第 23 卷　第 6 期　福建师范大学学报 (自然科学版)　Vol. 23　No. 6
2007 年 11 月　Journal of Fujian Normal University (Natural Science Edition)　Nov. 2007

文章编号: 1000-5277(2007)06-0004-04

关于绝对基与无条件基

张云南[1,2]，林丽琼[3]
(1. 福建师范大学数学与计算机科学学院，福建 福州　350007;
2. 厦门大学数学科学学院，福建 厦门　361005;
3. 福州大学数学与计算机科学学院，福建 福州　350002)

摘要: 讨论绝对单调基、绝对基和绝对重排基之间的关系，以及绝对基与无条件基的关系，证明了在实空间中，绝对基与 1-无条件基是等价的，在复空间中则不然.

关键词: 巴拿赫空间; 绝对基; 无条件基
中图分类号: O177.2　　文献标识码: A

On Absolute Bases and Unconditional Bases

ZHANG Yun-nan[1,2], **LIN Li-qiong**[3]
(1. *School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou* 350007, *China*;
2. *Department of Mathematics, Xiamen University, Xiamen* 361005, *China*;
3. *College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou* 350002, *China*)

Abstract: Discusses the relations of absolute monotone bases, absolute bases and absolute rearrange bases, and discusses the relations of absolute bases and unconditional bases. Proves that absolute bases and 1-unconditional bases are equivalent in real spaces, but it isn't true in complex spaces.

Key words: Banach space; absolute bases; unconditional bases

要想把一个 Banach 空间看作是一个序列空间, 最自然的方式是在其中引入所谓坐标系. 当然对于同一个空间可能用不同的方式来实现这一点. 其中最常用的办法是引入 Schauder 基的概念, 还有收缩基、有界完备基和无条件基等特殊的 Schauder 基概念, 这些基都在 Banach 空间理论中起着重大作用. [1] 中引入了另外几种特殊的 Schauder 基(绝对单调基、绝对基和绝对重排基). 笔者在[1] 的基础上, 继续讨论绝对单调基、绝对基和绝对重排基之间的关系, 并说明绝对基与无条件基的关系.

定义 1　设 X 是 Banach 空间, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为 X 的 Schauder 基, 如果对任意 $x \in X$, 存在唯一数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, 其中级数是按范数收敛.

如果对任意 $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, 序列 $\{\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \| : n = 1, 2, \cdots\}$ 是单调增加的, 则称这个 Schauder 基为单调基.

定义 2[1]　设 X 是 Banach 空间, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为 X 的绝对单调基, 如果 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的 Schauder 基且有性质: 对任意的 $n \in \mathbf{N}$ 和数 $|\alpha_i| \leq |\beta_i|$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 有 $\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \| \leq \| \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \|$.

定义 3[1]　设 X 是 Banach 空间, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为 X 的绝对基, 如果 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的 Schauder 基且有性质: 对任意的 $n \in \mathbf{N}$ 和任意的数 $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 有 $\| \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| e_i \| = \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \|$.

收稿日期: 2006-12-27
基金项目: 福建省教育厅基金资助项目 (JA05211; JB06026)
作者简介: 张云南 (1981-), 男, 福建惠安人, 助教, 博士研究生.

[1] 证明了绝对单调基是绝对基, 绝对基是单调基, 也说明并非所有的单调基是绝对基. 命题 1 说明了绝对单调基与绝对基是等价的.

命题 1　绝对基是绝对单调基.

证明　设$\{e_n\}$ 是绝对基, 对任意的 $n \in \mathbf{N}$ 和数 $\alpha_i \leq \beta_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 令 $0 \leq t_i \leq 1$, 使得 $\alpha_i = t_i \beta_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i + t_n \beta_n e_n \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i + \left(\frac{t_n - 1}{2} + \frac{1 + t_n}{2} \right) \beta_n e_n \right\| =$$

$$\left\| \frac{1 - t_n}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i - \beta_n e_n \right) + \frac{1 + t_n}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i + \beta_n e_n \right) \right\| \leq$$

$$\frac{1 - t_n}{2} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i - \beta_n e_n \right\| + \frac{1 + t_n}{2} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i + \beta_n e_n \right\| = (\text{由}\{e_n\}\text{ 是绝对基})$$

$$\frac{1 - t_n}{2} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i + \beta_n e_n \right\| + \frac{1 + t_n}{2} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i + \beta_n e_n \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i + \beta_n e_n \right\|.$$

同理可证 $\left\| \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i + \beta_n e_n \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i e_i + \beta_{n-1} e_{n-1} + \beta_n e_n \right\| \leq \cdots \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i \right\|$. 现在由绝对基的定义, $\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i \right\|$, 即$\{e_n\}$ 是绝对单调基.

