基于观测器的广义线性系统降阶 H_∞ 控制器设计

陈 凌，廖 勇，曾建平

（厦门大学自动化系，福建 厦门 361005）

摘 要：本文研究基于Luenberger观测器的广义系统降阶H_∞控制器的设计问题，并且该观测器是关于干扰解耦的。首先是提出了广义系统 H_∞状态反馈控制问题的一个充要条件，并利用线性矩阵不等式方法求解出广义系统的 H_∞状态反馈增益。然后对该H_∞状态反馈增益进行渐进降阶观测，基于广义Sylvester矩阵方程的显式通解的参数化设计方法，实现了广义系统的降阶H_∞ 控制。本文最主要的工作是给出了相应的广义线性系统降阶 H_∞控制器的设计算法。在文章的最后给出了一个例子，用来说明降阶算法的有效性。

关键词：广义线性系统；H_∞控制；降阶控制；干扰解耦；Luenberger观测器

中图分类号： **文献标识码**：B **文章编号**：1003-7241（2008）05-0046-05

Reduced-order Observer-based H_∞ Controller Design for Descriptor Systems

CHEN Ling, LIAO Yong, ZENG Jian-Ping

(Department of Automation, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: This paper presents the design of a robust reduced-order Luenberger observer-based H_∞ controller for the descriptor system. This observer is with disturbance decoupling. A necessary and sufficient condition for the H_∞ state-feedback control problem of descriptor systems is established. Based on the parametric design approach for generalized Sylvester matrix equations, a reduced-order H_∞ controller for descriptor systems is obtained. One major contribution of the present work is that a design algorithm for constructing the reduced-order H_∞ controller is presented. An illustrative example is also given.

Key words: descriptor linear systems; H_∞ control; redued-order controller; disturbance decoupling; Luenberger observers

1 引言

多数控制系统都采用基于反馈构成的闭环结构。反馈系统的特点是对内部参数变动和外部环境影响具有良好的抑制作用。状态反馈是以系统状态为反馈变量的一类反馈形式，很多控制问题都有赖于采用状态反馈才能够实现。而状态观测器的提出，主要是为了解决状态反馈在性能上的不可替代性和物理上的不能实现性的矛盾。如果所设计的观测器在干扰存在的条件下还能观测到我们所要求的信号，则称此观测器是关于干扰解耦的[1]。自Luenberger观测器提出以来[2]，在线性系统理论中得到了广泛的研究。而在利用Luenberger观测器来设计反馈控制器的问题上，也取得了一些重要的结果[3~5]。

对降阶控制器设计的研究受到了很多的关注。对于这个问题的研究是有其实际的应用背景，阶数过高的控制器不但不利于实现，而且可能会引起时滞等因素从而导致系统控制品质恶化。我们在观测器设计中经常会遇到带约束的广义Sylvester方程的求解问题[6 7]以及解的表达形式的限制，使得很难实现广义系统的降阶控制。文献[8]研究了干扰解耦观测器设计问题，提出了基于Sylvester矩阵方程的显式通解的参数化表示及设计算法，该方法极大地降低了计算的复杂性，提高了设计的自由度和灵活性。文中首先提出了广义系统 H_∞状

* 基金项目：福建省自然科学基金(A0510002)资助，厦门大学 985 二期信息创新平台项目资助和福建省新世纪优秀人才支持计划资助
收稿日期：2006-04-18

态反馈控制问题的一个充要条件，利用线性矩阵不等式方法求解出广义系统的 H_∞ 状态反馈增益。然后对该 H_∞ 状态反馈增益进行渐进降阶观测，基于文献[8]中Sylvester矩阵方程的显式通解的参数化设计方法，实现广义系统的 H_∞ 降阶控制。本文最主要的工作是给出了广义线性系统降阶 H_∞ 控制器的设计算法。在文章的最后给出了一个例子，用来说明降阶算法的有效性。

在文中的第3部分，给出了广义系统 H_∞ 状态反馈控制问题的一个充要条件。在第4部分利用所求得的 H_∞ 状态反馈增益矩阵，提出了基于降阶观测器进行降阶控制的设计算法，而且该观测器是关于干扰解耦的。为了方便叙述，文中做如下的约定：$\mathrm{Sym}(A) := A + A^T$，$I$ 表示适当维数的单位矩阵。

