第 13 卷 第 2 期 莆田学院学报 Vol.13 No.2
2006 年 4 月 Journal of Putian University Apr. 2006
文章编号: 1672-4143(2006)02-0011-04 中图分类号: O241.82 文献标识码: A

空间分数阶微分方程混合问题的数值方法

郑达艺[1], 刘发旺[2], 卢旋珠[1]

(1. 福州大学 数学与计算机学院数学系, 福建 福州 350002; 2. 厦门大学 数学科学学院, 福建 厦门 361005)

关键词: 空间分数阶微分方程; 显式有限差分格式; 隐式有限差分格式; 稳定性分析; 收敛性分析

摘 要: 考虑空间分数阶微分方程(即在一个标准的扩散-对流方程中, 用分数阶导数代替空间二阶导数), 给出了该分数阶微分方程的显式和隐式有限差分格式。并证明了显式格式条件稳定和条件收敛, 而隐式格式则是无条件稳定和无条件收敛。

Numerical Solution of the Space Fractional Differential Equation

ZHENG Da-yi[1], LIU Fa-wang[2], LU Xuan-zhu[1]

(1. College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou 350002, China;
2. College of Mathematics Science, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Key words: space fractional differential equation; finite difference approximation; stability; convergence

Abstract: In this paper, a space fractional differential equation is considered. The equation is obtained from the advection-diffusion equation by replacing the second order derivative in space by a fractional derivative in space of order. The finite difference approximation for this equation is presented. The stability and convergence of the finite difference approximation are analyzed.

0 引言

分数阶微分方程与整数阶微分方程相比较, 最重要的优势在于它能更好地拟合某些自然物理过程和动态系统过程, 因此在物理、工程、金融等领域及环境问题的研究方面得到广泛运用。对它的研究已经引起了广泛关注。对分数阶微分方程的数值解法, 最近, 不少数学家提出许多不同的差分格式。文献[1]根据 Caputo 型分数阶导数定义离散分数阶导数的方法, 构造分数阶微分方程的差分格式, 并分析它们的稳定性和收敛性。本文采用 Grünwald 改进型的离散方法对分数阶导数进行离散, 构造出分数阶微分方程的差分格式, 并证明了显式格式条件稳定和条件收敛, 而隐式格式则是无条件稳定和无条件收敛。

我们考虑的空间分数阶微分方程混合问题为:

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = -b\frac{\partial C(x,t)}{\partial x} + a\frac{\partial^{\alpha} C(x,t)}{\partial x^{\alpha}},\quad 0< x< 1,\ t> 0 \tag{1}$$

$$C(x,t=0)=\phi(x),\qquad 0< x< 1 \tag{2}$$

$$C(x=0,t)=0,\quad \frac{\partial C(x=1,t)}{\partial x}=0 \tag{3}$$

其中, $a>0$, $b\geq 0$, $1<\alpha<2$, $\frac{\partial^{\alpha} C(x,t)}{\partial x^{\alpha}}$ 是 Riemann-Liouville 型分数阶导数:

$$\frac{\partial^{\alpha} C(x,t)}{\partial x^{\alpha}} =$$

收稿日期: 2005-05-23
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10271098)
作者简介: 郑达艺(1975-), 男, 福建漳州漳浦县人, 硕士研究生。

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\dfrac{\partial^n}{\partial x^n}\displaystyle\int_0^x (x-\zeta)^{n-\alpha-1}C(\zeta,t)d\zeta & n-1<\alpha<n\\ \dfrac{\partial^n C(x,t)}{\partial x^n} & \alpha\in N\end{cases}$$

1 预备知识

引理 1[2] 如果 $f(x)\in L_1(R)$ 和 $f(x)\in C^{\alpha+1}(R)$，则有 $A_h f(x)=Af(x)+O(h)$，其中

$$A_h f(x)=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)}f(x-(k-1)h),$$

$$Af(x)=\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha},$$

h 为步长，

$\dfrac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}$ 是 Riemann-Liouville 型分数阶导数。

