非线性时序模型 LM 检验的两类临界值检验统计功效比较

钱争鸣　艾舍莱福　郭鹏辉

（厦门大学经济学院）

【摘要】本文基于模拟方法比较了不同非线性时序模型的 LM 检验的功效和规模，同时也考虑一般化线性检验 BDS 检验参与比较，目的在于探讨蒙特-卡洛渐近法检验与自举法（bootstrap）检验的两类临界值的统计功效何者更为有效。通过实证与对比分析，结果表明，当样本小于 200 或自回归系数接近单位根，或者线性性检验是 ARCHT 或 BDS 时，就可以考虑应用自举法临界值而非渐近临界值。而且还发现，BDS 检验仅在一般性上优于 LM 检验。

关键词　非线性模型　自举法　渐近法　LM 检验　统计功效

中图分类号　F064. 1　　文献标识码　A

The Comparison of Statistical Power of Two Types Critical Values for the LM Test of Nonlinear Time - series Models

Abstract: For studying which one is more effective for the statistical power between the Monte - Carlo Asymptotic Test and the Bootstrap Test, the power and scale of different nonlinear models are compared in this paper based on simulation, and the generalized linear test BDS, is also included. The empirical results show that, one should choose BCV rather than ACV when the sample is less than 200, or the auto - regression coefficient closes to unit root, or the linearity test is ARCHT or BDS. And, the results show that BDS test is better than LM test only on the generality.

Keywords: Nonlinear Model; Bootstrap; Asymptotic; LM Test; Statistical Power

虽然许多经济时序数据在不少领域中用各种类型的线性模型描述效果不错，但是在一些更为深入的研究中发现，如果对许多时序现象和问题的分析仅仅停留在线性模型上描述是不够的，其效果也不好。理论分析与数据模拟的结果表明，时间序列可能是由一个非线性过程产生的。因此，近年来许多学者开始研究与应用非线性时序模型。与线性相比，非线性时序模型的范围更加广阔，有如空间中各式各样的曲面比之于平面的情况多得多。

在研究与应用非线性时序模型中，特别是在复杂的非线性时序计量经济分析中，经常需

要或者会碰到在未知检验统计量分布时，要进行假设检验并研究其功效，通常做法是应用大样本理论去判断近似分布。但是，对于小样本而言，基于渐近分布的检验，经常难以给出令人满意的结果。另一种情况是，在统计量分布已知的情况下，检验却对模型假设敏感。这两种情况都可能带给检验结果不良影响，甚至使检验结果与实际情况相背离。因此，有必要寻找一种新的、更为准确的方法来估计统计量。同时也涉及到对选择模型进行模拟和估计，然后进行功效的比较。本文引进自举法与常用的渐近法进行检验功效比较，实证分析与对比的结果说明，在某些情况下，使用自举法进行统计量的估计将更为有效。

一、研究方法与模型

1. 自举法

自举法（Efron，1979）是一种面向应用、以原始数据为基础，基于大量计算的模拟抽样统计推断法，即用原样本自身的数据进行抽样得出新的样本及统计量，故称之为自举法，也称为自助法。自举法可用于研究原始数据（或一组数据）的某统计量的分布特征，特别适用于那些用常规方法难以导出的参数的区间估计、假设检验等问题，是模拟统计量概率分布的最简便的方法之一。

自举法的基本思想是，在原始数据范围内做有放回的再抽样（resampling），或通过对记录进行重新抽样，生成自举法样本，然后计算给定统计量的估计值，并导出该统计量的经验概率分布。假定统计量 $\hat{\theta}$ 由一给定的随机样本 x_t（$t=1, \cdots, n$）估计而得，我们希望估计 $\hat{\theta}$ 的累积分布函数。定义 X_i 是由对观测数据重新抽样 n 次（样本容量）得到的自举法样本，即每个观测值 x_i 都是经过重新抽样而替代的，具有 $1/n$ 的相同概率。因此得到自举法样本 X_i（$i=1, \cdots, B$）的总体 B。通过计算每个自举法样本 X_i 得到一个统计量 θ 的自举法估计量 $\hat{\theta}_i$（$i=1, \cdots, B$），则参数标准误的自举法估计为：

$$s_{\theta}=\left|\frac{1}{B-1}\sum_{b=1}^{B}\left[\theta^{(b)}-\theta^{(-)}\right]^{2}\right|^{1/2}$$

