

# 蒙特卡洛仿真在移动通信中的应用研究

庄铭杰

(厦门大学物理系,厦门 福建 361005;集美大学信息工程学院,厦门 福建 361021)

**摘要:**蒙特卡洛法的实质是利用服从某种分布的随机数来模拟现实系统中可能出现的随机现象。该文首先给出了如何利用蒙特卡洛(Monte - Carlo,简称 MC)法来近似地描述研究对象的概率分布的一般方法;然后利用这一工具重点地研究如何模拟移动通信中的高斯(正态)、Reyleigh、Rice 和 Nakagami - m 等四种常见的随机分布。在此基础上,该文详细地介绍了如何利用蒙特卡洛法对 AWGN 信道上的 QPSK 通信系统的传输特性进行仿真,同时也给出了 16PSK 系统的仿真结果。由于 MC 法是一种随机计算机模拟试验,其仿真精度与仿真次数有关。论文以 AWGN 信道的 QPSK 通信系统为例,用 MC 法仿真 QPSK 比特误码率 BER 随仿真次数变化曲线,并与理论值曲线做比较。仿真结果表明:在通信系统中,若仿真次数(或系统发送符号序列数)大于 5000,MC 仿真精度能基本满足工程上的要求。该文提供的方法对那些缺乏通信仿真软件的通信工作人员有一定的参考作用。

**关键词:**蒙特卡洛仿真;随机分布;比特误码率;加性白高斯噪声;通信信道

**中图分类号:**TP391.9 **文献标识码:**A

## Application of Monte - Carlo Simulation in Mobile Communications

Zhuang Ming - jie

(Dept. of Physics, Xiamen University, Xiamen, China 361005;  
Information Technology College, Jimei University, Xiamen, China, 361021)

**ABSTRACT:**The essence of Monte - Carlo Simulation is that using the random variable of certain known stochastic distribution to simulate the stochastic phenomena of possible appearance in the real world. Firstly, the paper presents how to simulate approximately the common method of probability distribution of the research objects with Monte - Carlo (MC). Then using the simulation tool, the produce of four frequent stochastic distributions on the mobile communication, which are Gaussian (normal), Reyleigh, Rice and Nakagami, is mainly examined. On the foundation, the paper describes in detail how to simulate QPSK's transmission performance of the communication system on the additive white Gaussian noise (AWGN) channel based on MC method. Meanwhile, the paper also presents the simulation results of 16 - PSK. The simulation accuracies of MC method relate with the numbers of simulation, the paper gives an example of QPSK communication system on the AWGN channel, and the simulation curves of its bit probability of errors (BER) in pace with increase of MC simulation numbers are showed, and its comparative curve of theory value is also presented. The result shows that the simulation accuracies of MC method can basically meet the requirement of the engineering on the communication systems if the numbers of simulation are more than 5000. The new method has a reference value for those communication workers who are short of professional simulation software of communication.

**KEY WORDS:** Monte - Carlo simulation; Stochastic distribution; Bit probability of errors (BER); Additive white Gaussian noise (AWGN); Communication channel

### 1 引言

蒙特卡洛仿真如今已是数字模拟试验的一种专用术语,它产生于二战期间的原子能实验中,因为它成功地解决了中

子裂变问题,故此后被世人加以推广和应用。蒙特卡洛仿真通常被应用于那些无法或难于用数学理论方法解决的随机过程场合。在移动通信中,时变的、随机变化的无线通信信道就属于这种情况。

MC 法的实质是利用服从某种分布(通常在计算机中都

收稿日期:2003-08-27

有一个均匀数的发生函数,它能在(0,1)间产生均匀的、连续的(数值)的随机数来模拟现实系统中可能出现的随机现象,由于每次仿真试验仅能描述所考察系统出现的一种可能状态,故若能进行大量次数的仿真试验,就能得到与现实所期望的情况相一致的统计结果。

