RIMÁN JÁNOS

SPECIÁLIS POLINOMOK IRREDUCIBILITÁSÁRÓL

ABSTRACT: (On the Irreducibhility of Special Polynomials) In this paper we generalize or improve some earlier irreducibility theorems. We prove the following theorem. *Let $f, g \in Z[x]$ be polynomials,*

$$f(x) := \prod_{i=1}^{m} (x - a_i) \text{ and } g(x) := c_1 x + c_0,$$

*where $m \geq 2$ a is natural number, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ are distinct integers, c_0, c_1 are nonzero integers. The polynomial $g \circ f$ is irreducible over the field of rational numbers **Q** if at least one of the inequalities*

$$|c_1| > 2^m g^2(0) + 1, \qquad \max_{1 \leq i,j \leq m} |a_i - a_j| > \lambda(g(0), m)$$

is satisfied. (The definition of $\lambda(g(0), m)$ is in the paper.)

Dolgozatunkban **R, Q, Z, N** rendre a valós, a racionális, az egész és a természetes számok halmazát, továbbá $Z[x]$ az egész együtthatós polinomok gyűrűjét jelöli. Egy f polinom fokszámának jelölésére a $\deg f$ szimbólumot használjuk. Megjegyezzük még, hogy a dolgozatban a polinomokat valós függvényeknek tekintjük, és ezért az analízisben szokásos jelöléseket alkalmazzuk.

I. **Schur** [7] problémafelvetése nyomán számos dolgozatban vizsgálták olyan $g \circ f$ alakú polinomok irreducibilását, ahol $g \in \mathbb{Z}[x]$ egy (szükségképpen) **Q** felett irreducibilis polinom, míg $f \in \mathbb{Z}[x]$ $l > \frac{\deg f}{2}$ számú különböző egész zérushellyel rendelkező polinom.

Győry Kálmán és a szerző a [2] dolgozatban több korábbi eredményt javított, illetve általánosított a $\deg g = 1$ esetben. Cikkünkben tovább javítjuk ezeket az eredményeket $l = \deg f$ esetén.

Vezessük be a következő jelöléseket. Legyen $m \geq 2$ természetes szám, $g(0) \neq 0$ egész szám (a szóbanforgó g polinom konstans tagja), $N := \left[\frac{m+1}{2}\right]$,

$$k := k(m) := \left(2^{1-N}\,\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{m}{2}\right]\left(\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{m}{2}\right]+1\right)\cdots\left(\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{m}{2}\right]+N-1\right)\right)^{\frac{1}{2}},$$

továbbá

$$\lambda(g(0),m) = \begin{cases} |g(0)|+1, & ha \quad m = 2,3, \\ |g(0)|+2, & ha \quad m = 4, \\ |g(0)|, & ha \quad 5 \leq m \leq 8, \\ \frac{4(|g(0)|+2[k]-2)}{m-4}, & ha \quad 9 \leq m \leq 11, \\ \frac{|g(0)|}{2} + [k], & ha \quad m \geq 12. \end{cases}$$

Tételünk bizonyításához az alábbi *lemmákra* lesz szükségünk.

1. LEMMA. (R. J. Levit) *Legyen* $f, g \in \mathbb{Z}[x]$,

$$f(x) := \prod_{i=1}^{m} (x - a_i) \quad \textit{és} \quad g(x) := c_1 x + c_0,$$

ahol c_0, c_1 *nullától különböző egészek és az* a_i*-k különböző egész számok. Ha* $|g(0)| < k^2(m)$, *akkor* $g \circ f$ *irreducibilis* **Q** *felett.*

BIZONYÍTÁS. Az állítás közvetlenül adódik a [4]-ben szereplő 2. Tételből.

2. LEMMA. (L. Weisner) *Ha f és g az 1. Lemmában szereplő polinomok és*

$$|c_1| > 2^m g^2(0) + 1$$

vagy

$$\max_{1 \le i,j \le m} |a_i - a_j| > (3 + \lambda(m))|g(0)|,$$

ahol $\lambda(2) = \lambda(6) = 1$, $\lambda(3) = 4$, $\lambda(4) = 6$, $\lambda(5) = 3$ *és* $\lambda(m) = 0$, *ha* $m \ge 7$, *úgy* $g \circ f$ *irreducibilis* **Q** *felett, és az első egyenlőtlenségben g(0) nagyságrendje már nem javítható.*

BIZONYÍTÁS. Lásd a [10] dolgozatot.