引理 2[3] 如果 $A\in C^{n\times n}$，$\rho(A)$ 是矩阵 A 的谱半径，则对任意给定的正数 ε，存在某一矩阵范数 $\|\cdot\|_m$，使得 $\|A\|_m\le\rho(A)+\varepsilon$。

引理 3[3] 设 $\|\cdot\|_m$ 是 $C^{n\times n}$ 上的一种矩阵范数，则 C^n 在上必存在与它相容的向量范数。

2 空间分数阶微分方程显式有限差分格式

令 h 为空间步长，τ 为时间步长，$M=1/h$，$x_i=ih$，$t_n=n\tau$，$i=0,1,2,\cdots,M$，$n=0,1,2,\cdots$。对(1)式用差商公式替代一阶导数，分数阶导数用 Grünwald 改进型公式替代，且用 C_i^n 近似替代 $C(x_i,t_n)$，并由初边值条件，我们构造出空间分数阶微分方程显式有限差分格式：

$$\begin{cases}\dfrac{C_i^{n+1}-C_i^n}{\tau}=-b\dfrac{C_i^n-C_{i-1}^n}{h}+ a\dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\dfrac{1}{h^\alpha}\displaystyle\sum_{k=0}^{i}\dfrac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)}C_{i-k+1}^n\\ C_0^n=0,\ C_M^n=C_{M-1}^n,\ C_i^0=\phi(x_i)\end{cases}\tag{4}$$

令 $g_k=\dfrac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}$，$p=\dfrac{b\tau}{h}$，$q=\dfrac{a\tau}{h^\alpha}$ (5)

$$C_i^{n+1}=qg_0C_{i+1}^n+(1-p+qg_1)C_i^n+(p+qg_2)C_{i-1}^n+q\sum_{k=3}^{i}g_kC_{i-k+1}^n\tag{6}$$

令：$C^{n+1}=\left[C_1^{n+1},C_2^{n+1},\cdots,C_{M-1}^{n+1}\right]^T$

$$B=(b_{ij});\ i=1,2,\cdots,M-1;\ j=1,2,\cdots,M-1\tag{7}$$

当 $i=1,2,\cdots,M-2$，$j=1,2,\cdots,M-1$ 时 b_{ij} 的值如下：

$$b_{ij}=\begin{cases}0 & j>i+1\\ qg_0 & j=i+1\\ 1-p+qg_1 & j=i\\ p+qg_2 & j=i-1\\ qg_{i-j+1} & j<i-1\end{cases}\tag{8}$$

当 $i=M-1$ 时，$b_{M-1,j}=qg_{M-j}$；$j=1,2,\cdots,M-3$；$b_{M-1,M-2}=p+qg_2$；$b_{M-1,M-1}=1-p+qg_1+qg_0$

则有：$C^{n+1}=BC^n$ (9)

3 空间分数阶微分方程隐式有限差分格式

采用类似方法，我们构造出空间分数阶微分方程隐式有限差分格式

$$\begin{cases}\dfrac{C_i^{n+1}-C_i^n}{\tau}=-b\dfrac{C_i^{n+1}-C_{i-1}^{n+1}}{h}+a\dfrac{1}{h^\alpha}\displaystyle\sum_{k=0}^{i}g_kC_{i-k+1}^{n+1}\\ C_0^n=0,\ C_M^n=C_{M-1}^n,\ C_i^0=\phi(x_i)\end{cases}\tag{10}$$

$$-qg_0C_{i+1}^{n+1}+(1+p-qg_1)C_i^{n+1}-(p+qg_2)C_{i-1}^{n+1}-q\sum_{k=3}^{i}g_kC_{i-k+1}^{n+1}=C_i^n\tag{11}$$