2 问题的提出

考虑如下的广义线性系统：

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $x \in \mathrm{R}^n$，$u \in \mathrm{R}^r$，$y \in \mathrm{R}^m$，$w \in \mathrm{R}^q$，$z \in \mathrm{R}^s$ 分别为系统的状态向量，输入向量，量测输出向量，扰动输入向量和被调输出向量，且对应的各系数矩阵均有适当的维数。$E \in \mathrm{R}^{n\times n}$，$\mathrm{rank}(E) = r \le n$。在此不妨假设 $D_{ij} = 0$，$i = 1,2$，$j = 1,2$，如果不满足的话，可以通过适当的变化即可以实现[9]，所以假设并不失一般性。

定义 1[10]

(I) 矩阵对 (E, A) 称为正则的，如果关于 s 的特征多项式 $\det(sE - A) \neq 0$；

(II)矩阵对 (E, A) 称为无脉冲，如果

$\deg(\det(sE - A)) = \mathrm{rank}E$；

(III) 矩阵对 (E, A) 称为稳定的，如果 $\det(sE - A) = 0$ 的所有特征根均具有负实部；

(IV) 矩阵对 (E, A) 称为容许的，如果它是正则的，稳定的且无脉冲；

H_∞ 控制问题是寻找一个镇定控制器 $u(s) = K(s)y(s)$ 使闭环系统是容许的，而且对于给定的 $\gamma > 0$，从扰动输入 w 到被控输出 z 的闭环传递函数 $T_{wz}(s)$ 的 H_∞ 范数小 γ。在状态反馈情况下，闭环系统的 H_∞ 性能并不能够通过增加控制器的阶数来加以改进。因此，系统的 H_∞ 状态反馈控制器总是能够选择为一个静态控制律。

已知状态反馈律为 $u = Kx$，则所构成的闭环系统可记为

$$\begin{aligned} \tilde{E}\dot{x} &= \tilde{A}x + \tilde{B}w \\ z &= \tilde{C}x \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\tilde{E} = E$，$\tilde{A} = A + B_2 K$，$\tilde{B} = B_1$，$\tilde{C} = C_1$.

为了保证系统(1)解的唯一性，假设矩阵对 (E, A) 正则，且系统是 $R-$ 能观的，即满足条件：

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} sE - A \\ C_2 \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in C \tag{3}$$

本文的目的是设计如下基于Luenberger函数观测器的降阶 H_∞ 控制器，而且该观测器是关于干扰解耦的：

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= F\theta + Gy + TB_2 u \\ u &= M\theta + Ny \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\theta \in \mathrm{R}^p$ 为控制器的状态变量，p 为控制器的维数。F，G，T，M，N 均为适当维数的实矩阵，并且满足

1) $\lim_{t\to\infty}(u - Kx) = 0$（当 $w \neq 0$ 时也是满足的，即Luenberger观测器(3)是关于系统(1)中的干扰 $w(t)$ 解耦的)，其中 K 为广义系统(1)的 H_∞ 状态反馈增益矩阵；

2) 广义系统(1)和控制器(4)所构成的闭环系统是容许的，而且对于给定的 $\gamma > 0$，从扰动输入 w 到被调输出 z 的闭环传递函数 $T_{wz}(s)$ 的 H_∞ 范数小于 γ；

3 准备工作

引理 1 考虑闭环系统(2)，给定 $\gamma > 0$，则下列两个陈述是相互等价的

1) 矩阵对 $(\tilde{E}, \tilde{A})$ 是容许的，且系统(2)的传递函数 $G(s) = \tilde{C}(s\tilde{E} - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$，满足有 $\|G(s)\|_\infty < \gamma$；

2) 存在矩阵 P 满足下列线性矩阵不等式：

$$\tilde{E}^T P = P^T \tilde{E} \ge 0 \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^T P + P^T \tilde{A} & P^T \tilde{B} & \tilde{C}^T \\ \tilde{B}^T P & -\gamma I & 0 \\ \tilde{C} & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{6}$$

证明 由文献[9]的结果可知陈述(1)成立的充要条件是存在一个矩阵 $\hat{P}$ 满足：

$$\begin{aligned} &E^T \hat{P} = \hat{P}^T E \ge 0 \\ &\tilde{A}^T \hat{P} + \hat{P}^T \tilde{A} + \tilde{C}^T \tilde{C} + \frac{1}{\gamma^2}\hat{P}^T \tilde{B}\tilde{B}^T \hat{P} < 0 \end{aligned} \tag{7}$$

对式(7)两边同乘以 $\gamma^{-1/2}$，定义 $P := \gamma^{-1}\hat{P}$，则可得

$$\tilde{A}^T P + P^T \tilde{A} + \frac{1}{\gamma}\tilde{C}^T \tilde{C} + \frac{1}{\gamma}P^T \tilde{B}\tilde{B}^T P < 0$$