就移动通信系统而言,有不少文献采用蒙特卡洛仿真法,归纳起来有两种情况,一是利用MC法对某一具体问题仿真;二是利用现成的仿真软件对所研究问题进行仿真。但这些文献基本上没有对如何使用此方法做出说明,而如何利用MC法的文献也是很难找到。居于此,本文首先从计算机提供的均匀随机数发生器出发,介绍蒙特卡洛仿真法的一般原理,并以指数随机分布为例说明其实现过程;然后,重点地介绍如何利用MC法实现无线移动通信中的高斯正态、Rayleigh、Rice、Nakagami-m等四种常见的随机分布,并给出仿真结果。为了达到用MC法来仿真通信系统,本文选择了在无线通信中应用广泛的加性白高斯噪声(AWGN)信道和MPSK调制为例说明如何实现通信系统的仿真,仿真结果和理论值是基本一致的。考虑到仿真精度与试验次数成正比,为了满足一般工程上的要求,本文以QPSK为例,在AWGN信道上对QPSK信号的传输BER用MC法进行仿真,仿真结果与理论值比较显示:当数字传输符号序列数大于5000时,能基本满足要求,这一结果与文献[4]是相一致的。

## 2 蒙特卡洛仿真法的一般原理

在实际中,常常用随机数发生器来仿真类似于噪声信号的效果,以及在物理世界遇到的其他随机现象,在电子器件和系统中存在这一类噪声而且这些噪声通常限制了远距离通信和在相对微弱信号中检测信号的能力,利用在计算机上产生的这类噪声,就有可能通过通信系统的仿真实来研究噪声的影响,并估计在噪声存在下系统的性能。

### 2.1 均匀随机数发生器

大多数计算机的软件库中都包含着一个均匀随机数发生器,它以等概率产生在0和1之间的一个数,这个随机数发生器的输出是一个随机变量,其取值为 $0 \leq A < 1$ 。从实际应用角度看,可近似地认为计算机在(0,1)内能输出的数位足够大,以至于它可以产生(0,1)间的任何连续值。

### 2.2 给定概率分布函数(PDF)的随机变量的产生方法

均匀随机数发生器能产生随机变量范围为 $0 \leq A < 1$ ,其概率密度函数 $p_A(a) = 1$ ,由于随机变量A的概率分布函数(CDF)取值范围为 $0 \leq F(a) < 1$ ,故可以用此随机数发生器均匀地生成任意CDF的值。在已知该PDF的情况下,反求该随机过程的随机变量(即样本值)。如某随机过程,其随机变量X的PDF为

$$p_X(x) = \frac{1}{b_0} e^{-x/b_0} \quad x \geq 0 \quad (1)$$

那么,它的CDF为

$$F(X) = P(x \leq X) = \int_0^x p_X(x) dx = 1 - e^{-x/b_0} \quad X \geq 0 \quad (2)$$

由于 $F(X) \in [0,1]$ ,其概率取值显然决定于X的取值,而X取值概率又应服从 $p_X(x)$ 的指数分布,这样我们自然会想到用均匀随机数发生器在[0,1]间随机生成一个数,以该数作为 $p_X(x)$ 的概率,从而得到随机变量X。故有 $A = F(X) = 1 - e^{-X/b_0}$ ,即

$$X = b_0 \ln(1/(1-A)) \quad (3)$$

图1是用计算机按(3)式仿真得到200抽样点的指数随机分布的样本值生成序列。

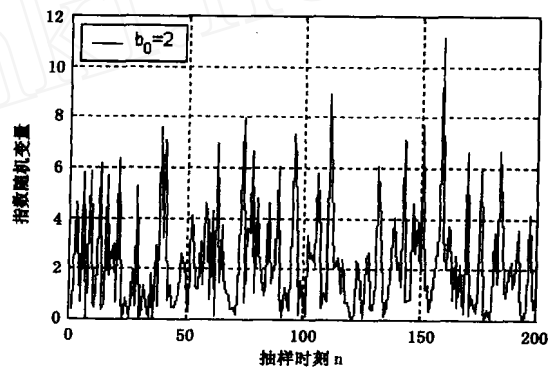


图1 蒙特卡洛法生成指数分布的随机变量序列

因此,用(0,1)内均匀分布随机变量可用来产生具有其它概率分布函数的随机变量,一般方法是:假设想产生一个随机变量C,其概率分布函数 $F(C)$ ,由于 $0 \leq F(C) < 1$ ,故可事先在(0,1)内均匀产生一个随机变量A, $F(C) = A$ 求反函数得 $C = F^{-1}(A)$ ,这样就解出具有 $F(C) = A$ 的C值,重复这一步骤,就求得具有CDF为 $F(C)$ 的一系列新的随机变量C。

