, 2, 3 \rangle, \tilde{p}_2 = \langle 4, 5, 6 \rangle$ , 求输出。

解: 隶属度分成  $m = 10$  段, 标准模糊算术方法的计算结果如图 3 中的  $g_1$  所示。由于  $\tilde{p}_1 \neq 0$ , 系统函数可直接化简为  $g(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \frac{\tilde{p}_1 \tilde{p}_2}{\tilde{p}_1} = \tilde{p}_2$ , 如图 3 中的  $g_2$  所示, 这应是实际输出, 可见, 标准模糊算术方法的计算结果  $g_1$  与实际相差很远。

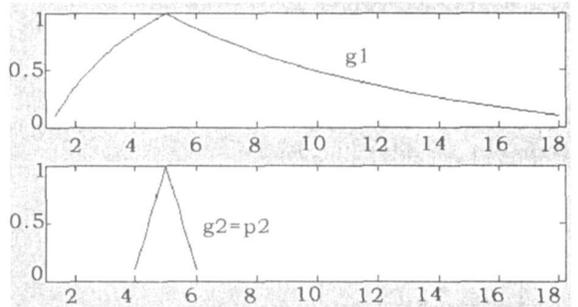


图 3 例 2 中标准模糊算术方法计算结果  $g_1$  与实际输出  $g_2$  的比较

从这二个实例看出, 对于同一个函数, 用标准模糊算术方法计算的结果, 随着采取的计算步骤的不同而不同。这是因为标准模糊四则运算默认了一个前提, 即参与每步运算的参量之间是相互独立的, 而在此二例的计算过程中, 这个前提条件是不满足的。如计算例 1 中的  $f(\tilde{p}) = (\tilde{p} + 1)(\tilde{p} + 2)(\tilde{p} - 3)$  时, 把  $(\tilde{p} + 1), (\tilde{p} + 2)$  和  $(\tilde{p} - 3)$  当作相互独立的量进行运算, 从而导致计算结果比实际的模糊度大得多; 而事实上, 这三个量都是  $\tilde{p}$  的函数, 它们之间是相关的。同样, 例 2 中的  $\tilde{p}_1 \tilde{p}_2$  和  $\tilde{p}_1$  也是两个相关的量。可见, 实际使用标准模糊算术方法时, 应该保证参与各步运算的参量之间的独立性, 但这对实际复杂系统却是不太容易满足的。这是标准模糊算术方法的缺陷, 也是常被忽视和应引起注意之处。

### 3 模糊算术的转换方法分析

为了克服标准模糊算术方法在处理实际问题时存在的缺陷, M. Hanss 提出了模糊运算的变换方法<sup>[3, 4]</sup>, 把模糊数的运算转化成明晰数的计算。该方法的基本思想是, 把模糊数按截集离散化, 把各个截集对应的参量区间的上、下界转换构成一定的

序列, 然后对各模糊数对应的序列元素按明晰数实施常规的算术运算, 再把各运算结果重新构成离散隶属函数, 便可获得所求结果。具体算法如下:

假设系统函数为  $\tilde{q} = f(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n)$ , 其中,  $\tilde{p}_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为模糊参量,  $\tilde{q}$  为系统输出的模糊量。如图 1 所示, 按照截集离散各模糊量隶属函数。每个模糊参量由  $\mu_j$  截集区间的集合表示为:  $\tilde{p}_i = \{X_i^{(0)}, X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(m)}\}$ , 其中,  $X_i^{(j)} = [a_i^{(j)}, b_i^{(j)}], a_i^{(j)} \leq b_i^{(j)}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m; \tilde{q} = \{Z^{(0)}, Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)}\}$ , 其中,  $Z^{(j)} = [a^{(j)}, b^{(j)}], a^{(j)} \leq b^{(j)}, j = 1, 2, \dots, m$ 。

在每个截集  $\mu_j (j = 1, 2, \dots, m)$  上, 由  $X_i^{(j)}$  得到下列形式的转换序列  $\hat{X}_i^{(j)}$ :

$$\hat{X}_i^{(j)} = (Y_{1,i}^{(j)}, Y_{2,i}^{(j)}, \dots, Y_{(m+1-j),i}^{(j)}, \dots, Y_{1,i}^{(j)}, Y_{2,i}^{(j)}, \dots, Y_{(m+1-j),i}^{(j)})$$

