

博饼规则的概率趣谈

文/张扬文

博饼起源于厦门,是厦门独具特色的民俗活动。早在 17 世纪中叶,民族英雄郑成功收复台湾,驻扎在厦门,时值中秋佳节,士兵思乡心切,而大战在即,郑成功部下洪旭,为宽慰士兵佳节思念亲人之心理,研究设计了中秋会饼,让士兵品饼赏月,博饼取乐,以激励军士克敌斗志。

每会饼按照各级科举制度的头衔,设有“状元”1 个,“对堂(榜眼)”2 个,“三红(探花)”4 个,“四进(进士)”8 个,“二举(举人)”16 个,“一秀(秀才)”32 个。全会有大小 63 块饼,含有七九六十三之数,是个吉利数字。因为九九八十一是帝王之数,八九七十二是千岁之数,而郑成功封过延平王,所以用六十三之数。

博饼寓教于乐,趣味无穷,很快流传到民间,并演绎成为今日厦门的特色,下面简要介绍博饼的游戏规则:

- 1、一秀(秀才 32 个):六粒骰子中有一粒为 4 点;
- 2、二举(举人 16 个):六粒骰子中有两粒为 4 点;
- 3、四进(进士 8 个):六粒骰子有四粒点数相同(除四点外);
- 4、三红(探花 4 个):六粒骰子中有三粒的点数均为 4 点;
- 5、对堂(榜眼 2 个):六粒骰子为 123456;
- 6、状元(状元 1 个):若有四粒骰子为 4 点即为状

元。细分如下:

六粒骰子有四粒为 4,另两粒除四和一外,叫状元带两粒骰子点数相加;

六粒骰子有五粒相同(除四点外),叫五子带另外那个点数;

六粒骰子有五粒四点,叫五红带另外那个点;

六粒骰子相同,但点数不是四,叫“六黑”; (通吃,关灯抢——)

六粒骰子有四粒为 4,两粒为 1,称为“状元插花”;

六粒骰子都是四点,叫“满堂红”。(通吃)

以上“状元”按由小到大排列。

根据以上规则,笔者对获奖的各项奖项的概率作了一个计算,发现很多的结论。

笔者分析的前提是 6 个骰子分别投掷的过程是分别独立的事件,也就是说,任两个骰子的投掷动作之间毫不相干,6 个骰子一起落入碗中的过程可视为骰子一个一个地依次地被投入碗中的过程。

设 Black : $B_i (i = 1, 2, 3, \dots, 6)$ 为非 4 的点数重复的次数,也即: B_2 代表点数 11, 22, 33, 55 或 66, 依此类推,作为横轴。设 Red : $R_j (j = 1, 2, 3, \dots, 6)$ 为点数 4 重复的次数,也即: R_3 代表点数 444, 依此类推,作为纵轴。如下表:

	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	合计
R_0	无	$C_6^0 \times 5^6 - 1325 = 14300$			$C_5^1 C_6^4 \times 4^2$	$C_5^1 C_6^5 C_4^1$	C_5^1	$C_6^0 \times 5^6$
R_1	无	6!	$C_6^1 \times 5^5 - 1350$		$C_6^1 C_5^1 C_5^4 C_4^1$	$C_6^1 C_5^1$	无	$C_6^1 \times 5^5$
R_2	无	$C_6^2 \times 5^4 - 75$			$C_6^2 C_5^1$	无	无	$C_6^2 \times 5^4$
R_3	无	$C_6^3 \times 5^3$			无	无	无	$C_6^3 \times 5^3$
R_4	无	$C_6^4 C_5^2 \times 2!$	$C_6^4 C_5^1$	无	无	无	无	$C_6^4 \times 5^2$
R_5	无	$C_6^5 C_5^1$	无	无	无	无	无	$C_6^5 \times 5^1$
R_6	1	无	无	无	无	无	无	$C_6^6 \times 5^0$

我们显然可以看出： $i + j \leq 6$ ，并且结合二项式定理可知在合计栏中 $R_0 \sim R_6$ 的总数为 $(6 + 1)^6$ 即 6^6 。而 6^6 正是掷骰子所能得到的结果总数。所以 $P(R_0) + P(R_1) + P(R_2) + P(R_3) + P(R_4) + P(R_5) + P(R_6) = 1$ 。下面逐一分析得到各奖项的概率。

1. 在 R_1 行：

$N(\text{对堂}) = 6! = 720$ \ * 在 R_1B_1 格：表示 123456 各出现一次 * \

$N(\text{四进带一秀}) = C_6^1 C_5^1 C_4^1 C_3^1 C_2^1 C_1^1 = 600$ \ * 在 R_1B_4 格：表示 4 出现一次，12356 其中一个数连续出现四次；方法：先取一个骰子，取法 C_6^1 ，令其点数为 4，在余下的五个骰子中取四个，取法 C_5^4 ，令其点数同为 12356 中的一种，取法 C_5^1 ，最后一个为剩下四种点数的一种，取法 C_4^1 （以下方法的分析从略）* \

