МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Палійчук Лілія Сергіївна

УДК 517.9

ДИСЕРТАЦІЯ

БАГАТОЗНАЧНИЙ АНАЛІЗ ЕВОЛЮЦІЙНИХ СИСТЕМ ХВИЛЬОВОГО ТИПУ З НЕРЕГУЛЯРНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень
Фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
__________________Л.С. Палійчук

Науковий керівник Касьянов Павло Олегович, доктор фізико-математичних наук, доцент

Київ–2018

АНОТАЦІЯ

Палійчук Л.С. Багатозначний аналіз еволюційних систем хвильового типу з нерегулярними обмеженнями. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.04 «Системний аналіз і теорія оптимальних рішень». – Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», МОН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню асимптотичної поведінки розв’язків класів дисипативних еволюційних систем хвильового типу з нерегулярними обмеженнями. Науковий інтерес до дослідження хвильових процесів зумовлений широким колом застосувань, починаючи з коливань струни, руху вагона на ресорах і закінчуючи ударними хвилями після вибухів чи землетрусів, циклами Кондратьєва тощо. В технічних системах на сьогодні значна увага приділяється вивченню електромеханічних хвиль, зокрема в п’єзоелектриках. Динаміка таких процесів описується диференціальними рівняннями з частинними похідними, права частина яких, зважаючи на врахування різного роду впливів, може мати розривний, багатозначний характер. Зважаючи на це, поведінку таких об’єктів з розривною нелінійністю не можна дослідити за допомогою класичної теорії операторних напівгруп, а проведення чисельних досліджень вимагає суттєвого спрощення досліджуваних моделей, припущень щодо гладкості, монотонності функції взаємодії, значних обчислювальних ресурсів тощо. Дослідження якісної поведінки еволюційних систем в нескінченновимірних просторах зазвичай пов’язують з доведенням існування та встановленням топологічних та структурних характеристик глобального та траєкторного атракторів. Для випадку, коли система допускає неоднозначну розв’язність, теорія глобальних та траєкторних атракторів базується на понятті

багатозначного напівпотоку, введеного членом-кореспондентом НАН України В.С. Мельником. Методи багатозначних напівпотоків використовуються в задачах, де не можливо гарантувати єдиність розв'язку відповідної початкової задачі, при цьому її розв'язки розглядаються в кожен момент часу.

Не зважаючи на вагомі результати, які вже отримані в даному напрямку досліджень, ряд важливих задач досі залишався не вирішеним. Зокрема актуальною задачею, якій присвячена дана дисертаційна робота, є якісне дослідження глобальної поведінки функцій стану хвильових об'єктів з розривною нелінійністю, яка допускає представлення у вигляді різниці субдиференціалів опуклих функціоналів.

В дисертаційній роботі досліджено глобальну поведінку функцій стану таких математичних об'єктів: автономного хвильового рівняння з розривною функцією взаємодії, представленою у вигляді різниці субдиференціалів опуклих функціоналів, автономного хвильового рівняння, збуреного адитивним білим шумом, з негладким нелінійним доданком, автономного хвильового диференціально-операторного включення з розривною функцією взаємодії, представленною у вигляді різниці субдиференціалів опуклих функціоналів.

В першому розділі визначається сучасний стан та проблематика досліджень класу фізико-механічних процесів, математичними моделями яких є нелінійні хвильові об'єкти, а також здійснено огляд існуючих підходів до вивчення динаміки розв'язків нелінійних еволюційних систем.

В другому розділі дисертації для автономного хвильового рівняння з розривною нелінійністю встановлені властивості та оцінки для слабких розв'язків, з'ясовано характер залежності слабких розв'язків від початкових даних, знайдено функцію типу Ляпунова, доведено існування компактного інваріантного глобального атрактора для усіх слабких розв'язків та отримано його структурні властивості. Крім того, для абстрактної багатозначної динамічної системи доведено існування випадкового атрактора, що дозволило отримати існування випадкового атрактора для стохастично збуреного хвильового рівняння.

В третьому розділі дисертації для автономного хвильового включення з функцією взаємодії субградієнтного типу встановлені властивості та оцінки для слабких розв’язків, з’ясовано характер залежності слабких розв’язків від початкових даних, знайдено функцію типу Ляпунова, доведено існування глобального та траєкторного атракторів, встановлено взаємозв’язок між ними та простором повних траєкторій, встановлено структурні властивості глобального атрактора, крім того доведено скінченновимірність з точністю до малого параметра динаміки розв’язків досліджуваного об’єкту за виконання припущень на параметри задачі, а також визначено достатні умови існування рівномірного компактного глобального атрактора у неавтономному випадку.

В четвертому розділі дисертації побудувано алгоритм розв’язання задач дослідження глобальної поведінки функцій стану для еволюційних задач з нерегулярними обмеженнями, який може застосовуватись до класів математичних моделей, що описують поведінку складних процесів та полів різної природи. Отримані теоретичні результати застосовано до дослідження п’єзоелектричної задачі, що дозволяє, враховуючи визначені параметри задачі, забезпечити стійке функціонування досліджуваного об’єкту.

Наукова новизна отриманих в дисертаційній роботі результатів така:
вперше:

– для автономного хвильового рівняння з розривною функцією взаємодії, представленною у вигляді різниці субдиференціалів опуклих функціоналів, знайдено функцію типу Ляпунова, доведено існування глобального атрактора та встановлено його структурні властивості; отримані результати поширено на більш загальне диференціально-операторне включення, для якого додатково доведено існування траєкторного атрактора, встановлено взаємозв'язок між атракторами та простором повних траєкторій, доведено скінченновимірність динаміки слабких розв'язків з точністю до малого параметру;

– для автономного хвильового рівняння, збуреного адитивним білим шумом, з негладким нелінійним доданком встановлено існування випадкового атрактора;

отримали подальший розвиток:

– методи розв'язання контактних задач взаємодії в'язкопружного тіла з жорсткою опорою з функціями взаємодії субградієнтного типу;
– методологія нелінійного і багатозначного аналізу для дослідження диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку хвильового типу у випадку розривної функції взаємодії.

Робота має теоретичний та практичний характер. Її результати суттєво доповнюють та узагальнюють математичний апарат дослідження якісної поведінки розв'язків класів автономних еволюційних задач хвильового типу з нерегулярними обмеженнями в обмежених областях у випадках, коли умови на параметри задачі не гарантують єдиності розв'язку відповідних задач Коші, та можуть бути використані при математичному моделюванні складних еволюційних процесів з негладкими або розривними функціями взаємодії. Крім того, розроблений в дисертаційній роботі алгоритм для розв'язання задач дослідження глобальної поведінки функцій стану для еволюційних задач з нерегулярними обмеженнями використаний при дослідженні складної п'єзоелектричної системи та може застосовуватись до інших класів складних процесів та полів різної природи. Отримані теоретичні результати можуть бути використані в процесах керування для зменшення або компенсації небажаних ефектів, для обґрунтування чисельних алгоритмів пошуку слабких розв'язків, при виведенні досліджуваних систем на задані стаціонарні рівні.