3. LEMMA. *Ha f és g előző lemmákban szereplő polinomok és*

$$|c_1| > 2^m g^2(0) + 1 \quad \textit{vagy} \quad \max_{1 \le i,j \le m} |a_i - a_j| > \lambda^*(g(0), m)$$

ahol

$$\lambda^*(g(0), m) = \begin{cases} |g(0)| + 1, & \textit{ha} \quad m = 2,3, \\ |g(0)| + 2, & \textit{ha} \quad m = 4, \\ |g(0)|, & \textit{ha} \quad 5 \le m \le 16, \\ \frac{2}{3}|g(0)| + \left(8 - \frac{m}{2}\right), & \textit{ha} \quad m \ge 17, \end{cases}$$

akkor $g \circ f$ irreducibilis **Q** *felett.*

BIZONYÍTÁS. Lásd a [2] dolgozatban.

TÉTEL. *Legyen* $f, g \in \mathbf{Z}[x]$,

$$f(x) := \prod_{i=1}^{m}(x - a_i) \text{ és } g(x) := c_1 x + c_0,$$

ahol c_0, c_1 *nullától különböző egészek és az* a_1 *különböző egész számok. Ha*

$$|c_1| > 2^m g^2(0) + 1 \quad \text{vagy} \max_{1 \le i, j \le m} |a_i - a_j| > \lambda(g(0), m),$$

akkor $g \circ f$ irreducibilis **Q** *felett.*

BIZONYÍTÁS. Az $m \le 8$ esetek bizonyítása megtalálható a [2] dolgozatban. (Ezzel kapcsolatban megjegyezzük, hogy a szerző doktori disszertációjában több helyen lényegesen egyszerűsítette a bizonyítást.)

Legyen $m \ge 9$. A 1. Lemma miatt elgendő a

$$\max_{1 \le i, j \le m} |a_i - a_j| > \lambda(g(0), m)$$

feltétel mellett bebizonyítanunk a tételben szereplő $g \circ f$ polinom **Q** feletti ireducibilitását.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az a_i számok $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$ módon vannak elrendezve, és így $\max_{1 \le i, j \le m} |a_i - a_j| = a_m - a_1$. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $g \circ f = f_1 f_2$, azaz

$$(g \circ f)(x) = c_1 \prod_{i=1}^{m}(x - a_i) + c_0 = f_1(x) f_2(x)$$

minden $x \in \mathrm{R}$ esetén. Ekkor $f_1(a_i)f_2(a_i) = g(0)$ minden i-re, tehát $f_1(a_i) \mid g(0)$ és $f_2(a_i) \mid g(0)$.

Az 1. Lemma miatt azt is feltehetjük, hogy $|g(0)| \geq k^2(m)$, ahol

$$k := k(m) := \left(2^{1-N} \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{m}{2}\right]\left(\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{m}{2}\right]+1\right)\cdots\left(\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{m}{2}\right]+N-1\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

és itt $N := \left[\dfrac{m+1}{2}\right]$. Mivel $k^2(9) = 45$ és $k^2(m+1) \geq k^2(m)$ minden m természetes számra, így a továbbiakban mindig feltesszük, hogy $|g(0)| \geq 45$.

(I) Legyen először f_1-re vagy f_2-re, például f_1-re

$$[k] \leq |f_1(a_1)|, |f_1(a_m)|.$$

Ekkor

$$|f_1(a_1)|, |f_1(a_m)| \leq \frac{|g(0)|}{[k]}$$

és a fenti egyenlőtlenségek teljesülnek f_2-re is. Ha

$$\lambda_1 < a_m - a_1 \mid |f_1(a_m) - f_1(a_1)| \leq \frac{2|g(0)|}{[k]},$$

akkor

(1) $$\lambda_1 := \frac{2|g(0)|}{[k]}$$

esetén $f_1(a_1) = f_1(a_m)$, és így $f_2(a_1) = f_2(a_m)$. Mivel minden $1 < i < m$ természetes számra $|f_1(a_i)| \leq \sqrt{|g(0)|}$ vagy