其中
$$\theta^{(-)}=\sum\frac{\theta^{(b)}}{B}$$

经过计算可以得出 θ 的一些性质，如 $\theta^{(b)}$ 的分布是否为正态，$\theta^{(b)}$ 的均数及标准差（误），θ 的可信区间等。当 $\theta^{(b)}$ 的频数分布近似正态时，以其均数 $\theta^{(-)}$ 作为点估计，用正态原理估计可信区间；当 $\theta^{(b)}$ 的频数分布为偏态时，以其中位作为点估计，以上下 2.5%分位数作为其 95%可信限。通常，在 X 中各要素服从独立同分布（IID）的假定下，上述模拟有效。然而，时序数据通常不服从 IID，所以重新抽样的算法需要作些调整。本文中，笔者引进了针对非 IID 观测数据的残差自举法。其主要步骤是：首先，利用参数化模型估计时序，并得到残差；其次，重新抽样残差；最后，基于估计模型和自举残差构建时序数据的自举品。

为进行检验统计功效的对比与分析，笔者采用蒙特-卡洛模拟渐近法与自举法来计算和对比其规模和功效。为此，首先，需要清楚蒙特-卡洛模拟与自举法模拟的不同，前者常常是人为地选择一些总体，通过模拟抽样去验证某些统计量的性质、检验方法的优劣等，其结论常常带有普遍性。而后者是在（参数或非参数）样本（经验分布）的基础上作有放回再抽样，其结果主要是针对现有资料作出统计推断；其次，需要计算和对比两种模拟方法的规模

和功效。其主要步骤为：第一步，先确定样本序列的参数和初始条件；第二步，由给定分布生成虚拟随机数，通常设定随机数是正态分布且序列不相关，因而它们可以代表 IID 序列；第三步，利用参数、初始条件和随机数构建模型序列，最后是大量地重复第二步和第三步，进行具体而又繁琐的模拟与估计过程，以及检验和对比分析。

笔者使用拉格朗日乘数（LM）来检测时序非线性性。LM 统计量可计算用于检验线性原始假设和几乎所有主要的非线性模型。而且，对于每个 LM 检验，仅要求原始假设线性模型的估计量，即构造一个 LM 检验可用于检验多个备择假设。通过生成临界值，我们将利用自举法比较对应多个非线性模型的不同 LM 检验的规模和功效。LM 检验原始假设为线性时序模型（通常是 AR（MA）模型），备择假设为特定的非线性模型。在 McLeod 和 Li（1983），Keenan（1985），Tsay（1989），Subba Rao 和 Gabr（1980），Hinich（1982），Ashley 等（1986），Nychka 等（1992），White（1989a，1989b）的文献中，阐述了不考虑特殊非线性备择模型的“一般化”线性性检验，其中应用最为广泛的一般化线性性检验是 BDS 检验[①]。我们也将在本文中讨论 BDS 检验，并与 LM 检验作比较。

2 五种非线性时序模型

本文主要关注五种非线性模型：二元线性模型（BL），指数自回归模型（EAR），门限自回归模型（TAR），平滑转换自回归模型（STAR）和自回归条件异方差模型（ARCH）。

（1）BL（p，m，k）模型和 BLT 统计量。

BL（p，m，k）模型：

$$y_t=\mu+\sum_{i=1}^{p}\phi_i y_{t-i}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}c_{ij}y_{t-i}\varepsilon_{t-j}+\varepsilon_t \tag{1}$$