下面考虑绝对基与无条件基的关系.

定义 4　设$\{x_n\}$ 是Banach 空间 X 中的序列, 如果对自然数列的每个置换 π, 级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ 是收敛的, 那么称级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_n$ 是无条件收敛的.

定义 5　Banach 空间 X 的Schauder 基$\{x_n\}$ 称为无条件基, 如果对任何 $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, 级数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ 是无条件收敛的.

引理 1[2]　设$\{x_n\}$ 是 Banach 空间 X 的基, 则下列等价:

(1) $\{x_n\}$ 是无条件基;

(2) 若 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ 是收敛的, 则当 $b_i \leq a_i$, $i = 1, 2, \cdots$ 时, $\sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i$ 是收敛的.

引理 2[2]　设$\{x_n\}$ 是 Banach 空间 X 的无条件基, $\theta = \{\theta_n\}$, $\theta_i = \pm 1$. 定义 $M_\theta: X \to X: M_\theta\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i a_i x_i$, 则 M_θ 为有界线性算子, 且 $\sup_\theta \| M_\theta \| < \infty$. 称数$\sup_\theta \| M_\theta \|$ 为 $\{x_n\}$ 的无条件基常数. 无条件基常数为 1 的无条件基称为 1-无条件基.

注 1　若$\{x_n\}$ 是 Banach 空间 X 的无条件基, 在 X 上定义新范数 $\| x \| := \sup_\theta \| M_\theta x \|$, $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, 则由[3] (或[4]), $\|\quad\|$ 与 $\|\quad\|$ 等价. 显然$\{x_n\}$ 是$(X, \|\quad\|)$ 的 1-无条件基.

命题 2　设$\{x_n\}$ 是 Banach 空间 X 的无条件基, $\lambda = \{\lambda_n\}$, $\lambda_i = 1$. 定义 $M_\lambda: X \to X: M_\lambda\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i x_i$, 则 M_λ 为有界线性算子, 且$\sup_\theta \| M_\theta \| \leq \sup_\lambda \| M_\lambda \| \leq 2 \sup_\theta \| M_\theta \| < \infty$.

证明　(1) 由引理 1, M_λ 是有意义的, 且显然是线性的. 若

$$y_m = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^m x_i \to y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i, \quad M_\lambda(y_m) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i^m x_i \to z = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i,$$

由[2], 对任意 i, $a_i^m \to a_i$, 故 $\lambda_i a_i^m \to \lambda_i a_i$, 任意 i.

又对任意 i, 有 $\lambda_i a_i^m \to b_i$, 故 $b_i = \lambda_i a_i$, 任意 i, 从而 $z = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i x_i = M_\lambda(y)$. 由闭图像定理知 M_λ 是有

界线性算子.

(2) 对任意$\lambda=\{\lambda_n\}$, $\lambda_n = 1$. 对任意$x=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i$, 由Hahn-Banach 定理, 存在$f\in S_{X^*}$ (X^* 的单位球面), 使得$f(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_ia_ix_i)=\|\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_ia_ix_i\|$. 令

$$\theta_i=\begin{cases}1, & \mathrm{Re}(a_if(x_i))\geq 0,\\ -1, & \mathrm{Re}(a_if(x_i))<0,\end{cases}\quad \theta_i'=\begin{cases}1, & \mathrm{Im}(a_if(x_i))\geq 0,\\ -1, & \mathrm{Im}(a_if(x_i))<0,\end{cases}$$

