УДК 519.95

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЯЕМЫХ СЕТЕЙ ПОСТАВОК С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЙ ПОТОКОВ

Ю.И. ДОРОФЕЕВ, А.А. НИКУЛЬЧЕНКО

Рассмотрена задача построения математических моделей управляемых сетей поставок в условиях неопределенного внешнего спроса при наличии ограничений на состояния и управления, а также транспортных запаздываний. С помощью модели дискретной задержки получена дискретная модель сети поставок с запаздываниями управляемых потоков, на основе которой построена «расширенная» модель без запаздываний и «мгновенная» модель, у которой запаздывания равны нулю. Предложенный подход позволяет сформулировать задачу проверки условия существования и задачу формирования стратегии управления запасами в сетях поставок, которая гарантирует полное и своевременное удовлетворение внешнего спроса, как задачи линейного программирования. Первая из них решается в режиме off-line до начала процесса управления, а вторая — в режиме on-line для каждого дискретного момента времени. В качестве примера рассмотрена задача анализа и синтеза стратегии управления запасами для трехуровневой сети поставок, содержащей пять узлов.

ВВЕДЕНИЕ

Объектом исследования является система, которая представляет собой совокупность взаимосвязанных объектов, осуществляющих добычу сырья, производство, хранение, транспортировку и распространение некоторого набора продукции. Предполагая производительности производственных узлов системы ненулевыми и учитывая, что уровни запаса ресурсов в узлах хранения изменяются с течением времени под воздействием внешнего спроса, получаем динамическую сетевую модель, которая имеет множество практических приложений, включая производственные системы, коммуникационные сети, системы распределения ресурсов (воды, электроэнергии и т.п.), транспортно-складские системы и т.д.

Одной из важнейших задач для систем рассматриваемого класса является построение системы управления запасами. Создание запасов необходимо для полного и своевременного удовлетворения спроса со стороны внешних потребителей, но связано с издержками вследствие необходимости создания складов и наличия затрат на хранение ресурсов. В результате возникает необходимость в разработке методов математического моделирования управляемых систем производства-хранения-распределения ресурсов с целью их анализа и построения оптимальных стратегий управления запасами.

Существуют различные типы топологии рассматриваемых систем, которые определяются спецификой и размещением потребителей и складов. Если некоторые виды сырья или полуфабрикатов используются в нескольких процессах, проходящих одновременно, то система приобретает эшелонированную структуру, и, поскольку отношения местоположения отдельных узлов играют существенную роль с точки зрения анализа динамики всей системы, подобные системы называют распределенными сетями поставок.

Предполагается, что каждый узел сети поставок в реальном времени принимает заказы от узлов, являющихся потребителями его продукции, и формирует заказы узлам, которые являются для него поставщиками ресурсов. Узлы-продавцы конечной продукции принимают заказы непосредственно от внешних потребителей. В случае невозможности мгновенного выполнения заказа (то есть наличия дефицита) заказ считается отложенным и выполняется, как только это станет возможным. За отложенные заказы предусмотрены штрафы.

Для анализа сетей поставок используется понятие «потока». Формально, поток представляет деятельность, которая в единицу времени потребляет объемы ресурсов, пропорциональные μ_i, $i = \overline{1, n}$, полученные из n хранилищ (возможно перерабатывая их) и поставляет объемы продукции, пропорциональные ν_j, $j = \overline{1, m}$, в m хранилищ.

Стоит подчеркнуть, что никакие предположения не вводятся относительно природы деятельности, которая описывается потоком, безотносительно ее технологической или организационной сущности. Другими словами, поток обеспечивает представление в виде «черного ящика» любой производственной деятельности, и не требуют описания, каким образом такая деятельность выполняется. При этом «производственная деятельность» понимается в наиболее общем смысле, включая любой вид активности. Как частный случай, потоки могут представлять операции транспортировки, перемещающие ресурсы между различными узлами сети без изменения их физических свойств.

В состав модели могут также входить потоки, которые поступают от (или направлены к) внешней среды и представляют внешний спрос либо поставки конечной продукции заказчикам. При этом потоки могут быть двух типов: часть из них являются управляемыми, а часть зависит от внешних факторов и являются неуправляемыми. Например, спрос на готовую продукцию обычно зависит от внешних факторов, в то время как производственными и транспортными операциями можно управлять. По этой причине все потоки сети разделяются на два вектора: управляющие воздействия и внешний спрос. При этом единый термин «спрос» используется для обозначения любых видов деятельности, порождаемых внешней средой, — как фактических значений спроса на конечную продукцию, так и происходящих вследствие этого поставок и закупок.