## 3 MC仿真实现无线通信信道中常用的随机分布

一般多径衰落信道都是乘性衰落分布和加性噪声的混合模型,其中常见的多径衰落模型有Rayleigh、Rice和Nakagami-m三种统计模型,加性噪声一般是零均值,方差为 $N_0/2$ 的高斯(Gauss)分布,这部分我们主要研究如何用均匀随机数发生器来生成这四种分布的随机变量序列。

### 3.1 Rayleigh和Gauss分布

Rayleigh分布的PDF为

$$p_R(r) = \frac{r}{2} e^{-r^2/2}, \quad r \geq 0, \quad \sigma^2 \text{ 是高斯分布方差,其CDF为}$$

$$F(R) = p(r \leq R) = 1 - e^{-R^2/2}, \quad R \geq 0.$$

用均匀随机数生成A可求得R,令 $A = F(R) = 1 - e^{-R^2/2}$ ,所以

$$R_{Ray} = \sqrt{2 \ln \left( \frac{1}{1-A} \right)} \quad (4)$$

对 Gauss 分布,其 PDF 为  $f(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-r^2/2}$ ,  $-\infty < r < \infty$

,它的 CDF 为

$$F(R) = P(r \leq R) = \int_{-\infty}^R f(r) dr = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^R e^{-r^2/2} dr \quad (5)$$

显然上式积分无法用简单函数表示,因而也很难完成  $F(R)$  的反函数,不过,高斯分布可用 Rayleigh 分布来表示,令  $C, D$  是一对 Gauss 随机变量,

$$C = R \cos \theta, D = R \sin \theta \quad (6)$$

式中  $R$  是 Rayleigh 分布的,在  $(0, 2\pi)$  内均匀分布, $C, D$  方差为  $\sigma^2$ 。 $R$  由(4)式生成,而  $\theta$  可用第 2 个均匀分布随机变量  $B$  来生成,定义

$$\theta = 2\pi B \quad (7)$$

这样利用式(4)和式(7)就可求得式(6)两统计独立的 Gauss 分布的随机变量  $C, D$ ,图 2、3 是用计算机仿真生成的具有 Gauss 和 Rayleigh 分布的随机变量序列。

### 3.2 Rice 和 Nakagami - m 分布

Rice 是多径散射环境中存在视距 (LOS) 分量的统计模型,它的 PDF 为

$$p(r) = \frac{r}{2} e^{-(r^2+A^2)/2} I_0\left(\frac{rA}{2}\right) \quad (8)$$

式中  $\sigma^2$  是高斯分布方差, $A$  是 LOS 幅度, $I_0(x)$  是第一类零阶

$$F(R) = P(r \leq R) = \begin{cases} F_1(R) = \frac{1}{2} \left[ 1 + K + \frac{K^2}{2} \right] - \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{K(R^2+2\sigma^2)}{2} + \frac{K^2(R^4+4\sigma^2 R^2+8\sigma^4)}{16\sigma^2} \right] e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}}, R \leq R_0 \\ F_2(R) = \begin{cases} F_1(R_0) + D [ \text{erf}(1.1\sqrt{K} - 1.25/\sqrt{K}) - \text{erf}(1.1\sqrt{K} - R/\sqrt{2}) ] & R_0 \leq R \leq R_1 \text{ and } R_1 > R_0 \\ F_1(R_0) + D [ \text{erf}(1.1\sqrt{K} - 1.25/\sqrt{K}) + \text{erf}(R/\sqrt{2} - 1.1\sqrt{K}) ] & R > R_1 \end{cases} \end{cases} \quad (10)$$

式中  $D = \frac{\sqrt{e^{-0.21K}}}{3.8\sqrt{K}}$ ,  $F_1(R_0) = e^{-\frac{R_0^2}{2\sigma^2}} \left[ 1 + K + \frac{K^2}{2} \right] - \left[ 3.172 + 1.781K + \frac{K^2}{2} \right] e^{-K-1.563/K}$ , 而  $\text{erf}(x)$  是误差函数,  $R_0 = 2.5\sigma^2/A$ 。令  $F(R) = A$ , 利用计算机迭代法可求得  $F(R) - A = 0$  的随机变量  $R$ ,图 4 是用蒙特卡洛法生成 Rice 分布的随机变量序列。而 Nakagami - m 分布的 PDF 为

$$P_R(r) = \frac{2}{(m)} \left( \frac{m}{2} \right)^m r^{2m-1} \exp\left(-\frac{mr^2}{2}\right), r \geq 0, m \geq 0.5 \quad (11)$$

