第 14 卷 第 2 期
2007 年 4 月
莆 田 学 院 学 报
Journal of Putian University
Vol.14 No.2
Apr. 2007
文章编号:1672-4143(2007)02-0015-05 中图分类号:O177.3 文献标识码:A

强拟凸域上$\bar{\partial}$-方程的带权因子解的一致估计

阮世华[1], 姜 永[2]

(1.厦门大学 数学科学学院,福建 厦门 361005;2.福建农林大学 计算机与信息学院,福建 福州 350002)

摘 要:文[1]得到 C^n 空间中具有逐块 $C^{(1)}$光滑边界的强拟凸域上(0,q)形式的带权因子的 Leray-Norguet 公式的拓广式及$\bar{\partial}$-方程带权因子的连续解。在此基础上,利用文[2]的方法,得到了具有逐块光滑边界的强拟凸域上的$\bar{\partial}$-方程带权因子解的一致估计。

关键词:拓广的 Bochner-Martinelli 核;强拟凸域;权因子;一致估计

Uniform Estimate of Solutions with Weight Factors for $\bar{\partial}$-Equations over a Strictly Pseudoconvex Domain

RUAN Shi-hua[1], JIANG Yong[2]

(1. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China;
2. College of Computer and Information, Fujian Agriculture and Forestry University, Fuzhou 350002, China)

Abstract: In [1], an extensional formula of Leray-Norguet with weight factors of differential forms and weighted continuous solutions of the $\bar{\partial}$-equation on a strictly pseudoconvex domain with piecewise $C^{(1)}$ smooth boundaries in C^n were obtained. On the base of [1], by using the trick of [2], the authors give the uniform estimate of weighted solutions of the $\bar{\partial}$-equations on a strictly pseudoconvex domain with piecewise smooth boundaries in C^n.

Key words: extensional Bochner-Martinelli kernel; strictly pseudoconvex domain; weight factor; uniform estimate

自 20 世纪 70 年代 Henkin 和 Grauert 等分别得到 C^n 中强拟凸域上$\bar{\partial}$-方程解的积分表示公式后[3-4],多复变数的积分表示方法成为多元复分析的主要方法之一[5-7]。姚宗元等得出 C^n 中有界域上具有拓广的 B-M 核的积分表示[8-9]。陈吕萍得到了 C^n 中具有逐块光滑边界强拟凸域上具有的拓广的 B-M核的(0,q)形式的带权因子的积分表示及$\bar{\partial}$-方程带权因子的连续解[1]。在此基础上,本文利用 Rang 和 Siu 的方法得到了强拟凸域上$\bar{\partial}$-方程带权因子解的一致估计[2]。

1 有关逐块 $C^{(1)}$光滑的概念与引理

先介绍逐块 $C^{(1)}$光滑边界的概念:

定义 1[2,6] 设 $D\subset C^n$ 是一开集,D 的边界 ∂D 称为逐块 $C^{(1)}$光滑的,如果存在 ∂D 的一个领域 U 的一个有限开覆盖 $\{V_j\}_{j=1}^{N}$ 和 $C^{(1)}$函数 $\rho_k: V_k\to R, k=$

收稿日期:2007-01-21
作者简介:阮世华(1977-),女,福建仙游人,硕士研究生,莆田学院数学系助教;姜永(1964-),男,福建永定人,副教授。

$1,2,\cdots,N$, 使得满足下列条件:

(1) $\partial D\subseteq V_1\cup\cdots\cup V_N$;

(2) 点 $z\in V_1\cup\cdots\cup V_N$ 属于 D 当且仅当存在 k: $1\le k\le N$, 使 $z\in V_k$, $\rho_k(z)<0$;

(3) 对每一指标集 $1\le k_1<\cdots<k_l\le N$ 和每一点 $z\in V_{k_1}\cap\cdots\cap V_{k_l}$, $d\rho_{k_1}(z)\wedge\cdots\wedge d\rho_{k_l}(z)\ne 0$。命

$$S_k=\{z\in\partial D\cap V_k:\ \rho_k(z)=0\},\ k=1,2,\cdots,N$$

记 $P(N)$ 为对整数 $1\le k_1\le\cdots\le k_l\le N$ 的所有有序集 $K=(k_1,\cdots,k_l)$ 的集合。对所有 $K\in P(N)$, 定义

$$S_K=\begin{cases} S_{k_1}\cap\cdots\cap S_{k_l}, & \text{如果整数 } k_1,\cdots,k_l \text{ 是不同的配对} \\ \phi, & \text{否则}\end{cases}$$