Для графического представления сетей поставок используется ориентированный граф, вершины которого соответствуют узлам сети и предполагаются однономенклатурными. Дуги графа описывают управляемые и неуправляемые потоки в сети. Граф может быть разделен на уровни в зависимости от стадий переработки сырья и полуфабрикатов: первый уровень содержит узлы сети, которые являются продавцами конечной продукции, а любой уровень графа l содержит узлы, производящие либо сохраняющие ресурсы, которые используются для производства продукции уровнями строго меньше l, но не менее одного вида продукции уровня $(l-1)$.

Цель работы — построение математических моделей управляемых сетей поставок в условиях неопределенного внешнего спроса при наличии ограничений на состояния и управления, а также транспортных запаздываний, что является важнейшим этапом решения задачи их анализа и построения стратегии управления запасами, которая гарантирует полное и своевременное удовлетворение спроса со стороны внешних потребителей.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СЕТЕЙ ПОСТАВОК С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Для математического описания сетей поставок применяются различные подходы [1]. В данной работе предлагается подход, использующий «дискретно-событийные модели». Дискретность возникает вследствие того, что получение информации о спросе, а также подача управляющих воздействий на объект происходит в дискретные моменты времени, обычно кратные некоторому периоду. Поэтому при построении модели используются следующие предположения:

- выбирается период дискретизации по времени Δt и все временные интервалы считаются кратными выбранному периоду;
- время увеличивается пошагово, текущий момент времени обозначается $k = 0, 1, 2, \ldots$, в конце каждого периода времени состояние системы вычисляется с помощью уравнений модели;
- состояние системы характеризуется уровнем запасов каждого вида продукции в течение данного периода.

Несмотря на то, что в состав сети поставок входят узлы различного типа, все они могут рассматриваться как производственные узлы, которые выполняют какие-либо операции из следующего перечня: формирование заказов на поставку ресурсов, переработка полученных ресурсов, хранение готовой продукции, отправка продукции заказчикам. Для описания узлов введем следующие обозначения:

N — количество узлов сети поставок;

$\Pi = \{\pi_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, N}$ — производственная матрица, значение (i, j)-го элемента которой равно количеству продукции i, измеренному в единицах, которое требуется для производства единицы продукции j;

$T_{j,i}$ — целочисленная переменная, значение которой кратно периоду дискретизации Δt, обозначающая время транспортировки продукции из узла j в узел i;

LT_i — целочисленная переменная, значение которой кратно периоду дискретизации Δt, обозначающая время выполнения заказа в узле i;

$Cost_i$ — стоимость производства единицы продукции i, измеряемая в у.е.;

h_i — стоимость хранения единицы продукции i в течение периода времени Δt, измеряемая в у.е.;

War_i — максимально допустимая вместимость склада узла i, измеряемая в единицах;

Cap_i — максимальная производительность узла i в течение периода времени Δt, измеряемая в единицах.

Пополнение запасов всегда происходит с некоторым запаздыванием относительно момента выдачи требования. Запаздывания возникают вследствие затрат времени на транспортировку ресурсов между узлами сети, наличия технологических ограничений системы коммуникаций, затрат времени на обработку сырья и полуфабрикатов в узлах сети, наличия человеческого фактора.

Возможны следующие варианты моделей сетей поставок [2]:

- модель с мгновенными поставками;
- задержка поставок на фиксированный срок (кратный величине периода дискретизации Δt);
- случайная задержка с известным распределением длительности.