Результати дисертаційної роботи впроваджені в навчальний процес ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського і використовуються при викладанні навчальних дисциплін «Елементи нелінійного аналізу» та «Системний аналіз стохастично розподілених процесів».

Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в 14 наукових публікаціях: в 5 наукових статтях в провідних фахових виданнях, з них 2 – у фахових виданнях України, що входять до наукометричних баз даних, 3 – в іноземних виданнях, а також у 8 тезах доповідей наукових конференцій, та в 1 статті в іншому виданні. Результати дисертації доповідалися на серії спільних наукових семінарів КПІ ім. Ігоря Сікорського та механіко-математичного факультету МДУ імені М.В. Ломоносова (2012, 2014, 2015), семінарі НДВ системної математики ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського та на таких конференціях: Міжнародній конференції з функціонального аналізу, присвяченій 125-річчю С. Банаха (м. Львів, 2017); Міжнародній конференції «Системний аналіз та інформаційні технології» (м. Київ, 2013, 2014, 2015); Міжуніверситетській науковій конференції молодих вчених з математики та фізики (м. Київ, 2013); Всеукраїнській науково-методичній конференції «Сучасні науково-методичні проблеми у вищій школі» (м. Київ, 2013); Кримській міжнародній математичній конференція «КММК-2013» (м. Судак, 2013); Міжнародній конференції, присвяченій пам'яті чл.-кор. НАН України В.С. Мельника, «Нелінійний аналіз та застосування» (м. Київ, 2015).

Ключові слова: глобальна динаміка функцій стану, розривна функція взаємодії, автономні еволюційні рівняння та включення другого порядку, глобальний атрактор, траєкторний атрактор, асимптотична поведінка розв'язків.

Список публікацій здобувача:

1. Iovane, G., Kapustyan, O.V., Paliichuk, L.S., Pereguda, O.V.: On random attractor of semilinear stochastically perturbed wave equation without uniqueness. System Research and Information Technologies. **1**, 87–96 (2013) (індексується Google Scholar)
2. Gorban, N.V., Kapustyan, O.V., Kasyanov, P.O., Paliichuk, L.S.: On Global Attractors for Autonomous Damped Wave Equation with Discontinuous Nonlinearity. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.)

Continuous and Distributed Systems: Theory and Applications. Solid Mechanics and Its Applications, vol. 211, pp. 221–237. Springer, Cham (2014) (іноземне видання, входить в Scopus, Google Scholar, SpringerLink)

3. Zgurovsky, M.Z., Kasyanov, P.O., Paliichuk, L.S.: Automatic feedback control for one class of contact piezoelectric problems. System research and information technologies. **1**, 56–68 (2014) (індексується Google Scholar)
4. Zgurovsky, M.Z., Kasyanov, P.O., Paliichuk, L.S., Tkachuk, A.M.: Dynamics of Solutions for Controlled Piezoelectric Fields with Multivalued «Reaction-Displacement» Law. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Continuous and Distributed Systems II: Theory and Applications. Studies in Systems, Decision and Control, vol. 30, pp. 267–276. Springer, Cham (2015) (іноземне видання, входить в Scopus, Web of Science, Google Scholar, SpringerLink)
5. Zgurovsky, M.Z., Gluzman, M.O., Gorban, N.V., Kasyanov, P.O., Paliichuk, L.S., Khomenko, O.V.: Uniform global attractor for non-autonomous dissipative dynamical systems. DCDS. Series B. **22**(5), 2053–2065 (2017) (іноземне видання, входить в Scopus, Web of Science, Google Scholar, SCImago)
6. Касьянов, П.О., Палійчук, Л.С.: Потраєкторна поведінка класу керованих п’єзоелектричних полів з немонотонним потенціалом. Наукові вісті Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». **2**, 21–26 (2014) (індексується Google Scholar)
7. Paliichuk, L.S.: Qualitative behavior of semilinear stochastically perturbed wave equation without uniqueness. In: Збірник тез Третьої Міжуніверситетської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики, Києво-Могилянська академія, Київ, 25–27 квітня 2013

8. Палійчук, Л.С.: Глобальні атрактори для автономного хвильового рівняння з розривною не лінійністю. Збірник тез 15-ої Міжнар. конф. «Системний аналіз та інформаційні технології «САІТ», ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», Київ, 27–31 травня 2013
9. Касьянов, П.О., Горбань, Н.В., Палійчук, Л.С., Капустян, О.В.: Глобальні атрактори для автономного хвильового рівняння з розривною не лінійністю. Збірник тез Всеукр. наук.-метод. конф. «Сучасні науково-методичні проблеми у вищій школі», НУХТ, Київ, 26–27 червня 2013
10. Paliichuk, L.S.: On global attractors for autonomous damped wave equation with discontinuous nonlinearity. In: Book of Abstracts of Crimea International Mathematical Conference «CIMC-2013», V.I. Vernadsky Crimean National University, Sudak, 22 September – 4 October 2013
11. Палійчук, Л.С.: Якісна поведінка розв’язків класу керованих п’єзоелектричних полів з немонотонним потенціалом. Збірник тез 16-ої Міжнар. конф. «Системний аналіз та інформаційні технології «САІТ», ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», Київ, 26–30 травня 2014
12. Paliichuk, L.S.: On the limit cycles for controlled piezoelectric fields. In: Book of Abstracts of 17-th Intern. Conf. «System Analysis and Information Technologies», ESC «IASA» of NTUU «KPI», Kyiv, 22–25 June 2015
13. Paliichuk, L.S.: The long-term forecasts for controlled piezoelectric fields. In: Book of Abstracts of third International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine V.S. Melnik «Nonlinear analysis and applications», ESC «IASA» of NTUU «KPI», Kyiv, 1–3 April 2015
14. Paliichuk, L.S.: Dynamics of weak solutions for second-order autonomous evolution equation with discontinuous nonlinearity. In: Book of Abstracts of International Conference in Functional Analysis dedicared to the 125th anniversary of Stefan Banach, Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 18–23 September 2017

ABSTRACT

Paliichuk L.S. Multivalued analysis for evolution systems of wave type with irregular restrictions. – On rights for a manuscript.

The dissertation for a scientific degree of the Candidate of Physical and Mathematical Science on the specialty 01.05.04 – System analysis and optimal decisions theory. – National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», MES Ukraine Kyiv, 2018.