令 $C^{n+1}=\left[C_1^{n+1},C_2^{n+1},\cdots,C_{M-1}^{n+1}\right]^T$

$$A=(a_{ij}),\ i=1,2,\cdots,M-1;\ j=1,2,\cdots,M-1\tag{12}$$

当 $i=1,2,\cdots,M-2$；$j=1,2,\cdots,M-1$ 时 a_{ij} 的值如下：

$$a_{ij}=\begin{cases}0 & j>i+1\\ -qg_0 & j=i+1\\ 1+p-qg_1 & j=i\\ -p-qg_2 & j=i-1\\ -qg_{i-j+1} & j<i-1\end{cases}\tag{13}$$

当 $i=M-1$ 时：$a_{M-1,j}=-qg_{M-j}$；$j=1,2,\cdots,M-3$；$a_{M-1,M-2}=-p-qg_2$；$a_{M-1,M-1}=1+p-qg_1-qg_0$

则有：$AC^{n+1}=C^n$ (14)

4 稳定性分析

定理 1 当 $p+\alpha q\le1$ 时，显式有限差分格式(4)是稳定的。

证 引入误差向量 $z^n=c^n-u^n$，其中 c^n 是差分

方程(4)的精确解(理论值), u^n 是差分方程(4)经数值求解得到的。显然, z^n 满足 $z^{n+1}=Bz^n$, 从而推出 $z^{n+1}=B^n z^0$, 进一步可得到 $\|z^n\|\le\|B^n\|\cdot\|z^0\|$, 令 λ 是矩阵 B 的特征根, 即 $BX=\lambda X$, 其中 $X=[x_1,\cdots,x_{M-1}]^T$ 为特征向量, 令

$$|x_i|=\max\{|x_j|\,|\,j=1,\cdots,M-1\}$$

则有 $\sum_{j=1}^{M-1} b_{ij}x_j=\lambda x_i$, 于是 $\lambda=b_{ii}+\sum_{j=1,j\ne i}^{M-1} b_{ij}\frac{x_j}{x_i}$

(1) 当 $1\le i\le M-2$ 时,

$$\lambda=1-p+qg_1+qg_0\frac{x_{i+1}}{x_i}+(p+qg_2)\frac{x_{i-1}}{x_i}+q\sum_{j=1}^{i-2} g_{i-j+1}\frac{x_j}{x_i}=$$

$$1-p(1-\frac{x_{i-1}}{x_i})+q(g_1+\sum_{j=1,j\ne i}^{i+1} g_{i-j+1}\frac{x_j}{x_i})$$

由于 $(1+z)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}z^k=\sum_{k=0}^{\infty}g_k(-z)^k$,

$$g_k=\frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}=(-1)^k\binom{\alpha}{k},$$

令 $z=-1$ 得 $\sum_{k=0}^{\infty}g_k=0$, 且当 $1<\alpha<2$ 时, $g_1=-\alpha<0$, $g_0,g_1,\cdots,g_k,\cdots$ 均为正数, 则有 $\sum_{k=0}^{i}g_k<0$, $i=1,2,\cdots,M-2$, 又根据假设可知 $\left|\frac{x_j}{x_i}\right|\le 1$, 从而

$$-\alpha<\sum_{j=1,j\ne i}^{i+1} g_{i-j+1}\frac{x_j}{x_i}<\alpha,$$

进一步得 $-2q\alpha<q(\sum_{j=1,j\ne i}^{i+1} g_{i-j+1}\frac{x_j}{x_i}+g_1)<0$, 故有: $\lambda<1$。

要使 $\lambda>-1$ 即: $1-p(1-\frac{x_{i-1}}{x_i})+q(g_1+\sum_{j=1,j\ne i}^{i+1} g_{i-j+1}\frac{x_j}{x_i})>-1$,

由于 $1-p(1-\frac{x_{i-1}}{x_i})+q(g_1+\sum_{j=1,j\ne i}^{i+1} g_{i-j+1}\frac{x_j}{x_i})>1-2p-2\alpha q$,