这里 $c_{mk}\neq 0$，y_{t-i}和ε_{t-j}交叉项表示非线性，原假设为 $\theta_1=[c_{11}\quad c_{12}\quad\cdots\quad c_{mk}]'=0$。检验线性原始假设模型（1）和非线性备择假设模型（3）的 LM 统计量 BLT 可写为：

$$\begin{aligned}z_{1t}&=\left(\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial\theta_1}\right)_{\theta_1=0}=\left[\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(y_t-\mu-\sum_{i=1}^{p}\phi_i y_{t-i}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}c_{ij}y_{t-i}\varepsilon_{t-j}\right)\right]_{\theta_1=0}\\&=-[y_{t-1}\varepsilon_{t-1}\quad y_{t-1}\varepsilon_{t-2}\quad\cdots\quad y_{t-m}\varepsilon_{t-k}]'\end{aligned} \tag{2}$$

假定 $\phi_p\neq 0$，$k\leqslant p+1$，θ_1 为 mk 维向量。在此约束下，BLT 统计量在原始线性性假设下渐近服从 χ^2_{mk} 分布。

（2）EAR（p）模型和 EART 统计量。

EAR 模型：

$$y_t=\mu+\sum_{i=1}^{p}\phi_i y_{t-i}+[\exp(-\gamma y^2_{t-d})-1]\sum_{i=1}^{p}\theta_i y_{t-i}+\varepsilon_i\qquad \gamma\neq 0 \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial\gamma}\right)_{\gamma=0}&=\left\{\frac{\partial}{\partial\gamma}\left\{y_t-\mu-\sum_{i=1}^{p}\theta_i y_{t-i}-[\exp(-\gamma y^2_{t-d})-1]\sum_{i=1}^{p}\theta_i y_{t-i}\right\}\right\}_{\gamma=0}\\&=[\exp(-\gamma y^2_{t-d})\sum_{i=1}^{p}\theta_i y_{t-i}y^2_{t-d}]_{\gamma=0}=\sum_{i=1}^{p}\theta_i y_{t-i}y^2_{t-d}\end{aligned}$$

① BDS 检验因其原创作者 William Brock，Davis Dechert 和 Jose Scheinkman（1987）得名，其在 Brock，Dechert，Scheinkman 和 LeBaron（1996）的文献中得到充分的阐述。BDS 检验是针对白噪声的检验，其备择假设既包括非白噪声的线性过程，也包括非白噪声的非线性过程。因此，BDS 并不提供非线性性的直接检验。然而，如果预先把线性结构去除，则 BDS 检验拒绝残差为白噪声的假设即意味着原序列呈现非线性性。

因此，EAR（p）的 LM 统计量 EART（p）可写为：

$$z_{1t}=-\left[y_{t-1}y_{t-d}^{2} \quad y_{t-2}y_{t-d}^{2} \quad \cdots \quad y_{t-p}y_{t-d}^{2}\right]' \tag{4}$$

EART（p）在线性性假设下渐近服从 χ_p^2 分布。

（3）TAR 模型。

本文考虑一个简单的两机制 TAR 模型，表达方程为：

$$y_t=\begin{cases}\mu^{(1)}+\sum_{i=1}^{p}\phi_i^{(1)}y_{t-i}+\varepsilon_t^{(1)} & if \quad y_{t-d}\geqslant c\\ \mu^{(2)}+\sum_{i=1}^{p}\phi_i^{(2)}y_{t-i}+\varepsilon_t^{(2)} & if \quad y_{t-d}<c\end{cases} \tag{5}$$

这里 $\phi_i^{(1)}\neq\phi_i^{(2)}$（$i=1, \cdots, p$），两个机制均分别为 AR（p）过程。

注意到这里没有 TAR 模型对应的 LM 检验统计量，这是因为似然函数对门限参数 c 是不可微的。

（4）STAR（p）模型和 START 统计量。

ESTAR（p）模型的一般化形式为：

$$y_t=\mu_1+\sum_{i=1}^{p}\phi_{1i}y_{t-i}+\left(\mu_2+\sum_{i=1}^{p}\phi_{2i}y_{t-i}\right)\times\{1-\exp[-\gamma(y_{t-d}-c)^2]\}+\varepsilon_t \tag{6}$$