选择 S_K 的定向, 使得 $\partial D=\sum_{k=1}^{N}S_k$, $\partial S_K=\sum_{j=1}^{N}S_{Kj}$, 其中 $Kj=(k_1,\cdots,k_l,j)$。

以△表示所有满足 $\lambda_j\ge 0$, $j=0,1,2,\cdots,N$ 且 $\sum_{j=0}^{N}\lambda_j=1$ 的点 $(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_N)\in R^{N+1}$ 的集合, 以形式 $d\lambda_1\wedge\cdots\wedge d\lambda_N$ 定义△的方向, 又对整数 $1\le k_1<\cdots<k_l\le N$ 的每一个严格增加的指标集 $K=(k_1,\cdots,k_l)$, 记 $|K|=l$, 对所有 $K\in P(N)$, 定义

$$\Gamma_K=\{\zeta\in U_D^K:\ \rho_j(\zeta)\le\rho_K(\zeta)\le 0,\ j=1,\cdots,N\}$$

则有 $\bar D=\Gamma_1\cup\cdots\cup\Gamma_N$, 且 $\partial\Gamma_K=S_K\cup\Gamma_{K1}\cup\cdots\cup\Gamma_{KN}$, $K\in P(N)$。命

$$\triangle_K=\left\{\lambda\in\triangle:\ \sum_{\alpha=1}^{l}\lambda_{k_\alpha}=1\right\},$$

$$\triangle_{0K}=\left\{\lambda\in\triangle:\ \lambda_0+\sum_{\alpha=1}^{l}\lambda_{k_\alpha}=1\right\}$$

其中 $0K=(0,K_1,\cdots,K_l)$。显然由以上定义知, $\triangle_{0K}$ 具有由形式 $d\lambda_{k_1}\wedge\cdots\wedge d\lambda_{k_l}$ 定义的定向, 而对 $k=0,1,\cdots,N$, 单点集 $\triangle_k$ 的定向是 $+1$。

2 带权因子的 Leray-Norguet 公式的拓广式及 $\bar\partial$- 方程带权因子的解

设 D 是 C^n 中的有界域, 具有定义 1 意义下的逐块 $C^{(1)}$ 光滑边界 ∂D, $u_\alpha^{(k)}(\zeta,z)$ $(\alpha=1,2,\cdots,n)$ 为一可微函数, 满足

$$\langle u^{(k)}(\zeta,z),\ \zeta-z\rangle=1$$

其中 $u^{(k)}(\zeta,z)=(u_1^{(k)}(\zeta,z),\cdots,u_n^{(k)}(\zeta,z))$, $\zeta\in S_K$, $z\in D$, $k\in K$, $K=(k_1,\cdots,k_l)$ 是严格增加的整数 $1\le k_1<\cdots<k_l\le N$ 的指标集, 现定义

$$L_\alpha^{(m)}(\lambda,\zeta,z,u)=\lambda_0\frac{(\bar\zeta_\alpha-\bar z_\alpha)|\zeta_\alpha-z_\alpha|^{m-2}}{\sum_{j=1}^{n}|\zeta_j-z_j|^m}+\sum_{k\in K}\lambda_k u_\alpha^{(k)}(\zeta,z),$$

$$\alpha=1,2,\cdots,n,\ \ m=2,3,\cdots,P\ (P<+\infty) \qquad (1)$$

式中 $\lambda_0,\lambda_k\ge 0$ 且 $\lambda_0+\sum_{k\in K}\lambda_k=1$, 易知 $L_\alpha^{(m)}(\lambda,\zeta,z,u)$, $\alpha=1,2,\cdots,n$ 为 D 上的一个抽象的单位分解。

