第 15 卷 第 2 期 莆田学院学报 Vol.15 No.2
2008 年 4 月 Journal of Putian University Apr. 2008
文章编号:1672-4143(2008)02-0041-04 中图分类号:O151.21 文献标识码:A

关于一道硕士研究生入学试题的推广

江 飞[1], 杨忠鹏[2*]
(1.厦门大学 数学科学学院,福建 厦门 361005;2.莆田学院 数学与应用数学系,福建 莆田 351100)

摘 要:2004 年漳州师范学院硕士研究生入学考试中有一道高等代数试题,是关于实对称阵的所有正特征根之和与其迹所确定的不等式。证明了这个不等式可推广到实矩阵上去,即实矩阵的所有实部为正的特征根之和与其迹也有类似不等式,同时给出了其等号成立的充要条件。

关键词:实对称阵;实矩阵;特征根;矩阵迹;不等式;等式条件

On Generalization of a Question of Entrance Test for MA Candidates

JIANG Fei[1], YANG Zhong-peng[2*]
(1. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen Fujian 361005, China;
2. Mathematics & Applied Mathematics Department, Putian University, Putian Fujian 351100, China)

Abstract: In Entrance Test of Higher Algebra of Zhangzhou Terachers Colleage for MA/MS Candidates in 2004, there is a question on inequality, which is determined by the summation of all positive eigenvalues of real symmetric matrix and its trace. This paper proves that this inequality can be generalized in real matrix, i.e., there is a similar inequality for the summation of all positive real part of eigenvalues of real matrix and its trace, and we also give the necessary and sufficient conditions for the equality.

Key words: real symmetric matrix; real matrix; eigenvalue; matrix trace; inequality; equality conditions

0 引言

设 $F^{n\times n}$ 表示数域 F 上所有 n 阶矩阵的集合,因此当 F=C,R 时,$C^{n\times n}$, $R^{n\times n}$ 分别为复数域 C、实数域 R 上所有 n 阶矩阵的集合。当 $A=(a_{kj})\in F^{n\times n}$ 时,$\det A$, $tr(A)=\sum_{k=1}^{n}a_{kk}$ 分别为其行列式和迹。总约定 E 为单位矩阵。

矩阵的特征根(或特征值)是线性代数的核心理论。数域 F 上 n 阶矩阵 $A=(a_{kj})\in F^{n\times n}$ 的特征根(或特征值)的定义在影响很大的文献上是有差异的。这些定义可参考文[1-4]等,这些差异情况存在的根本原因之一在于:当 $A=(a_{kj})\in F^{n\times n}$ 时,其特征多项式 $\det(\lambda E-A)=f(\lambda)$ 在复数域 C 上的 n 个根未必都在数域 F 上。这里我们不打算过多讨论这个问题,但这些事实说明实矩阵的所有特征根问题与实对称矩阵的情况有着很大的差异(后者的所有特征根都是实数,且可正交相似对角矩阵)。本文约定使用文[5]给出的定义。

由文[5]定义 3,我们把 n 阶矩阵 $A(\in F^{n\times n})$ 的特征多项式 $\det(\lambda E-A)=f(\lambda)$ 在复数域 C 上的根,叫做矩阵 A 的特征根。[5]

当 $A=(a_{kj})\in F^{n\times n}$ 时,它总有 n 个特征根

收稿日期:2007-10-11
基金项目:福建省自然科学基金项目(Z0511051);福建省 2006 年本科精品课程——高等代数;莆田学院数学研究项目(JG200521)
作者简介:江飞(1982-),男,福建福州人,2007 级博士研究生,助教。
* 通讯作者:杨忠鹏(1947-),男,吉林蛟河人,教授。

$\lambda_1(A),\lambda_2(A),\cdots,\lambda_n(A)$，同时

$$tr(A)=\sum_{k=1}^{n}a_{kk}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A),\ \det A=\prod_{k=1}^{n}\lambda_k(A)$$

