

Un subconjunto de autómatas celulares con comportamiento complejo en dos dimensiones

Genaro Juárez Martínez*, Adriana Menchaca Méndez†
y Miriam Mecate Zambrano‡

Diciembre, 2005

Resumen

Modelos matemáticos con la capacidad de soportar comportamiento complejo han sido formulados y analizados a través de la historia de las matemáticas. Nosotros estudiamos un modelo discreto en dos dimensiones conocido como autómatas celulares. Dentro de estos sistemas dinámicos existen funciones que pueden soportar comportamiento complejo, como el famoso “Juego de la Vida.” En este artículo presentamos un nuevo subconjunto de reglas que soportan partículas y que llamamos *Life 2c22*. Además calculamos sus mutaciones con la capacidad de soportar comportamientos del tipo reacción-difusión a través de choques entre partículas.

Palabras clave: autómatas celulares, gliders, *Life 2c22*

1 Introducción

Autómata celular es un modelo matemático desarrollado por John von Neumann en los años 40 [12]. Desde los orígenes de autómatas celulares un problema fundamental es encontrar funciones que soporten comportamiento complejo, es decir, que con-

tengan elementos de un conjunto dado y al momento de transformarlos, ellos generan nueva información no predecible en conjuntos con un igual o mayor número de elementos. Consecuentemente, la complejidad espacial puede crecer drásticamente, ésta característica nos permite pensar en la simulación de complicados procesos biológicos, químicos, físicos o computacionales. En problemas como: crecimiento de epidemias, reacciones del tipo difusión, solitones o computación universal [1, 4, 11, 13] (por mencionar algunos).

El autómatas celulares más famoso es el conocido “Juego de la Vida” propuesto originalmente por el matemático John Horton Conway a finales de los 60’s y divulgado por Martin Gardner en su columna del *Scientific American* [6], despertando el interés de varios investigadores. El resultado más trascendente fue la implementación de compuertas lógicas para construir una máquina de registros (equivalente Turing), a través de una construcción de computación no convencional [1] y por lo tanto demostrar que el Juego de la Vida es computacionalmente universal [9].

El autómatas celulares de Conway consta de un conjunto binario de estados, una función de transición que evalúa una célula central con respecto a la suma de sus ocho vecinos ortogonales y diagonales en un espacio Euclidiano. De esta manera, todo el espacio es actualizado simultáneamente en cada iteración.

En la parte superior de la figura 1 mostramos un estado inicial aleatorio en un espacio de 200×200 con una densidad de 0.5 que representa el espacio de evoluciones. En la parte inferior se muestra su

*Departamento de Programación y Desarrollo de Sistemas, Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional, México DF. <http://uncomp.uwe.ac.uk/genaro/>

†Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional, México DF. adriana.menchacamendez@gmail.com

‡Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional, México DF. mihryam@yahoo.com.mx

evolución en 500 generaciones aplicando el Juego de la Vida. Debemos notar que los comportamientos generados son identificados por orbitas periódicas estables u oscilatorias, caóticas y complejas, donde las dos últimas son sensibles a condiciones iniciales o en el proceso de evaluación. En la figura 2 ilustramos varios patrones¹ importantes e interesantes descubiertos en el Juego de la Vida. Varios de ellos son utilizados para simular complicados procesos en una representación no convencional.

Particularmente, en el caso binario para funciones semi-totalísticas existen pocas reglas que intentan tener la misma capacidad, entre ellas podemos mencionar: HighLife y Life 1133.² Nuestra contribución en el área, es con un subconjunto de funciones que llamamos “Life 2c22” (donde c toma valores entre 2 y 8) con la capacidad de soportar gliders (estructuras periódicas desplazándose en el espacio de evoluciones) conocidas también como partículas o localidades móviles auto-localizadas, y por lo tanto tener la capacidad de producir comportamientos complejos. El parámetro c permite analizar las diferentes mutaciones de nuestro subconjunto [14].