LSTAR（p）模型为：

$$y_t=\mu_1+\sum_{i=1}^{p}\phi_{1i}y_{t-i}+\left(\mu_2+\sum_{i=1}^{p}\phi_{2i}y_{t-i}\right)\times\left[\left\{1+\exp[-\gamma^*(y_{t-d}-c^*)]\right\}^{-1}-0.5\right]+\varepsilon_t \tag{7}$$

在原始假设 $\gamma=0$ 或 $\gamma^*=0$ 下，（6）式、（7）式均为线性的 AR 模型。

构造 ESTAR 模型的 LM 检验统计量 ESTART 为：

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial\gamma}\right)_{\gamma=0}&=\left\{\frac{\partial}{\partial\gamma}\left\{-\left(\mu_2+\sum_{i=1}^{p}\phi_{2i}y_{t-i}\right)\times\left\{1-\exp[-\gamma(y_{t-d}-c)^2]\right\}\right\}\right\}_{\gamma=0}\\&=\left\{-\left(\mu_2+\sum_{i=1}^{p}\phi_{2i}y_{t-i}\right)\exp[-\gamma(y_{t-d}-c)^2]\,(y_{t-d}-c)^2\right\}_{\gamma=0}\\&=-\left(\mu_2+\sum_{i=1}^{p}\phi_{2i}y_{t-i}\right)(y_{t-d}-c)^2\end{aligned}$$

经转换可得 ESTART（p）的 z_{1t} 简化形式为：

$$z_{1t}=-\left[y_{t-1}y_{t-d} \quad y_{t-2}y_{t-d} \quad \cdots \quad y_{t-p}y_{t-d} \quad y_{t-1}y_{t-d}^2 \quad y_{t-2}y_{t-d}^2 \quad \cdots \quad y_{t-p}y_{t-d}^2\right]' \tag{8}$$

ESTART（p）在线性性假设下渐近服从 χ_{2p}^2 分布。

LSTAR 模型的 LM 检验统计量 LSTART 可表示为：

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial\gamma^*}\right)_{\gamma^*=0}&=\left\{\frac{\partial}{\partial\gamma^*}\left\{-\left(\mu_2+\sum_{i=1}^{p}\phi_{2i}y_{t-i}\right)\times\left[\left\{1+\exp[-\gamma^*(y_{t-d}-c^*)]\right\}^{-1}-0.5\right]\right\}\right\}_{\gamma^*=0}\\&=\left\{-\left(\mu_2+\sum_{i=1}^{p}\phi_{2i}y_{t-i}\right)\frac{\exp[-\gamma^*(y_{t-d}-c^*)]\,(y_{t-d}-c^*)}{[1+\exp[-\gamma^*(y_{t-d}-c^*)]]^2}\right\}_{\gamma^*=0}\\&=-\left(\mu_2+\sum_{i=1}^{p}\phi_{2i}y_{t-i}\right)\frac{(y_{t-d}-c^*)}{4}\end{aligned} \tag{9}$$

因此可得 LSTART 为:

$$z_{1t} = -\left[y_{t-1}y_{t-d} \quad y_{t-2}y_{t-d} \quad \cdots \quad y_{t-p}y_{t-d}\right]' \tag{10}$$

(5) ARCH 模型和 ARCHT 统计量。

ARCH(p, m)模型:

$$y_t = \mu + \sum_{i=1}^{p}\phi_i y_{t-i} + v_t \tag{11}$$

$$v_t = \varepsilon_t\sqrt{h_t} = \varepsilon_t\sqrt{\alpha_0 + \sum_{j=1}^{m}\alpha_j v_{t-j}^2} \tag{12}$$

这里 $\{\varepsilon_t\} \sim NIID(0, 1)$。

在原始假设 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$ 下, ARCH(p, m)模型的 LM 检验统计量为:

$$\mathrm{ARCHT}(p, m) = \frac{1}{2}\left(\sum_{t=1}^{T}\hat{z}_t\hat{f}_t\right)'\left(\sum_{t=1}^{T}\hat{z}_t\hat{z}_t'\right)^{-1}\left(\sum_{t=1}^{T}\hat{z}_t\hat{f}_t\right)$$