又引进 C^∞ 映射[10]

$$Q(\zeta,z)=(Q_1(\zeta,z),\cdots,Q_n(\zeta,z)):\ \bar D\times\bar D\to C^n$$

对每一固定的 ζ, $Q(\zeta,z)$ 关于 z 全纯, 其定义域包含映射 $C^n\times C^n\to C^1$, $(\zeta,z)\to\langle Q(\zeta,z),\zeta-z\rangle$ 的像集, 且 $G(0)=1$, 仍用 Q 记作 $\langle Q,d(\zeta-z)\rangle$, 这并不会引起混淆。

定义拓广的 Bochner-Martinelli 核的带权因子的微分形式为

$$\bar T(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)=\frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q,\zeta-z\rangle)(\bar\partial Q)^k\wedge$$

$$\langle L_\alpha^{(m)},d(\zeta-z)\rangle\wedge\langle\bar\partial L_\alpha^{(m)},d(\zeta-z)\rangle^{n-k-1} \qquad (2)$$

记 $d\bar T(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)=(\bar\partial_{\zeta,z}+d_\lambda)\bar T(L_\alpha^{(m)},\zeta,z):=\hat T(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)$。

文[8]得到了强拟凸域上带权因子的 $(0,q)$ 形式的 Leray-Norguet 公式的拓广式, 即有

引理 1[1] 设 f 为一具有逐块 $C^{(1)}$ 光滑边界的强拟凸域 $\bar D$ 上连续的 $(0,q)$ 形式, 使得形式 $\bar\partial f$ 在 $\bar D$ 上还是连续, $1\le q\le n$, 那么有

$$(-1)^q f(z)=$$

$$-\left[\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\triangle_{0K}}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\bar T(E_\alpha^{(m)},\zeta,z)+\right.$$

$$\left.\int_{D\times\triangle_0}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\bar T(E_\alpha^{(m)},\zeta,z)\right]+$$

$$\bar\partial_z\left[\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\triangle_{0K}}f(\zeta)\wedge\bar T(E_\alpha^{(m)},\zeta,z)+\right.$$

$$\left.\int_{D\times\triangle_0}f(\zeta)\wedge\bar T(E_\alpha^{(m)},\zeta,z)\right]$$

其中

$$E_\alpha^{(m)}(\lambda,\zeta,z)=$$

$$\lambda_0\frac{(\bar\zeta_\alpha-\bar z_\alpha)|\zeta_\alpha-z_\alpha|^{m-2}}{\sum_{j=1}^n|\zeta_j-z_j|^m}+\sum_{k\in K}\lambda_k\frac{P_\alpha^{(k)}(\zeta,z)}{\Phi^{(k)}(\zeta,z)}$$

$$\bar T(E_\alpha^{(m)},\zeta,z)=$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q,\zeta-z\rangle)(\bar\partial Q)^k\wedge$$

$$\langle E_\alpha^{(m)},d(\zeta-z)\rangle\wedge\langle\bar\partial E_\alpha^{(m)},d(\zeta-z)\rangle^{n-k-1}$$

$$\alpha=1,2,\cdots,n,\ m=2,3,\cdots,P\ (P<+\infty)$$

式中 $P_\alpha^{(k)}(\zeta,z)$是 Henkin 和 Leiterer 在强拟凸域上所引进的支撑函数[5], 满足

$$\Phi^{(k)}(\zeta,z)=\sum_{\alpha=1}^n(\zeta_\alpha-z_\alpha)P_\alpha^{(k)}(\zeta,z)$$

特别地, 若$\bar\partial f=0$ 在 D 上, 则

$$g(z)=$$

$$(-1)^q\Big[\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\triangle_{0K}}f\wedge\bar T(E_\alpha^{(m)},\zeta,z)+$$

$$\int_{D\times\triangle_0}f\wedge\bar T(E_\alpha^{(m)},\zeta,z)\Big]$$

是$\bar\partial g=f$ 在 D 中的带权因子连续解。下面, 我们将具体给出$\bar\partial$- 方程带权因子解的一致估计。

3　$\bar\partial$- 方程带权因子解的一致估计

记

$$w_\alpha^{(0)}=\frac{(\bar\zeta_\alpha-\bar z_\alpha)|\zeta_\alpha-z_\alpha|^{m-2}}{\sum_{j=1}^n|\zeta_j-z_j|^m}=\frac{P_\alpha^{(0)}(\zeta,z)}{\Phi_0}$$