2 Subconjunto de reglas soportando partículas

Un autómata celular es un sistema dinámico discreto evolucionando en el tiempo en n -dimensión. Formalmente, decimos que un autómata celular es un 4-tupla:

$$\langle K, \varphi, \mathcal{V}, c_0 \rangle \quad (1)$$

donde K es un conjunto finito de estados, φ la función de transición $\varphi : K^{\mathcal{V}} \rightarrow K$, c_0 la configuración inicial del sistema y \mathcal{V} la vecindad isotrópica (los vecinos ortogonales y diagonales con respecto a una célula central $x_{i,j} \forall i, j \in \{-1, 0, 1\}$). La función local φ determina una función global: $\Phi : K^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \rightarrow K^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$,

¹Utilizamos la terminología definida en el Juego de la Vida que puede ser consultado desde <http://www.pentadecathlon.com/LifeInfo/LifeInfo.html>

²Tú puedes consultar las referencias completas de éstos y otros autómatas con comportamiento complejo desde <http://uncomp.uwe.ac.uk/genaro/otherRules.html>

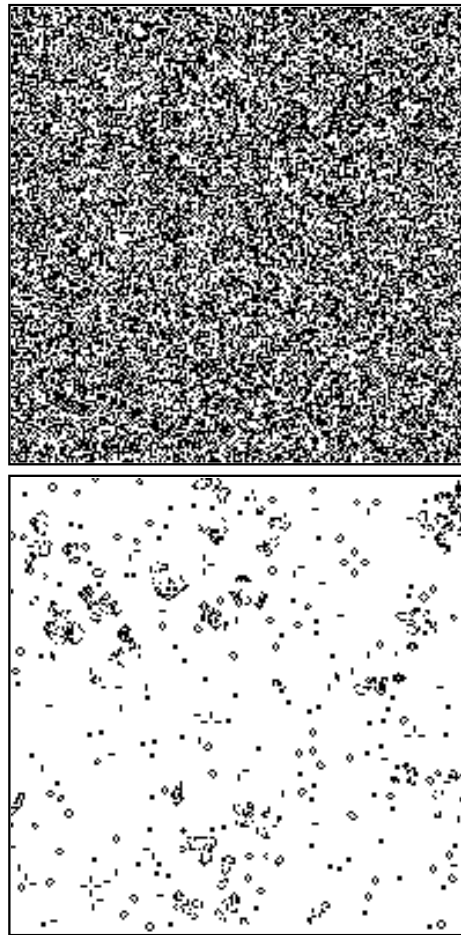


Figura 1: Evolución aleatoria en el Juego de la Vida.

que representa todas las funciones continuas de $K^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ a si mismo, por lo tanto, $c_0 \in K^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$.

Sea $K = \{0, 1\}$ el conjunto de estados, \mathcal{V} es la vecindad isotrópica que representa el número de células en la función, por lo tanto $\mathcal{V} = 8$ y \mathbf{x}_0 la célula central en estudio, donde $\mathbf{x}_0 = x_{i,j}$ y las células $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\mathcal{V}} = x_{i-1,j-1}, \dots, x_{i+1,j+1}$ son sus vecinos, para toda $\mathbf{x}_i \in K$.