The dissertation is devoted to the study of asymptotic behavior of solutions for classes of dissipative evolution systems of wave type with irregular conditions. Scientific interest in the study of wave processes caused by a wide range of applications, from the fluctuations of the string, the movement of the car on the springs and ending with shock waves after explosions or earthquakes, Kondratiev cycles, and so on. In technical systems, much attention is being paid today to the study of electromechanical waves, in particular in piezoelectrics. The dynamics of such processes is described by partial differential equations, the right part of which, taking into account the various kinds of influences, may have a discontinuous, multi-valued character. In this regard, the behavior of such objects with discontinuous nonlinearity can not be investigated with the help of the classical theory of operator semigroups, and numerical studies require a significant simplification of the models under study, assumptions about smoothness, monotonicity of the interaction function, significant computational resources, and so on. The study of the qualitative behavior of evolutionary systems in infinite-dimensional spaces is usually associated with the proof of the existence and establishment of topological and structural properties of the global and trajectory attractors. In a case when the system allows non-uniqueness solvability, the theory of global and trajectory attractors is based on the notion of a multi-valued semi-flow introduced by a corresponding member of the NAS of Ukraine V.S. Melnik. Methods of multivalued semi-flows are used in problems where it is not possible to guarantee the uniqueness of the solution for the corresponding initial problem,

while its solutions are considered at each moment of time.

Despite the significant results are already obtained in this area of research, a number of important tasks remained unresolved. In particular, the actual task, which is devoted to this dissertation, is a qualitative study of the global behavior of the state functions for wave objects with a discontinuous nonlinearity, which supposes the representation in the form of the difference of subdifferentials of convex functionals.

In the dissertation work the global behavior of the state functions of such mathematical objects is investigated: the autonomous wave equation with a discontinuous interaction function represented as the difference of subdifferentials of convex functionals, the autonomous semi-linear wave equation perturbed by the additive white noise, with non-smooth nonlinear part, the autonomous wave differential-operator inclusion with a discontinuous interaction function represented as the difference of subdifferentials of convex functionals.

In the first chapter the present state and problems of the class of physical and mechanical processes, which mathematical models are nonlinear wave objects, and also the review of existing approaches to studying the dynamics of solutions of nonlinear evolutionary systems are determined.

In the second chapter of the dissertation, for the autonomous wave equation with discontinuous nonlinearity, properties and estimates for weak solutions are established, the nature of the dependence of weak solutions on the initial data is obtained, the Lyapunov type function is found, the existence of a compact invariant global attractor for all weak solutions is proved and its structural properties are obtained. In addition, for an abstract multivalued dynamical system, the existence of a random attractor has been proved, which allowed to obtain the existence of a random attractor for a stochastically perturbed wave equation.

In the third chapter of the dissertation, for the autonomous wave inclusion with the interaction function of the subgranient type, properties and estimates for weak solutions are established, the nature of the dependence of weak solutions on the initial data is obtained, the Lyapunov type function is found, the existence of the global and trajectory attractors are proved, the relationship between attractors and the space of complete trajectories are established, the structural properties of the global attractor are established, in addition the finite-dimensionality within a small parameter of solutions dynamics for the investigated object under main assumptions on the parameters is proved, and also sufficient conditions for the existence of a uniform compact globular attractor in a non-autonomous case are determined.

In the fourth chapter of the dissertation, an algorithm for solving problems of studying the global behavior of state functions for evolutionary problems with irregular conditions, which can be applied to the classes of mathematical models describing the behavior of complex processes and fields of different nature, is constructed. The obtained theoretical results are applied to the study of the piezoelectric problem, which allows, taking into account the definite parameters of the problem, to ensure the stable functioning of the investigated object.

The scientific novelty of the results obtained in the dissertation is as follows:

- for an autonomous wave equation with a discontinuous interaction function represented as the difference of subdifferentials of convex functionals for the first time the Lyapunov type function is found, the existence of a global attractor is proved, and its structural properties are established; the obtained results are extended to a more general differential-operator inclusion, for which additionally the existence of a trajectory attractor is proved, the relationship between attractors and the space of complete trajectories is established, finite-dimensionality of the weak solutions dynamics within a small parameter is proved;
- for semi-linear wave equation perturbed by additive white noise, with a non-smooth nonlinear part for the first time the existence of a random attractor is established;
- the methods of solving the contact problems of the interaction between a viscoelastic body and a rigid foundation with the interaction functions of a subgradient type are further developed;

– the methodology of nonlinear and multivalued analysis for the study of second order partial differential equations of wave type in the case of a discontinuous interaction function is further developed.

The work is theoretical and practical. Its results substantially complement and generalize a mathematical apparatus for studying the qualitative behavior of solutions for classes of autonomous evolutionary problems of wave type with irregular conditions in bounded domains in cases where the conditions on the parameters of the problem do not guarantee the uniqueness of solution for the corresponding Cauchy problems. Dissertation results can be used in mathematical modeling of complex evolution processes with non-smooth or discontinuous interaction functions. In addition, the algorithm developed in the dissertation work for solving the problems of investigation the global behavior of state functions for evolutionary problems with irregular conditions has been used in the study of a complex piezoelectric system. This algorithm can be applied to other classes of complex processes and fields of different nature. The obtained theoretical results can be used in the control processes to reduce or compensate the undesirable effects, to substantiate the numerical algorithms for finding weak solutions, to derive the studied systems at given stationary levels.

The results of the dissertation work are introduced into the educational process of the IASA of Igor Sikorsky KPI and used in the teaching of disciplines «Elements of nonlinear analysis» and «System analysis of stochastically distributed processes». The main results of the dissertation are published in 6 scientific articles, including 2 in professional editions of Ukraine, 3 in foreign publications, 1 in other publication, as well as in 8 thesis papers of scientific conferences. The results of the dissertation were reported on a series of joint scientific seminars of NTUU «Kiev Polytechnic Institute» and the Faculty of Mechanics and Mathematics of Lomonosov Moscow State University (2012, 2014, 2015), seminar of SRD of System Mathematics of ESC «IASA» of Igor Sikorsky KPI and at such conferences: International Conference on Functional Analysis devoted to the 125th anniversary of S. Banakh (Lviv, 2017); International

Conference «System Analysis and Information Technologies» (Kyiv, 2013, 2014, 2015); Inter-University Scientific Conference of Young Scientists in Mathematics and Physics (Kyiv, 2013); All-Ukrainian scientific and methodical conference "Modern scientific and methodological problems in high school" (Kyiv, 2013); Crimean International Mathematical Conference «KMMK-2013» (Sudak, 2013); International conference dedicated to the memory of Corresponding Member of NAS of Ukraine V.S. Melnik, «Nonlinear Analysis and Application» (Kyiv, 2015).

Keywords: global dynamics of state functions, discontinuous interaction function, second order autonomous evolution equations and inclusions, global attractor, trajectory attractor, asymptotical behavior of solutions.

