基于 τ 统计量对 Markov 模型状态数目检验研究初探

何晓彬　王建军

(厦门大学经济学院计划统计系)

【摘要】本文根据 Markov 机制转换模型状态变量预测概率分布特性的分析,提出了基于 τ 统计量对模型状态数目的检验方法,还运用蒙特卡罗模拟方法模拟了检验所需要的 τ 统计量的经验分布。检验方法在计算上简单,不存在模型估计过程中多余参量问题的困扰,是一种简便可行的检验方法。最后,运用该检验方法对 Hamilton 的美国 GDP 模型进行检验研究,结论支持 Hamilton 的模型,认为美国 GDP 确实存在两个不同的增长状态。

关键词　Markov 机制转换模型　蒙特卡罗　多余参量

中图分类号　F224.0　　文献标识码　A

Research on the Test of Markov Switching Model According to the τ Statistics

Abstract : For the first time , the paper analyzes the character of the state variable 's forecasting probability of the Markov Switching Model and proposes a new method of testing the model according to the statistics. The paper also simulates the empirical distribution which is necessary to the τ test by Mont Carlo method. The method of test has the advantage of simple computation and without nuisance parameter problem. At last , we test the Hamilton 's America GDP model using our testing method. The paper gets the result that Hamilton 's model is reasonable and the American GDP growth rate really has two different states.

Key words : Markov-Switching-Model ; Mont-Carlo ; Nuisance Parameter

一、问题的提出

Hamilton (1989) 提出的 Markov 机制转换模型 (Markov switching model) 是当前学术界中较为流行的一类非线性时间序列模型。目前,在 Markov 机制转换模型的相关检验中,模型状态数目的检验仍是一个难题,现有的一些检验方法还存在着不完善之处。因此, Markov 机制转换模型状态数目的检验成为许多计量经济学研究者颇为关注的一个问题。

一个简单的基于变量条件均值的两状态 Markov 机制转换模型为:

$$y_t = c_0 + c_1 \cdot s_t + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{1}$$

其中状态变量 S_t 取值为 0 或 1，S_t 遵循一阶 Markov 过程，其概率转移矩阵为：

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{10} \\ p_{01} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{00} & 1 - p_{11} \\ 1 - p_{00} & p_{11} \end{bmatrix} \tag{2}$$

当模型（1）中参数 $c_1 = 0$ 时，模型就是一个 AR（1）模型，变量 y_t 具有唯一的条件均值。当 $c_1 \neq 0$ 时，模型（1）就为两状态 Markov 机制转换模型，变量 y_t 具有两个不同的条件均值。因此对参数 c_1 是否为零的检验就是对模型状态数目的检验。根据 Markov 机制转换模型的理论，转移概率矩阵（2）中所包含的待估参数为 p_{00} 和 p_{11}。在原假设 $c_1 = 0$ 条件下，Markov 模型估计过程中参数 p_{00} 和 p_{11} 就成为多余参量，从而相应的对数似然比统计量不再具有标准的分布形式[①]。因此，传统的对数似然比检验法对模型的检验变得无效，对模型状态数目的检验也就成为了一个难题。

本文在原假设 $c_1 \neq 0$ 条件下，根据 Markov 模型的理论分析了状态变量取值的预测概率的特性，并构造了相应的 τ 统计量。运用蒙特卡罗模拟方法模拟出 τ 统计量的经验分布，同时提出了基于 τ 统计量和其经验分布对模型状态数目的检验方法。由于我们的原假设为 $c_1 \neq 0$，因此概率转移矩阵（2）中的待估参数 p_{00} 和 p_{11} 不再是多余参量，从而有效的避免了传统对数似然比检验法则所遇到的难题。最后，我们运用该检验法则对 Hamilton 的美国 GDP 模型做了检验研究，得出了与有关学者不同的研究结论。

