2003 年 2 月 Feb., 2003
运 筹 学 学 报 OR TRANSACTIONS
第 7 卷 第 1 期 Vol.7 No.1

随机波动害虫种群的最优防治阈值与防治时刻

李时银

(厦门大学数学系，厦门， 361005)

摘 要：以随机过程为数学工具，用金融风险管理的思想，研究随机波动的害虫种群对作物造成的损失和药物防治费用之间的关系，依据最优经济效益原则确定害虫的最优防治阈值与防治时刻.

关键词：几何 Brown 运动，首达时，最小损失，防治阈值.

The Optimal Threshold and Moment for Preventing The Random Walking Insect's Population

SHIYIN LI

(Department of Mathematics, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract

The relation between crop's cost and insecticide cost for preventing the random walking insect's population was found by means of the theory of stochastic processes and the idea of managed financial risk, the formula to determining the optimal threshold and moment for preventing insects was gained based on the economical optimal principle.

Key words:geometric Brownian motion, first passage time, the minimum cost, threshold for preventing insects.

1. 引 言

确定农业害虫的合理的防治阈值和防治时刻对提高农业生产经济效益，防止滥用农药造成环境污染，创立绿色农业品牌意义重大 [1]. 由于农作物害虫种群的动态受食物、天敌、温度、气候、人工治理等众多因素影响，其动态不是时间的确定性函数而是数学意义上的随机过程. 即在所讨论的空间范围内任一时刻害虫的数量是随机变量 (达到某一数量指标的时间也是随机变量), 从而害虫对作物造成的损失也是随机变量. 在确定害虫的防治阈值与打药时机时，也要考虑害虫种群随机波动带来的不确定性，这和现代投资理论中的风险管理是类同的.

文 [2]-[4] 介绍了研究随机波动生物种群的随机过程原理，文 [5]-[8] 以随机过程为工具研究了农业害虫防治中的若干问题. 本文研究遵循几何 Brown 运动的一类害虫种

收稿日期： 2001 年 3 月 16 日.

群对作物造成的损失和药物防治费用之间的关系，从最优经济效益原则出发，推导确定害虫最优防治阈值和防治时刻的计算公式，给出公式中有关参数的估计方法.

2. 分析与建模

讨论限制在某一农田区域或某一空间范围内，考虑其数量可视为时间 t 的连续函数的某农作物的某种害虫，如稻蓟马，稻卷叶螟，稻飞虱，棉蚜，棉红蜘蛛等等. 将作物的生长期记为 $[t_0, t_1]$, 用 $S(t)$ 表示 t 时刻 $(t_0 \le t \le t_1)$ 害虫种群的数量，设初始虫量 $S(t_0) = S_0$ 已由田间调查得到. 鉴于时间区间 $[t_0, t_1]$ 不长，害虫的食物 (农作物的数量) 是丰盛的——农民不会让害虫发展到食物不够吃的程度，可以假设此段时间内害虫的平均增长率为常数 r(可放宽为 $r(t)$), 但由于天敌、温度、气候、人的活动等众多因素的影响，害虫数量会如股票价格那样随机地波动. 用常数 σ 表示其波动率 (即单位时间内的标准差),r 和 σ 可用统计方法对历史观测数据进行分析后估计出来. 利用随机过程的知识，可以得到害虫种群数量满足的数学模型为

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma dW(t), \text{已知} S(t_0)$$

其中 $W(t)$ 是均值为 0, 方差为 t 的正态随机变量，即 Wiener 过程. 可以解得

$$S(t) = S(t_0)\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - t_0) + \sigma W(t - t_0)\right]$$

换句话说， $S(t)$ 服从漂移为 $r(t - t_0)$, 方差为 $\sigma^2 \cdot (t - t_0)$ 的几何 Brown 运动. 为简单记，取 $t_0 = 0, t_1 = \tau$, 则有 $S(t) = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)}, (0 \le t \le \tau)$.

我们用 U 表示害虫防治阈值，用 M 表示 $S(t)$ 在 $[0, \tau]$ 内的最大值，即 $M = \max\limits_{0 \le t \le \tau}\{S(t)\}$. 用 T_M 表示害虫数量首次达到数量 U 的时刻 (称为首达时), 农民在时刻 T_M 施药防治害虫，可假设施药后害虫数量降低到一个很低的水平之下，即 $S(t) \le L, (T_M \le t \le \tau), L$ 是一个小正数. 当 $S(t) \le L$ 时，害虫对该茬作物的损害可忽略不计。以上分析的几何意义如图 1 所示：

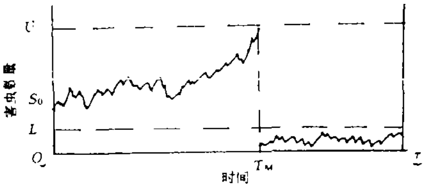

图 1

易知有如下概率等式

$$P\{M < U\} = P\{T_M > \tau\}, \quad P\{M \ge U\} = P\{T_M \le \tau\}$$

当 U 较小时， $P\{M < U\}$ 较小而 $P\{M \ge U\}$ 较大.