Publacations:

1. Iovane, G., Kapustyan, O.V., Paliichuk, L.S., Pereguda, O.V.: On random attractor of semilinear stochastically perturbed wave equation without uniqueness. System Research and Information Technologies. **1**, 87–96 (2013) (indexed of Google Scholar)
2. On Global Attractors for Autonomous Damped Wave Equation with Discontinuous Nonlinearity. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Continuous and Distributed Systems: Theory and Applications. Solid Mechanics and Its Applications, vol. 211, pp. 221–237. Springer, Cham (2014) (foreign publication, referenced or indexed of Scopus, Google Scholar, SpringerLink)
3. Zgurovsky, M.Z., Kasyanov, P.O., Paliichuk, L.S.: Automatic feedback control for one class of contact piezoelectric problems. System research and information technologies. **1**, 56–68 (2014) (indexed of Google Scholar)
4. Zgurovsky, M.Z., Kasyanov, P.O., Paliichuk, L.S., Tkachuk, A.M.: Dynamics of Solutions for Controlled Piezoelectric Fields with Multivalued «Reaction-Displacement» Law. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Continuous and Distributed Systems II: Theory and Applications. Studies in Systems, Decision and Control, vol. 30, pp. 267–276. Springer, Cham (2015) (foreign publication, referenced or

indexed of Scopus, Web of Science, Google Scholar, SpringerLink)

5. Zgurovsky, M.Z., Gluzman, M.O., Gorban, N.V., Kasyanov, P.O., Paliichuk, L.S., Khomenko, O.V.: Uniform global attractor for non-autonomous dissipative dynamical systems. DCDS. Series B. **22**(5), 2053–2065 (2017) (foreign publication, referenced or indexed of Scopus, Web of Science, Google Scholar, SCImago)
6. Kasyanov, P.O., Paliichuk, L.S.: Trajectory behavior for a class of the controlled piezoelectric fields with nonmonotonous potential (In Ukrainian). Research Bulletin of the National technical university of Ukraine «Kyiv polytechnic institute». 2, 21–26 (2014) (indexed of Google Scholar)
7. Paliichuk, L.S.: Qualitative behavior of semilinear stochastically perturbed wave equation without uniqueness. In: Proceedings of 3rd Inter-University Scientific Conference of Young Scientists in Mathematics and Physics, National University of «Kyiv-Mohyla Academy», Kyiv, 25–27 April 2013
8. Paliichuk, L.S.: Global attractors for autonomous wave equation with discontinuous nonlinearity (In Ukrainian). In: Book of Abstracts of 15th International Conference «System Analysis and Information Technologies «SAIT», ESC «IASA» NTUU «KPI», Kyiv, 27–31 May 2013
9. Kasyanov, P.O., Gorban, N.V., Paliichuk, L.S., Kapustyan, O.V.: Global attractors for autonomous wave equation with discontinuous nonlinearity (In Ukrainian). In: Proceedings of All-Ukrainian scientific-methodical conference «Modern scientific and methodological problems in high school», NUFT, Kyiv, 26–27 June 2013
10. Paliichuk, L.S.: On global attractors for autonomous damped wave equation with discontinuous nonlinearity. In: Book of Abstracts of Crimea International Mathematical Conference «CIMC-2013», V.I. Vernadsky Crimean National University, Sudak, 22 September – 4 October 2013
11. Paliichuk, L.S.: Qualitative behavior of solutions for a class of controlled piezoelectric fields with nonmonotonous potential (In Ukrainian). In: Book

of Abstracts of 16th International Conference «System Analysis and Information Technologies «SAIT», ESC «IASA» NTUU «KPI», Kyiv, 26–30 May 2014

12. Paliichuk, L.S.: On the limit cycles for controlled piezoelectric fields. In: Book of Abstracts of 17-th International Conference «System Analysis and Information Technologies «SAIT», ESC «IASA» NTUU «KPI», Kyiv, 22–25 June 2015
13. Paliichuk, L.S.: The long-term forecasts for controlled piezoelectric fields. In: Book of Abstracts of third International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine V.S. Melnik «Nonlinear analysis and applications», ESC «IASA» of NTUU «KPI», Kyiv, 1–3 April 2015
14. Paliichuk, L.S.: Dynamics of weak solutions for second-order autonomous evolution equation with discontinuous nonlinearity. In: Book of Abstracts of International Conference in Functional Analysis dedicared to the 125th anniversary of Stefan Banach, Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 18–23 September 2017

ЗМІСТ

ВСТУП

Обгрунтування вибору теми дослідження. В зв’язку з розвитком нових галузей науки і техніки в останні роки виникла потреба в підвищенні точності математичного моделювання та керування хвильовими процесами і полями. В зв’язку з цим постала необхідність в послабленні умов на параметри моделей таких процесів для адекватного відображення реальних фізичних ефектів та явищ, врахування різного роду впливів на досліджувані системи. Науковий інтерес до дослідження хвильових процесів зумовлений широким колом застосувань, починаючи з коливань струни, руху вагона на ресорах і закінчуючи ударними хвилями після вибухів чи землетрусів, циклами Кондратьєва тощо. В технічних системах насьогодні значна увага приділяється вивченню електромеханічних хвиль, зокрема в п’єзоелектриках (S. Migorski, A. Ochal, M. Sofonea, Z. Liu, K. Kuttler, W. Han, G. Tao та ін.). Динаміка таких процесів описується диференціальними рівняннями з частинними похідними, права частина яких може мати розривний, багатозначний характер. Зважаючи на це, поведінку таких об’єктів з розривною нелінійністю не можна дослідити за допомогою класичної теорії операторних напівгруп, а проведення чисельних досліджень вимагає суттєвого спрощення досліджуваних моделей, припущень щодо гладкості, монотонності функції взаємодії, значних обчислювальних ресурсів тощо.

Теоретичний апарат для роботи з нелінійними еволюційними задачами розроблено в роботах С.Л. Соболєва, H. Gajewski, K. Greger, K. Zacharias, В.С. Мельника, В.О. Капустяна, В.В. Пічкура та ін. Дослідження якісної поведінки еволюційних систем в нескінченновимірних просторах зазвичай пов’язують з доведенням існування та встановленням топологічних та структурних характеристик глобального та траєкторного атракторів (J. Hale, А.В. Бабін, М.Й. Вішик, О.О. Ладиженська, В.В. Чепижов). Для випадку, коли система допускає неоднозначну розв’язність, теорія глобальних та траєкторних атракторів узагальнена в наукових працях J. Ball, В.С. Мельника, М.З. Згуровського, О.В. Капустяна, П.О. Касьянова та їх учнів і базується на понятті багатозначного напівпотоку, введеного член.-кор. НАН України В.С. Мельником. Методи багатозначних напівпотоків використовуються в задачах, де неможливо гарантувати єдиність розв'язку відповідної початкової задачі.