这样我们可约定

$$\lambda_k(A)=a_k+b_ki\ (i^2=-1,a_k,b_k\in R,\ k=1,2,\cdots,n),$$
$$A=(a_{kj})\in R^{n\times n} \qquad (1)$$

为实矩阵 A 的所有特征根；若特征根不是实数就称为非实的特征根。记 $S(A),L(A),Z(A)$ 分别表示 A 的所有实部为正的特征根之和、所有实部为负的特征根之和及所有实部为零的特征根之和，简记 $S^2(A)=(S(A))^2$。文[6-7]等对这方面作了研究。

漳州师范学院 2004 年硕士研究生入学的高等代数试题第九题[8]（为讨论方便称为命题）如下：

命题 设 A 是个 n 阶实对称方阵，$tr(A)$ 是 A 的迹（即 A 的主对角线上所有元素之和），$S(A)$ 是 A 的所有正特征根之和。证明：

$$2S^2(A)\geq tr(A^2)+(2S(A)-tr(A))tr(A) \qquad (2)$$

并且等号成立，当且仅当

(Ⅰ) A 是零矩阵，或

(Ⅱ) A 相似于对角矩阵 $diag(a,0,0\cdots0),\ a\neq0$，或

(Ⅲ) A 合同于对角矩阵 $diag(1,-1,0\cdots0)$。

本文将推广这个命题到实矩阵的所有实部为正的特征根之和与其迹的关系上去。

1 预备知识

引理 1 设 $A\in R^{n\times n}$，则有复可逆矩阵 P 满足

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1(A) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(A)\end{pmatrix} \qquad (3)$$

证 由文[3]第 327 页补充题 7 或文[5]第 298 页习题 5 知存在复可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 位上三角矩阵。从上三角矩阵的所有特征根是由其对角元素确定的和相似矩阵的特征根相同的简单事实，应用文[5]定义 3 就可得到（3）。

引理 2 设 $A\in R^{n\times n}$，如果 e 为非负整数，t 为正奇数：

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^eb_k^t=0 \qquad (4)$$

证 因为实矩阵的特征多项式的系数都是实数，故 A 的非实的特征根必是成对共轭出现的，这样 A 的非实的特征根的个数为偶数。不失一般性，在（1）所设下，对 A 的所有特征根进行如下编号：

记 A 的所有实特征根为：

$$\lambda_k(A)=a_k+b_ki,\ b_k=0,\ k=1,\cdots,m,$$
且 $n-m=2s \qquad (5)$

记 A 的一切非实的特征根为：

$$\lambda_{m+k}(A)=a_{m+k}+b_{m+k}i,\ \lambda_{m+s+k}(A)$$
$$=a_{m+s+k}+b_{m+s+k}i \qquad (6)$$

（6）中 $a_{m+k}=a_{m+s+k},\ b_{m+k}=-b_{m+s+k},\ k=1,\cdots,s$，从而知：

$$a_{m+k}^e=a_{m+s+k}^e,\ b_{m+k}^t=-b_{m+s+k}^t,\ k=1,\cdots,s \qquad (7)$$

这样由（1），（5），（6）和（7）

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^eb_k^t$$
$$=\sum_{k=1}^{m}a_k^eb_k^t+\sum_{k=1}^{s}a_{m+k}^eb_{m+k}^t+\sum_{k=1}^{s}a_{m+s+k}^eb_{m+s+k}^t$$
$$=\sum_{k=1}^{s}a_{m+k}^eb_{m+k}^t+\sum_{k=1}^{s}a_{m+k}^e(-b_{m+k}^t)=0$$

即（4）成立。

由前面的说明可知，依实矩阵的特征根的实部情况，下面的约定是合理的。

在（1）所设下记 $A\in R^{n\times n}$ 所有的实部为正的、负的和实部为零的特征根分别为

$$\lambda_{p_j}(A)=a_{p_j}+b_{p_j}i,\ a_{p_j}>0,\ j=1,\cdots,r \qquad (8)$$
$$\lambda_{q_j}(A)=a_{q_j}+b_{q_j}i,\ a_{q_j}<0,\ j=1,\cdots,g \qquad (9)$$
$$\lambda_{h_j}(A)=a_{h_j}+b_{h_j}i,\ a_{h_j}=0,\ j=1,\cdots,l \qquad (10)$$