二、文献回顾

在 Markov 机制转换模型的相关检验问题中，一方面，存在对模型自相关性、广义的条件异方差效应和缺失解释变量等检验；另一方面，模型还存在着独特的关于状态数目方面的检验。对于模型自相关性、广义条件异方差效应和缺失解释变量等检验问题，Hamilton (1996) 在拉格朗日乘数检验方法原理的基础上，提出了较为完善的检验方法。在模型状态变量数目的确定方面，Boldin（1989）运用 Davies（1987）的上确界检验法来确定模型的状态个数。Garcia 和 Perron（1996）也曾将 Davies 的检验方法与 Gallant（1977）的检验方法以及关于非嵌套模型检验的 J 检验法联合运用来确定模型中状态变量取值数目。Hansen (1992) 提出基于对数似然比统计量的边界方法对模型中状态变量取值个数进行检验。Garcia（1998）在假定相关渐进分布理论的前提下，推导出针对 Markov 机制转换模型相关状态数目的对数似然比检验统计量。

在现有的模型状态数目检验方法中，较为受大家关注的是 Hansen 和 Garcia 所提出的两种方法。Hansen 的方法在拒绝原假设（以模型（1）为例，原假设为 $c_1 = 0$ 即模型是 AR（1）模型）方面存在过于保守的问题，也就是说 Hansen 的检验方法误判 Markov 机制转换模型为一般线型模型方面的概率过大。同时，Hansen 的方法在计算上也较为繁琐。Garcia 所提出的检验方法虽然在计算上比 Hansen 的方法要简便，且在拒绝原假设方面不存在过度保守的问题。但是，Garcia 检验方法的推导过程中用了一个很强的假定，而这个假定并没有得到相应的证明，因此 Garcia 的检验方法在理论上来说存在错误的可能性。鉴于以上原因，

① Hansen, B. E., The likelihood ratio test under nonstandard conditions: Testing the Markov switching model of GNP. *Journal of Applied Econometrics*, 1992, (7): S61～S82.

在许多实际应用例子中，对模型状态数目进行相关检验的并不多。因而，对 Markov 机制转换模型状态数目检验方法的研究，是目前此领域中大家十分关注的热点问题之一。

三、模型检验的 τ统计量及其经验分布

1. τ统计量的构造及检验的原理

根据 Markov 机制转换模型的估计理论，可以对模型状态变量（S_t+1）依据至其前一期的信息 ψ_t，对其状态变量在（$t+1$）时刻取值为 i（不妨设为 1）的概率进行预测，即 $p(s_{t+1}=1\mid\psi_t)$ ①。运用此预测算法，可以得到样本期内的各个时刻状态变量取值为 1 的预测概率。令 $l_t=p(s_{t+1}=1\mid\psi_t)$，则可以得关于状态变量为 1 的预测概率值样本序列（l_1，l_2，…，l_T）。假设模型（1）中关于状态变量 S_t 的设定是正确的，也就是说参数 $c_1\neq0$，在此条件下我们分析了样本序列（l_1，l_2，…，l_T）的分布特性。我们发现对于时刻 t，l_t 的理论取值只有两种情况，为 p_{11} 或 $1-p_{22}$。同时，我们还证明了样本序列（l_1，l_2，…，l_T）理论上等价于一个（0 - 1）分布，均值和方差分别为②：

$$\mu=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}l_t=\frac{1-p_{11}}{2-p_{00}-p_{11}}$$

$$\Sigma=\lim_{T\to\infty}\frac{\sum_{t=1}^{T}\left(l_t-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}l_t\right)^2}{T}=\frac{(1-p_{00})(1-p_{11})(1-p_{00}-p_{11})^2}{(2-p_{00}-p_{11})^2}\tag{3}$$