$$w_\alpha^{(k)}=\frac{P_\alpha^{(k)}(\zeta,z)}{\Phi^{(k)}}$$

其中 $P_\alpha^{(0)}(\zeta,z):=(\bar\zeta_\alpha-\bar z_\alpha)|\zeta_\alpha-z_\alpha|^{m-2}$, $\Phi_0=\sum_{j=1}^n|\zeta_j-z_j|^m$,

则 $E_\alpha^{(m)}=\lambda_0 w_\alpha^{(0)}+\sum_{k\in K}\lambda_k w_\alpha^{(k)}$。记

$$\bar T(E_\alpha^{(m)},\zeta,z):=\sum_{\substack{1\le p\le n\\1\le q\le n-1}}\bar T_{pq}(E_\alpha^{(m)},\zeta,z)$$

其中$\bar T_{pq}(E_\alpha^{(m)},\zeta,z)$是$\bar T(E_\alpha^{(m)},\zeta,z)$关于 z 为(p,q)形式的分量。

记

$$\tilde T(E_\alpha^{(m)},\zeta,z)=\frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}G(\langle Q,\zeta-z\rangle)$$

$$\langle E^{(m)},d(\zeta-z)\rangle\wedge\langle\bar\partial E^{(m)},d(\zeta-z)\rangle^{n-1}$$

$$\tilde g(z)=$$

$$(-1)^q\Big[\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\triangle_{0K}}f\wedge\tilde T(E_\alpha^{(m)},\zeta,z)+$$

$$\int_{D\times\triangle_0}f\wedge\tilde T(E_\alpha^{(m)},\zeta,z)\Big]$$

由于核$\bar T(E_\alpha^{(m)},\zeta,z)$与$\tilde T(E_\alpha^{(m)},\zeta,z)$只相差一个低阶项, 故我们只需对$\tilde g$估计即可。

引理 2[6]

$$\langle E^{(m)},d(\zeta-z)\rangle\wedge\langle\bar\partial E^{(m)},d(\zeta-z)\rangle^{n-1}=$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!\Big[\sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}E_j^{(m)}\bigwedge_{\alpha\ne j}\bar\partial E_\alpha^{(m)}\Big]\wedge\bigwedge_{p=1}^n d(\zeta_p-z_p)$$

由引理 2, 有

$$\tilde T_{0,q-1}(E_\alpha^{(m)},\zeta,z)=$$

$$a(0,q-1)\det(E^{(m)},\bar\partial_{\zeta,\lambda}E^{(m)},\cdots,\bar\partial_{\zeta,\lambda}E^{(m)},\bar\partial_z E^{(m)},\cdots,\bar\partial_z E^{(m)})\wedge d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n$$

其中 a(0,q-1)是$\tilde T_{0,q-1}$ 的系数, 行列式中$\bar\partial_{\zeta,\lambda}E^{(m)}$有 n-q 列, $\bar\partial_z E^{(m)}$有 q-1 列。

用 $A_{0,q-1}^{K,N}$ 表示$\tilde T_{0,q-1}$ 中 λ 为 1 阶的所有项目的和, 包括单项式 $\bigwedge_{k\in K}d\lambda_k$。这样选择使得

$$\int_{S_K\times\triangle_{0K}}f(\zeta)\wedge\tilde T_{0,q-1}(E_\alpha^{(m)},\zeta,z)=\int_{S_K}f(\zeta)\wedge\int_{\triangle_{0K}}A_{0,q-1}^{K,N}$$

由元素是双微分的行列式的性质和列向量是函数的行列式的多重性, 可得到

$$A_{0,q-1}^{K,N}=$$

$$\gamma_{0,q-1}^{K,N}\sum_{(j_1,\cdots,j_\sigma)}\lambda_0^{q-1}\lambda_{j_1},\cdots,\lambda_{j_\sigma}d\lambda_{k_1}\wedge\cdots\wedge d\lambda_{k_l}\wedge$$

$$\det(w^{(0)},w^{(k_1)},\cdots,w^{(k_l)},\bar\partial_\zeta w^{(j_1)},\cdots,$$

$$\bar\partial_\zeta w^{(j_\sigma)},\bar\partial_z w^{(0)},\cdots,\bar\partial_z w^{(0)})\wedge d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n$$