下面给出害虫危害作物造成的损失的计算式和打药费用的计算式. 根据实际意义，害虫造成的损失与害虫数量成正比，也与害虫危害时间长度成正比，故下式

$$k_1 \int_0^{T_M} ES(t)dt = k_1 \int_0^{T_M} S_0 e^{rt} dt = \frac{k_1 S_0}{r}[e^{rT_M} - 1]$$

表示害虫危害造成的损失. 这里 k_1 表示单位数量的害虫单位时间内造成的损失, $ES(t)$ 表示 $S(t)$ 的平均值函数. 至于打药的费用, 可用 $k_2H(M-U)$ 表示, 这里函数 $H(x)$ 定义如下:

$$H(x)=\begin{cases}1,\text{当}x\geq 0\\ 0,\text{当}x<0\end{cases}$$

k_2 表示打一次药所需费用.

由于上面两笔费用均依赖于随机变量 M(或 T_M) 以及阈值 U 的设置,, 故费用之和是随机变量, 我们来求其平均值. 设首达时 T_M 的分布密度函数为 $h(t)$, 事件 $M>U$ 发生的概率为 $P\{M>U\}$, 则费用之和的平均值为

$$J(U)=\frac{k_1S_0}{r}\Big[\int_0^{\tau}e^{rt}h(t)dt-1\Big]+k_2P\{M>U\}$$

依据最优经济原则, 我们要寻求 U^* 使上式中的 $J(U^*)$ 最小.

3. $J(U)$ 的计算

我们分如下几步来计算 $J(U)$

(1) 求首达时 T_M 的分布密度函数 $h(t)$

因 T_M 为 M 首次达到 U 的时刻, 故 $U>S_0$ 时,

$$P\{T_M\geq\tau\}=P\{M\leq U\}=P\Big\{\ln\frac{M}{S_0}\leq\ln\frac{U}{S_0}\Big\}=P\Big\{\ln\frac{S(\tau)}{S_0}\leq\ln\frac{U}{S_0},\ \ln\frac{M}{S_0}\leq\ln\frac{U}{S_0}\Big\}$$

利用反射原理 [9-10], 并注意 $\ln\frac{S(\tau)}{S_0}$ 服从正态分布 $N((r-\frac{\sigma^2}{2})\tau,\sigma^2\tau)$, 得到

$$\begin{aligned}1-P\{T_M<\tau\}=\quad & P\{T_M\geq\tau\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{[\ln\frac{U}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau]/\sigma\sqrt{\tau}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\\ & -e^{2\ln\frac{U}{S_0}(r-\frac{\sigma^2}{2})/\sigma^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{[-\ln\frac{U}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau]/\sigma\sqrt{\tau}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx\end{aligned}$$

上式两边对 τ 求导并化简得

$$h(\tau)=\frac{\ln\frac{U}{S_0}}{\sigma\sqrt{2\pi\tau^3}}e^{-[\ln\frac{U}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau]^2/2\sigma^2\tau}$$

令 $\tau=t$ 得

$$h(t)=\frac{\ln\frac{U}{S_0}}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}}e^{-[\ln\frac{U}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2})t]^2/2\sigma^2 t},\ (t>0)$$

(2) 求积分 $\int_0^{\tau}e^{rt}h(t)dt$

$$\int_0^{\tau}e^{rt}h(t)dt=\int_0^{\tau}e^{rt}\frac{\ln\frac{U}{S_0}}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}}e^{-[\ln\frac{U}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2})t]^2/2\sigma^2 t}dt$$

为叙述简单，记 $a=\ln\frac{U}{S_0}, b=r-\frac{\sigma^2}{2}$, 则

$$\int_0^\tau e^{rt}h(t)dt=\int_0^\tau \frac{ae^{rt}}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}}e^{-\frac{(a-bt)^2}{2\sigma^2 t}}dt=\int_0^\tau \frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}}e^{-[(a-bt)^2-2\sigma^2rt^2]/2\sigma^2 t}dt$$

作变换 $t=y^2$ 得

$$\int_0^\tau e^{rt}h(t)dt=\frac{2a}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{ab}{\sigma^2}}\int_0^{\sqrt{\tau}}\frac{1}{y^2}\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}\Big[(b^2-2\sigma^2r)y^2+\frac{a^2}{y^2}\Big]\Big\}dy$$