令 $\hat{\Sigma}$ 为样本序列(l_1, l_2, …, l_T)的实际估计方差，由此我们所构造的 τ统计量如下③：

$$\tau=\frac{\Sigma}{\hat{\Sigma}}\tag{4}$$

对于 τ统计量的真实分布无从得知，但是理论上我们可以分析得知 τ统计量是一个逼近于 1 的值。同时，在原假设被违背即 $c_1=0$ 的条件下，分析得知此时按式（4）所计算的 τ统计量的值是单侧正向偏离 1 的④。也就是说当 $c_1\neq0$ 为真时，按照式（4）计算得到的 τ统计量会从右往左逼近于 1。当 $c_1=0$ 为真时，τ统计量会从左往右远离 1。因此，我们认为如果知道 τ统计量的经验分布，那么就可以根据实际统计量的值，在经验分布中所处的百分位来判断原假设 $c_1\neq0$ 是否为真。也就是说，如果实际统计量值在经验分布中所处的百分位大于给定的一个百分比（比如说向下累计的 95 %），那么我们就拒绝原假设。反之，我们就认为没有充足的理由拒绝原假设，从而接受 $c_1\neq0$。

2. τ统计量经验分布的蒙特卡罗模拟

为了数据模拟和随后模型估计的方便，我们将模型（1）改写成如下等价形式：

$$y_t-\mu_{s_t}=\phi(y_{t-1}-\mu_{s_{t-1}})+\varepsilon_t\tag{5}$$

---

① 定义及相关运算法则和推导可见 Hamilton, J. D., Time Series Analysis. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.

② 详细证明请与作者联系。

③ $\hat{\Sigma}$ 可以由模型估计过程中的估计序列($\hat{l}_1$, $\hat{l}_2$, …, $\hat{l}_T$)直接计算得到，而 Σ 则根据转移概率估计值 $\hat{p}_{00}$ 和 $\hat{p}_{11}$ 来计算。

④ 相关分析请与作者联系。

其中状态变量的相关设定不变，ε_t 为随机扰动项，均值为零，方差为 σ^2。μ_0 表示状态变量 s_t 取值为 0 时变量 y_t 的条件均值。同理，μ_1 表示状态变量 s_t 取值为 1 时变量 y_t 的条件均值。首先，可以根据给定的转移概率 p_{00} 和 p_{11} 的值，模拟出取值为 0 或 1 的符合一阶 Markov 链过程的状态变量序列 s_t。然后将状态变量序列带入到模型（5），结合给定的相关参数 μ_0，μ_1，ϕ, σ^2 的值就可以模拟出具有状态转移的 Markov 时间序列①。

按照上述方法，我们模拟了 1000 个具有 Markov 机制转移的时间序列。然后运用 Markov 机制转换模型的估计方法对这 1000 个序列进行拟合，并按照式（4）计算相应的 τ 统计量。模型参数估计的统计结果和相应 τ 统计量的经验分布分别见表 1 和表 2。

表 1　1000 次随机模拟 Markov 序列参数估计结果统计

	$\hat{\mu}_1$ (8)	$\hat{\mu}_2$ (11)	$\hat{\phi}$ (0.2)	$\hat{\sigma}_2$ (1)	$\hat{p}_{11}$ (0.8)	$\hat{p}_{22}$ (0.8)	τ
最小值	7.517637	10.56292	0.072785	0.812011	0.59942	0.627679	1.072088
最大值	8.512089	11.43332	0.309587	1.239161	0.925625	0.908537	1.731277
均值	7.996446	10.99952	0.191083	0.990003	0.797955	0.79584	1.218896
标准差	0.151625	0.140585	0.06146	0.063378	0.048923	0.046545	0.075626
样本数	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

表 2　τ 统计量经验概率分布

累积百分比（%）	τ 统计量临界值
10	1.135602401
20	1.15734928
30	1.175817272
40	1.1900146
50	1.206852534
60	1.226549584
70	1.245657698
80	1.273928932
90	1.315265011
95	1.35569207
97.5	1.389452994
99	1.466482531
100	1.731277496

表 1 是 1000 次模拟序列参数估计结果的统计，表中第一行是模型（5）中相应的参数，其中括号内的值为模型相应参数的理论真实值。从表 1 中各参数估计的统计结果来看，参数估计的均值与模型的理论值相当吻合，同时各估计参数的统计标准差也相当理想。所以，由此可以判断模拟得到的 τ 统计量经验分布是可靠的。表 2 为 τ 统计量的经验累计概率分布，其中 τ 统计量的最小值为 1.07，最大值为 1.73。