对上式使用Schur补引理，即可以得到相应的结果。

由引理1，可以得到广义系统的 H_∞ 状态反馈的一个充要条件：

定理1 给定 $\gamma > 0$，系统(1)的状态反馈 H_∞ 控制问题

可解，当且仅当存在适当维数的矩阵 X 和 Y，使得

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Sym}(AX+B_2Y) & B_1 & X^TC_1^T \\ B_1^T & -\gamma I & 0 \\ C_1X & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{8}$$

$$X^TE^T = EX \ge 0 \tag{9}$$

成立。如果 X^* 和 Y^* 是其中一个可行解，则 $u=Y^*(X^*)^{-1}x(t)$ 是对应的一个状态反馈 H_∞ 控制器。

证明 将 H_∞ 状态反馈闭环系统(2)中各系数矩阵的具体值代入式(6)，可以得到

$$\begin{bmatrix} (A+B_2K)^TP+P^T(A+B_2K) & P^TB_1 & C_1^T \\ B_1^TP & -\gamma I & 0 \\ C_1 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{10}$$

可知 P 是非奇异矩阵，则对式(10)分别左乘 $\mathrm{diag}\{P^{-T},I,I\}$ 和右乘 $\mathrm{diag}\{P^{-1},I,I\}$，然后对式(5)分别左乘 P^{-T} 和右乘 P。定义 $X=P^{-1}$ 和 $Y=KX$，即可以得到式(8)和(9)，则定理得证。

注1 式(8)和(9)组成了一个线性矩阵不等式方程组，经过适当的数学变换后，可以使用LMI工具箱来进行求解。

下面考虑观测误差极限 $\lim_{t\to\infty}(u-Kx)$。记 $e=u-Kx$，则

$$e = M\theta + Ny - Kx = M\varepsilon + (MTE + NC_2 - K)x$$

其中 $\varepsilon=\theta-TEx$，然后对 ε 进行求导可得

$$\dot\varepsilon = F\theta + Gy + TB_2u - T(Ax + B_1w + B_2u)$$
$$= F\theta - FTEx + FTEx + GC_2x - TAx - TB_1w$$
$$= F\varepsilon + (FTE + GC_2 - TA)x - TB_1w$$

由上可得控制系统(1)，(4)的观测误差方程为

$$\begin{aligned} \dot\varepsilon &= F\varepsilon + (FTE + GC_2 - TA)x - TB_1w \\ e &= M\varepsilon + (MTE + NC_2 - K)x \end{aligned} \tag{11}$$

且它们需要满足下述条件[11]：

$$\lambda(F) \subset C^- \tag{12}$$

$$FTE + GC_2 - TA = 0 \tag{13}$$

$$MTE + NC_2 = K \tag{14}$$

当干扰 $w\equiv 0$ 时，对于系统(1)，(4)有下述关系成立

$$\lim_{t\to\infty}(u-Kx) = 0 \tag{15}$$

但是当 $w\neq 0$ 时，式(15)一般并不成立，于是引入下述的定义。

定义2 对于系统(1)和控制器(4)所构成的闭环系统，如果对任何实向量干扰函数 $w(t)$ 均有(15)式成立，则称系统(4)为系统(1)的干扰解耦Luenberger观测器，或称Luenberger观测器(4)是关于系统(1)中的干扰 $w(t)$ 解耦的。

引理2[8] 称Luenberger观测器(4)为系统(1)的干扰解耦Luenberger观测器的充分必要条件为：

$$M(sI-F)^{-1}TB_1 = 0, \quad \forall s \in C \tag{16}$$

或

$$MF^iTD = 0, \quad i = 0,1,\cdots,p-1 \tag{17}$$

注2 当上述条件不满足时，可以适当地增加观测器的阶数 p 来获得更多的自由度。

引理3[12] 对于满足条件(3)的 $R-$能观矩阵组(E, A, C_2)以及对角阵 $\Lambda=\mathrm{diag}\{s_1,s_2,\cdots,s_p\}$，矩阵方程

$$T'A + L'C_2 = \Lambda T'E \tag{18}$$

的通解可表示为：

$$T' = [t_1^T \quad t_2^T \quad \cdots \quad t_p^T]^T, \quad t_i^T = H(s_j)g_i \tag{19a}$$

$$L' = [l_1^T \quad l_2^T \quad \cdots \quad l_p^T]^T, \quad l_i^T = L(s_j)g_i \tag{19b}$$