Не зважаючи на вагомі результати, отримані в роботах вищезгаданих вчених, ряд важливих задач досі залишався не вирішеним. Зокрема, актуальною задачею, якій присвячена дана дисертаційна робота, є якісне дослідження глобальної поведінки функцій стану хвильових об'єктів з розривною нелінійністю, грунтуючись на засадах системного аналізу (М.З. Згуровський, Н.Д. Панкратова, П.І. Бідюк, В.Я. Данилов, В.Д. Романенко та ін.), багатозначного аналізу (В.С. Мельник, Aubin J.-P., Frankowska H. та ін.), теорії глобальних та траєкторних атракторів для багатозначних напівпотоків (J. Ball, В.С. Мельник, М.Й. Вішик, В.В. Чепижов та ін.). Отримані результати мають строге математичне обґрунтування і водночас характеризуються зручністю при застосуванні до розв'язання прикладних задач. Вивчення глобальної поведінки функцій стану дозволяє надійно передбачити еволюцію процесу з врахуванням різного роду впливів, спрямовувати динаміку досліджуваних систем на задані стаціонарні рівні, обґрунтовувати чисельні алгоритми пошуку слабких (узагальнених) розв'язків задач, що вилгоритми пошуку слабких (узагальнених) розв'язків задач, що вивчаються, та вибору параметрів керування з метою надійного функціонування систем.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі математичних методів системного аналізу Інституту прикладного системного аналізу Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» згідно науково-дослідних тем:

- «Довгострокові прогнози функцій стану керованих геофізичних нелінійних систем з багатовимірними суперпотенціальними законами» (номер держ. реєстр. 0112U001229, 2012-2016 рр.),
- «Еволюційні включення та варіаційні нерівності для задач аналізу даних про Землю» (номер держ. реєстр. 0112U004117, 2012 р.);

та грантів:

- гранту Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених в 2012 році «Диференціально-операторні включення для задач аналізу даних про Землю» (номер держ. реєстрації 0112U008215),
- гранту Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених в 2013 році «Структурні властивості притягуючих множин деяких нелінійних крайових задач геофізики і механіки» (номер держ. реєстр. 0113U006191),
- гранту на виконання проектів НДР молодих учених у 2013-2014 рр. «Довгострокові прогнози функцій стану та регулярність граничних циклів керованих процесів дифузійного типу» (номер держ. реєстр. 0113U002978).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є якісне дослідження та аналіз глобальної поведінки розв’язків дисипативних еволюційних систем хвильового типу з нерегулярними обмеженнями.

Для досягнення мети були поставлені та розв’язані такі завдання:

- дослідити якісну динаміку слабких розв’язків еволюційної системи хвильового типу з розривною нелінійністю в скалярному випадку;
- дослідити асимптотичну поведінку розв’язків стохастично збуреної еволюційної задачі хвильового типу;
- встановити умови існування та структурні властивості притягуючих множин для диференціально-операторного включення хвильового типу;
- побудувати алгоритм розв’язання задач дослідження глобальної

поведінки функцій стану для еволюційних задач з нерегулярними обмеженнями;

– застосувати отримані результати до практичних задач.

Об’єкт дослідження – дисипативні еволюційні системи хвильового типу з нерегулярними обмеженнями.

Предмет дослідження – математичні моделі дисипативних еволюційних систем хвильового типу з нерегулярними обмеженнями та методи багатозначного аналізу глобальної поведінки їх функцій стану.

Методи дослідження грунтуються на використанні принципів та засад теорії глобальних та траєкторних атракторів для багатозначних напівпотоків, методів системного, нелінійного та багатозначного аналізу, принципів теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

вперше:

– для автономного хвильового рівняння з розривною функцією взаємодії, представленною у вигляді різниці субдиференціалів опуклих функціоналів, знайдено функцію типу Ляпунова, доведено існування глобального атрактора та встановлено його структурні властивості; отримані результати поширено на більш загальне диференціально-операторне включення, для якого додатково доведено існування траєкторного атрактора, встановлено взаємозв'язок між атракторами та простором повних траєкторій, доведено скінченновимірність динаміки слабких розв’язків з точністю до малого параметру;

– для автономного хвильового рівняння, збуреного адитивним білим шумом, з негладким нелінійним доданком встановлено існування випадкового атрактора;

отримали подальший розвиток:

- методи розв’язання контактних задач взаємодії в’язкопружного тіла з жорсткою опорою з функціями взаємодії субградієнтного типу;
- методологія нелінійного і багатозначного аналізу для дослідження диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку хвильового типу у випадку розривної функції взаємодії.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний та практичний характер. Її результати суттєво доповнюють та узагальнюють математичний апарат дослідження якісної поведінки розв’язків класів автономних еволюційних задач хвильового типу з нерегулярними обмеженнями в обмежених областях у випадках, коли умови на параметри задачі не гарантують єдиності розв’язку відповідних задач Коші, та можуть бути використані при математичному моделюванні складних еволюційних процесів з негладкими або розривними функціями взаємодії.

Крім того, розроблений в дисертаційній роботі алгоритм для розв’язання задач дослідження глобальної поведінки функцій стану для еволюційних задач з нерегулярними обмеженнями застосований до дослідження складної п’єзоелектричної системи, що дозволяє, враховуючи визначені параметри задачі, забезпечити стійке функціонування досліджуваного об’єкту. Такий алгоритм може застосовуватись до інших класів складних процесів та полів різної природи. Отримані теоретичні результати можуть бути використані в процесах керування для зменшення або компенсації небажаних ефектів, для обґрунтування чисельних алгоритмів пошуку слабких розв’язків, при виведенні досліджуваних систем на задані стаціонарні рівні.

Результати дисертаційної роботи впроваджені в навчальний процес ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського і використовуються при викладанні навчальних дисциплін «Елементи нелінійного аналізу» та «Системний аналіз стохастично розподілених процесів».

Особистий внесок здобувача. Всі результати, що виносяться на захист, одержано автором самостійно. При використанні відомих положень та залежностей мають місце коректні посилання на авторів та відповідні джерела. В статтях, написаних в співавторстві, автором: доведено існування випадкового атрактора для абстрактної багатозначної динамічної системи, що дозволило отримати існування випадкового атрактора для хвильового рівняння, збуреного адитивним білим шумом, з негладким нелінійним доданком (теореми 3, 7) [62]; для автономного хвильового рівняння з розривною нелінійністю встановлені властивості та оцінки для слабких розв'язків, з'ясовано характер залежності слабких розв'язків від початкових даних, знайдено функцію типу Ляпунова, доведено існування компактного інваріантного глобального атрактора для слабких розв'язків та отримано його структурні властивості (леми 16.4-16.6, 16.8, 16.9, теореми 16.1-16.5) [50]; для автономного хвильового включення з функцією взаємодії субградієнтного типу встановлені властивості та оцінки для слабких розв'язків, з'ясовано характер залежності слабких розв'язків від початкових даних, знайдено функцію типу Ляпунова, доведено існування глобального та траєкторного атракторів, встановлено взаємозв'язок між ними та простором повних траєкторій, встановлено структурні властивості глобального атрактора, доведено скінченновимірність з точністю до малого параметра динаміки розв'язків [198, 204, 231] (лема 2-4, теореми 1-3 [198]; теорема 1 [231]; теореми 16.1, 16.2 [204]); визначено достатні умови існування рівномірного компактного глобального атрактора у неавтономному випадку (теореми 2.1, 3.1) [205].