当然，以上只是一个具有特定参数的 Markov 机制转移模型的模拟结果，这个结果能否普遍推广应用是一个需要考虑的问题。我们通过分析和大量模拟结果对比发现，τ 统计量的经验分布与模型参数 p_{00}、p_{11} 和 ϕ 的取值没有直接关联，而与参数 μ_0、μ_1 和 σ^2 之间存在特

① 模拟数据生成的具体方法请与作者联系。

定的规律。τ统计量的经验分布随着 β值的改变而有规律的变化，此 β值的定义如下：

$$\beta = \frac{|\mu_0 - \mu_1|}{\sigma} \tag{6}$$

当 β值大于 3 以后，τ统计量的经验分布快速收敛于一个固定的分布形式。当 β值小于 1. 8 以后，模型参数估计的模拟标准差将急剧扩大，从而使得模型参数估计的稳健性变得相当差。也就是说，此时对于一个真实的具有 Markov 机制转移的时间序列而言，模型的参数估计碰到了严重的稳健性问题①。因此，对于模型状态数目的检验同样也就失去意义。

我们在 1. 8～3 之间等距地插入 4 个点，这样得到 6 个点。对于每一个 β值，我们模拟其对应的 τ统计量的经验分布，见表 3。从表 3 中我们可以看到随着 β值的增加，相应累积百分位概率的百分位数都是逐步收敛的。因此，对模型状态数目的检验，首先估计模型并计算相应的 β值和 τ统计量。然后再根据 β值的大小在表 3 中寻找相应的 τ统计量的经验分布，按照前述方法进行检验。如果 β值小于 1. 8 时，放弃检验。如果 β值大于 3，那么就选择 β等于 3 的经验分布来代替。如果 β值介于上述数值之间，则可以用相邻两个经验分布进行插值近似计算相应的百分位值。

表 3 不同 β值条件下 τ统计量经验分布

累积概率 (%)	τ统计量临界值						
	β= 1. 8	β= 2	β= 2. 2	β= 2. 4	β= 2. 6	β= 2. 8	β= 3
10	1. 473176	1. 392943	1. 322077	1. 2590734	1. 2114418	1. 166359	1. 135602
20	1. 55346	1. 455695	1. 367404	1. 2982201	1. 2398217	1. 195128	1. 157349
30	1. 636893	1. 514757	1. 419526	1. 3376755	1. 2739857	1. 218433	1. 174559
40	1. 711407	1. 572631	1. 464793	1. 3755587	1. 3023294	1. 238359	1. 190015
50	1. 798199	1. 631226	1. 51954	1. 4127028	1. 3291237	1. 26155	1. 206853
60	1. 887188	1. 696855	1. 564794	1. 4474787	1. 3568712	1. 28404	1. 22655
70	2. 003868	1. 774595	1. 628605	1. 4975515	1. 3894522	1. 306408	1. 245658
80	2. 164584	1. 899552	1. 715892	1. 5576978	1. 4406269	1. 347542	1. 273929
90	2. 483268	2. 082283	1. 863142	1. 6603601	1. 5128741	1. 402715	1. 315265
95	2. 856529	2. 316573	2. 047812	1. 7669903	1. 5863858	1. 456192	1. 355692
97. 5	3. 443103	2. 59251	2. 201333	1. 883981	1. 6618212	1. 509794	1. 389453
99	4. 583825	3. 433051	2. 687016	2. 1704748	1. 8316911	1. 610089	1. 466483
100	27. 51947	15. 14239	5. 761519	7. 0973068	4. 8937961	2. 165497	1. 731277