（8），（9）和(10)中的 p_j,q_j,h_j 为不大于 n 的自然数，r,g,l 为不大于 n 的自然数且 $r+g+l=n$。

引理 3 设 $A\in R^{n\times n}$，则：

$$S(A)=\sum_{j=1}^{r}a_{p_j},\ L(A)=\sum_{j=1}^{g}a_{q_j},\ Z(A)=0 \qquad (11)$$

$$tr(A)=S(A)+L(A)=\sum_{j=1}^{r}a_{p_j}+\sum_{j=1}^{g}a_{q_j} \qquad (12)$$

证 因为 A 的实部为正的特征根可分为实部为正的实特征根和实部为正的非实的特征根这互不相交的两个类，从非实的特征根是成共轭出现的简单事实出发，不失一般性，在（1）所设下，对 A 的特征根进行如下编号：

记实部为正的实特征根为：

$$\lambda_{p_j}(A)=a_{p_j}+b_{p_j}i,\ j=1,\cdots,d,\ b_{p_j}=0,$$
且 $r-d=2w \qquad (13)$

实部为正的非实的特征根为：

$$\lambda_{p_{d+k}}(A)=a_{p_{d+k}}+b_{p_{d+k}}i,\lambda_{p_{s+w+k}}(A)$$
$$=a_{p_{s+w+k}}+b_{p_{s+w+k}}i \tag{4}$$

(4)中 $a_{p_{s+k}}=a_{p_{d+w+k}},b_{p_{d+k}}=-b_{p_{d+w+k}},k=1,\cdots,w,d\le r$。

这样由()，(8)，(9)，(10)，(3)和(4)

$$S(A)=\sum_{j=1}^{r}(a_{p_j}+b_{p_j}i)$$
$$=\sum_{j=1}^{d}(a_{p_j}+b_{p_j}i)+\sum_{j=1}^{w}(a_{p_{d+j}}+b_{p_{d+j}}i)+\sum_{j=1}^{w}(a_{p_{d+w+j}}+b_{p_{d+w+j}}i)$$
$$=\sum_{j=1}^{r}a_{p_j}$$

由()，(8)，(9)，(10)，(3)和(4)同理可证 $L(A)=\sum_{j=1}^{g}a_{q_j}$，$Z(A)=0$。故结论(1)成立。这样由(1)可得：

$$tr(A)=S(A)+L(A)+Z(A)$$
$$=S(A)+L(A)=\sum_{j=1}^{r}a_{p_j}+\sum_{j=1}^{g}a_{q_j}$$

即(2)式成立。

2 主要结果

定理1 设 $A\in R^{n\times n}$，则有不等式(2)成立，且等号成立当且仅当下面之一条件成立：

(Ⅰ) A 的所有特征根为0；

(Ⅱ) 0为 A 的 $n-1$ 重特征根，另一根是非零实根；

(Ⅲ) 0为 A 的 $n-2$ 重特征根，其他两个实特征根符号互异。

证　由()，(8)，(9)，(10)，和(1)知：

$$S^2(A)=\left(\sum_{k=1}^{r}a_{p_j}\right)^2=\sum_{k=1}^{r}a_{p_j}^2+2\sum_{k<j}a_{p_k}a_{p_j} \tag{5}$$

$$L^2(A)=\left(\sum_{k=1}^{g}a_{q_j}\right)^2=\sum_{k=1}^{g}a_{q_j}^2+2\sum_{k<j}a_{q_k}a_{q_j} \tag{6}$$

由 $S(A)$，$L(A)$ 的定义知：

$$a_{p_k}a_{p_j}>0,\forall 1\le k,j\le r;$$
$$a_{q_k}a_{q_j}>0,\forall 1\le k,j\le g \tag{7}$$