В настоящей работе предлагается использовать модель дискретной задержки, в которой величина запаздывания считается константой. Тогда для построения модели сети поставок вначале необходимо определить значения периодов запаздывания материальных потоков между каждой парой связанных узлов сети по формуле:

$$\Lambda_{j,i} = T_{j,i} + LT_i. \qquad (1)$$

Предполагается, что значения временных интервалов известны и не меняются в процессе функционирования сети. Затем вычисляется максимальный период запаздывания для каждого узла сети $\Lambda_i^{\max}$, $i = \overline{1,N}$, после чего определяется максимальное значение периода запаздывания для всей сети $\Lambda_{\max}$:

$$\Lambda_i^{\max} = \max_j \Lambda_{j,i}, \;\; \Lambda_{\max} = \max_i \Lambda_i^{\max}, \;\; i,j = \overline{1,N}. \qquad (2)$$

Тогда динамика сети поставок с запаздываниями управляемых потоков описывается следующим рекуррентным соотношением:

$$x(k+1) = x(k) + \sum_{t=0}^{\Lambda_{\max}} B_t u(k-t) + Ed(k), \qquad (3)$$

где $x(k) \in \mathbf{R}^N$ — вектор состояний системы, компонентами которого являются уровни запаса ресурсов $x_i(k)$, имеющихся в наличии в момент времени k, то есть такие, переработка которых к моменту времени k завершена и которые помещены в хранилища соответствующих узлов сети; $u(k) \in \mathbf{R}^m$ — вектор управляющих воздействий, компонентами которого являются объемы заявок на поставку ресурсов $u(k)$, которые формируются узлами сети в момент времени k; $d(k) \in \mathbf{R}^q$ — вектор внешних возмущений, компонентами которого являются размеры внешнего спроса на конечную продукцию, которые поступают в момент k на узлы первого уровня сети поставок; структура сети определяется структурой матриц влияния управляющих воздействий $B_t \in \mathbf{R}^{N\times q}$, $t = \overline{0,\Lambda_{max}}$ и матрицы влияния внешних возмущений $E \in \mathbf{R}^{N\times m}$.

Поясним на примере принцип формирования матриц B_t и E. Пусть управляемый поток u_n представляет процесс транспортировки и сборки, в результате которого из 10 единиц продукции i, время транспортировки которой равно $T_{i,n} = 2$ и 5 единиц продукции j, время транспортировки равно $T_{j,n} = 1$, получают 1 единицу продукции n, время выполнения заказа равно $LT_n = 1$. Тогда в соответствии с выражением (1), определяется максимальное значение периода запаздывания для узла n: $\Lambda_n^{\max} = \max\{\Lambda_{i,n} = T_{i,n} + LT_n = 3, \Lambda_{j,n} = T_{j,n} + LT_n = 2\} = 3$. На графе, изображающем модель сети, этот поток представляется гипердугой, соединяющей узлы сети i и j с узлом n (рис. 1). Значение времени транспортировки и количество единиц продукции, которое требуется в соответствии с технологическим процессом, указаны в круглых и квадратных скобках, соответственно. Возле узла n в круглых скобках указано значение времени выполнения заказа LT_n.

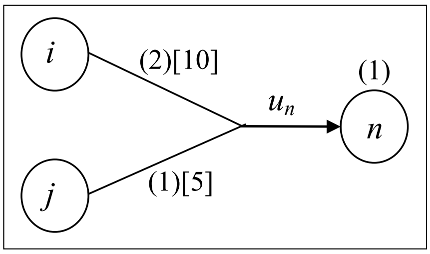

Рис. 1. Графическое представление потока

Тогда в матрицах управляющих воздействий B_t, $t = \overline{0,3}$ управляемый поток u_n будет представлен следующими ненулевыми элементами: $[B_0]_{in} = -10$, $[B_0]_{jn} = -5$, $[B_3]_{nn} = 1$.

Аналогично, неуправляемый поток d_p, представляющий внешний спрос на продукцию узла r, формирует столбец p матрицы внешних возмущений E, который содержит один ненулевой элемент $[E]_{rp} = -1$.

Учитывая физический смысл введенных переменных, должны выполняться следующие ограничения:

- переменные, описывающие уровни запаса ресурсов в узлах сети, а также управляемые и неуправляемые потоки должны быть неотрицательными;
- уровни запаса, имеющиеся в наличии, не должны превышать вместимость соответствующих складов;
- размеры заказов не должны превышать максимально возможные объемы транспортировок.

Указанные ограничения могут быть представлены в виде выпуклых многогранников в пространствах соответствующей размерности:

$$x(k) \in X = \{x \in \mathbf{R}^N \mid 0 \le x \le x^+\},$$

$$u(k) \in U = \{u \in \mathbf{R}^m \mid 0 \le u \le u^+\}, \qquad (4)$$

где векторы x^+ и u^+ считаются заданными.