其中 $\gamma_{0,q-1}^{K,N}$是一个数值常数, σ=n-q-1, 和号是对所

有的$(j_1,\cdots,j_\alpha)$求和，$j_v\in 0K=\{0,K_1,\cdots,K_l\}$，$1\le v\le\sigma$。

现在让 λ 在$\triangle_{0K}$上积分，引进形式

$$\tilde{T}^{K,N}_{0,q-1}=\int_{\triangle_{0K}}A^{K,N}_{0,q-1}$$

因此

$$\tilde{g}(z)=$$

$$(-1)^q\left[\sum_{|K|\le n-q}(-1)^{|K|}\int_{S_K}f(\zeta)\wedge\tilde{T}^{K,N}_{0,q-1}(E^{(m)}_\alpha,\zeta,z)+\int_{D\times\triangle_0}f\wedge\tilde{T}(E^{(m)}_\alpha,\zeta,z)\right]$$

当 $\lambda\in\triangle_0$ 时，$\tilde{T}(E^{(m)}_\alpha,\zeta,z)$在 $\zeta=z$ 的奇性$\le 2n-1$，故对维数(实维数)为 $2n$ 的强拟凸域 D 来说，显然有

$$\int_{D\times\triangle_0}f\wedge\tilde{T}(E^{(m)}_\alpha,\zeta,z)\le A\cdot||f|| \qquad (3)$$

对某个常数 A 及所有 $f\in C_{(0,q)}(D)$。

下面估计$\int_{S_K}f(\zeta)\wedge\tilde{T}^{K,N}_{0,q-1}$。对于充分小的 $\varepsilon>0$，当 $z\in D$，令 $\mathrm{dist}(z,S_K)<\frac{\varepsilon}{2}$，且 $\zeta\in U_\varepsilon(z)=\{\zeta:|\zeta-z|<\varepsilon\}$。我们用 C 表示大常数，所有可选择的常数都不依赖于 ζ 和 z。

定理 1 设 $1\le q\le n-1$，$K=(k_1,\cdots,k_l)$是$\{1,\cdots,N\}$的子集，$1\le l\le n-q$。设 α 是形式$\tilde{T}^{K,N}_{0,q-1}$的系数，那么，对于任意递增的序列 $1\le\mu_1<\cdots<\mu_{n-1}\le n$，有

$$\left|\int_{S_K\cap U_\varepsilon(Z)}\alpha(\zeta,z)d\bar{\zeta}_{\mu_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{\zeta}_{\mu_{n-1}}\wedge d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n\right|\le$$

$$C\int_{S_K\cap U_\varepsilon(Z)}\frac{\left|\bigwedge_{v=1}^{s}d_\zeta(\mathrm{Im}F_{j_v}\wedge\omega_s(\zeta))\right|}{\prod_{v=1}^{s}|F_{j_v}(\zeta,z)|\,|(\zeta-z)|^{2n-l-s-1}}$$

其中 $0\le s\le l$，$\{j_1,\cdots,j_s\}\subset K$，$\omega_s(\zeta)$是关于 $d\zeta_1,d\bar{\zeta}_1,\cdots,d\zeta_n,d\bar{\zeta}_n$ 阶为 $2n-l-s$ 的某个单项式，

$$F_k(z,\zeta)=2\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho_k(\zeta)}{\partial\zeta_j}(\zeta_j-z_j)-\sum_{i,j}^{n}a^{(k)}_{ij}(z_i-\zeta_i)(z_j-\zeta_j)$$