四、对 Hamilton 模型的检验研究

Hamilton 于 1989 年用两状态四阶段滞后的 Markov 机制转换模型研究了美国 1953～1984 年间季度实际产出增长的波动。他认为美国实际产出增长存在明显的两种不同状态，即扩张和紧缩状态。在扩张状态下，美国季度实际产出增长率平均为 1. 2 %，紧缩状态下，实际产出季度平均增长率为 - 0. 4 %。Hamilton 通过模型估计还得到由扩张状态转移到下一个扩张状态的概率 p_{11} 为 0. 9，由紧缩状态转移到下一个紧缩状态的概率 p_{22} 为 0. 75。因此他

① 对于这种情况下，模型参数估计的稳健性问题及其相成因，我们将在另一篇文章中进行探讨。其他相关模拟参数估计的统计结果和分析说明可与作者联系。

认为美国实际产出增长率的这两种状态具有高度的持续性，扩张期的平均持续时间为 10 个季度，紧缩期的平均持续长度为 4 个季度。

Hansen 在 1992 年研究了非标准条件下对数似然比检验法则对 Markov 机制转换模型检验的问题，在此文中 Hansen 运用其提出的检验法则对 Hamilton 的美国季度 GDP 模型进行了检验，其结论为不能拒绝美国季度 GDP 为 AR (4) 模型，即 Hamilton 的四阶段滞后两状态 Markov 机制转换模型对于美国季度 GDP 是不合适的。同样，Garcia 在 1998 年也对 Markov 机制转换模型状态数目检验问题进行了研究，并提出了自己的检验方法。在此文中，Garcia 运用他的方法也对 Hamilton 的模型进行了相应的检验研究，其结论同样是认为不能拒绝美国季度 GDP 为 AR (4) 模型，与 Hansen1992 年的结论相同。两者所不同的是，Hansen 的检验法则需要在近 70 %的显著性水平下才能拒绝 AR (4) 模型的原假设，而 Garcia 的方法只需在 30 %的显著性水平下就能拒绝 AR (4) 模型的原假设。Garcia 认为这正体现了 Hansen 检验法则在拒绝原假设方面的过度“保守”①。

本文基于 τ 统计量对模型状态数目检验的方法，对 Hamilton 的美国季度 GDP 模型也进行了检验研究。我们的研究结论与 Hansen 和 Garcia 的结论恰好相反，认为美国季度 GDP 确实存在着两个不同的变化状态，从而支持 Hamilton (1989) 的美国 GDP 模型。

我们按照两状态四阶段滞后的 Markov 机制转换模型，采用极大似然法估计了美国 1953～1984 年间季度实际产出增长率序列，并根据参数估计值以及相应状态变量预测概率计算了 β 值和 τ 统计量，计算结果见表 4。

表 4　参数估计值及相关统计量

	Hamilton 的参数估计值 ②	本文的参数估计值
$\hat{\mu}_1$	1. 16 (0. 07)	1. 16332 (0. 07389)
$\hat{\mu}_2$	- 0. 36 (0. 26)	- 0. 36819 (0. 25870)
$\hat{\phi}_1$	0. 01 (0. 12)	0. 01145 (0. 11869)
$\hat{\phi}_2$	- 0. 06 (0. 14)	- 0. 05923 (0. 13702)
$\hat{\phi}_3$	- 0. 25 (0. 11)	- 0. 24759 (0. 10661)
$\hat{\phi}_4$	- 0. 21 (0. 11)	- 0. 21451 (0. 11032)
$\hat{\sigma}$	0. 59 (0. 10)	0. 58947 (0. 10115)
$\hat{p}_{11}$	0. 90 (0. 04)	0. 90372 (0. 03778)
$\hat{p}_{22}$	0. 75 (0. 10)	0. 75109 (0. 09693)
$\hat{\beta}$		1. 99475
$\hat{\tau}$		1. 78343

表 4 中第一列为 Hamilton (1989) 的参数估计结果，第二列为我们运用相同数据和模型估计所得的参数估计值和相应的 β 值以及 τ 统计量。从表 4 中两列参数估计值来看，我们的估计结果和 Hamilton 的结果完全一致。我们计算得到的 β 值为 1. 99475，十分接近于 2，故在对模型状态数目假设检验中我们选用 $\beta = 2$ 条件下 τ 统计量的经验分布表。从表 4 中我们知道这里计算得到的 τ 统计量的估计值为 1. 78343，在 5 %的显著性水平下 τ 统计量的临

① 见 Garcia, R, Asymptotic null distribution of the likelihood ratio test in Markov switching model, International Economic Review, 1998, (39): 763～788.