(其中 Re, Im 分别表示实部和虚部), 则

$$\|M_\lambda x\|=\|\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_ia_ix_i\|=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_ia_if(x_i)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\quad a_if(x_i)=\sum_{i=1}^{\infty}a_if(x_i)\leq$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{Re}(a_if(x_i))+\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{Im}(a_if(x_i))=\sum_{i=1}^{\infty}\theta_i\mathrm{Re}(a_if(x_i))+\sum_{i=1}^{\infty}\theta_i'\mathrm{Im}(a_if(x_i))=$$

$$\mathrm{Re}(\sum_{i=1}^{\infty}\theta_ia_if(x_i))+\mathrm{Im}(\sum_{i=1}^{\infty}\theta_i'a_if(x_i))\leq\sum_{i=1}^{\infty}\theta_ia_if(x_i)+\sum_{i=1}^{\infty}\theta_i'a_if(x_i)\leq$$

$$\|\sum_{i=1}^{\infty}\theta_ia_ix_i\|+\|\sum_{i=1}^{\infty}\theta_i'a_ix_i\|=\|M_\theta x\|+\|M_{\theta'}x\|\leq 2\sup_\theta\|M_\theta\|\quad\|x\|.$$

故$\|M_\lambda\|\leq 2\sup_\theta\|M_\theta\|$, 从而$\sup_\lambda\|M_\lambda\|\leq 2\sup_\theta\|M_\theta\|<\infty$. 而$\sup_\theta\|M_\theta\|\leq\sup_\lambda\|M_\lambda\|$显然成立.

注 2　显然当X 是实的Banach 空间时, $\sup_\theta\|M_\theta\|=\sup_\lambda\|M_\lambda\|$. 而下面的命题3 与例1 一起说明存在复的Banach 空间X 及X 的无条件基$\{e_n\}$, 使得$\sup_\theta\|M_\theta\|<\sup_\lambda\|M_\lambda\|$.

命题 3　$\{e_n\}$ 是绝对基$\Leftrightarrow\{e_n\}$ 是无条件基且$\sup_\lambda\|M_\lambda\|=1$.

证明　"$\Rightarrow$"设$\{e_n\}$ 是绝对基, 由命题1, $\{e_n\}$ 是绝对单调基. 再由绝对单调基的定义及引理1, $\{e_n\}$ 是无条件基. 现在由绝对基的定义, 对任意$\lambda=\{\lambda_n\}$, $\lambda_n = 1$, 有

$$\|M_\lambda(\sum_{i=1}^{\infty}a_ie_i)\|=\|\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_ia_ie_i\|=\|\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_ia_i\quad e_i\|=\|\sum_{i=1}^{\infty}a_i\quad e_i\|=\|\sum_{i=1}^{\infty}a_ie_i\|,$$

故$\|M_\lambda\|=1$, 从而$\sup_\lambda\|M_\lambda\|=1$.

"$\Leftarrow$"设$\{e_n\}$ 是无条件基且$\sup_\lambda\|M_\lambda\|=1$. 对任意的$n\in\mathbf{N}$ 和任意的数$\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$, 令

$$\lambda_i=\begin{cases}1, & \alpha_i=0 \text{ 或 } i>n,\\ \bar{\alpha}_i/\alpha_i, & \alpha_i\neq 0,\end{cases}$$

(其中$\bar{\alpha}_i$ 是α_i的共轭复数), 则$\lambda_i = 1$. 令$\lambda=\{\lambda_i\}$, 有

$$\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\quad e_i\|=\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_ie_i\|=\|M_\lambda(\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i)\|\leq\|M_\lambda\|\quad\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\|\leq\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\|.$$

再令

$$\lambda_i'=\begin{cases}1, & \alpha_i=0 \text{ 或 } i>n,\\ \alpha_i/\alpha_i, & \alpha_i\neq 0,\end{cases}$$

则$\lambda_i' = 1$, 令$\lambda'=\{\lambda_i'\}$, 有

$$\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\|=\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i'\alpha_i\quad e_i\|=\|M_{\lambda'}(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\quad e_i)\|\leq\|M_{\lambda'}\|\quad\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\quad e_i\|\leq\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\quad e_i\|.$$

从而$\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\quad e_i\|=\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\|$, 即$\{e_n\}$ 是绝对基.