$|f_2(a_i)| \leq \sqrt{|g(0)|}$,

és az $[a_1, a_m]$ intervallum, „közepén" legfeljebb $\left[\frac{m}{2}-1\right]$ számú a_i kivételével

$$\frac{\lambda_2}{2} + \frac{\frac{m}{2}-2}{2} < \frac{a_m - a_1}{2} + \frac{m-4}{4} \leq a_m - a_i$$

vagy

$$\frac{\lambda_2}{2}+\frac{\frac{m}{2}-2}{2}<\frac{a_m-a_1}{2}+\frac{m-4}{4}\le a_i-a_1.$$

Például mindkét esetben az első lehetőséget választva

$$\frac{\lambda_2}{2}+\frac{m-4}{2}<a_m-a_i\mid |f_1(a_m)-f_1(a_i)|\le\frac{|g(0)|}{[k]}+\sqrt{|g(0)|},$$

amiből

(2) $$\lambda_2:=\frac{2|g(0)|}{[k]}+2\sqrt{|g(0)|}-\frac{m-4}{2}$$

esetén $f_1(a_i)=f_1(a_m)=f_1(a_1)$, és ezért $f_2(a_i)=f_2(a_m)=f_2(a_1)$, azaz f_1 és f_2 is azonos értéket vesz fel legalább $m-\left[\frac{m}{2}-1\right]>\frac{m}{2}$ számú különböző helyen, ami például $\deg f_1\le\frac{m}{2}$ miatt ellentmondás.

(II) Ezután tegyük fel, hogy f_1-nek és f_2-nek az a_1, a_m helyeken felvett értékei közül legalább egy abszolút értékben kisebb, mint $[k]$. Legyen például $|f_1(a_1)|<[k]$.

(i) Ha $|f_1(a_m)|\ne|g(0)|$, akkor $|f_1(a_m)|\le\frac{|g(0)|}{2}$, és így

$$\lambda_3<a_m-a_1\mid |f_1(a_m)-f_1(a_1)|\le\frac{|g(0)|}{2}+[k],$$

amiből

(3) $$\lambda_3:=\frac{|g(0)|}{2}+[k]$$

esetén $f_1(a_1)=f_1(a_m)$, és ezért $f_2(a_1)=f_2(a_m)$. Ha $\deg f_1=1$ vagy $\deg f_2=1$, akkor ez ellentmondás. Ha pedig $\deg f_1\ge 2$ és $\deg f_2\ge 2$, akkor léteznek olyan $f_1^*, f_2^*\in \mathbb{Z}[x]$ polinomok, amelyekkel

$$f_1(x)=(x-a_1)(x-a_m)f_1^*(x)+b_1$$

és

$$f_2(x)=(x-a_1)(x-a_m)f_2^*(x)+\frac{g(0)}{b_1}$$

minden x valós számra, ahol $b_1 \in \mathbf{Z}$ és $0 < b_1 < [k]$. Legyen $s := \left[\frac{m}{4} + 1\right]$. Ekkor bármely $s \le i \le m - s + 1$ esetén

$$a_m - a_i \ge \frac{a_m - a_1}{2} \quad \text{vagy} \quad a_i - a_1 \ge \frac{a_m - a_1}{2}$$

és mindkét különbség nagyobb vagy egyenlő, mint $s-1$. Válasszuk például az első lehetőséget. Ha $|f_1(a_i)| \ne |g(0)|$ és $f_1^*(a_i) \ne 0$, akkor

$$\frac{|g(0)|}{2} + [k] - 1 \ge |f_1(a_i) - b_1| \ge |a_i - a_1||a_i - a_m| \ge (a_i - a_1)\frac{a_m - a_1}{2} \ge$$

$$\ge (s-1)\frac{a_m - a_1}{2} = \left[\frac{m}{4} + 1\right]\frac{a_m - a_1}{2} > \frac{m-4}{8}\lambda_4,$$