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 14 наукових публікаціях: в 5 наукових статтях в провідних фахових виданнях [50, 62, 198, 204, 205], з них 2 – у фахових виданнях України, що входять до наукометричних баз даних [62, 198], 3 – в іноземних виданнях [50, 204, 205], 1 – в іншому виданні [231], а також у 8 тезах доповідей наукових конференцій [139-143, 232, 240, 241].

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися на серії спільних наукових семінарів КПІ ім. Ігоря Сікорського та механіко-математичного факультету МДУ імені М.В. Ломоносова (2012, 2014, 2015), семінарі НДВ системної математики ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського та представлені в збірниках тез доповідей таких конференцій:

- Міжнародна конференція з функціонального аналізу, присвячена 125-річчю С. Банаха (м.Львів, 2017);
- Міжнародна конференція «Системний аналіз та інформаційні технології» (м. Київ, 2013, 2014, 2015),
- Міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики (м. Київ, 2013),
- Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми у вищій школі» (м. Київ, 2013),
- Кримська міжнародна математична конференція «КММК-2013» (м. Судак, 2013),
- Міжнародна конференція, присвячена пам’яті члена-кореспондента НАН України В.С. Мельника, «Нелінійний аналіз та застосування» (м. Київ, 2015).

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, загальних висновків і списку використаних джерел, що містить 244 найменувань. Загальний обсяг роботи складає 170 сторінки друкованого тексту, з яких 125 сторінок основної частини, 14 рисунків.

В першому розділі роботи проведено огляд та аналіз наукових праць за тематикою дослідження та визначено основні проблемні питання в заданому напрямку. В другому розділі досліджено якісну динаміку слабких розв’язків еволюційної системи хвильового типу з розривною нелінійністю в скалярному випадку та асимптотичну поведінку розв’язків стохастично збуреної дисипативної динамічної системи. В третьому розділі встановлено умови існування та структурні властивості притягуючих множин для хвильового диференціально-операторного включення з функцією взаємодії субградієнтного типу. В четвертому розділі дисертаційної роботи побудовано алгоритм розв’язання задач дослідження глобальної поведінки функцій стану для еволюційних задач з нерегулярними обмеженнями та застосовано отримані результати до п’єзоелектричної задачі.

РОЗДІЛ 1
СУЧАСНИЙ СТАН ДОСЛІДЖЕНЬ КЛАСУ ПРОЦЕСІВ ТА ПОЛІВ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ ТА ІСНУЮЧІ ПІДХОДИ ДО ВИВЧЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ЗАДАЧ

В розділі описується сучасний стан досліджень одного класу складних систем механіки суцільних середовищ. Визначається проблематика розв'язання актуальних практичних задач, що зосереджені на компенсації небажаних ефектів, стабільному функціонуванні, точному позиціонуванні в складних технічних системах. Обґрунтовується вибір методів дослідження для вивчення асимптотичної поведінки розв'язків дисипативних еволюційних систем хвильового типу з нерегулярними обмеженнями, які є математичними моделями класів процесів та полів механіки суцільних середовищ.

1.1. Проблематика досліджень класів складних систем механіки контактної взаємодії

Серед основоположних інженерних дисциплін важливе місце займає механіка контактної взаємодії. Вона має надважливе значення для проектування надійного та енергозберігаючого обладнання і охоплює широке коло прикладних задач із застосуваннями як у великих технічних системах, так і в мікро- та наносистемах. Дослідження та розрахунки в таких статичних чи динамічних контактних задачах проводяться з врахуванням пружних, в'язкопружних та пластичних деформацій.

Пружним деформаціям властиве повне зникнення після того, як зовнішні сили припиняють свою дію. Початкова форма тіла відновлюється як результат дії внутрішніх сил, тобто сил пружності, які виникають у тілі під час деформації. Внаслідок пластичних деформацій початкова форма тіла не відновлюється, а залишається деформованою. Нелінійність в'язкопружних систем, в межах більшості існуючих моделей, є аналітичною та допускає лінеаризацію. Тому задачі стійкості для в'язкопружних систем виявляються простішими, ніж для систем пружно-пластичних. Крім того теоретичні дослідження в даному напрямку є більш поглибленими. Процес деформації в'язкопружних систем розгортається в часі. При цьому істотного значення набувають вид збурень та послідовність їх дії в часі, а також тривалість інтервалу часу, на протязі якого досліджується стійкість [67].

Зважаючи на вагоме прикладне значення, дослідження контактних задач активно проводяться широким колом науковців. Зокрема, квазістатичні та динамічні контактні задачі для пружних та в'язкопружних матеріалів вивчалися в роботах [39, 55, 165] та ін. Дослідження класу квазістатичних контактних задач з граничними умовами описані в роботі [165]. Динамічні контактні задачі з адгезією розглянуто в роботі [169]. Динамічна контактна задача з граничними умовами без тертя вивчалася в роботі [6], з ефектом тертя – в роботі [112]. Контактні задачі для в'язкопружного тіла з короткою та довгою пам'яттю описано в роботі [167]. Дослідження класу квазістатичних контактних задач з тертям для в'язкопружних матеріалів з субдиференціальними контактними умовами наведені в роботі [134]. Динамічні контактні задачі з адгезією і тертям та контактними субдиференціальними умовами вивчалися в роботі [111].

При дослідженні задач контактної взаємодії між тілами оперують такими основними поняттями теорії пружності: напруженням, яке діє в достатньо малих областях навколо заданої точки K; деформацією малого околу точки K; зміщенням самої точки K. Тобто, вводяться тензори: механічних напружень σ_{ij} – тензор другого рангу, що характеризує сили, які під час деформації виникають в твердому тілі; малих деформацій ε_{ij} – тензор другого рангу, що характеризує зміщення точок тіла під час деформації; вектор зміщення u_i. В позначеннях σ_{ij}, ε_{ij} індекси i, j набувають значень 1, 2, 3 (x, y, z), а розширено тензори можна записати у вигляді матриць, де діагональні елементи характеризують лінійні деформації стиску-розтягу для тензора малих деформацій, а недіагональні елементи характеризують деформацію зсуву для тензора малих деформацій [209, 237]. Тензори напружень та деформації є симетричними. Фізичні та математичні характеристики тензорів можна знайти в роботах [33, 113, 137, 162].