$\sigma^2$  是高斯分布方差,  $m = (2\sigma^2)^2 / E[(r^2 - 2\sigma^2)^2]$ 。由于 Nakagami - m 分布与莱斯分布非常相似,当  $m = 1$  时,它们之间可相互转换,即将(11)式中按  $k = \sqrt{m^2 - m} / (m - \sqrt{m^2 - m})$  将  $m$  转化为  $K$ ,就可以利用莱斯分布的方法来生

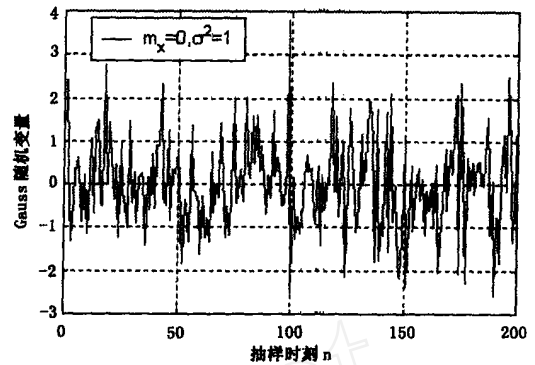


图 2 蒙特卡洛法生成 Gauss 分布的随机变量序列

修正的贝塞尔函数,它通常用莱斯因子  $K = A^2/2\sigma^2$  和  $\sigma^2$  来作为描述参数。莱斯的 CDF 为

$$F(R) = P(r \leq R) = \frac{1}{2} \int_0^R re^{-\frac{r^2+A^2}{2}} I_0\left(\frac{rA}{2}\right) dr \quad (9)$$

显然  $F(R)$  也无法用一般简单式表示,难以求出  $F(R)$  的反函数,为了解决此问题,这里我们采用近似方法求  $F(R)$ 。求式(9)积分的关键是  $I_0(x)$ ,这里令<sup>[2]</sup>

$$I_0(x) \begin{cases} 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} & 0 \leq x \leq 2.5 \\ e^{1.1x}/1.9x & x > 2.5 \end{cases}$$