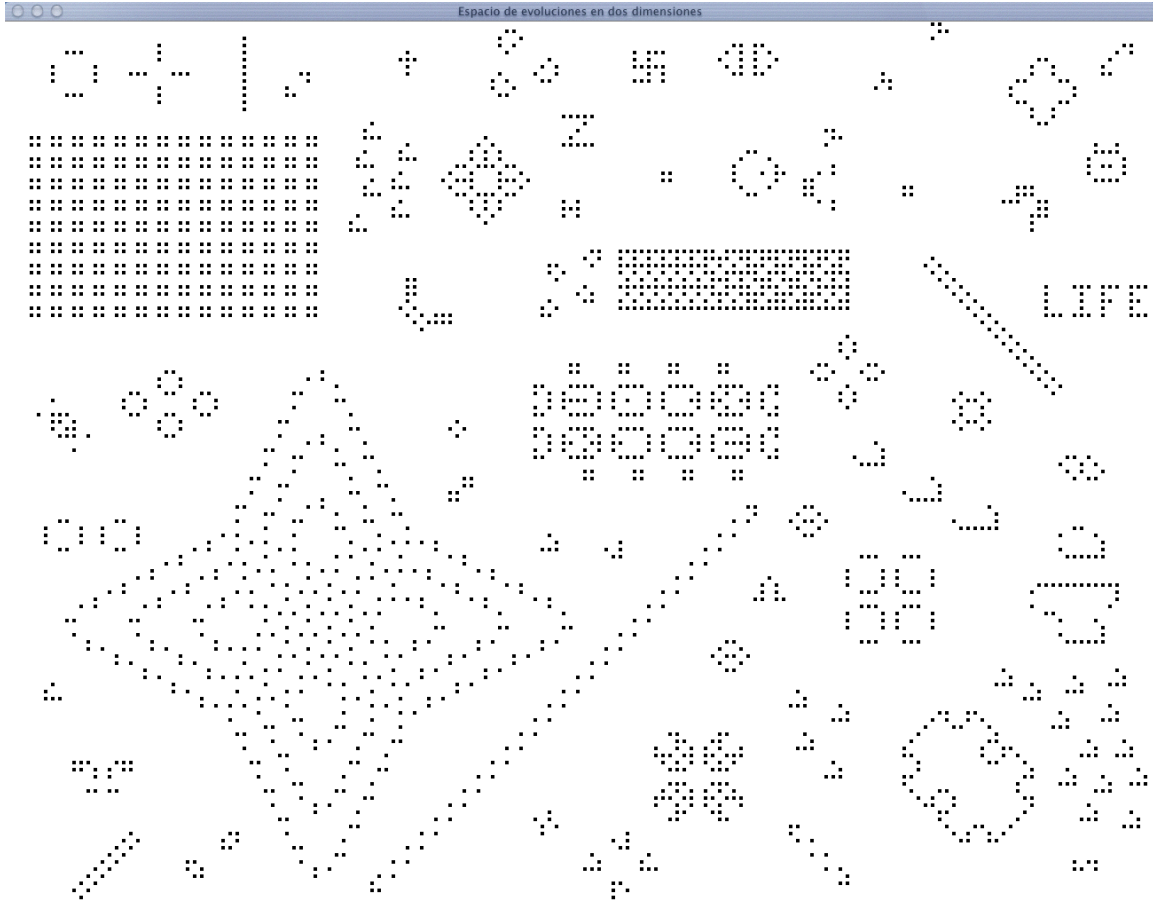


Figura 2: Diferentes estructuras en el Juego de la Vida tal como: gliders, blinkers, flip-flops, Jardín del Edén, eaters, still lifes y varios ciclos life son ilustrados.

$$\varphi = \begin{cases} 1 & \text{si} \begin{cases} \mathbf{x}_0 = 0 & \text{y} & B_{min} \leq \sum_{i=1}^{\mathcal{V}} \mathbf{x}_i \leq B_{max} \\ \mathbf{x}_0 = 1 & \text{y} & S_{min} \leq \sum_{i=1}^{\mathcal{V}} \mathbf{x}_i \leq S_{max} \end{cases} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2)$$

En la Ecuación 2 la función φ define la transformación local. Las variables B_{min} y S_{min} indican el número mínimo de células ocupadas por el estado 1 en \mathcal{V} y las variables B_{max} y S_{max} el número máximo

de células ocupadas por el estado 1 en \mathcal{V} , ambos en un tiempo t . Si $\mathbf{x}_0 = 0$ en el tiempo t , entonces $\mathbf{x}_0 = 1$ en el tiempo $t + 1$ si $B_{min} \leq \sum_{i=1}^{\mathcal{V}} \mathbf{x}_i \leq B_{max}$. Si $\mathbf{x}_0 = 1$ en el tiempo t , entonces $\mathbf{x}_0 = 1$ en el tiempo $t + 1$ si $S_{min} \leq \sum_{i=1}^{\mathcal{V}} \mathbf{x}_i \leq S_{max}$, y 0 en cualquier otro caso.

Finalmente, una regla de evolución semi-totalística en dos dimensiones se representa como: $R(S_{min}, S_{max}, B_{min}, B_{max})$,³ donde $1 \leq B \leq S \leq 8$.

³ B significa nacimiento y S sobrevivencia de una célula $x_{i,j}$ (otra representación comunmente utilizada es S/B, por ejemplo el Juego de la Vida se representa como S23/B3 ó $R(2333)$). La referencia de células vivas (estado 1) y células muertas (estado