Одним з класів контактних задач, який набуває все більшої актуальності в сучасному житті, є п’єзоелектричні контакні задачі. Вивчення динаміки процесів, пов’язаних з п’єзоефектом, було розпочате ще в кінці XIX століття. Перші дослідження явища п’єзоефекту були проведені П. Кюрі та Ж. Кюрі. Проте саме тепер почало широко використовуватись технічне обладнання, дія якого грунтується на прямому чи зворотному п’єзоефекті. Прикладами такого обладняння є системи надточного позиціонування, системи стабілізації, контактні п’єзоелектричні детонатори, п’єзоелектричні двигуни, звукові та ультразвукові генеруючі пристрої тощо.

П’єзоелектричний ефект є оборотним процесом. Тобто матеріали, які володіють прямим п’єзоефектом – виникнення в тілі електричного заряду в результаті прикладеної до нього механічної сили – також демонструють зворотний п’єзоелектричний ефект – виникнення механічної деформації тіла в результаті прикладеного до нього електричного поля (рис. 1.1).

Прямий п’єзоефект використовується в п’єзозапальничках, в силовимірювальних датчиках і датчиках тиску рідин і газів, в якості чутливого елемента в мікрофонах, гідрофонах, прийомного елемента сонарів, в контактному п’єзоелектричному детонаторі. Зворотний п’єзоелектричний ефект використовується в п’єзовипромінювачах звуку в повітря, ультразвукових випромінювачах, в системах надточного позиціонування, для подачі чорнила в струменевих принтерах, в п’єзоелектричних двигунах, в адаптивній оптиці. Прямий і зворотний п’єзоефекти одночасно використовуються в кварцевих резонаторах, в п’єзотрансформаторах для зміни напруги високої частоти.

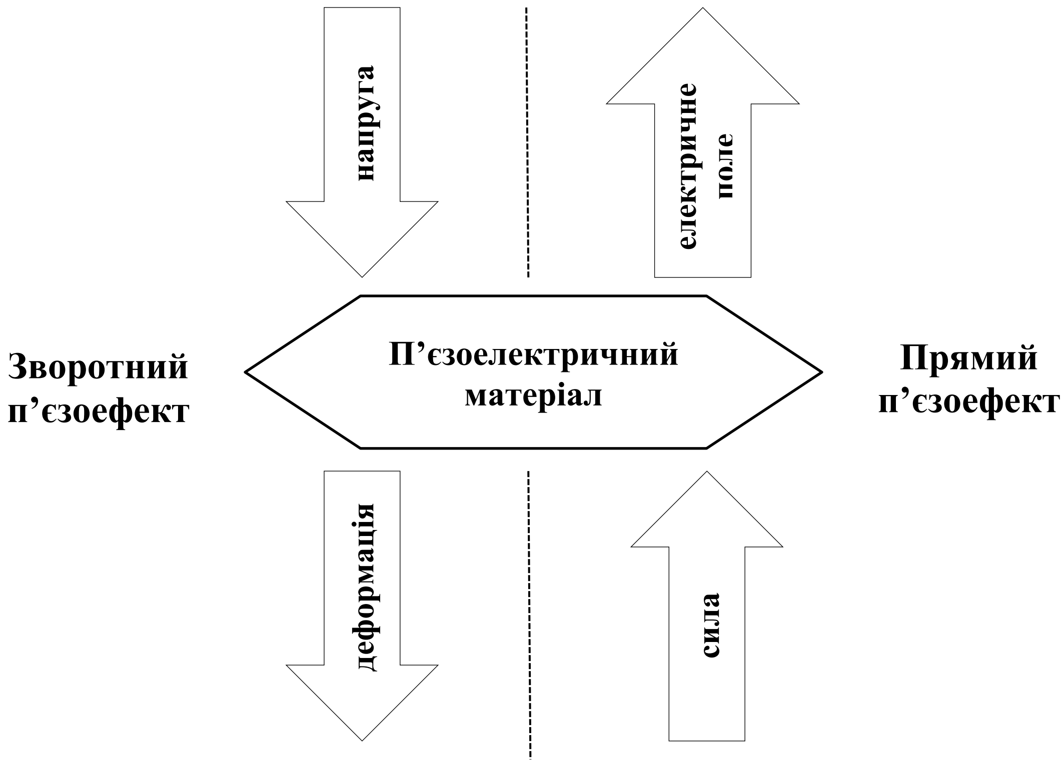

Рис. 1.1 Схематичне зображення прямого та зворотного п'єзоефектів

Деякі матеріали є природними п'єзоелектриками, зокрема людська шкіра, кістки, кварц, сегнетова сіль, турмалін тощо. Але наявний в них п'єзоелектричний ефект є слабким. Тому науковцями були синтезовані новий матеріал – п'єзокераміка, яка володіє покращеними властивостями [154, 188]. Вперше п'єзокераміку було синтезовано в середині XX століття, а першим застосуванням сегнетокераміки у п'єзотехніці було використання титанату барію і його твердих розчинів. П'єзокераміка є складовим елементом в багатьох пристроях, що використовуються в біомеханіці, біомедицині, інженерній механіці.

Опис фізичної поведінки як прямого, так і зворотного п'єзоефекта можна знайти в роботах [13, 58]. Електромеханічні властивості п'єзоматеріалів описуються двома основними співвідношеннями, які вперше були сформульовані німецьким фізиком-теоретиком W. Voigt. Прямий п'єзоефект можна записати у вигляді [41, 58]:

$$D_i = p_{ijk}\varepsilon_{jk} + \beta_{ij}E_j, \qquad (1.1)$$

де D_i – тензор електричного зміщення,

p_{ijk} – п'єзомодуль (відношення напруги до електричного поля),

ε_{jk} – тензор деформації,

β_{ij} – тензор діелектричної проникності,

E_j – електричне поле.

Зворотний п'єзоефект описується рівнянням:

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl} - p_{kij}E_k, \qquad (1.2)$$

де σ_{ij} – поле напруги,

a_{ijkl} – тензор пружності.

Результати математичного моделювання явища п'єзоефекту наведені в роботах [27, 56, 121], де розглядалися п'єзоелектричні контактні задачі. В таких задачах описується взаємодія між здатним до деформації тілом, що володіє п'єзоелектричними властивостями, та жорскою чи пружною опорою, зважаючи на поверхневі ефекти, що виникли як наслідок такої взаємодії, зокрема тертя, адгезію тощо.