所以只要 $1-2p-2\alpha q\ge -1$ 即 $p+\alpha q\le 1$ 时, 我们有: $|\lambda|<1$。

(2) 当 $i=M-1$ 时,

$$\lambda=1-p+qg_1+qg_0+(p+qg_2)\frac{x_{i-1}}{x_i}+q\sum_{j=1}^{i-2} g_{i-j+1}\frac{x_j}{x_i}=$$

$$1-p(1-\frac{x_{i-1}}{x_i})+q(g_1+g_0+\sum_{j=1}^{i-1} g_{i-j+1}\frac{x_j}{x_i})$$

由于 $0>g_1+g_0+\sum_{j=1}^{i-1} g_{i-j+1}=1-\alpha+\sum_{j=1}^{i-1} g_{i-j+1}$, 则:

$$2(1-\alpha)<g_0+g_1+\sum_{j=1}^{i-1} g_{i-j+1}\frac{x_j}{x_i}<0,$$

故有: $\lambda<1$。与(1)类似, 只要 $1-2p+2q(1-\alpha)\ge -1$ 即 $p+\alpha q-q\le 1$ 时, 有 $\lambda>-1$。所以, 当 $p+\alpha q-q\le 1$ 时, 我们有: $|\lambda|<1$。

综合(1)、(2)可知, 如果 $p+\alpha q\le 1$, 那么 $|\lambda|<1$, 矩阵 B 的谱半径 $\rho(B)<1$, 根据引理 2, 存在 $\|\cdot\|_m$, 对 $\varepsilon\le\beta\tau$, β 为正常数, 使得 $\|B\|_m\le\rho(B)+\varepsilon<1+\beta\tau$

从而 $\|B^n\|_m\le(\|B\|_m)^n<(1+\beta\tau)^n\le(1+\beta\tau)^{\frac{T}{\tau}}\le K<\infty$, 所以 $\|z^n\|<K\|z^0\|$。

所以当 $p+\alpha q\le 1$ 时显式格式(4)是稳定的。

采用类似的证明方法我们可得:

定理 2　隐式有限差分格式(10)是无条件稳定。

5　收敛性分析

定理 3　当 $p+\alpha q\le 1$ 时, 显式有限差分格式(4)是收敛的。

证　令 U 是方程(1)—(3)的精确解, C 为有限差分方程的精确解, 误差 $e=U-C$, 在网格点 (x_i,t_n) 上有: $C_i^n=U_i^n-e_i^n$, 把它们代入(4)得:

$$\frac{(U_i^{n+1}-e_i^{n+1})-(U_i^n-e_i^n)}{\tau}=$$

$$-b\frac{(U_i^n-e_i^n)-(U_{i-1}^n-e_{i-1}^n)}{h}+\frac{a}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{i}g_k(U_{i-k+1}^n-e_{i-k+1}^n) \tag{15}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_i^n+O(\tau)-\frac{e_i^{n+1}-e_i^n}{\tau}=$$

$$-b\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_i^n+O(h)\right]+b\frac{e_i^n-e_{i-1}^n}{h}+$$

$$a\left[\left(\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^\alpha}\right)_i^n+O(h)\right]-\frac{a}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{i}g_k e_{i-k+1}^n \tag{16}$$

所以:

$$e_i^{n+1}=qg_0e_{i+1}^n+(1-p+qg_1)e_i^n+(p+qg_2)e_{i-1}^n+$$

$$q\sum_{k=3}^{i}g_k e_{i-k+1}^n+\tau O(\tau+h) \tag{17}$$

当 $1-p+qg_1\ge 0$ 即 $p-qg_1\le 1$ 时, 有:

$$\left|e_i^{n+1}\right|\le qg_0\left|e_{i+1}^n\right|+(1-p+qg_1)\left|e_i^n\right|+$$

$$(p+qg_2)\left|e_{i-1}^{n}\right|+q\sum_{k=3}^{i}g_k\left|e_{i-k+1}^{n}\right|+\tau O(\tau+h)$$