其中 $g_i\in C^m$，i=1,2,…,p 为自由参数。$H(s)\in R^{n\times m}(s)$ 与 $L(s)\in R^{m\times m}(s)$ 右互质且满足互质分解：

$$(sE^T - A^T)^{-1}C_2^T = H(s)L^{-1}(s) \tag{20}$$

4 降阶控制器的设计方法

4.1 矩阵 F, T, G的参数表示

不失一般性，可将 F 取为非退化结构，亦即

$$F = W\Lambda W^{-1}, \quad \Lambda = \mathrm{diag}\{s_1, s_2, \cdots, s_p\} \tag{21}$$

其中 Λ 与 $W=[w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_p]$ 分别为 F 阵的Jordan标准型和特征向量矩阵，它们满足如下的约束条件：

约束1：s_i，i=1，2，…，p 复封闭，且 $\mathrm{Re}\,s_i<0$，i=1，2，…，p。

约束2：$s_i=\bar s_j$ 时有 $W_i=\overline{W}_j$，且 $\det W\neq 0$。

将式(21)代入式(13)，并令 $T=WT'$，$G=WL'$，于是可得下述矩阵方程

$$T'A - L'C_2 = \Lambda T'E \tag{22}$$

则由引理3可得矩阵 T，G 的参数表示如下

$$T = W[t_1^T \quad t_2^T \quad \cdots \quad t_p^T]^T, \quad t_i^T = H(s_j)g_i \tag{23a}$$

$$G = W[l_1^T \quad l_2^T \quad \cdots \quad l_p^T]^T, \quad l_i^T = -L(s_j)g_i \tag{23b}$$

其中 $H(s)$ 与 $L(s)$ 为满足式(20)的右互质多项式，$g_i\in C^m$，i=1，2，…，p 为自由参数。为保证 T，G 为实矩阵还应满足如下约束条件：

约束3：当 $s_i=\bar s_j$ 时有 $g_i=\bar g_j$。

4.2 M, N的参数表示

由式(14)可知 M，N 有解的充要条件为

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} TE \\ C_2 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} TE \\ C_2 \\ K \end{bmatrix} \tag{24}$$

可以通过限定矩阵 T 的参量使得上式成立，对矩阵 $[(TE)^T \quad C_2^T \quad K^T]^T$ 实施初等变化可以使得矩阵 P，Q 满足：

$$P\begin{bmatrix}TE\\C_2\end{bmatrix}Q=\begin{bmatrix}T_0&0\\0&0\end{bmatrix}, KQ=[K_0\quad 0] \tag{25}$$

T_0 为 r^* 阶可逆实矩阵，$K_0\in R^{r\times r^*}$，其中 r^* 为 $[(TE)^T\quad C_2^T]^T$ 的秩，则 $[M\quad N]$ 的参数表示形式为

$$[M\quad N]=[K_0T_0^{-1}\quad N']P \tag{26}$$

其中 $N'\in R^{r\times(m+p-r^*)}$ 为无约束实参数矩阵。

有了以上的各项准备工作，则我们可以得到如下降阶 H_∞ 控制器的设计算法：

1) 如果定理1中的线性矩阵不等式方程组(8)和(9)是可解的，则求出其中一个可行解 (X,G)，并得到对应的一个 H_∞ 状态反馈增益矩阵 K，然后进入下一个步骤。否则，降阶 H_∞ 滤波问题是不可解的，停止；

2) 求解分解式(20)，并置 p=1；

3) 求取 T 阵的参数表达式；

4) 检验是否存在参数 s_i，g_i，$i=1,2,\cdots,p$ 使得(24)成立，否则置 $p:=p+1$ 后转入3)；

5) 求取满足式(25)的矩阵 P，T_0，K_0，进而得到 F，M，T 的参数表达式；

6) 将 F，M，T 的参数表达式代入式(16)定出参数 s_i，g_i，w_i，$i=1,2,\cdots,p$，若满足式(16)的参数不存在，则置 $p:=p+1$ 后转入3)；

7) 将求得的参数代入式(21)，(23)和(26)即可以得到降阶控制器的各个参数；

注3 如果满足约束的参数不存在时，需要增加观测器的阶数 p 来获得更多的自由度。

5 算例

考虑具有如下参数的广义系统：

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}-6&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\ ,$$

$$B_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\ C_1=[1\quad 1\quad 1],\quad C_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