$N(\text{五子带一秀}) = C_6^1 C_5^1 = 30$ \ * 在 R_1B_5 格：表示 4 出现一次，12356 其中一个数连续出现五次 * \

$N(\text{一秀}) = C_6^1 \times 5! - 720 - 600 - 30 = 18750 - 1350 = 17400$ \ * 表示 4 出现一次 * \

2. 在 R_2 行：

$N(\text{四进带一秀}) = C_6^2 C_5^1 = 75$ \ * 在 R_2B_4 格：表示 4 出现两次，12356 其中一个数连续出现四次 * \

$N(\text{二举}) = C_6^2 \times 5! - 75 = 9375 - 75 = 9300$ \ * 表示 4 出现两次 * \

3. 在 R_3 行：

$N(\text{三红}) = C_6^3 \times 5! = 2500$ \ * 表示 4 出现三次 * \

4. 在 R_4 行：

$N(\text{状元}) = C_6^4 C_5^2 + C_6^4 C_5^1 = 300 + 75 = 375$ （普通状元）+ 15（状元插金花）\ * 表示 4 出现四次；方法：先取四个骰子，取法 C_6^4 ，令其点数为 4，余下的两个骰子非 4，在 R_4B_1 格：取 12356 中两个不同点数的骰子，取法 C_5^2 ！，在 R_4B_2 格：取 12356 中相同点数的一对骰子，如：11 22 33 55 66，取法 C_5^1 ，其中包含状元插金花 444411 * \

5. 在 R_5 行：

$N(\text{五红}) = C_6^5 C_5^1 = 30$ \ * 表示 4 出现五次 * \

6. 在 R_6 行： $N(\text{红六勃}) = 1$ \ * 表示 4 出现六次 * \

7. 在 R_0 行：

$N(\text{四进}) = C_5^1 C_6^4 \times 4! + C_6^1 C_5^1 C_4^1 C_3^1 C_2^1 C_1^1$ （四进带一秀）+ $C_6^2 C_5^1$ （四进带二举）= 1200 + 600 + 75 = 1875 \ * 在 R_0B_4 、 R_1B_4 、 R_2B_4 格：表示 12356 其中一个数连续出现四次 * \

$N(\text{五子}) = C_5^1 C_6^5 C_4^1 + C_6^1 C_5^1$ （五子带一秀）= 120 +

$30 = 150$ \ * 在 R_0B_5 、 R_1B_5 格：表示 12356 其中一个数连续出现五次 * \

$N(\text{黑六勃}) + N(\text{么点六勃}) = 4 + 1 = 5$ \ 黑六勃：表示 2356 其中一个数连续出现六次；么点六勃：表示 1 连续出现六次 * \

$N(\text{无奖}) = C_6^0 \times 5! - 1200 - 120 - 5 = 14300$

通过以上计算我们可以发现以下几个结论：

1. 就一般规律而言，中奖的点数概率越低，奖项越大，奖品越诱人，而中奖点数概率越高，越容易博到，显然奖品就越小。说明前人设计这种博饼的方法还是费了一番功夫，考虑到比较显见的概率知识的，这也使博饼这项活动更有理趣。

2. 但是通过计算我们还可以发现，由于博到四进的概率明显小于三红（是三红的 $3/4$ ），但四进的地位却次于三红，这是博饼的一个小小的逆反规律，这就是为什么我们在博饼中常常发现三红的奖品很快就被一抢而空的道理了。

3. 另外，我们还可以计算一下参与博饼的人每投掷一次骰子，他的获奖几率是多少。 $P(\text{获奖}) = P(\text{一秀}) + P(\text{二举}) + P(\text{四进}) + P(\text{三红}) + P(\text{对堂}) + P(\text{状元}) + P(\text{五子}) + P(\text{五红}) + P(\text{黑六勃}) + P(\text{么点六勃}) + P(\text{红六勃}) = (17400 + 9300 + 1875 + 2500 + 720 + 375 + 150 + 30 + 4 + 1 + 1) / 6^6 = 32356 / 46656 = 0.6935 = 69.35\%$

这样看来，中奖率这么高，博饼不愧是大众化的游戏，不存在绝对的胜者，也没有悲哀的倒霉蛋，大家都可以各得其乐，满载而归。

综上所述，我们可以发现源于 300 多年前的古老游戏竟有这么美妙的内在的规律和吸引力，作为一项大众的活动，每年又恰逢中秋佳节而来，听着身边的色子和瓷碗亲密接触的清脆美妙的响声，衷心地希望这项源自家乡厦门的游戏在全省甚至全国流传开来，展示我们美丽厦门的神奇人文魅力。

（作者单位：厦门大学计划统计系）