在原始假设约束下, $\hat{z}_t = [1 \quad \hat{v}_{t-1}^2 \quad \cdots \quad \hat{v}_{t-m}^2]'$, $\hat{f}_t = \hat{h}_t^{-1}\hat{v}_t^2 - 1 = \left(T^{-1}\sum_{t=1}^{T}{}_{-1}\hat{v}_i^2\right)^{-1}\hat{v}_t^2 - 1$, $\hat{v}_{t-i}^2 = \hat{\varepsilon}_{t-i}^2$, $\forall i$。ARCHT(p, m)在原始假设下渐近服从 χ_m^2 分布。

二、比较蒙特-卡洛模拟渐近法和自举法的规模和功效

笔者在这部分将使用渐近法和自举法对 5 个 LM 检验的规模和功效进行比较, 同时也考虑一般化线性检验 BDS 检验①。

表 1 给出了使用渐近法和自举法临界值(ACV 和 BCV)在 5%的显著性水平下 5 个 LM 检验和 BDS 检验的功效比较, 当经验性规模接近于 5%时, 说明临界值是优良的。显然, 对于所有的检验, 自举法临界值的经验性规模均接近于 5%; 而使用渐近法临界值的 ARCHT(1)经验性规模则显著地偏离 5%, START(1)的自回归系数 ϕ 则接近于单位根。当 T=25 时, 所有使用渐近临界值计算的 BDS 检验的经验性规模均大于 5%。为得到两种方法(渐近法和自举法)规模表现的整体主要情况, 我们计算了落在 4%和 6%之间的经验性拒绝率的比例。当 T=100 时, 31/36 的自举法拒绝率落在[4%, 6%]内, 其中最小值为 3.8%, 最大值为 6.2%。对应地, 使用渐近法临界值的拒绝率在 2.3%~5.9%, 其中有 24/36 落在[4%, 6%]内。当 T=50 时, 这个比例分别为 29/36 和 18/36, 且自举法和渐近法临界值拒绝率的波动范围分别是[1.9%, 6.6%]和[1.4%, 9.1%]。当 T=25 时, 自举法经验性规模落在 2.5%~6.3%, 其中有 33/36 在[4%, 6%]内。而渐近法临界值的经验性规模则分散在 1%~16.9%, 且仅有 12/36 落在[4%, 6%]内。因此, 自举法较之渐近法具有更为优良的规模性质。

表 1 基于 ACV 和 BCV 的 LM 检验的经验性规模

(i) $\mu=0$, $T=100$, $\sigma^2=1$

ϕ	临界值	-0.9	-0.6	-0.3	0.3	0.6	0.9
BLT(1, 1)	渐近法	5.9	5.7	5.1	4.7	5.3	3.8
	自举法	5.9	5.1	4.8	5.0	5.9	5.1

① 本文使用 Kanzler(1999)提出的 MATLAB 算法计算 BDS 统计量。

（续）

（i）$\mu=0$，$T=100$，$\sigma^2=1$

ϕ	临界值	－0 9	－0.6	－0.3	0 3	0 6	0 9
BLT（2，2）	渐近法	4 6	5 3	4 5	4 5	4 1	3 1
	自举法	5 7	5 6	4 7	5 2	5 0	3 8
EART（1）	渐近法	3 9	4 1	5 6	5 7	4 5	3 8
	自举法	4 8	5 2	5 9	6 1	5 7	5 5
START（1）	渐近法	4 5	4 5	5 7	4 3	4 5	4 9
	自举法	4 8	4 9	5 9	5 2	5 4	3 6
ARCHT（1）	渐近法	2 4	3 4	2 5	2 9	2 9	2 3
	自举法	4 4	5 2	5 1	5 5	5 3	4 5
BDS	渐近法	3 8	4 2	4 3	4 5	4 5	2 5
	自举法	5 8	5 4	5 3	6 2	6 1	5 0