ami

(4) $$\lambda_4 := \frac{4(|g(0)| + 2[k] - 2)}{m-4}$$

mellett nem lehetséges. Azaz $f_1^*(a_i) = 0$, és így $f_1(a_i) = b_1$, amiből $f_2^*(a_i) = 0$ és $f_2(a_i) = \frac{g(0)}{b_1}$ következik. Ha pedig $|f_1(a_i)| = |g(0)|$, akkor $f_2(a_i) = 1$, és ezért

$$\frac{\lambda_5}{2} < \frac{a_m - a_1}{2} \le a_m - a_i \mid |f_2(a_m) - f_2(a_i)| \le [k],$$

amiből

(5) $$\lambda_5 := 2[k]$$

esetén $f_2(a_i) = f_2(a_m) = \frac{g(0)}{b_1}$, és így $f_1(a_i) = f_1(a_m) = b_1$, továbbá $f_1^*(a_i) = 0$ és $f_2^*(a_i) = 0$. Tehát f_1^*-nak és f_2^*-nak legalább $m - 2(s-1)$ számú a_i zérushelye van, és ezért f_1 és f_2 is legalább $m - 2s + 4$ különböző helyen b_1, illetve $\frac{g(0)}{b_1}$ értéket vesz fel, ami $m - 2s + 4 > \frac{m}{2}$ és például $\deg f_2 \le \frac{m}{2}$ miatt ellentmondás.

(ii) Ha $|f_1(a_m)|=|g(0)|$, akkor $|f_2(a_m)|=1$. Ismét két esetet különböztetünk meg.

Ha $2 \le |f_1(a_1)| < [k]$, akkor

$$\frac{|g(0)|}{[k]} < |f_2(a_1)| \le \frac{|g(0)|}{2},$$

és így

$$\lambda_6 < a_m - a_1 \mid |f_2(a_m) - f_2(a_1)| \le \frac{|g(0)|}{2} + 1,,$$

amiből

(6) $$\lambda_6 := \frac{|g(0)|}{2} + 1$$

esetén $f_2(a_1) = f_2(a_m)$, és ez $|f_2(a_m)|=1$ miatt ellentmondás.

Ha $|f_1(a_1)|=1$, akkor $|f_2(a_1)|=|g(0)|$. Létezik legalább egy olyan a_i, amelyre

$$a_i - a_1 \ge \frac{a_m - a_1}{2} \quad \text{vagy} \quad a_m - a_i \ge \frac{a_m - a_1}{2},$$

és mindkét különbség nagyobb vagy egyenlő, mint $\left[\frac{m+1}{2}\right] - 1$. Válasszuk például a második lehetőséget. Ha

$$|f_2(a_i)| \le \frac{|g(0)|}{\left[\frac{m+1}{2}\right] - 2}$$

akkor

$$\frac{\lambda_7}{2} < \frac{a_m - a_1}{2} \le a_m - a_i \mid |f_2(a_m) - f_2(a_i)| \le \frac{|g(0)|}{\left[\frac{m+1}{2}\right] - 2} + 1,$$

amiből

(7) $$\lambda_7 := \frac{2|g(0)|}{\left[\frac{m+1}{2}\right] - 2} + 2$$

esetén $f_2(a_i) = f_2(a_m)$ és ezért $f_1(a_i) = f_1(a_m)$ következik. Ha $\deg f_2 = 1$, akkor ez ellentmondás. Ha pedig $\deg f_2 \ge 2$, akkor létezik olyan $f_2^{**} \in Z[x]$ polinom és b_2 egész szám, amelyekkel

$$f_2(x) = (x - a_m)(x - a_i) f_2^{**}(x) + b_2$$

minden $x \in \mathbf{R}$ számra, továbbá $|b_2| = 1$. Mivel $f_2^{**}(a_1) \neq 0$, így

$$|g(0)| + 1 \geq |f_2(a_1) - b_2| \geq |a_m - a_1||a_1 - a_i| > \lambda_8\left(\left[\frac{m+1}{2}\right] - 1\right),$$

ami

(8) $$\lambda_8 := \frac{|g(0)| + 1}{\left[\frac{m+1}{2}\right] - 1}$$

mellet nem lehetséges. Ha a fenti a_i-re

$$|f_2(a_i)| > \frac{|g(0)|}{\left[\frac{m+1}{2}\right] - 2}, \quad \text{akkor} \quad |f_1(a_i)| \leq \left[\frac{m+1}{2}\right] - 3,$$