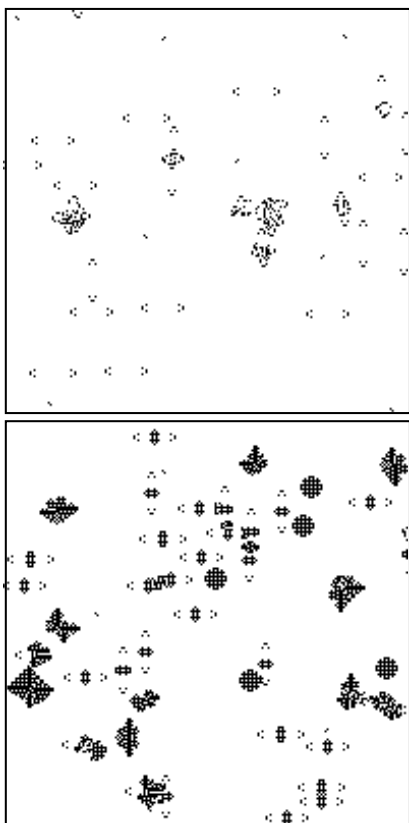


Figura 3: Comportamientos en Life $2c22$ desde condiciones iniciales aleatorias con una densidad inicial con $c_0 = 0.01$ hasta 10 generaciones, para Life 2222 y 2822 respectivamente.

De esta manera, Life $2c22$ representa el subconjunto de reglas de evolución semi-totalísticas $\{R(2222), \dots, R(2822)\}$ (todas sus mutaciones posibles). En la figura 3 ilustramos la distribución de estados cuando asignamos una densidad inicial con $c_0 = 0.01$ y aplicamos Life 2222 y Life 2822 hasta 10 generaciones respectivamente. En este momento podemos identificar el tipo de estructuras que surgen. Una búsqueda sistemática nos permite enumerar to-

0) se origina a partir del autómatata de Conway [6] y de manera indirecta era referenciado como los orígenes de vida artificial en los primeros resultados obtenidos por von Neumann [12].

das las estructuras de Life $2c22$ [3]. En la figura 4 ilustramos una estructura con desplazamiento y otra estacionaria oscilando.

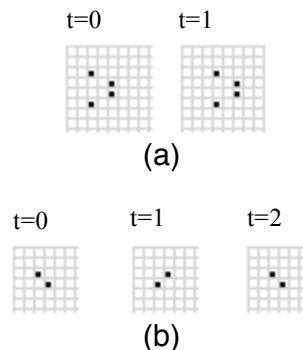


Figura 4: Dos tipos de partículas en Life $2c22$: (a) glider de período uno y (b) flip-flop de período dos.

2.1 Reacciones producidas por choques entre partículas en Life $2c22$

Una vez determinada la existencia de gliders, blinkers y puffer trains en Life $2c22$, entonces podemos realizar choques entre ellos, para encontrar objetos interesantes que nos permitan implementar algún proceso en particular, tal como, la formación de patrones, simulación de reacciones químicas, vida artificial o la implementación de operaciones lógicas [2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13].

En la figura 5 presentamos cual es el resultado cuando dos gliders a 180 grados chocan viajando sobre el eje horizontal en una distancia par. La morfología es producida por una reacción-difusión, donde podemos tener difusiones simétricas dentro del espacio de evoluciones, pero esto es originado porque los gliders se encontraban en la misma fase. Cuando las fases cambian y variamos las distancias o grupos de ellos se producen comportamientos totalmente asimétricos.⁴

⁴Todos los choques binarios entre gliders a 90 y 180 grados y otras reacciones son disponibles desde http://uncomp.uwe.ac.uk/genaro/diffusionLife/life_2c22.html





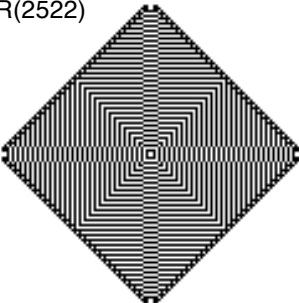
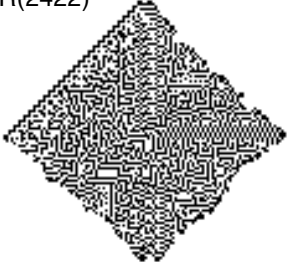
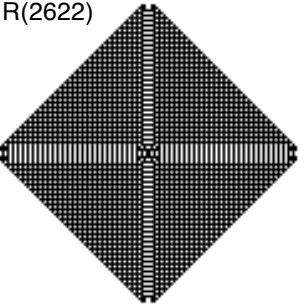
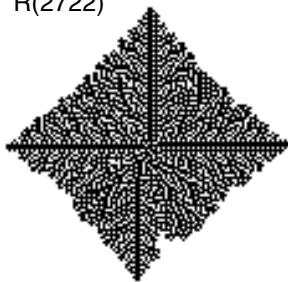
	
R(2222) 	R(2322) 
R(2522) 	R(2422) 
R(2622) 	R(2722) 

Figura 5: Choques entre dos gliders a 180 grados y distancia par hasta 60 generaciones son presentados en la primera columna (Life 2822 no es calculado porque produce los mismos resultados que Life 2722 [3]). Choques entre un blinker contra un glider a 180 grados con distancia impar son presentados en la segunda columna.