在 $b^2-2\sigma^2r=r^2-3\sigma^2r+\frac{1}{4}\sigma^4\geq 0$ 时，作变换 $u=y\sqrt{\frac{b^2}{\sigma^2}-2r}$ 得

$$\int_0^\tau e^{rt}h(t)dt=\frac{2a}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{b^2}{\sigma^2}-2r}\,e^{\frac{ab}{\sigma^2}}\int_0^{\sqrt{(\frac{b^2}{\sigma^2}-2r)\tau}}\frac{1}{u^2}e^{-\frac{1}{2}(u^2+\frac{A^2}{u^2})}du$$

其中 $A=\frac{a}{\sigma}\sqrt{\frac{b^2}{\sigma^2}-2r}$. 利用等式 (设 $\alpha>0$)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\frac{1}{u^2}e^{-\frac{1}{2}(u^2+\frac{\alpha^2}{u^2})}du=\frac{1}{2\alpha}\Big[e^{-\alpha}F\Big(x-\frac{\alpha}{x}\Big)+e^{\alpha}\bar{F}\Big(x+\frac{\alpha}{x}\Big)\Big]$$

其中 $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \bar{F}(x)=1-F(x)$, 得到

$$\begin{aligned}\int_0^\tau e^{rt}h(t)dt &=\frac{2a}{\sigma}\sqrt{\frac{b^2}{\sigma^2}-2r}e^{\frac{ab}{\sigma^2}}\frac{1}{2A}\Big[e^{-A}F\Big(\sqrt{\Big(\frac{b^2}{\sigma^2}-2r\Big)\tau}-\frac{A}{\sqrt{(\frac{b^2}{\sigma^2}-2r)\tau}}\Big)\\ &\quad+e^{A}\bar{F}\Big(\sqrt{\Big(\frac{b^2}{\sigma^2}-2r\Big)\tau}+\frac{A}{\sqrt{(\frac{b^2}{\sigma^2}-2r)\tau}}\Big)\Big]\\ &=e^{\frac{ab}{\sigma^2}}\Big[e^{-A}F\Big(\sqrt{(\frac{b^2}{\sigma^2}-2r)\tau}-\frac{a}{\sigma\sqrt{\tau}}\Big)+e^{A}\bar{F}\Big(\sqrt{(\frac{b^2}{\sigma^2}-2r)\tau}+\frac{a}{\sigma\sqrt{\tau}}\Big)\Big]\end{aligned}$$

将 $A=\frac{a}{\sigma}\sqrt{\frac{b^2}{\sigma^2}-2r}$ 代入上式得到

$$\begin{aligned}\int_0^\tau e^{rt}h(t)dt =&e^{\frac{a(b-\sqrt{b^2-2\sigma^2r})}{\sigma^2}}\Big\{1-F\Big(\frac{a-\sqrt{b^2-2\sigma^2r}\cdot\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\Big)\\ &+e^{\frac{2a\sqrt{b^2-2\sigma^2r}}{\sigma^2}}\Big[1-F\Big(\frac{a-\sqrt{b^2-2\sigma^2r}\cdot\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\Big)\Big]\Big\}\end{aligned}$$

上面计算式在 $b^2-2\sigma^2r=r^2-3\sigma^2r+\frac{\sigma^2}{4}\geq 0$ 时有意义. (在 $b^2-2\sigma^2r<0$ 时可得到一个带有 $i=\sqrt{-1}$ 的表达式，然后取其实部)

(3) 计算 $P\{M>U\}$

$$P\{M>U\}=P\{T_M<\tau\}=1-P\{T_M\geq\tau\}$$

使用 (1) 中 $P\{T_M\geq\tau\}$ 的计算式，将积分用标准正态分布函数表出得

$$P\{M>U\}=1-F\Big(\frac{a-b\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\Big)+e^{\frac{2ab}{\sigma^2}}F\Big(\frac{-a-b\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\Big)$$

这里 $a=\ln\frac{U}{S_0}, b=r-\frac{\sigma^2}{2}, F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. 可见，当 $\tau\to+\infty$ 时，$P\{M>U\}\to 1$, 这是与实际相符的.

4. 求最优经济阈值 U^* 和最佳打药时刻 T_M^*

从上面的计算得到

$$\begin{aligned}J(U) =& k_1\frac{S_0}{r}e^{\frac{a(b-\sqrt{b^2-2\sigma^2 r})}{\sigma^2}}\Big\{1-F\Big(\frac{a-\tau\sqrt{b^2-2\sigma^2 r}}{\sigma\sqrt{\tau}}\Big)\\ &+e^{\frac{2a\sqrt{b^2-2\sigma^2 r}}{\sigma^2}}\Big[1-F\Big(\frac{a+\tau\sqrt{b^2-2\sigma^2 r}}{\sigma\sqrt{\tau}}\Big)\Big]\Big\}-k_1\frac{S_0}{r}\\ &+k_2\Big[1-F\Big(\frac{a-b\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\Big)+e^{\frac{2ab}{\sigma^2}}F\Big(\frac{-a-b\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\Big)\Big]\end{aligned}$$