令 $E_n=\sup\limits_i\left|e_i^n\right|$，则有：

$$E_{n+1}\le qg_0E_n+(1-p+qg_1)E_n+(p+qg_2)E_n+$$

$$q\sum_{k=3}^{i}g_kE_n+\tau O(\tau+h)=$$

$$(1+q\sum_{k=0}^{i}g_k)E_n+\tau O(\tau+h)< E_n+\tau O(\tau+h)$$

由此不等式递推得：$E_n< E_0+n\tau O(\tau+h)$

由于在初始时间层上，有 $C_i^0=C(x_i,0)=\phi(x_i)=\phi_i$，所以有 $e_i^0=0$，因此 $E_0=\sup\limits_i\left|e_i^0\right|=0$。

由此得到 $E_n< n\tau O(\tau+h)$，由 $\tau<\tau_0$，$n\tau\le T$ 得 $E_n< TO(\tau+h)$，当 $\tau\to 0$，$h\to 0$ 时，有 $E_0\to 0$。所以当 $p+\alpha q\le 1$ 时，显式有限差分格式(4)是收敛的。

定理 4 隐式有限差分格式(10)是收敛的。

证 在网格点 (x_i,t_n) 上有 $C_i^n=U_i^n-e_i^n$，把它们代入(10)得：

$$-qg_0e_{i+1}^{n+1}+(1+p-qg_1)e_i^{n+1}-(p+qg_2)e_{i-1}^{n+1}-$$

$$q\sum_{k=3}^{i}g_ke_{i-k+1}^{n+1}=e_i^n+\tau O(\tau+h) \tag{18}$$

由边界条件和初始条件得：$e_i^0=0$，$e_0^n=0$，$e_{M-1}^{n+1}=e_M^{n+1}$，

令 $E^n=\left[e_1^n,e_2^n,\cdots,e_{M-1}^n\right]^T$；

$$W=\left[\tau O(\tau+h),\tau O(\tau+h),\cdots,\tau O(\tau+h)\right]^T$$

则：
$$AE^{n+1}=E^n+W \tag{19}$$

$$E^{n+1}=A^{-1}(E^n+W)=A^{-1}\left[A^{-1}(E^{n-1}+W)+W\right]=$$

$$\left[(A^{-1})^n+(A^{-1})^{n-1}+\cdots+A^{-1}\right]W \tag{20}$$

由于 A 的特征根 $|\lambda|>1$，所以 A^{-1} 的特征根 $|\eta|<1$，因此，$\rho(A^{-1})<1$，进一步可得 $\rho\left[(A^{-1})^k\right]=\left[\rho(A^{-1})\right]^k<1$，根据引理 2，存在 $\|.\|_m$，使得

$$\|(A^{-1})^k\|_m\le\rho\left[(A^{-1})^k\right]+\varepsilon=$$

$$\left[\rho(A^{-1})\right]^k+\varepsilon< 1+\varepsilon \qquad 1\le k\le n$$

由(20)式，根据引理 3，存在向量范数 $\|.\|_v$ 使得

$$\|E^{n+1}\|_v\le$$

$$(\|(A^{-1})^n\|_m+\|(A^{-1})^{n-1}\|_m+\cdots+\|A^{-1}\|_m)\|W\|_v\le$$

$$n(1+\varepsilon)\tau O(\tau+h),$$

由 $\tau<\tau_0$，$n\tau\le T$ 得 $\|E^{n+1}\|_v< T(1+\varepsilon)O(\tau+h)$，所以当 $\tau\to 0$，$h\to 0$ 时，$\|E^{n+1}\|_v\to 0$，从而 $\left|e_i^{n+1}\right|\to 0$，即隐式有限差分格式(10)是收敛的。

参考文献：

[1] LU Xuan-zhu, LIU Fa-wang. The Explicit and Implicit Finite Difference Approximations for a Space Fractional Advection Diffusion Equation? [J/CD]. Computational Mechanics (CD-ROM), 2004: ID-120.

[2] Mark M Meerchaer, Charles Tadjeran. Finite Difference Approximations for Fractional Advection-dispersion Flow Equation[J]. Comp and Appl Math, 2004, 172: 65-77.

[3] 董增福. 矩阵分析教程[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2003.

[责任编辑 林 锋]