证 为了简化，令 $K=(1,\cdots,l)$，α 是 $d\bar{\zeta}_1\wedge\cdots\wedge d\bar{\zeta}_{n-q-1}\wedge d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n\wedge d\bar{z}_1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{q-1}$ 的系数，由于

$$\bar{\partial}_z E^{(m)}=\lambda_0\bar{\partial}_z w^{(0)}_\alpha$$

$$\bar{\partial}_{\zeta,\lambda}E^{(m)}_\alpha=\sum_{k\in K}d\lambda_k(w^{(k)}_\alpha-w^{(0)}_\alpha)+\sum_{k\in 0K}\lambda_k\bar{\partial}_\zeta w^{(k)}_\alpha$$

通过多重性行列式展开，得

$$\alpha\le\sum_{(j_1,\cdots,j_{n-q-1})}C\cdot\frac{\det\left(P^{(0)},P^{(1)},\cdots,P^{(l)},\frac{\partial P^{(j_1)}}{\partial\bar{\zeta}_1},\cdots,\frac{\partial P^{(j_{n-q-1})}}{\partial\bar{\zeta}_{n-q-1}},\frac{\partial P^{(0)}}{\partial\bar{z}_1},\cdots,\frac{\partial P^{(0)}}{\partial\bar{z}_{q-1}}\right)}{\left(\prod_{k=1}^{l}\Phi^{(k)}\right)\Phi^{(j_1)}\cdots\Phi^{(j_{n-q-1})}\Phi_0^q} \qquad (4)$$

其中 $j_v\in\{1,\cdots,l\}$。

由于我们只考虑 $\zeta\in S_K$，$|\zeta-z|<\varepsilon$ 的情况，则

$$\Phi^{(k)}=F_k(z,\zeta)H_k(z,\zeta),\ |\zeta-z|<\varepsilon$$

从而有 $P^{(k)}(\zeta,z)=H_k(\zeta,z)\nabla\rho_k(\zeta)+r_k(\zeta,z)$

其中$\nabla\rho_k=(\frac{\partial\rho_k}{\partial\zeta_1},\cdots,\frac{\partial\rho_k}{\partial\zeta_n})^t$，$r_k=O(|\zeta-z|)$，$H_k(\zeta,z)$是一致有界，且有$|\Phi^{(k)}|\ge A|\zeta-z|^2$对某个常数 A，则可得

$$|\alpha(\zeta,z)|\le\sum_{(j_1,\cdots,j_{n-q-1})}\sum_{t=0}^{l}\sum_{\tau\in\sigma(l)}C\times\frac{\left|\det\left(P^{(0)},\nabla P_{\tau(1)},\cdots,\nabla P_{\tau(t)},r_{\tau(t+1)},\cdots,r_{\tau(l)},\frac{\partial P^{(j_1)}}{\partial\bar{\zeta}_1},\cdots,\frac{\partial P^{(0)}}{\partial\bar{z}_{q-1}}\right)\right|}{\prod_{k=1}^{l}|F_{\tau(k)}|\,|(\zeta-z)|^{2(n-q-l)+qm}} \qquad (5)$$

其中第三个求和是对所有$\{1,\cdots,l\}$的置换进行的。

对(5)式中的行列式进行展开，由于$\frac{\partial P^{(j_1)}}{\partial\bar{\zeta}_1},\cdots,\frac{\partial P^{(j_{n-q-1})}}{\partial\bar{\zeta}_{n-q-1}}$一致有界且$|P^{(0)}|=O(|\zeta-z|^{m-1})$，从而我们得

$$\left|\det\left(P^{(0)},\nabla P_{\tau(1)},\cdots,\nabla P_{\tau(t)},\cdots,\frac{\partial P^{(0)}}{\partial\bar{z}_{q-1}}\right)\right|\le$$

$$\sum_{1\le v_1<\cdots<v_t\le n}C|\zeta-z|^{l-t+1+q(m-2)}\cdot\left|\det\left(\frac{\partial\rho_{\tau(i)}}{\partial\zeta_{v_j}}\right)^t_{i,j=1}\right| \qquad (6)$$