取 $\gamma=0.7$，求解出定理1中的线性矩阵不等式方程组的可行解，并得到系统的一个 H_∞ 状态反馈增益矩阵为

K=(1.3542 −2.0000 0.9366)

按照上述的算法设计降阶干扰解耦 Luenberger 观测器，则我们可以得到

$$H(s)=\begin{bmatrix}0&1\\1/2&0\\s/6&0\end{bmatrix},\quad L(s)=\begin{bmatrix}0&6+s\\-1&0\end{bmatrix}$$

令 F=s，可得

$$T=[g_2\quad g_1/2\quad sg_1/6],\quad G=-[(6+s)g_2\quad -g_1]$$

$$M=[1.8732/g_1]\ ,$$

$$N=[1.3542-1.8732*(g_2/g_1)\quad -2.0000]$$

由引理2可知观测器关于干扰解耦充要条件为

$$M(sI-F)^{-1}TB_1=0$$

又 rank$M$=p，可得 $g_2-sg_1/6=0$。于是可取 $s=-3$，$g_1=2$，$g_2=-1$。则可得降阶控制器的各个系数矩阵为

$$F=[-3],\quad T=[-1\quad 1\quad -1],\quad G=[3\quad 2]$$

$$M=[0.9366],\quad N=[2.2908\quad -2.0000]$$

本例说明该降阶 H_∞ 控制器的设计方法可以提供较大的设计自由度，并且比较简单和有效。

6 结束语

本文研究基于Luenberger观测器的广义系统降阶 H_∞ 控制器的设计问题，并且该观测器是关于干扰解耦的。提出了广义系统 H_∞ 状态反馈控制问题的一个充要条件，并求解出广义系统的 H_∞ 状态反馈增益。然后对该 H_∞ 状态反馈增益进行渐进降阶观测，基于广义Sylvester矩阵方程的显式通解的参数化设计方法，实现了广义系统的降阶 H_∞ 控制。主要的工作是给出了相应的广义线性系统降阶 H_∞ 控制器的设计算法。最后的算例说明该算法是简单有效的。

参考文献:

[1] 段广仁，强文义.线性系统的干扰解耦观测器设计[J].自动化学报，1994，20(5):548-552.

[2] LUENBERGER D G.An introduction to observers [J].IEEE Trans on Automatic Control，1971，16(6):596-602.

[3] Stroorvogel A A，Saberi A，Chen B M.A reduced-order observer based controller design for H_∞ optimization [J].IEEE Trans on Automatic Control，1994，39(2):355-360.

[4] Iwasaki T，Skelton R E.All fixed order H_∞ controllers:Observer-based structure and covariance bounds [J].IEEE Trans on Automatic control，1995，40(3):512-516.

[5] Lien C H.Robust observer-based control of systems with state perturbations via LMI approach [J].IEEE Trans on Automatic control，2004，49(8):1365-1370.

[6] Hou M，Muller P C.Design of a class of Luenberger observers for descriptor sysytems [J].IEEE Trans on Automatic Control，1995，40(1):133-136.

[7] CASTELAN E B，SILVA V G.On the solution of a Sylvester equation appearing in descriptor systems control theory [J].System & Control，2005，54:109-117.

[8] 段广仁，吴爱国.广义线性系统的干扰解耦观测器设计

(下转第33页)

本文提出一种将LPV系统与RIDE控制方法相结合的现代增益调参控制方法，该方法不仅能够保证整个闭环系统具有良好的性能品质、动态特性指标以及较强的鲁棒性，而且设计思路清晰、物理意义明确、易于工程实现。