其中,  $Y_{l,i}^{(j)} = \underbrace{(c_{l,i}^{(j)}, \dots, c_{l,i}^{(j)})}_{(m+1-j)^{m-i} \text{ 个元素}}$

且,  $C_{l,i}^{(j)} = \begin{cases} a_i^{(j)} & l = 1; j = 0, 1, \dots, m \\ \frac{c_{l,i}^{(j+1)} + c_{l,i}^{(j+1)}}{2} & l = 2, 3, \dots, m-j; j = 0, 1, \dots, m-2 \\ b_i^{(j)} & l = m-j+1; j = 0, 1, \dots, m \end{cases}$

式中  $a_i^{(j)}$  和  $b_i^{(j)}$  为第  $i$  个模糊参量对应  $\mu_j$  截集的参量区间的上、下界。

在每个截集  $\mu_j (j = 1, 2, \dots, m)$  上, 系统输出的转换序列  $\hat{Z}^{(j)}$  为:

$$\hat{Z}^{(j)} = (z_{i,1}^{(j)}, z_{i,2}^{(j)}, \dots, z_{i,(m+1-j)}^{(j)})$$

式中,  $z_{i,k}^{(j)} = f(k_{X_1}^{(j)}, k_{X_2}^{(j)}, \dots, k_{X_n}^{(j)}, k = 1, 2, \dots, (m+1-j)^n, k_{X_1}^{(j)}$  表示转换序列  $\hat{X}_i^{(j)}$  的第  $k$  个元素。

在每个截集  $\mu_j (j = 1, 2, \dots, m)$  上用  $\hat{Z}_i^{(j)}$ , 重构  $Z^{(j)} = [a^{(j)}, b^{(j)}]$ , 重构的递推公式如下:

$$a^{(j)} = \min_k (a^{(j+1)}, z_{i,k}^{(j)}), b^{(j)} = \max_k (b^{(j+1)}, z_{i,k}^{(j)}), j = 0, 1, \dots, m-1;$$

$$a^{(m)} = \min_k (z_{i,k}^{(j)}) = \max_k (z_{i,k}^{(j)}) = b^{(m)}, j = m。$$

现在用算例说明转换方法的优点。在例 1 中, 取  $\tilde{q}_1 = \tilde{p}^3 - 7\tilde{p} - 6, \tilde{q}_2 = \tilde{p}(\tilde{p}^2 - 7) - 6, \tilde{q}_3 = (\tilde{p} + 1)(\tilde{p} + 2)(\tilde{p} - 3)$ , 分别用转换方法求解的结果如图 4 所示, 三个相同, 且与实际的模糊范围  $[-12, 30]$  完全一致。用转换方法计算例 2 的结果如图 5 所示, 与实际范围完全吻合。