其中 $a=\ln\frac{U}{S_0}, b=r-\frac{\sigma^2}{2}, F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, 上式对 U 求导并令 $\frac{dJ}{dU}=0$ 可得 $J(U)$ 的极小值点 U^*, 由于 $\frac{dJ}{dU}$ 和 U^* 的解析表达式过于复杂，本文不便列出，本文仅在此指出，在实践中可用数学软件 Matlab.5.3 中的优化工具箱去求 U^*(先将 $F(x)$ 展开为 Taylor 级数，取前若干项).

求出最优经济阈值 U^* 后，利用 T_M 的分布密度 $h(t)$, 可以求出最佳的打药时间 T_M^*

$$T_M^*=\int_0^\tau th(t)dt=\int_0^\tau\frac{\ln\frac{U^*}{S_0}}{\sigma\sqrt{2\pi t}}e^{-[\ln\frac{U^*}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2}t)]^2/2\sigma^2 t}\cdot dt$$

使用求 $\int_0^\tau e^{rt}h(t)dt$ 时采用的类似的代换方法，可以求出

$$T_M^*=\frac{\ln\frac{U^*}{S_0}}{r-\frac{\sigma^2}{2}}\Big\{1-F\Big(\frac{\ln\frac{U^*}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\Big)+\Big(\frac{U^*}{S_0}\Big)^{\frac{2(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma^2}}\Big[-1+F\Big(\frac{\ln\frac{U^*}{S_0}+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\Big)\Big]\Big\}$$

其中 $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

易知，当 τ 充分大时， $T_M^*\approx\ln(\frac{U^*}{S_0})/(r-\frac{\sigma^2}{2})$, 当 $r-\frac{\sigma^2}{2}>0$.

5. 参数的确定方法

上面导出的求最优防治阈值 U^* 及防治时刻 T_M^* 的公式形式上较复杂，但涉及的参数是容易获得的. 公式中有 $k_1,k_2,\tau,S_0,r,\sigma$ 六个参数. 常数 k_2,τ 可根据其实际意义直接得到，常数 k_1,S_0 可由实际调查给出，至于漂移率 r 与波动率 σ 可用如下方法得到 [11].

设 $S(t_i),(0\le i\le n)$ 是在时刻 $t_i(0\le i\le n)$ 观测到的害虫的数量， $\delta t=t_{i+1}-t_i$ 是时间间隔长度，则 r 的估计式 $\hat{r}$ 为

$$\hat{r}=\frac{1}{\delta t}\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{S(t_{i+1})-S(t_i)}{S(t_i)}\Big]$$

再记 $R_i=\frac{S(t_{i+1})-S(t_i)}{S(t_i)}$, $\bar{R}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}R_i$, 则 σ 的估计式 $\hat{\sigma}$ 为

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{(n-1)\delta t}\sum_{i=1}^{n}(R_i-\bar{R})^2}$$

参 考 文 献

[1] Ding yanqing, Mathematical Ecology of Insect' Population, Beijing, Science Publishing House, 1994, 101-170.

[2] A. T. Bharucha-Reid, Elements of the Theory of Markov Processes and Their Application, Mc Graw-Hill, New York. U.S.A, 1979, 35-70.

[3] 张炳根，生态学数学模型，青岛，青岛海洋大学出版社， 1990,55-70.

[4] Chin Long Chiang, An Introduction of Stochastic Processes and their Application, New York, Robert. E. Krieger Publishing Co, 1980, 69-81.

[5] 李时银，世代明显的昆虫种群数量的动态模型及其应用，曾庆存，李大潜等主编 CSIAM(5),[c], 北京，清华大学出版社， 1998 ， 308-312.

[6] 李时银，一个确定害虫天敌最佳饲养数量的数学方法，生物数学学报， 1999(2),192-196.

[7] 李时银，带时变增长率、迁移率，波动率的种群变动模型与生物防治最小成本的确定方法，数学的实践与认识， 1999(4),1-6.

[8] 李时银，一类重随机泊松过程的等待时间的分布密度公式及其在害虫预测预报中的应用，生物数学学报， 2000(2),211-216.

[9] Olav Kallenberg, Foundations of Modern Probability, New York, Springer-Verlag, 1997, 199-220.

[10] Y.K.Kwok, Mathematical Models of Financial Derivatives, Singpore, Springer-Verlag, 1998, 244-267.

[11] Paul. Wilmott, Derivatives-the Theory and Practice of Financial Engineering, New York, JohnWiely & Sons Ltd, 1998, 46-51.