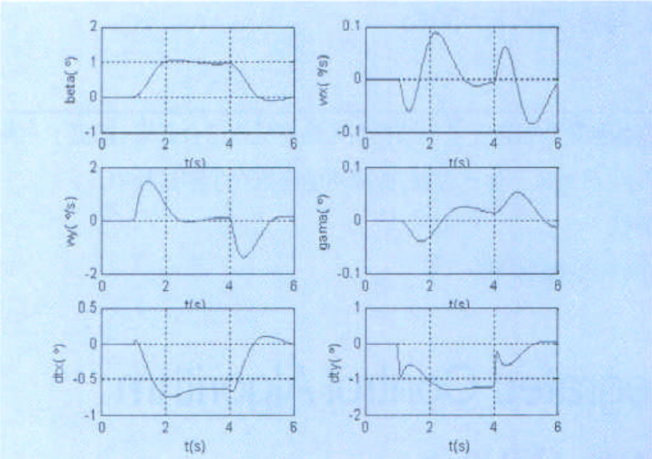

图3 侧滑角响应

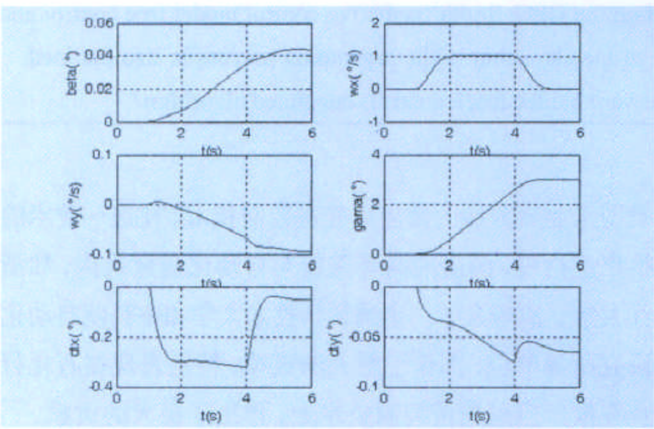

图4 摄动情况下的滚转角速率响应

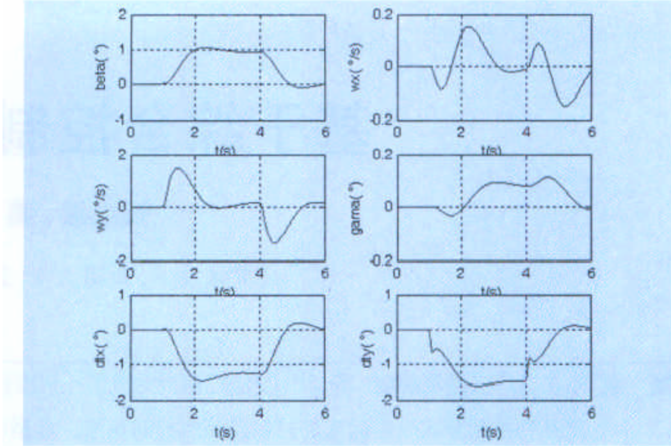

图5 摄动情况下的侧滑角响应

参考文献：

[1] E.A. MUIR.HIRM design challenge presentation document:the robust inverse dynamics estimation approach [J].GARTEUR/TP-088-28,1997.4

[2] MUIR,E.A.M Design of a Control law for a thrust vectoring fighter aircraft using Robust Inverse Dynamics Estimation.PhD Thesis,Engineering Department, Lancaster University1996

[3] MUIR,E.A.M.Design of a controller for a high performance fighter aircraft using Robust Inverse Dynamics Estimation(RIDE) [C].AIAA Guidance Navigation and Control Conference. 1993.8

[4] A.PACKARD,K.ZHOU,P.PANDEY,and G. BECKER. A collection of robust control problems leading to LMI's[C].in Proc.IEEE Conf. Decision Contr.,Brighton, U.K., 1991,page:1245-1250

[5] DOYLE,J, A.PACKARD AND K.ZHOU.Review of LFT's, LMI's and k[C]. Proc.IEEE Conf.on Decision and Control,volume 2,Brighton,UK,December 1991,pp. 1227-1232.

[6] Lu,W.M.,K.ZHOU and J.C.DOYLE. Stabilization of LFT systems[C].Proc. IEEE Conf. onDecision and Control,Brighton,UK,Dec.1991,pp. 1238-1244

作者简介:肖玺梁（1978- ），男，陕西华县人，工程师，硕士生，主要从事飞行控制技术研究。

(上接第49页)

[J].控制理论和应用,2005,22(1):123-126.

[9] I.MASUBUCHI,Y.KAMITANE,A.OHARA,N. SUDA.H_∞control for descriptor systems:a matrix inequalities approach [J].Automatica.1997,33(4):152-166.

[10] F.L.LEWIS.A survey of linear singular systems [J].Circuits,Syst.Signal Process,1986,5(1):3-36.

[11] KAWAJI S,HWAN S K.Observer design for linear descrptor systems with unknown-inputs [A].Proc of 34th IEEE Conf on Decision and Control [C].New Orleans, LA USA:IEEE Press,1995.2366-2368.

[12] Duan G R.On the solution to the sylvester matrix equation AX+BX=EVF [J].IEEE Trans on Automatic Control,1996,41(4):612-614.

作者简介:陈凌 （1982-）,男,厦门大学自动化系硕士研究生。研究方向:降阶H_∞控制,降阶H_∞滤波器。