Предположение о том, что нижние границы значений x и u равны нулю, не является ограничением общности. Действительно, если нижняя граница $x^- \ne 0$, то достаточно сдвинуть переменные состояний следующим образом $\hat{x} = x - x^{-}$, чтобы получить $0 \le \hat{x} \le x^{+} - x^{-}$. Если $u_j^{-} \ne 0$ для некоторых j, то необходимо установить $u_j = u_j^{-} + \hat{u}_j$, где $0 \le \hat{u}_j \le u_j^{+} - u_j^{-}$. Тогда компоненты u_j^{-} могут рассматриваться как дополнительные неуправляемые потоки с фиксированными значениями $d_{q+1}(k) = u_j^{-}$, для которых выполняется $d_{q+1}^{-} = d_{q+1}^{+}$.

Для определения оптимальной стратегии управления запасами необходимо точное задание характеристик внешнего спроса — интенсивности спроса в детерминированных моделях и вероятностных характеристик в стохастических моделях. Однако, при решении практических задач эти характеристики точно не известны. Поэтому используется подход, предложенный в работе [3], согласно которому предполагается, что сеть поставок функционирует в условиях неизвестного, но ограниченного спроса, который характеризуется интервальной неопределенностью. Это означает, что каждая компонента спроса принадлежит некоторому интервалу, границы которого определяются на основании изучения статистики продаж. Тогда к рассмотренным ограничениям добавляется следующее:

$$d(k) \in D = \{ d \in \mathbf{R}^q \,\big|\, d^{-} \le d \le d^{+} \}, \tag{5}$$

где векторы d^{-} и d^{+} определяют граничные значения спроса.

Таким образом, ограничения (4) и (5) выглядят похоже, хотя интерпретируются по-разному. Ограничения на состояния и управляемые потоки определяются физическими возможностями системы, а на неуправляемые потоки — неопределенностью внешнего спроса.

ПОСТРОЕНИЕ «РАСШИРЕННОЙ» И «МГНОВЕННОЙ» МОДЕЛЕЙ СЕТЕЙ ПОСТАВОК

Для построения модели сети поставок без запаздываний применяется техника расширения пространства состояний. В результате получим «расширенную» модель, уравнение динамики которой примет вид:

$$\xi(k+1) = A\xi(k) + Fu(k) + Gd(k), \tag{6}$$

где вектор состояний строится следующим образом:

$$\xi(k) = [x(k)^{\mathbf{T}}, u(k-1)^{\mathbf{T}}, u(k-2)^{\mathbf{T}}, \ldots, u(k - \Lambda_{max})^{\mathbf{T}}]^{\mathbf{T}}, \tag{7}$$

а матрицы модели имеют соответствующую блочную структуру:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{N\times N} & B_1 & B_2 & \ldots & B_{\Lambda_{\max}-1} & B_{\Lambda_{\max}} \\ [0]_{m\times N} & [0]_{m\times m} & [0]_{m\times m} & \ldots & [0]_{m\times m} & [0]_{m\times m} \\ [0]_{m\times N} & \mathbf{I}_{m\times m} & [0]_{m\times m} & \ldots & [0]_{m\times m} & [0]_{m\times m} \\ [0]_{m\times N} & [0]_{m\times m} & \mathbf{I}_{m\times m} & \ldots & [0]_{m\times m} & [0]_{m\times m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [0]_{m\times N} & [0]_{m\times m} & [0]_{m\times m} & \ldots & \mathbf{I}_{m\times m} & [0]_{m\times m} \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} B_0 \\ \mathbf{I}_{m\times m} \\ [0]_{m\times m} \\ [0]_{m\times m} \\ \dots \\ [0]_{m\times m} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} E \\ [0]_{m\times q} \\ [0]_{m\times q} \\ [0]_{m\times q} \\ \dots \\ [0]_{m\times q} \end{pmatrix}.$$

Использовать расширенную модель для анализа сложно из-за очень больших размерностей. Однако с помощью замены базиса ее можно свести к модели, вектор состояний которой имеет вид:

$$\hat{\xi}(k) = [z(k)^{\mathbf{T}}, u(k-1)^{\mathbf{T}}, u(k-2)^{\mathbf{T}}, \dots, u(k-\Lambda_{max})^{\mathbf{T}}]^{\mathbf{T}}, \qquad (8)$$