从(3)知存在复可逆阵 P 满足：

$$A^2=P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^2(A) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2(A)\end{pmatrix}P$$

这样在(4)式中取 $e=t=1$，可得：

$$tr(A^2)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2(A)=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_ki)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{n}a_k^2-\sum_{k=1}^{n}b_k^2+2i\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}a_k^2-\sum_{k=1}^{n}b_k^2$$
$$\le\sum_{k=1}^{n}a_k^2=\sum_{j=1}^{r}a_{p_j}^2+\sum_{j=1}^{g}a_{q_j}^2+\sum_{j=1}^{l}a_{h_j}^2$$
$$=\sum_{j=1}^{r}a_{p_j}^2+\sum_{j=1}^{g}a_{q_j}^2$$

这样由(5)，(6)，(7)得

$$tr(A^2)=\sum_{j=1}^{r}a_{p_j}^2+\sum_{j=1}^{g}a_{q_j}^2-\sum_{k=1}^{n}b_k^2$$
$$\le\sum_{j=1}^{r}a_{p_j}^2+\sum_{j=1}^{g}a_{q_j}^2$$
$$\le\sum_{j=1}^{r}a_{p_j}^2+\sum_{j=1}^{g}a_{q_j}^2+2\left(\sum_{k<j}a_{p_k}a_{p_j}+\sum_{k<j}a_{q_k}a_{q_j}\right)$$
$$=S^2(A)+L^2(A) \tag{8}$$

(8)说明

$$tr(A^2)\le S^2(A)+L^2(A) \tag{9}$$

这样由(8)，(9)和(2)得：

$$tr(A^2)\le S^2(A)+L^2(A)$$
$$=[tr(A)-S(A)]^2+S^2(A)$$
$$=2S^2(A)-tr(A)[2S(A)-tr(A)]$$

即知(2)式成立。

下面讨论(2)不等式等号成立的充要条件：

从上面证明可知(2)、(9)两个等式是等价的，注意到(8)与(9)，可知不等式(2)等号成立可以归结于下面不等式等号成立：

$$\sum_{j=1}^{r}a_{p_j}^2+\sum_{j=1}^{g}a_{q_j}^2-\sum_{k=1}^{n}b_k^2\le\sum_{j=1}^{r}a_{p_j}^2+\sum_{j=1}^{g}a_{q_j}^2$$
$$\le\sum_{j=1}^{r}a_{p_j}^2+\sum_{j=1}^{g}a_{q_j}^2+2\left(\sum_{k<j}a_{p_k}a_{p_j}+\sum_{k<j}a_{q_k}a_{q_j}\right) \tag{10}$$

在(10)式中，左边不等式等号成立时，必有 $\sum_{k=1}^{n}b_k^2=0$ 即 $b_k=0,k=1\cdots n$；同时知(10)右边不等式等号成立时，必有：

$$\sum_{k<j} a_{p_k} a_{p_j} + \sum_{k<j} a_{q_k} a_{q_j} = 0 \tag{21}$$

注意到 (17)式，即知 (21)式成立时，两个数组 $a_{p_j} > 0, j=1,\cdots,r$，$a_{q_j} < 0, j=1,\cdots,g$ 各至多有一个不为零。

反之，当 $b_k=0, k=1\cdots n$；且两数组 $a_{p_j} > 0, j=1,\cdots,r$，$a_{q_j} < 0, j=1,\cdots,g$ 各至多有一个不为零时，(18)等号成立是显然的。

由上述讨论可知不等式 (1)等号成立，当且仅当 A 的所有特征根为零；或 0 为 A 的 n-1 重特征根，另一根是非零实根；或 0 为 A 的 n-2 重特征根，其他两个实特征根符号互异。