（ii）$\mu=0$，$T=50$，$\sigma^2=1$

ϕ	临界值	－0 9	－0.6	－0.3	0 3	0 6	0 9
BLT（1，1）	渐近法	4 3	6 9	5 4	4 1	4 2	3 2
	自举法	4 4	6 3	5 3	4 9	5 0	3 5
BLT（2，2）	渐近法	4 6	3 8	4 3	3 9	3 4	1 7
	自举法	6 5	4 8	5 1	5 8	5 3	2 3
EART（1）	渐近法	2 8	3 6	5 2	4 3	4 2	4 2
	自举法	4 3	5 1	5 5	5 5	5 6	4 9
START（1）	渐近法	4 3	4 8	4 8	3 1	3 3	9.1
	自举法	4 8	5 2	5 0	3 9	4 9	1 9
ARCHT（1）	渐近法	1 6	2 2	3 1	1 4	1 9	2 2
	自举法	5 2	4 0	6 6	4 2	5 3	5 7
BDS	渐近法	4 0	5 0	5 4	5 9	6 4	4 7
	自举法	4 3	4 2	4 7	5 6	5 1	5 2

（iii）$\mu=0$，$T=25$，$\sigma^2=1$

ϕ	临界值	－0 9	－0.6	－0.3	0 3	0 6	0 9
BLT（1，1）	渐近法	4 1	6 7	5 1	3 7	3 5	4 7
	自举法	4 8	5 4	5 1	4 5	4 5	4 2
BLT（2，2）	渐近法	4 6	4 0	3 9	3 5	2 9	4 6
	自举法	6 3	5 9	5 3	4 9	4 3	4 3
EART（1）	渐近法	3 6	3 1	4 2	3 9	3 1	5 3
	自举法	4 1	3 5	5 1	4 2	4 7	4 3
START（1）	渐近法	7.7	4 3	4 0	3 0	3 2	16 9
	自举法	4 7	4 2	4 5	4 6	4 0	2 5
ARCHT（1）	渐近法	1 1	1 0	1 3	6 0	5 0	1 3
	自举法	4 3	4 9	5 0	4 6	4 5	5 4
BDS	渐近法	8 9	12 0	10 8	10 6	11.2	9.1
	自举法	5 3	5 6	4 8	5 6	5 5	5 0

注：（1）经验性拒绝率以%计；（2）显著性水平为 5%；（3）对于每个参数设置均产生 AR（1）的 1000 次蒙特-卡洛重复实验，在每个蒙特-卡洛重复中均有 1000 个 AR（1）自举序列。

从 BL（1，1）、EAR（1）、TAR（2；1，1）、ESTAR（1）、LSTAR（1）或 ARCH（1，1）模型的模拟结果（模型检验的实证功效略）我们可以得出两个结论：一是自举法功效和渐近法功效在多数情况下非常接近；二是在两者出现差异的时候，通常是自举法功效大于渐近法功效。

三、实证分析与结论

1. 渐近法临界值和自举法临界值

在上述检验统计功效比较中，我们先采用了渐近法临界值。然而，对于小样本，由于渐近分布构造的临界值并不是真实临界值的优良近似值，因此，我们考虑用自举法临界值代替渐近临界值。结果表明，自举法的实证功效一般高于渐近法，尽管二者的差距并不大。而且，自举法在规模方面也优于渐近法。采用自举法临界值得到的经验性规模大都接近于 5% 的名义水平，而由渐近法临界值产生的经验性规模在小样本和自回归系数 ϕ 绝对值较大时则偏离 5%，尤其是 START（1）。采用渐近法临界值的 ARCHT（1）则整体低于 5%。

总之，在如下三种情况中我们应考虑采用自举法临界值而非渐近法临界值。

第一，样本小于 200；第二，自回归系数接近于单位根；第三，线性性检验是 ARCHT 或 BDS。

2. LM 检验和 BDS 检验

（1）一般性。直观地看，BDS 检验优于 LM 检验在于其一般性，但实证结果则显示：

①对应于多种非线性序列的 LM 检验功效优良，有时甚至优于基于已知非线性结构构造的检验；②尽管 BDS 检验被视为一般化检验，但它的功效通常不是非常高。笔者观测到，除了 ARCH 模型外，BDS 检验的功效一般低于 20%，在所讨论的 6 个检验的功效排序中仅位居第 5 或第 6。