注意到 $d_\zeta F_k(z,\zeta)|_{\zeta=z}=2\partial\rho_k(\zeta)$，且在 S_k 上，$\partial\rho_k=-\bar{\partial}\rho_k$，对 $k\in K$，从而有

$$\partial\rho_k(\zeta)=\frac{\sqrt{-1}}{2}d(\mathrm{Im}F_k(z,\zeta))+O(|\zeta-z|),$$

$$k=(1,\cdots,l)$$

又由于

$$\det\left(\frac{\partial\rho_{\tau(i)}}{\partial\zeta_{v_j}}\right)_{i,j=1}^{t}d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n=$$

$$\pm\bigwedge_{i=1}^{t}\partial\rho_{\tau(i)}\wedge\bigwedge_{i\neq v_1,\cdots,v_t}d\zeta_i$$

从而定理 1 成立。

引理 3[2] $\displaystyle\int_{S_K\cap U_\varepsilon(Z)}\frac{\left|\bigwedge_{v=1}^{s}d_\zeta(\mathrm{Im}F_{j_v}\wedge\omega_s(\zeta))\right|}{\prod_{v=1}^{s}|F_{j_v}(\zeta,z)||(\zeta-z)|^{2n-l-s-1}}\leq C$

从而, 由定理 1 和引理 3 及式(3), 有

定理 2 设 f 为一具有逐块 $C^{(1)}$光滑边界的强拟凸域$\bar{D}$上连续的(0,q)形式, 使得形式$\bar{\partial}f$ 在$\bar{D}$上还是连续, $1\leq q\leq n$, 且$\bar{\partial}f=0$ 在 D 上, 那么

$$g(z)=$$

$$(-1)^q\left[\sum_{|K|\leq n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\triangle_{0K}}f\wedge\bar{T}(E_\alpha^{(m)},\zeta,z)+\right.$$

$$\left.\int_{D\times\triangle_0}f\wedge\bar{T}(E_\alpha^{(m)},\zeta,z)\right]$$

是$\bar{\partial}g=f$ 在 D 中的带权因子连续解, 并有一致估计

$$||g||_{L^\infty}\leq C||f||_{L^\infty}\qquad(7)$$

其中, C 为不依赖于 f 的常数,

$$||g||_{L^\infty}=\max_{z\in\partial D}|g(z)|,\ ||f||_{L^\infty}=\sum_{k=1}^{\infty}||f_k(z)||_{L^\infty}$$

注: 一致估计中的常数 C 与区域 D 有关, 即 C=C(D), C(D)不仅依赖于区域 D 的直径, 而且还依赖于区域 D 的其他参数。

参考文献:

[1] 陈吕萍. C^n 中具有逐块光滑边界的有界域上带权因子积分表示的拓广式[J]. 数学学报, 2006, 5: 1113-1120.

[2] R Michael Range, Yum-tong SIU. Uniform estimates for the $\bar{\partial}$-equation on domains with piecewise smooth strictly pseudoconvex boundaries[J]. Math , Ann , 1973, 206: 325-354.

[3] Henkin G M . Integral representation of functions in strongly pseudoconvex domains and applications to $\bar{\partial}$-problem(Russian)[J]. Mat sb , 1970, 82: 300-308.

[4] Grauert H , Lieb I . Das Ramirezsche integral und diello-sung der gleichung $\bar{\partial}u=f$ im bereich der beschrankten fornen[J]. Rice Univ Studies, 1969, 56: 29-50.

[5] Henkin G M , Leiterer J . Theory of functions on complex manifolds[M]. Berlin: Academie-Verlag Berlin and Birkhauser-Verlag Boston,1984.

[6] 钟同德, 黄沙. 多元复分析[M]. 石家庄: 河北教育出版社, 1990.

[7] 钟同德. 多复变函数的积分表示与多维奇异积分方程[M]. 厦门: 厦门大学出版社, 1987.

[8] 姚宗元. 关于 C^n 空间中有界域上的积分表示[J]. 厦门大学学报: 自然科学版, 1986, 25(3) : 260-269.

[9] 钟春平, 黄洪艺, 姚宗元. C^n 空间中 Cauchy-Leray 公式与 Cauchy-Fantappiè 公式的拓广[J]. 系统科学与数学, 2002, 22(4) : 439-446.

[10] Berndtsson B , Andersson M . Henkin-Ramirez formulas with weight factors [J]. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1982, 32(3): 91-110.

[责任编辑　林　锋]