在这里顺便指出两点：

其一，对于 (18)式，在定理 1 前提下是不能得到：$\mathrm{tr}(A^m) \le S(A)^m + L(A)^m \ (m>1)$。

比如：2 阶实矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ 有两个特征根：$2i, -2i$；则 $\mathrm{tr}(A^4)=32, S^4(A)=0, L^4(A)=0$。从而：

$$\mathrm{tr}(A^4) > S^4(A) + L^4(A)$$

其二，对于在上述证明中所使用的引理 3 所得到的 (14)的特殊情况 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0$，还有更简洁的直接证法：因为 A 为实矩阵，所以 A^2 也为实矩阵；进而 $\mathrm{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2(A) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2i \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ 为实数，这就说明 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0$。

推论 题设条件同于命题，则不等式 (1)成立且 (1)等式成立的充要条件是由命题给出的。

证 由上述在定理 1 中的证明可知，只要证明不等式 (1)的等式条件成立的充要条件。

此时 A 为实对称阵，存在正交阵 U 满足：

$A = U^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)U, U^{-1} = U'$ (U' 为矩阵 U 的转置) (22)

其中 $\lambda_k > 0, k=1,\cdots,r$；$\lambda_{r+j} < 0, j=1,\cdots,g$；$\lambda_{r+g+k}=0, k=1,\cdots,n-g-r$。

先证必要性。由定理 1 知，不等式 (1)等号成立时，A 的特征根有三种情况：

(Ⅰ) A 的所有特征根为零，由 (22)知 A=0，即 A 为零矩阵；

(Ⅱ) A 有 n-1 重零特征根，另一根是非零实根；由 (22)知 A 相似于对角矩阵 $\mathrm{diag}(a,0,0,\cdots,0)$ $a\neq 0$；

(Ⅲ) 0 为 A 的 n-2 重特征根，其他两个实特征根符号互异。由惯性定理[3]，A 合同于对角矩阵 $\mathrm{diag}(1,-1,0,\cdots,0)$。必要性得证。

再证充分性：

(Ⅰ) 若 A 为零矩阵，即知 A 所有的特征根为 0；由定理知不等式 (1)等号成立；

(Ⅱ) 若 A 相似 $\mathrm{diag}(a,0,0,\cdots,0)$ $a\neq 0$，即 A 的 n-1 重特征根为 0，另一根也是实根，由定理 1 知不等式 (1)等号也成立；

(Ⅲ) 当 A 合同于对角矩阵 $\mathrm{diag}(1,-1,0,\cdots,0)$ 时，由 (14)和惯性定理知 0 为 A 的 n-2 重特征根，其他两个实特征根符号互异，这样由定理 1 知此时不等式 (1)等号也成立。

致谢：本文第一作者在第二作者指导下，在准备报考研究生过程中，得到了漳州师范学院数学系提供的该院首次招收硕士研究生入学试卷，才使我们有机会接触到本文所讨论的问题。在此对莆田学院提供的良好的学习环境、漳州师范学院数学系的支持深表谢意。

参考文献：

[1] Kenneth Hoffman, Ray Kunzn. Linear Algebra[M]. 2nd ed. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall Inc, 1971.

[2] 张贤科，许甫华. 高等代数学[M]. 2 版. 北京：清华大学出版社，2007.

[3] 北京大学数学系. 高等代数[M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，2003.

[4] 李师正. 高等代数解题方法与技巧[M]. 北京：高等教育出版社，2004.

[5] 张禾瑞，郝炳新. 高等代数[M]. 4 版. 北京：高等教育出版社，1999.

[6] 谭思文，杨忠鹏. 关于稳定矩阵乘积迹一个不等式的注记[J]. 北华大学学报，2002，3 (6)：467-468.

[7] 林志兴，杨忠鹏，晏瑜敏，等. 从一道高等代数试题谈起[J]. 莆田学院学报，2006，13 (5)：84-86.

[8] 漳州师范学院数学系. 2004 年漳州师范学院硕士研究生入学试卷[G]. 漳州：漳州师范学院数学系，2004.

[责任编辑 林 锋]