推论 1　当X 是实空间时, $\{e_n\}$ 是绝对基$\Leftrightarrow\{e_n\}$ 是1-无条件基.

此由在实空间中, $\sup_\theta\|M_\theta\|=\sup_\lambda\|M_\lambda\|$ 及命题3 即得.

例 1　存在X 是复空间, 以及$\{e_n\}$ 是1-无条件基, 但$\{e_n\}$ 不是绝对基.

设X 是复的$L_4[0,1]$ 空间, Haar 系$\{h_n(t)\}$ 如下. 由[3] 或[5], $\{h_n(t)\}$ 是$(X,\|\quad\|)$ 的无条件基.

$$
\begin{cases}
h_1(t) \equiv 1, & t \in [0, 1], \\
h_{2^{k-1}+j}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^{k-1}}, & t \in [\frac{2j-2}{2^k}, \frac{2j-1}{2^k}), \\ -\sqrt{2^{k-1}}, & t \in [\frac{2j-1}{2^k}, \frac{2j}{2^k}], \\ 0, & 其他, \end{cases} & j = 1, 2, \cdots, 2^{k-1}; k = 1, 2, \cdots
\end{cases}
$$

如注 1, 引入等价范数 $\|\ \|$, 使 $\{h_n(t)\}$ 是 $(X, \|\ \|)$ 的 1–无条件基.

下证 $\{h_n(t)\}$ 不是绝对基.

$$
对\ h_2(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1, & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \qquad h_3(t) = \begin{cases} \sqrt{2}, & t \in [0, \frac{1}{4}), \\ -\sqrt{2}, & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ 0, & 其他, \end{cases}
$$

$a_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $a_3 = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})/\sqrt{2} \in \mathbf{C}$, 则 $|a_2| = 1$, $|a_3| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 只需证明

$$\|a_2h_2 + a_3h_3\| \neq \|(|a_2|h_2 + |a_3|h_3)\|,$$

$$\|a_2h_2 + a_3h_3\|^4 = \int_0^{\frac{1}{4}} |a_2 + \sqrt{2}a_3|^4 + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} |a_2 - \sqrt{2}a_3|^4 + \int_{\frac{1}{2}}^{1} |-a_2|^4 =$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} 1^4 + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (\sqrt{3})^4 + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1^4 = 3.$$

容易看到 $\|a_2h_2 + a_3h_3\| = \|a_2h_2 + a_3h_3\| = \sqrt[4]{3}$.

$$\|(|a_2|h_2 + |a_3|h_3)\|^4 = \int_0^{\frac{1}{4}} (|a_2| + \sqrt{2}|a_3|)^4 + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (|a_2| - \sqrt{2}|a_3|)^4 + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (-|a_2|)^4 =$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} 2^4 + 0 + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1^4 = \frac{9}{2}.$$

同样 $\|(|a_2|h_2 + |a_3|h_3)\| = \|(|a_2|h_2 + |a_3|h_3)\| = \sqrt[4]{\frac{9}{2}} \neq \|a_2h_2 + a_3h_3\|$.

[1] 中还引入了绝对重排基的概念, 并说明绝对重排基是绝对基. 下面举例说明并非所有的绝对基是绝对重排基.

定义 **6**[1]　设 X 是 Banach 空间, $\{e_n\}$ 称为 X 的绝对重排基, 如果 $\{e_n\}$ 是 X 的 Schauder 基且有性质: 对任意的 $n \in \mathbf{N}$, 任意的数 $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 及数组 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的任一重排 $\pi(i)$ 都有 $\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\| = \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_{\pi(i)} e_i\|$.

例 2　并非所有的绝对基是绝对重排基.

设 X 是实的 $L_4[0, 1]$ 空间, Haar 系 $\{h_n(t)\}$ 如例 1, 是 $(X, \|\ \|)$ 的 1–无条件基, 由推论 1, $\{h_n(t)\}$ 是 $(X, \|\ \|)$ 的绝对基.