② James D. Hamilton, *Time Series Analysis*, Princeton University Press, 698.

界值为 2. 3166 (即累计概率为 95 %的 τ统计量的对应量) , 大于 1. 78343 实际 τ统计量的估计值。因此, 我们没有充分理由拒绝原假设, 即认为美国季度实际产出增长率确实存在着两个不同状态, Hamilton 的美国季度 GDP 模型是有效的。

五、总 结

本文首次从 Markov 机制转移模型的相关原理入手, 分析了状态变量取值预测概率的分布特性。根据分析的结论, 我们构造了相应的 τ统计量, 并分析了 τ统计量的性质, 提出了依据 τ统计量对模型状态数目进行假设检验的方法。同时, 我们还运用蒙特卡罗模拟方法模拟了检验所需要的 τ统计量的经验分布表。最后, 本文运用我们提出的检验方法对 Hamilton 的美国季度 GDP 模型进行了检验研究。我们通过检验认为 Hamilton 的美国 GDP 模型是合理的, 得到与 Hansen 和 Garcia 不同的研究结论。

本文提出的检验方法与 Hansen 和 Garcia 的方法首先在原假设上是不同的, 这可能对得出不同的研究结论有一定的影响。其次, 我们的方法在计算上非常简便, 也没有 Hansen 检验方法所存在的过度"保守"问题, 即理论上不涉及模型估计中的多余参量问题。总之, 在目前没有更好的方法情况下, 我们的检验方法是一种简便有效的检验方法。

参考文献

[1] Hamilton, J. D, *Rational-expectations econometric analysis of changes in regimes: An investigation of the term structure of interest rates* [J], Journal of Economic Dynamics and Control [J], 1988, (12): 385～423.

[2] Hamilton, J. D, *A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle* [J], Econometrica, 1989, (57): 357～384.

[3] Hamilton, J. D, *Analysis of time series subject to changes in regime* [J], *Journal of Ecinometrics*, 1990, (45): 39～70.

[4] Hamilton, J. D, *Time Series Analysis* [M], Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.

[5] Hamilton, J. D, *Specification testing in Markov - switching time series models* [J], Journal of Econometrics, 1996, (70): 127～157.

[6] Hansen, B. E, *The likelihood ratio test under nonstandard conditions: Testing the Markov switching model of GNP* [J], Journal of Applied Econometrics, 1992, (7): S61～S82.

[7] Hansen, B. E, *Erratum: The likelihood ratio test under nonstandard conditions: Testing the Markov switching model of GNP* [J], Journal of Applied Econometrics, 1996a, (11): 195～198.

[8] Hansen, B. E, *Inference when a nuisance parameter is not identified under the null hypothesis* [J], Econometrica, 1996b, (64): 413～430.

[9] Garcia, R *Asymptotic null distribution of the likelihood ratio test in Markov switching model* [J], International Economic Review, 1998, (39): 763～788.

[11] 魏巍贤、陈智文、王建军:《三状态马尔可夫机制转换模型研究 ——在世界油价波动分析中的应用》[J],《财经研究》2006 年第 6 期。

[12] 王建军、陈珍珍:《对我国宏观经济周期的分析》[J],《统计与决策》2007 年第 1 期。

[13] 王建军、夏玉华:《Markov 机制转换模型研究 ——在中国宏观经济周期分析中的应用》[J],《数量经济技术经济研究》2007 年第 3 期。

(责任编辑: 陈卫宾; 校对: 宗 列)