где переменные $z(k)$ называют фиктивными уровнями запаса и определяют как сумму уровня запаса ресурсов, находящихся в хранилищах, и ресурсов, которые находятся в процессе транспортировки между узлами сети:

$$z(k) = x(k) + \sum_{t=1}^{\Lambda_{\max}} \hat{B}_t u(k-t), \text{ где } \hat{B}_i = \sum_{t=i}^{\Lambda_{\max}} B_t, \; i = \overline{1, \Lambda_{\max}}. \qquad (9)$$

Полученная система с вектором состояний $\hat{\xi}(k)$ допускает декомпозицию на две подсистемы. Первая представляет собой «мгновенную» модель сети, у которой все запаздывания равны нулю, и описывается уравнением:

$$z(k+1) = z(k) + Bu(k) + Ed(k), \text{ где } B = \sum_{t=0}^{\Lambda_{\max}} B_t. \qquad (10)$$

Переменными состояния второй подсистемы являются управляющие воздействия с запаздываниями расширенной модели сети $u(k-t)$, $t = \overline{1, \Lambda_{\max}}$. При этом вторая подсистема является асимптотически устойчивой, поскольку ее матрица динамики является нильпотентной. Поэтому для анализа и синтеза стратегии управления запасами используется «мгновенная» модель распределенной сети поставок (10).

СИНТЕЗ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Задача синтеза системы управления запасами состоит в синтезе стратегии управления, которая определяет управляемые потоки сети в соответствии с поставленной целью управления и с учетом ограничений (4), (5).

Множество допустимых начальных условий определяется выражением:

$$X_0 = (\{x : -\delta^- \le x \le x^+ - \delta^+\} - BU) \cap \{x : 0 \le x \le x^+\}. \qquad (11)$$

При этом границы множества X допустимых значений вектора состояний трансформируются с учетом векторов δ^- и δ^+, которые вычисляются следующим образом:

$$\delta_i^- = \min_{d\in D} E_i d, \;\; \delta_i^+ = \max_{d\in D} E_i d, \qquad (12)$$

где E_i обозначает *i*–ю строку матрицы E.

Одним из главных вопросов, на которые необходимо дать ответ в процессе анализа, является следующий: существует ли для построенной модели сети поставок допустимая стратегия управления запасами, которая обеспечивает полное и своевременное удовлетворение внешнего спроса при заданных ограничениях.

В работе [3] доказана теорема, которая определяет необходимые и достаточные условия существования допустимой стратегии управления для систем рассматриваемого класса. Согласно этой теореме, допустимая стратегия управления существует, если и только если выполняется условие:

$$ED \subset -BU. \tag{13}$$

Условие (13) допускает следующую геометрическую интерпретацию: выпуклый многогранник, описывающий влияние внешнего спроса, должен находиться строго внутри выпуклого многогранника, описывающего влияние управляющих воздействий.

Условие (13) выполняется, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $ED + \varepsilon\Omega \subset -BU$, где $\Omega = \{x : 0 \le x \le x^+ - (\delta^+ - \delta^-)\}$. Множество $ED + \varepsilon\Omega$ представляет собой множество векторов, которые могут быть представлены в виде $x = [E \quad \mathbf{I}]\begin{bmatrix} d \\ \varepsilon\omega \end{bmatrix}$, где $d \in D$, $\omega \in \Omega$. Тогда множество $ED + \varepsilon\Omega$ содержится в $-BU$, если и только если условие $x^{ij} = [E \quad I]\begin{bmatrix} d^i \\ \varepsilon\omega^j \end{bmatrix} \in -BU$ выполняется для каждого $d^i \in \mathbf{vert}\{D\}$ и $\omega^j \in \mathbf{vert}\{\Omega\}$, где $\mathbf{vert}\{A\}$ обозначает множество вершин многогранника A. Значение ε может быть найдено с помощью следующего алгоритма:

- Установить $\varepsilon = +\infty$.
- Для каждого $d^i \in \mathbf{vert}\{D\}$ и $\omega^j \in \mathbf{vert}\{\Omega\}$ решить следующую задачу линейного программирования (ЛП):

$$\mu_{ij} = \max \varepsilon, \quad Ed^i + \varepsilon\omega^j = -Bu, \quad 0 \le u \le u^+, \ \varepsilon \ge 0. \tag{14}$$

Если хотя бы для одного из наборов d^i, ω^j задача (14) не имеет решения, значит для построенной модели сети поставок условие (13) не выполняется. В противном случае установить $\varepsilon = \min\limits_{i,j}\{\varepsilon, \mu_{ij}\}$.