（2）统计量的构建与计算。计算 BDS 统计量非常耗时，而计算 LM 统计量则相当简便。构造 BDS 检验时存在着一些不确定性，我们需要预先确定参数 m 和 ε。因此，为对 BDS 检验结果有一个完整的了解，需要计算不同 m 和 ε 取值的 BDS 统计量，给计算带来诸多麻烦。

LM 检验的构建要求备择模型的参数化，而在实证研究中往往是难得的。对于这个问题的解决方法可以有两种：一是，通过对主要数据的研究，为确定类型数据的特点提供一些线索。如，高频金融数据的群爆通常意味着这是 ARCH 类数据。这种情况下我们更习惯先用模型再使用检验来证实；二是，我们也可以对数据进行多种 LM 检验，选取具有最高功效的 LM 检验通常对应正确的非线性模型。与第一种方法相反，这种方法采用检验的途径来寻找可能的非线性模型。

参考文献

[1] Ashley, R., Patterson, D., and Hinich, M. (1986) *A diagnostic test for non-linear serial dependence in time series fitting errors*, Journal of Time Series Analysis, 7: 165～178

[2] Brock, W., Dechert, W., and Scheinkman, J. (1987) *A test for independence based on the correlation dimension*, University of Wisconsin at Madison, Social Systems Research Institute, Working Paper, No. 8702

[3] Brock, W., Dechert, W., Scheinkman J., and LeBaron, B. (1996) *A test for independence based on the correlation dimension*, Econometric Review, 15: 197～235

[4] Efron, B (1979) *Bootstrap methods: Another look at the Jackknife*, The Annals of Statistics, 7: 1 ~ 26.

[5] Efron, B , and Tibshirani, R (1993) *An introduction to the Bootstrap*", Chapman and Hall, New York.

[6] Hinich, M. (1982) *Testing for Gaussianity and linearity of a stationary time series*, Journal of Time Series Analysis, 3: 169 ~ 176.

[7] Hjorth, J (1994) *Computer intensive statistical methods validation model selection and Bootstrap*, Chapman and Hall, London.

[8] Kanzler, L (1999) *Very fast and correctly sized estimation of the BDS statistic*, Working Paper, Christ Church, Oxford University, England

[9] Keenan, D (1985) *A Turkey non -additivity -type test for time series nonlinearity*, Biometrika, 72: 39 ~ 44.

[10] LePage, U. , and Billard, L (1992) *Exploring the limits of Bootstrap*, John Wiley, New York.

[11] McLeod, A. , and Li, W. (1983) *Diagnostic checking ARMA time series models using squared residual autocorrelations*, Journal of Time Series Analysis, 4: 269 ~ 273.

[12] Nychka, D , Ellner, S , Gallant, R , and McCaffrey, D (1992) *Finding chaos in noisy systems*, Journal of the Royal Statistical Society, B54 (2): 399 ~ 426

[13] Subba Rao, T. , and Gabr, M. (1980) *A test for linearity of stationary time series*, Journal of Time Series Analysis, 1: 145 ~ 152.

[14] Tsay, R (1989) *Testing and modeling threshold autoregressive processes*, Journal of the American Statistical Association, 84: 231 ~ 240

[15] Tukey, J. (1958) *Bias and confidence in not -quite large samples (Abstract)*, The Annals of Mathematical Statistics, 29: 614.

[16] White, H. (1989A) *Some Asymptotic results for learning in single hidden -layer feedforward network models*, Journal of the American Statistical Association, 84, No. 408, 1003 ~ 1013

[17] White, H. (1989B) *An additional hidden unit test for neglected nonlinearity in multilayer feedforward networks*, Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks (IEEE Press), Vol II: 451 ~ 455, New York.

(责任编辑:彭　战)