下证 $\{h_n(t)\}$ 不是绝对重排基.

$$
对\ h_3(t) = \begin{cases} \sqrt{2}, & t \in [0, \frac{1}{4}), \\ -\sqrt{2}, & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ 0, & 其他, \end{cases} \qquad h_7(t) = \begin{cases} 2, & t \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}), \\ -2, & t \in [\frac{5}{8}, \frac{3}{4}], \\ 0, & 其他, \end{cases} \quad a_3 = 2, a_7 = 1 \in \mathbf{R}.
$$

只需证明 $\|(a_3h_3 + a_7h_7)\| \neq \|a_7h_3 + a_3h_7\|$,

(下转第 23 页)

$A \leftarrow B$ 模共 $n\ \ m$ 个, 而代数 A 有 n 个不可分解投射模 Ae_i, 代数 B 有 m 个不可分解投射模 Bf_j, 则不可分解投射 A-模与不可分解投射 B-模张量得 $n\ \ m$ 个不可分解投射 $A \leftarrow_k B$ 模, 故对某个不可分解投射 $A \leftarrow_k B$ 模 P, 存在不可分解投射 A-模 X、不可分解投射 B-模 Y, 使得 $P = X \leftarrow_k Y$.

对偶地, 可以证明内射的情形.

关于倾斜 $A \leftarrow B$ 模与倾斜 A-模、倾斜 B-模的关系将另文讨论.

参考文献:

[1] Auslander M. On the dimension of modules and algebras Ⅲ [J]. Nagoya Math J, 1955, 9: 67– 77.

[2] Auslander M. On the dimension of modules and algebras Ⅳ [J]. Nagoya Math J, 1956, 11: 61– 65.

[3] Eilenberg S, Rosenberg A, Zalinsky D. On the dimension of modules and algebras Ⅷ [J]. Nagoya Math J, 1957, 12: 71– 93.

[4] 周伯埙. 左模的张量积及其同调维数 [J]. 数学研究与评论, 1981 (1): 17– 24.

[5] 刘绍学. 路代数的张量积与有向图的直积 [J]. 数学年刊, 1992, 13A, 2: 153– 160.

[6] Crawley-Boevey W. Lectures on representations of quivers [M]. Preprints: Oxford, 1992.

[7] Lawberice J. When is the tensor product of algebras local Ⅱ [J]. Proc Amer Math Soc, 1976, 58: 22– 24.

[8] Rotman J J. An introduction to homological algebra [M]. New York: Academic Press, 1979.

[9] Anderson F W, Fuller K R. Ring and categories of modules [M]. New York: Spring-Verlag, 1992.

(责任编辑: 林　敏)

(上接第 7 页)

$$\|(a_3 h_3 + a_7 h_7)\| = \|(a_3 h_3 + a_7 h_7)\| =$$

$$\left(\int_0^{\frac14} 2\ \overline{2}^{\,4} + \int_{\frac14}^{\frac12} -2\ \overline{2}^{\,4} + \int_{\frac12}^{\frac58} 2^4 + \int_{\frac58}^{\frac34} -2^4\right)^{\frac14} = \overline{6},$$

$$\|a_7h_3 + a_3h_7\| = \|a_7h_3 + a_3h_7\| =$$

$$\left(\int_0^{\frac14} \overline{2}^{\,4} + \int_{\frac14}^{\frac12} - \overline{2}^{\,4} + \int_{\frac12}^{\frac58} 4^4 + \int_{\frac58}^{\frac34} -4^4\right)^{\frac14} = {}^4\overline{66} \neq \|(a_3 h_3 + a_7 h_7)\|.$$

感谢钟怀杰教授对本文的悉心指导!

参考文献:

[1] 张云南, 林丽琼. 关于几种单调基与超平面的好可补性 [J]. 福建师范大学学报: 自然科学版, 2004, 20 (2): 15 – 20.

[2] 俞鑫泰. Banach 空间几何理论 [M]. 上海: 华东师范大学出版社, 1984.

[3] 赵俊峰. Banach 空间结构理论 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 1991.

[4] Lindenstrauss J, Tzafriri L. Classical Banach spaces I [M]. New York: Springer-Verlag, 1977.

[5] Lindenstrauss J, Tzafriri L. Classical Banach spaces II [M]. New York: Springer-Verlag, 1979.

(责任编辑: 林　敏)