- Если полученное минимальное значение равно нулю $\varepsilon_{\min} = 0$, то выполняется условие $ED \subseteq -BU$, тогда сходимость последовательности $x(k)$ $k = 0, 1, 2, \ldots$ к некоторому оптимальному уровню запасов не может быть гарантирована.
- Если полученное минимальное значение больше нуля $\varepsilon_{\min} > 0$, значит условие (13) выполняется.

Несмотря на то, что задача проверки условия существования допустимой стратегии управления (13) является NP-полной, она может быть решена до начала процесса управления в режиме off-line [4].

Если условие (13) выполняется, то выбор допустимой стратегии управления для мгновенной модели сети (10) определяется следующими соображениями. Определяются конструктивные ограничения сети поставок для переменных, определяющих фиктивные уровни запаса:

$$z(k) \in Z = \{z \in \mathbf{R}^N \,|\, z^- \le z \le z^+\}. \tag{15}$$

Значение вектора нижней границы z^- должно обеспечивать неотрицательность значений вектора наличного уровня запаса $x(k)$. Тогда из выражения (9) следует, что «наименьшее» значение вектора нижней границы определяется выражением:

$$z^- = \sum_{i=1}^{\Lambda_{\max}} \hat{B}_i u^+. \tag{16}$$

Полученный результат кажется парадоксальным. Чтобы обеспечить $x(k) > 0,$ накладывается ограничение (16), согласно которому, чем выше мощность потока, которая определяется максимальным размером перевозимых ресурсов, тем выше должна быть нижняя граница. Чтобы объяснить это, на первый взгляд, абсурдное заключение, напомним, что, чем большими являются мощности управляемых потоков, тем большими могут быть мгновенные объемы отгрузки ресурсов, которые невозможно сразу компенсировать из-за наличия запаздываний. Это требует наличия больших страховых уровней запаса, чтобы избежать опустошения складов.

Чтобы решить эту проблему, необходимо минимизировать стоимость величины в правой части выражения (16), используя вектор стоимостей производства единицы продукции $C = \{Cost_i > 0\}$, $i = \overline{1, N}.$ Тогда необходимо найти вектор $\widetilde{u}^+$ такой, что $0 \le \widetilde{u}^+ \le u^+$, который минимизирует соответствующую стоимость при выполнении условия $ED \subset -B\widetilde{U},$ где $\widetilde{U} = \{u: 0 \le u \le \widetilde{u}^+\}$. Это означает, что если управляемые потоки сети никогда не используются в полную силу, то можно заменить u^+ на $\widetilde{u}^+,$ чтобы свести к минимуму затраты. Значения вектора $\widetilde{u}^+$ определяется путем решения следующей ЛП-задачи:

$$\min C\left(\sum_{i=1}^{\Lambda_{\max}} \hat{B}_i\right)\widetilde{u}^+, \quad 0 \le \widetilde{u}^+ \le u^+,\ ED \subset -B\widetilde{U}. \tag{17}$$

Тогда векторы, определяющие оптимальную нижнюю и верхнюю границы фиктивного уровня запаса вычисляются следующим образом:

$$\widetilde{z}^- = \sum_{i=1}^{\Lambda_{max}} \hat{B}_i \widetilde{u}^+, \quad z^+ = x^+ + \sum_{i=1}^{\Lambda_{max}} \hat{B}_i \widetilde{u}^+. \tag{18}$$

Для существования допустимой стратегии управления, формируемой в виде обратной связи по состоянию $u(k) = \Phi(z(k))$ с учетом ограничений (15), кроме выполнения условия (13), необходимо, чтобы выполнялось условие $\widetilde{z}^- + (\delta^+ - \delta^-) \le z^+.$

Поэтому на каждом шаге k для определения допустимой стратегии управления, гарантирующей полное удовлетворение внешнего спроса $d(k) \in D$, необходимо решить следующую ЛП-задачу [3]:

$$u(k) = \Phi(z(k)) = \arg\min_{\lambda \ge 0} \lambda,$$

$$\bar{z} \le z(k) + Bu(k) \le \bar{z} + \lambda\theta,\ \ u(k) \in \widetilde{U}, \tag{19}$$

где $\bar{z} = \widetilde{z}^- - \delta^-$, $\theta = z^+ - \widetilde{z}^- - (\delta^+ - \delta^-)$.