利用式(9)可求得  $F(R)$  为

成随变量  $R$ ,见图 5 示。

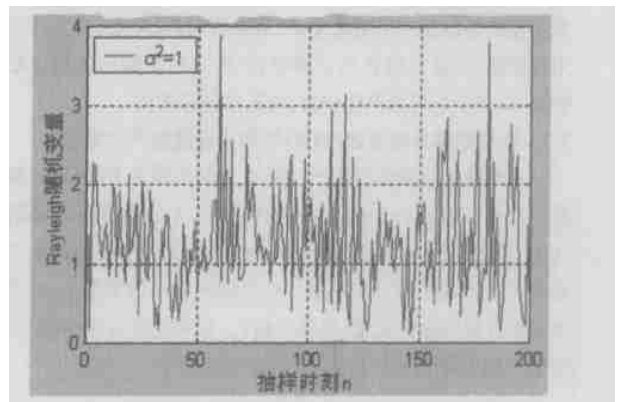


图 3 蒙特卡洛法生成 Rayleigh 分布的随机变量序列

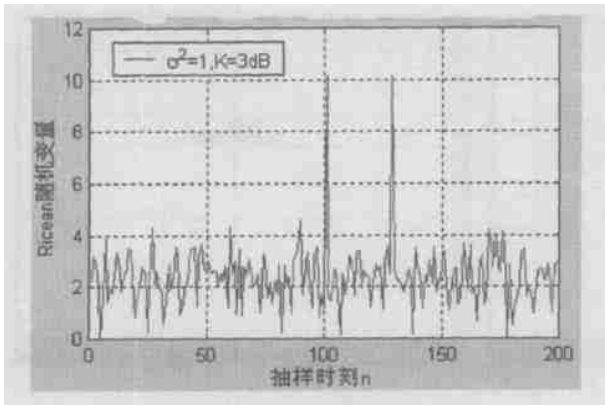


图4 蒙特卡洛法生成 Rice 分布的随机变量序列

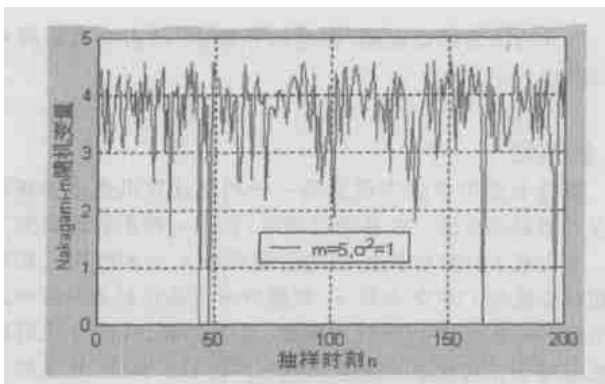


图5 蒙特卡洛法生成 Nakagami 分布的随机变量序列

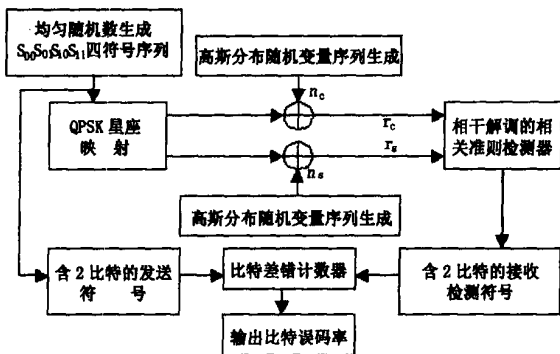


图6 MC 仿真 QPSK 通信系统的框图

## 4 用 MC 仿真通信系统的传输

### 4.1 蒙特卡洛法仿真 AWGN 信道的 MPSK 信号传输特性

如何用上面分析的 MC 法生成的随机变量来仿真通信传输系统? 这里我们选择使用较普遍的 AWGN 信道和 M 进制移相键控 MPSK 为例, 分析该通信传输系统是如何利用蒙特卡洛仿真, 并给出具有完整比特误码率 (BER) 闭式的 QPSK 和具有近似 BER 闭式的 16-PSK 的仿真结果, 目的是用于说明: 在理想条件下, 用蒙特卡洛法仿真曲线和理论曲线的吻合程度; 若理论式是近似时, 它与 MC 法的曲线的吻合程度

如何? 本文仔细地给出 QPSK 的 MC 仿真过程。

#### 4.1.1 MC 法仿真 AWGN 信道的 QPSK 通信系统

利用计算机提供的均匀随机数产生器和第二部分讲解的高斯分布随机变量发生器, 我们可用图 6 的框图用 MC 法来仿真 QPSK 通信系统。本仿真假设信道是已知的, 即传输信道引入的载波附加相位是严格已知的, 因此, 就可以采用相干解调法, 并利用相关准则在接收端检测发送的符号信号, 这部分相当于图中的检测器。这样在图 6 中的 MC 仿真框图中, 就省掉了发送信号调制和接收信道相干解调部分。由于载波 MPSK 调制的传输差错一般仅能给出符号错误概率 (SER) 的理论式<sup>[1-3]</sup>, 而 BER 理论式难于得到。若假设 MPSK 的符号按 Gray 码编码, 那么, 就可得到 BER 理论式。QPSK 的星座坐标依次为 (1, 0), (0, 1), (-1, 0) 和 (0, -1), 故按 Gray 编码的星座映射为 S00 (1, 0), S01 (0, 1), S11 (-1, 0), S10 (0, -1), 本仿真系统的第一关键部分。仿真系统的第二关键部分是检测器, 这里采用相干解调相关准则, 即将相干解调后的接收信号分别投影到 QPSK 的四个星座点矢量上, 以最大投影值作为判决条件来检测发送的符号。图 7 给出了用 MC 对 5000、10000 和 20000 符号序列 QPSK 系统进行仿真的 BER 曲线。