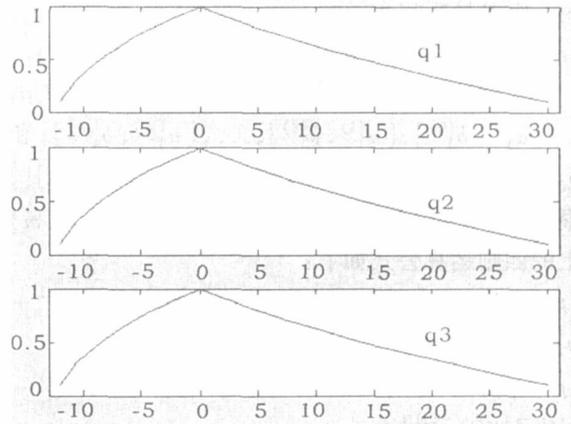


图 4 转换方法计算的例 1 的输出结果

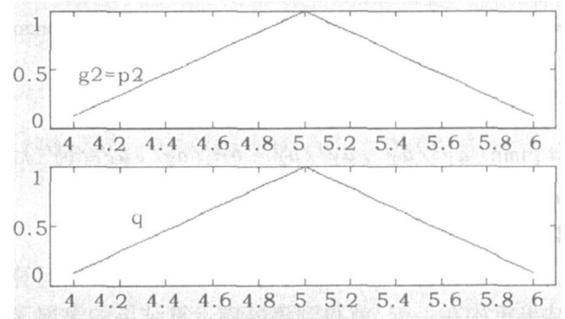


图 5 例 2 中转换方法计算结果 q 与实际输出 g2 的比较

例 3. 已知函数为  $h(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3) = \frac{\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2}{\tilde{p}_3}$ , 输入参量为  $\tilde{p}_1 = \langle 1, 2, 3 \rangle, \tilde{p}_2 = \langle 4, 5, 6 \rangle, \tilde{p}_3 = \langle 7, 8, 9 \rangle$ , 用标准模糊算术方法计算的函数值  $h_1$  和用转换方法求得的结果  $h_2$  见图 6, 两种结果一致, 这是由于各输入参量相互独立, 满足标准模糊算术方法前提条件的缘故。

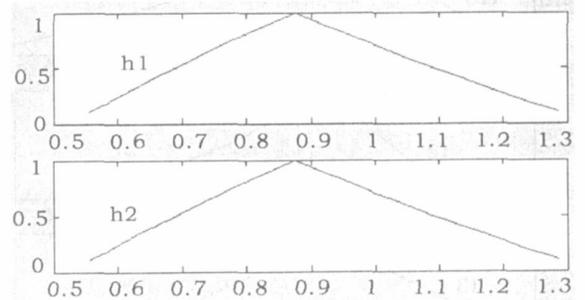


图 6 例 3 中标准模糊算术方法计算结果 h1 与转换方法计算结果 h2 的比较

### 4 结论

标准模糊算术方法要求运算参量之间相互独立, 当运算参量不满足这样的条件时, 将会导致不正确的结果。这是标准模糊算术 (下转第 24 页)

算法和定点 DIF DCT 算法。但是由于定点 DIF DCT 算法包含取整误差,影响图像质量。因此提出了一种简单又可行的方法——帧内编码。另外,本文在理解 C6000C/ C++ 编译器的基础上,利用编译器反馈回来的信息不断修改源程序,优化 DSP 结构和编译器的性能。最后实验结果得出,我们可以对 20 帧每秒的 QCIF 图像进行编码,解码的速度为 25 帧每秒。

#### 参考文献

- [1] ITU-T Study Group 16, Video Coding for Low Bit Rate Communication, 1998.
- [2] Texas Instruments “TMS320C6x Technical Brief.” Texas Instruments, 1999.

- [3] Texas Instruments “TMS320C6000 Programmer’s Guide” Texas Instruments, 1999
- [4] 李方惠、王飞,《TMS320C6200 系列 DSPS 原理与应用》[M]. 电子工业出版社
- [5] K. R. Rao and R. Yip, Discrete Cosine Transform— Algorithms, Advantages, Applications, Academic Press, 1990.
- [6] C. Cote, B. EroI, M. Gallant, and F. Kossentini “H.263+ : Video Coding at Low Bit Rates” [J]. IEEE Trans. Circuit Syst., video Technol., 1998, 8(7): 849~ 866
- [7] K. Wong, K. Lam, and W. Siu, “An efficient low bit-rate video-coding algorithm focusing on moving regions” [J]. IEEE Trans. Circuits Syst. Video Technol., 2001, 11(10): 1128~ 1134

(上接第 20 页)

方法在解决实际问题时的严重缺陷。模糊算术的转换方法,把模糊数的运算转化成明晰数的运算,与标准模糊算术方法相比增加了计算量,但它克服了标准模糊算术方法的缺陷,具有较强的适应性,是进行模糊信息处理,解决不确定参数问题的有效手段。

#### 参考文献

- [1] Anile A M, Deodato, S, Privitera G. Implementing fuzzy arithmetic [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 72(3): 239~

250.

- [2] Klir G J. Fuzzy arithmetic with requisite constraints [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 91 (2): 165~ 175.
- [3] Hanss M. The transformation method for the simulation and analysis of systems with uncertain parameters [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 130(3): 277~ 289.
- [4] Hanss M. The extended transformation method for the simulation and analysis of fuzzy-parameterized models [J]. International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-based Systems, 2003, 11 (6): 711~ 727.