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

В качестве примера рассмотрим сеть поставок, которая изучалась в работе [5]. Граф, представляющий модель сети, можно описать следующим образом $G = (V = \{1,2,3,4,5\},\ E = \{(5,1),(5,2),(5,3),(4,3),(3,1),(3,2)\})$.

Сеть содержит $N = 5$ узлов, которые разделены на три уровня: узлы 1 и 2, образующие первый уровень сети поставок, перерабатывают продукцию узлов 3 и 5, и имеют склады, которые хранят, соответственно, продукцию типа 1 и продукцию типа 2. Узел 3 перерабатывает продукцию узлов 4 и 5, хранит продукцию типа 3, и составляет второй уровень сети поставок. Узлы 4 и 5 являются поставщиками сырья соответствующего типа и составляют третий уровень сети поставок.

Представим управляемые потоки в виде гипер-дуг, изображенных непрерывными линиями, добавив два потока, которые представляют поставки сырья извне, и пронумеруем, как показано на рис. 2. Дуги d_1, d_2, изображенные пунктирными линиями, представляют внешний спрос. Значение времени транспортировки $T_{i,j}$ и количество единиц продукции π_{ij}, которое требуется в соответствии с технологическим процессом, указаны в круглых и квадратных скобках, соответственно. Возле каждого узла в круглых скобках указаны значения времени выполнения заказа LT_i.

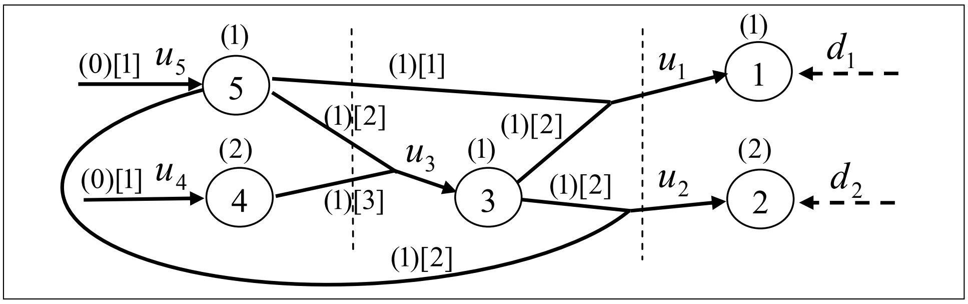

Рис. 2. Графическое представление модели сети поставок

В соответствии с технологическим описанием производственных процессов составлена производственная матрица Π. Матрица влияния управляющих воздействий B и матрица влияния внешних возмущений E равны:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть заданы ограничения по максимальные производительности узлов сети за период $Cap = [80\ 60\ 280\ 840\ 760]^{\mathrm{T}}$, максимальные вместимости складов $x^{+} = [80\ \ 150\ \ 300\ \ 500\ \ 500]^{\mathrm{T}}$, максимальные объемы транспортировки $u^{+} = [50\ 50\ 250\ 400\ 400]^{\mathrm{T}}$, граничные значения внешнего спроса $d^{-} = [15\ 25]^{\mathrm{T}}$ и $d^{+} = [25\ 36]^{\mathrm{T}}$, а также стоимости производства и транспортировки единицы продукции: $Cost = [100\ 90\ 50\ 30\ 30]^{\mathrm{T}}$ и $h = [5\ 4\ 1\ 1\ 1]^{\mathrm{T}}$. Остальные нижние границы возможных значений переменных равны нулю.

В соответствии с (12) вычислим векторы $\delta^{+} = [-25\ -36\ 0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$ и $\delta^{-} = [-15\ -25\ 0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$.