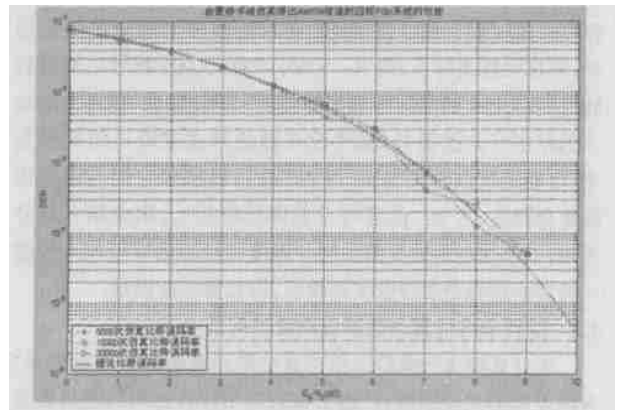


图7 用 MC 仿真 AWGN 信道 QPSK 系统的 BER 曲线

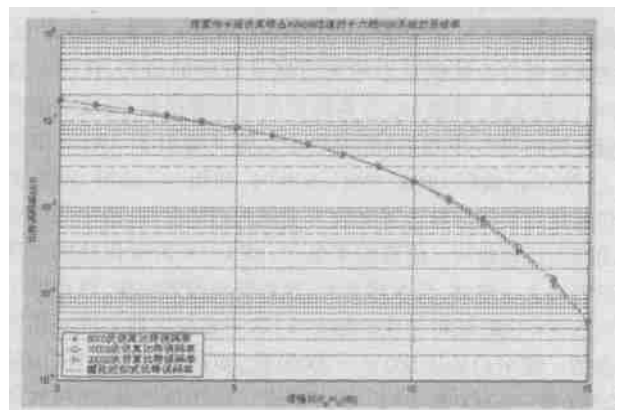


图8 用 MC 仿真 AWGN 信道 16PSK 系统的 BER 曲线

#### 4.1.2 MC 仿真 AWGN 信道中的 16PSK 通信系统

与 QPSK 一样,我们同样可以用 MC 仿真 16PSK 系统,星座与符号按 Gray 编码映射。由文献[1,3]可知,  $M > 4$  的 MPSK 的 SER 近似式为:

$$P_M = 2Q\left[\sqrt{\frac{2k_b}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right], k_b = \log_2 M, \frac{b}{N_0} \text{ 是比特信噪比, 其中 } Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt, x \geq 0, Q(x) = 0, x < 0$$

又称为高斯 PDF 曲线尾部函数。

若按 Gray 编码映射,即 BER 近似表示式为

$$P_b = \frac{1}{M} P_M = \frac{2}{M} Q\left[\sqrt{\frac{2k_b}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right] \quad (12)$$

图 8 是用 MC 对 AWGN 信道中 16 - PSK 系统的 5000、10000 和 20000 符号序列进行仿真的 BER 曲线。

图 7、8 用 MC 仿真结果能说明几方面问题:1) MC 法仿真存在一定误差。图 7 的 QPSK 在理想条件下理论值是正确的,而在同样条件下,用  $N = 5000, 10000, 20000$  符号序列进行 MC 仿真 QPSK 的曲线虽然都能接近于理论曲线,但在个别地方仍存在一定误差;2) 那些没有理论闭式或理论闭式很复杂,仅能用近似闭式表示,用 MC 法可以检验它们与理论值的吻合程度,若 MC 仿真与近似曲线很接近,则由第一点分析知,近似式与理论真值的吻合程度;3) MC 法可以用来检验一些理论模型是否符合实际情况,以代替实验测量。

