哈密顿算符的运算规则

厦门大学物理系　李明哲

［摘 要］本文从哈密顿算符的定义出发，根据哈密顿算符的性质，给出哈密顿算符完整、统一的运算规则，以克服现有物理教科书中该算符运算规则不一致的缺点，进而帮助学习者更好地掌握该算符。

［关键词］哈密顿算符　运算规则　场论

物理学中处理“场”的问题时，熟练掌握哈密顿算符非常关键。例如，本科《电动力学》整门课程在某种程度上可以说就是利用哈密顿算符的性质处理麦克斯韦方程组的。该课程被物理系的本科生视为最难的课程之一，实质原因在于对哈密顿算符的运算掌握不好。所以，在正式学习该课程之前，总是需要先温习这部分知识。

然而，一些常用教科书（例如《电动力学》[1]）在介绍哈密顿算符的运算规则时并没有给出完整、统一、清晰的规则，导致读者不易理解和掌握；而另外一些教科书（例如《经典电动力学》[2]）则直接将其列为公式，并未给出证明，读者遇到列出的公式之外的运算就无法进行，当然也就无法真正掌握。

本文希望能克服这一不足之处，从哈密顿算符的定义出发，分析哈密顿算符的两个根本性质，并由此给出一套哈密顿算符的完整、统一的运算规则。

一、哈密顿算符的定义

哈密顿算符定义为：

$$\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

由上图可以看出算符同时具有矢量性和微分性两个根本性质，所以在其运算过程中要同时注意这两方面的性质。由该定义，场的梯度、散度和旋度可以分别理解为算符 ∇ 直接作用、点乘和叉乘该场。

二、哈密顿算符的运算规则

根据前面哈密顿算符的定义和性质的分析，哈密顿算符的运算规则为：

步骤 1．根据 ∇ 的微分性写成几项，在 ∇ 的下标标明算符 ∇ 作用于哪个函数上。

步骤 2．将 ∇ 看成一个矢量，利用矢量和标量的性质重新排列，使得 ∇ 紧邻着排在它作用的函数前面。排列时注意：a. 注意各符号是矢量或标量，以正确放置 · 和 X 的位置；b. 注意正负号。

步骤 3．抹去 ∇ 的下标。这三个运算步骤充分体现了哈密顿算符的两个根本性质。以下举例示范这三个步骤：

步骤 1．类似于做微分运算。例如：

$$\nabla(\mu\psi)=\nabla_{\mu}(\mu\psi)+\nabla_{\psi}(\mu\psi) \tag{2.1}$$

$$\nabla\cdot(\psi\vec{f})=\nabla_{\psi}\cdot(\psi\vec{f})+\nabla_{f}\cdot(\psi\vec{f}) \tag{2.2}$$

$$\nabla\times(\psi\vec{f})=\nabla_{\psi}\times(\psi\vec{f})+\nabla_{f}\times(\psi\vec{f}) \tag{2.3}$$

$$\nabla\cdot(\vec{f}\times\vec{g})=\nabla_{f}\cdot(\vec{f}\times\vec{g})+\nabla_{g}\cdot(\vec{f}\times\vec{g}) \tag{2.4}$$

$$\nabla\times(\vec{f}\times\vec{g})=\nabla_{f}\times(\vec{f}\times\vec{g})+\nabla_{g}\times(\vec{f}\times\vec{g}) \tag{2.5}$$

步骤 2．常用的矢量性质有：

$$\vec{f}\cdot\vec{g}=g\cdot\vec{f}\ ,\quad f\times g=-g\times f$$

$\vec{f}\cdot(\vec{g}\times\vec{h})=\vec{g}\cdot(\vec{h}\times\vec{f})=\vec{h}\cdot(\vec{f}\times\vec{g})$，$\vec{f}\times(\vec{g}\times\vec{h})=(\vec{f}\cdot\vec{h})\vec{g}-(\vec{f}\cdot\vec{g})\vec{h}$。例如：

$$\nabla_{\mu}(\mu\psi)+\nabla_{\psi}(\mu\psi)=(\nabla_{\mu}\mu)\psi+\mu\nabla_{\psi}(\psi) \tag{3.1}$$

$$\nabla_{\psi}\cdot(\psi\vec{f})+\nabla_{f}\cdot(\psi\vec{f})=(\nabla_{\psi}\psi)\cdot\vec{f}+\psi\nabla_{f}\cdot(\vec{f}) \tag{3.2}$$

$$\nabla_{\psi}\times(\psi\vec{f})+\nabla_{f}\times(\psi\vec{f})=(\nabla_{\psi}\psi)\times\vec{f}+\psi(\nabla_{f}\times\vec{f}) \tag{3.3}$$

$$\nabla_{f}\cdot(\vec{f}\times\vec{g})+\nabla_{g}\cdot(\vec{f}\times\vec{g})=\vec{g}\cdot(\nabla_{f}\times\vec{f})-\vec{f}\cdot(\nabla_{g}\times\vec{g}) \tag{3.4}$$

$$\nabla_{f}\times(\vec{f}\times\vec{g})+\nabla_{g}\times(\vec{f}\times\vec{g})=(\vec{g}\cdot\nabla_{f})\vec{f}-(\nabla_{f}\cdot\vec{f})\vec{g}+(\nabla_{g}\cdot\vec{g})\vec{f}-(\vec{f}\cdot\nabla_{g})\vec{g} \tag{3.5}$$

步骤 3．最简单，抹去的下标即可。所以，由（2.1）—（2.5）和（3.1）—（3.5）得

$$\nabla(\mu\psi)=(\nabla\mu)\psi+\mu\nabla(\psi) \tag{4.1}$$

$$\nabla\cdot(\psi\vec{f})=(\nabla\psi)\cdot\vec{f}+\psi\nabla\cdot(\vec{f}) \tag{4.2}$$

$$\nabla\times(\psi\vec{f})=(\nabla\psi)\times\vec{f}+\psi(\nabla\times\vec{f}) \tag{4.3}$$

$$\nabla\cdot(\vec{f}\times\vec{g})=\vec{g}\cdot(\nabla\times\vec{f})-\vec{f}\cdot(\nabla\times\vec{g}) \tag{4.4}$$

$$\nabla\times(\vec{f}\times\vec{g})=(\vec{g}\cdot\nabla)\vec{f}-(\nabla\cdot\vec{f})\vec{g}+(\nabla\cdot\vec{g})\vec{f}-(\vec{f}\cdot\nabla)\vec{g} \tag{4.5}$$

总结：由以上哈密顿 ∇ 算符的运算规则的三个步骤可以看出，第二步最容易出错。在做这一步运算时首先要习惯于将看成一个矢量，然后还需注意正在处理的是矢量和标量的点乘（标积）和叉乘（矢积）等运算，它是有别于数乘的。掌握了上述哈密顿算符的运算规则，对物理学中场的问题的处理就能够得心应手了。

参考文献

［1］郭硕鸿．电动力学［M］．北京：高等教育出版社，1997

［2］蔡圣善，朱耘．经典电动力学［M］．上海：复旦大学出版社，1985　※