és így

$$\left[\frac{m+1}{2}\right] - 1 \leq a_i - a_1 \mid |f_1(a_i) - f_1(a_1)| \leq \left[\frac{m+1}{2}\right] - 2,$$

amiből $f_1(a_i) = f_1(a_1)$, és ezért $f_2(a_i) = f_2(a_1)$ következik. Ha $\deg f_1 = 1$, akkor ez ellentmondás. Ha $\deg f_1 \geq 2$, akkor létezik olyan $f_1^{**} \in Z[x]$ polinom és b_3 egész szám, amelyekkel

$$f_1(x) = (x - a_1)(x - a_i) f_1^{**}(x) + b_3$$

minden $x \in \mathbf{R}$ számra, továbbá $|b_3| = 1$. Ekkor $|f_1(a_m)| = |g(0)|$ miatt $f_1^{**}(a_m) \neq 0$, így

$$|g(0)| + 1 \geq |f_1(a_m) - b_3| \geq |a_m - a_1||a_m - a_i| > \lambda_9\left(\left[\frac{m+1}{2}\right] - 1\right),$$

amiből $\lambda_9 = \lambda_8$ választással ismét ellentmondásra jutunk.

Végül legyen

$$\lambda(g(0), m) := \max_{1 \leq i \leq 9}\{\lambda_i\} \quad \text{és} \quad \max_{1 \leq i \leq 9}|a_1 - a_j| = a_m - a_1 > \lambda(g(0), m).$$

A $\lambda(g(0),m)$ ilyen választása mellett minden esetben ellentmondásra jutunk, tehát $g\circ f$ falóban irreducibilis **Q** felett.

Hátra van a $\lambda(g(0),m)$ értékének meghatározása. Felhasználva, hogy $m\geq 9$, $|g(0)|\geq 45$ és $[k]\geq 6$, az (1)—(8) egyenlőségekből egyszerű számolással adódik, hogy

$$\lambda(g(0),m)=\lambda_4:=\frac{4\left(|g(0)+2[k]-2\right)}{m-4},\quad \text{ha } 9\leq m\leq 11$$

és

$$\lambda(g(0),m)=\lambda_3:=\frac{|g(0)|}{2}+[k],\quad \text{ha } m\geq 12.$$

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

IRODALOM

[1] H. L. DORWART and O. ORE, *Criteria for the irreducibility of polynomials, Annals of Math.,* **34** (1933), 81–94.

[2] GYŐRY K. és RIMÁN J., *Schur-típusú irreducibilitási tételekről,* Matematikai Lapok, **24** (1973), 225–273.

[3] H. KLEIMAN, *Irreducibility criteria,* J. London Math. Soc., **5** (1972), 133–138.

[4] R. J. LEVIT, *Irreducibility of polinomyals with low absolute values,* Trans. Amer. Math. Soc., **132** (1968), 297–305.

[5] E. L. PETTERSON, *Einigen aus den Grössenbeziehungen der Wurzeln abgeleitete Irreduzibilitätskriterien,* Math. Annalen, **114** (1937), 79–83.

[6] G. PÓLYA, *Verschiedene Bemerkungen zur Zahlentheorie,* Jahresber. Deutsch. Math. Ver., **28** (1919), 31–40.

[7] I. SCHUR, *Aufgabe 275 und 279,* Archiv der Math. und Physik, **15** (1909).

[8] T. TATUZAWA, *Über die Irreduzibilität gewisser ganzzahliger Polynome,* Proc. Imp. Acad. Tokyo, **15** (1939), 253–254.

[9] H. TVERBERG, *On the irreducibility of polinomials taking small values,* Math. Scand., **32** (1973), 5–21.

[10] L. WEISNER, *Irreducibility of polynomials of degree n which assume the same value n times,* Bull. Amer. Math. Soc., **41** (1935), 248–252.