#### 4.2 蒙特卡洛仿真通信系统精度的问题

用计算机进行蒙特卡洛仿真结果和理论值有一定误差,有两方面的主要原因:1) 由于我们利用计算机均匀随机数发生器来进行 MC 的仿真,但计算机本身精度总是有限的,故很难真正做到(0,1)之间的绝对均匀;2) 在用计算机进行 MC 仿真的次数不可能很大,这也会引入误差。本文不想对 MC 仿真对通信系统精度影响进行理论方面的研究,仅想通过 MC 仿真结果,观察 MC 仿真的精度受仿真次数  $N$ (或通信系统发送的符号序列数)影响程度。图 9 给出了 AWGN 信道上,按 Gray 编码 QPSK, SNR = 6dB 时,利用 MC 法对 QPSK 的传输比特误码率随仿真次数  $N$  变化的趋势曲线,图中同时给出理论比较曲线。仿真结果显示, BER ~  $N$  的变化是围绕理论直线上波动,当  $N$  增大时,这种波动慢慢收敛,这表明了当  $N \rightarrow \infty$ , MC 法将与理论相吻合,这一点与大数定理是相符合的。图 9(a)是从 500 次 ~ 20000 次,步长为 500 次;图(b)从 20000 次 ~ 50000 次,步长为 2500 次。应注意的是:这种收敛不是单调减少的。故出现有时  $N$  大,而误差反而大于  $N$  小的仿真结果。文献[4]给出了一种判断仿真次数与期望精度的数学关系式,一般情况下,仿真次数不应少于几百甚至几千

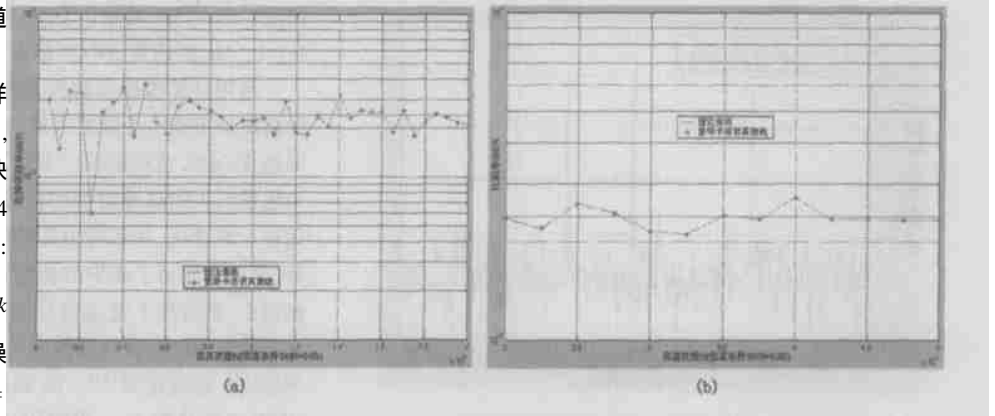


图 9 MC 仿真 BER 随仿真次数  $N$  变化的趋势曲线

次。图 9 的仿真结果表明:在通信系统中,仿真次数或符号序列数应大于 5000。

#### 4 结束语

蒙特卡洛仿真法本质上是一种利用计算机通过抽样试验求近似解的方法。在移动通信中,它是一种重要的研究工具。本文基于计算机提供的均匀随机数发生函数和已知待求随机变量的 CDF 的条件下,就蒙特卡洛法在移动通信中的应用做一些基础性的研究和探索,尽管如此,这些方法可以直接应用于任意复杂的通信环境中的仿真。其实,凡是能用计算机仿真随机概率分布的抽样试验都属于蒙特卡洛的范围,如文献[5,6]利用无线多径衰落信道中是否存在 LOS 来直接仿真 Rayleigh 分布和 Rice 分布的信道。因此,采用 MC 法仿真时,应根据不同的情况,灵活地使用这一工具。

#### 参考文献:

- [1] J G Proakis. Digital communications (4th) [M]. New York: MC Graw - Hill, Inc. USA, 2001.
- [2] J S Lee and L E Miller 著,许希斌等译. CDMA 系统工程手册[M]. 北京:人民邮电出版社,2001.
- [3] J G Proakis,刘树棠译. 现代通信系统 - 使用 MATLAB[M]. 西安:西安交通大学出版社,2001.
- [4] 段楠,薛会民,潘越. 用蒙特卡洛法计算可靠度时模拟次数的选择[J]. 煤矿机械,2002(3).
- [5] T S Rappaport. Wireless Communications, Principles and Practice[M]. Prentice Hall, 1996.
- [6] 原进红,匡镜明. 移动无线信道的模拟与应用[J]. 北京理工大学学报,1994(3).

#### [作者简介]



庄铭杰(1964 - ),男(汉族),福建惠安人,现为厦门大学物理系博士研究生,集美大学信息学院副教授,主要研究方向为移动通信、信号处理、GPS。