Для построенной модели сети поставок необходимо проверить выполнение условия существования допустимой стратегии управления (13), используя приведенный выше алгоритм. Для рассматриваемого примера размерности множеств вершин многогранников равны $\dim \mathbf{vert}\{D\} = 4$, $\dim \mathbf{vert}\{\Omega\} = 32$. В результате получили, что для всех $4 \times 32 = 128$ вариантов задача (14) имеет решение, и минимальное значение $\varepsilon_{\min} = 0{,}0885$ отлично от нуля. Таким образом, оптимальная допустимая стратегия управления для построенной модели сети существует, и гарантируется сходимость последовательности векторов состояний к некоторому оптимальному уровню запасов.

Кроме того, в результате решения задачи (17) были определены минимальные значения элементов вектора $\tilde{u}^{+} = [24\ 36\ 120\ 360\ 335]^{T}$, определяющего верхние границы размеров заказа ресурсов, при которых гарантируется полное удовлетворение спроса. Тогда в соответствии с выражениями (18) границы вектора фиктивного уровня запаса равны: $\tilde{z}^{-} = [48\ 108\ 240\ 720\ 335]^{T}$, $z^{+} = [128\ 268\ 540\ 1220\ 835]^{T}$.

Предположим, что в начальный момент времени значения вектора фиктивных уровней запаса ресурсов совпадают с максимальными объемами вместимости складов $z(0) = War$, а векторы $u(k)$ и $d(k)$ равны нулю для $k < 0$. Стратегия управления $u(k) = \Phi(z(k))$ определяется на каждом шаге k путем решения ЛП-задачи (19), которая для рассматриваемого примера может быть представлена в виде:

$$\min \lambda$$

$$\begin{cases} 63 \le z_1 + u_1 \le 63 + \lambda \cdot 71, \\ 143 \le z_2 + u_2 \le 240 + \lambda \cdot 140, \\ 240 \le z_3 - 2u_1 - 2u_2 + u_3 \le 134 + \lambda \cdot 300, \\ 720 \le z_4 - 3u_3 + u_4 \le 720 + \lambda \cdot 500, \\ 335 \le z_5 - u_1 - 2u_2 - 2u_3 + u_5 \le 350 + \lambda \cdot 500, \end{cases} \quad (20)$$

$$\lambda \ge 0,\ u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \ge 0,$$

$$u_1 \le 24,\ u_2 \le 36,\ u_3 \le 120,\ u_4 \le 360,\ u_5 \le 335.$$

Анализ результатов моделирования изменения фиктивных уровней запаса $z(k)$ и объемов производства $u(k)$, полученных с использованием «мгновенной» модели сети, позволяет сделать следующие выводы:

- полученная стратегия управления запасами обеспечивает полное и своевременное удовлетворение как внешнего, так и внутреннего спроса;
- сходимость последовательности векторов состояний $z(k)$, $k = 0, 1, ...$ к некоторому оптимальному уровню запасов достигнута за 6 шагов.

ВЫВОДЫ

Предложенный подход к построению математических моделей распределенных сетей поставок с запаздываниями управляемых потоков и интервальной неопределенностью внешнего спроса позволяет сформулировать задачу проверки условия существования и задачу формирования допустимой стратегии управления запасами как ЛП-задачи. Первая из них решается в режиме off-line до начала процесса управления, а вторая — в режиме on-line в каждый момент времени k. Построена программная реализация алгоритмов с помощью пакета MATLAB. Результаты численного моделирования подтверждают эффективность предложенного подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лотоцкий В.А.*, *Мандель А.С.* Модели и методы управления запасами. — М.: Наука, 1991. — 189 с.
2. *Рыжиков Ю.И.* Теория очередей и управление запасами. — СПб.: Питер, 2001. — 384 с.
3. *Blanchini F.*, *Rinaldi F.*, *Ukovich W.* Least inventory control of multistorage systems with non-stochastic unknown inputs // IEEE Transaction on robotics and automation. — 1997. — **13**. — P. 633–645.
4. *Дорофеев Ю.И.*, *Дорофеев Д.Ю.*, *Никульченко А.А.* Применение MATLAB для анализа и синтеза систем управления запасами в распределенных сетях поставок // Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB: материалы V Международной научной конференции (г. Харьков, 11 – 13 мая 2011 г.) — Харьков: БЭТ, 2011. — С. 220–230.
5. *Hennet J.-C.* A bimodal scheme for multi-stage production and inventory control // Automatica. — 2003. — **39**. — P. 793–805.

Поступила 31.05.2011