Varios resultados importantes son obtenidos en el estudio sistemático de choques entre partículas, primero la generación de una amplia familia de comportamientos del tipo reacción-difusión y otra es la generación de las mismas partículas a través de choques (debe ser cerrado con respecto al conjunto de sus propias estructuras) [3].

3 Discusión

Debemos señalar que aunque Life 2c22 no tiene una amplia variedad de estructuras como el Juego de la Vida, es interesante que sus estructuras existen en un amplio rango de reglas. Además de que el choque entre sus partículas nos permite encontrar los mismos elementos o la construcción de una amplia familia de patrones del tipo reacción-difusión, como se tiene reportado en [3].

Varios problemas continúan abiertos, como es, determinar el conjunto completo de partículas, demostrar que todas las partículas pueden ser construidas desde las demás (propiedad de cerradura) e implementar un proceso sincronizando varias reacciones de manera serial o simultáneamente. Una investigación en proceso es determinar sus propiedades probabilísticas con la teoría del campo promedio y determinar todas las estructuras de período uno con los diagramas de de Bruijn.

Además, Life 2c22 a su vez es un subconjunto de una regla más general y compleja. Por lo tanto, sus datos pueden ser direccionados a un autómata celular de mayor complejidad.⁵ Finalmente, todos estos subconjuntos forman parte de la clase \mathbf{G} establecida en dos dimensiones [3] para reglas de evolución con capacidad de soportar comportamiento complejo.

Agradecimientos

En especial a Harold V. McIntosh y al Departamento de Aplicación de Microcomputadoras de la UAP.

⁵<http://uncomp.uwe.ac.uk/genaro/diffusionLife.html>

Referencias

- [1] Andrew Adamatzky, *Computing in Nonlinear Media and Automata Collectives*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2001. (ISBN 0-7503-0751-X)
- [2] Andrew Adamatzky (Ed.), *Collision-Based Computing*, Springer, 2002. (ISBN 1-85233-540-8)
- [3] Andrew Adamatzky, Genaro J. Martínez and Juan C. Seck Tuoh Mora, “Phenomenology of reaction-diffusion binary-state cellular automata,” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **16(10)** 1–21, 2006.
- [4] Yaneer Bar-Yam, *Dynamics of Complex Systems*, Perseus Books, 1997. (ISBN 0-201-55748-7)
- [5] Matthew Cook, “Still Life Theory,” in *New Constructions in Cellular Automata* p. 93, (Santa Fe Institute Studies on the Sciences of Complexity) Oxford University Press, 2003. (ISBN 0-1951-3717-5)
- [6] Martin Gardner, “Mathematical Games - The fantastic combinations of John H. Conway’s new solitaire game Life,” *Scientific American* **223** 120–123, 1970.
- [7] Genaro J. Martínez, Andrew Adamatzky and Harold V. McIntosh, “Phenomenology of glider collisions in cellular automaton Rule 54 and associated logical gates,” *Chaos, Fractals and Solitons* **28** 100–111, 2006.
- [8] Genaro J. Martínez, Harold V. McIntosh and Juan C. Seck Tuoh Mora, “Gliders in Rule 110,” *International Journal of Unconventional Computing* **2(1)** 1–49, 2006.
- [9] Marvin Minsky, *Computation: Finite and Infinite Machines*, Prentice Hall, 1967.
- [10] Norman H. Packard and Stephen Wolfram, “Two-Dimensional Cellular Automata,” *Journal of Statistical Physics* **38** 901–946, 1985.

- [11] Tommaso Toffoli and Norman Margolus, *Cellular Automata Machines*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1987.
- [12] John von Neumann, *Theory of Self-reproducing Automata* (edited and completed by A. W. Burks), University of Illinois Press, Urbana and London 1966.
- [13] Stephen Wolfram, *A New Kind of Science*, Wolfram Media, Inc., Champaign, Illinois, 2002. (ISBN 1-57955-008-8)
- [14] Andrew Wuensche, “Classifying Cellular Automata Automatically,” *Complexity* **4(3)** 47–66, 1999.