В загальному випадку, сили, що діють на п'єзоелектричне тіло, можна описати у такому вигляді [152]:

$$f = f_e + f_i,$$

де f_e – задана зовнішня сила, прикладена до тіла,

f_i – сила, яка є реакцією на наявні поверхневі ефекти від взаємодії тіла з опорою; це може бути багатозначна функція від зміщення u.

На рисунках 1.2, 1.3 зображені графіки законів монотонного та немонотонного ефектів тертя [150], зокрема на рис. 1.3 c) показаний закон злипання-ковзання. На рис. 1.4 зображені контактні закони адгезії [150].

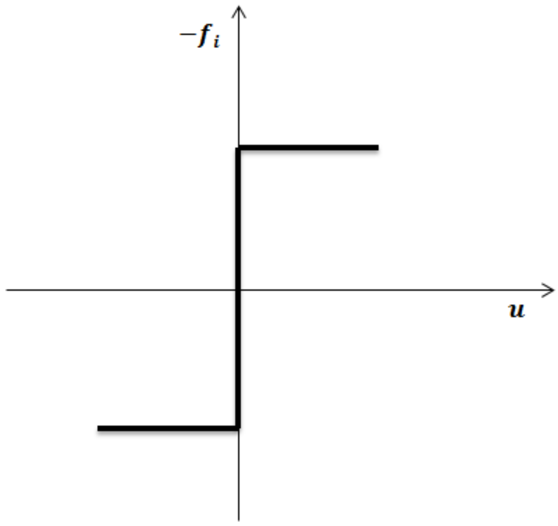

Рис. 1.2 Графік закону монотонного ефекту тертя

Оскільки поверхневі ефекти можуть мати як монотонну, так і немонотонну природу, для дослідження п’єзоелектричних контактних моделей застосовують варіаційні або хеміваріаційні нерівності. Вивчення математичних моделей контактних явищ для п’єзоелектричних матеріалів в термінах варіаційних нерівностей розпочате в роботі [166]. Монотонні умови, що породжують варіаційні нерівності, вивчалися в роботах [37, 38, 148]. Монотонність законів тертя приводить до розгляду опуклих суперпотенціалів [135], які приймаються як варіаційне формулювання. Немонотонність притаманна більш реалістичним законам тертя [63] на поверхні тіла, які однаково добре описують і явище адгезії. Такі поверхневі закони можуть отримуватись з неопуклих суперпотенціалів, представлених зокрема в роботах [144, 145, 148], які породжують хеміваріаційні нерівності у випадку виконання класичних граничних умов.

Поняття хеміваріаційної нерівності як варіаційне формулювання задач механіки з негладкими та неопуклими функціоналами енергії було запропоноване P. Panagiotopoulos [136, 151, 152]. Математичні результати для хеміваріаційних нерівностей отримані в роботах [47, 118, 119, 130, 132, 138, 149].

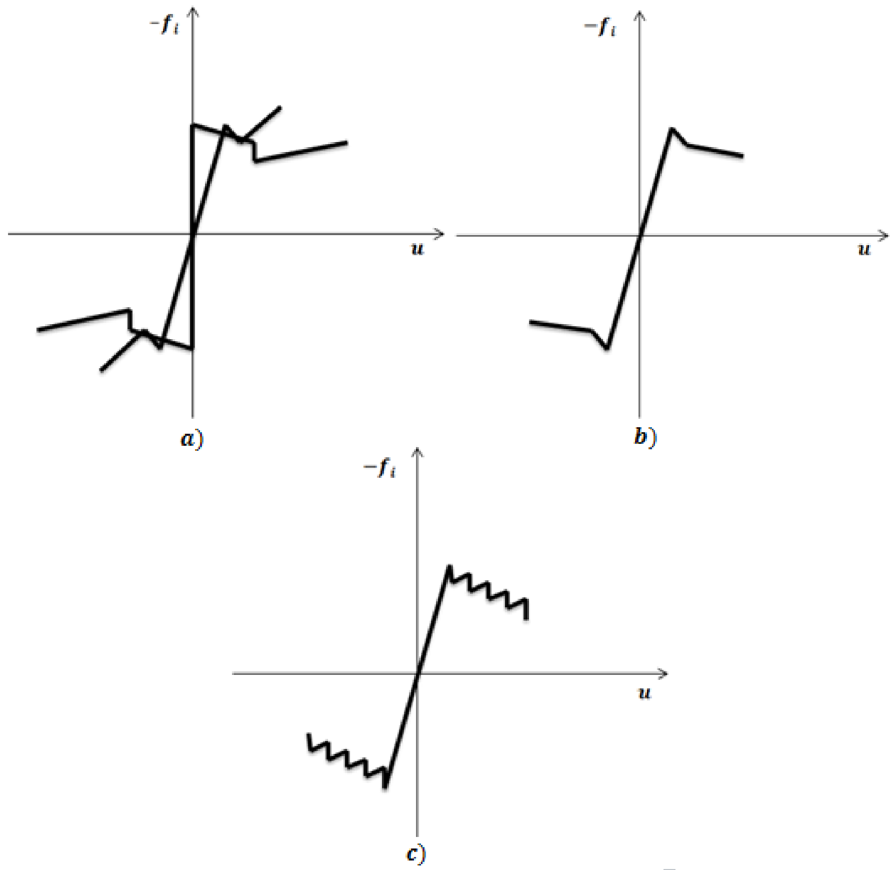

Рис. 1.3 Графіки законів немонотонних ефектів тертя

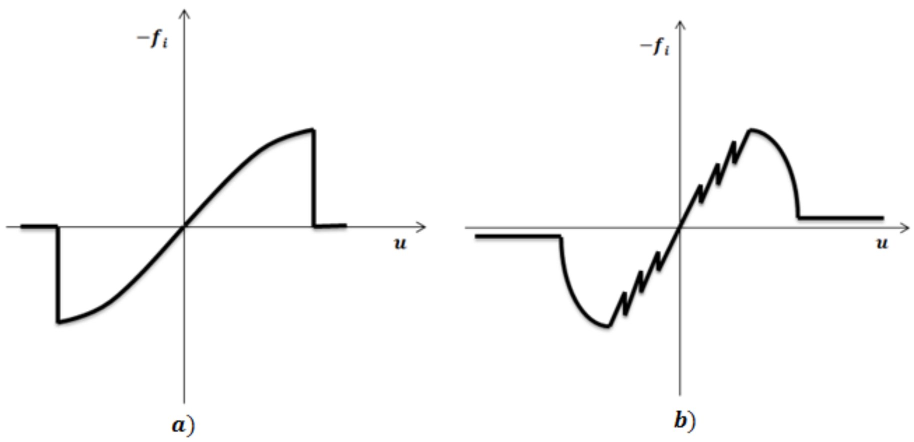

Рис. 1.4 Графіки контактних законів адгезії

Дослідження класу п’єзоелектричних квазістатичних контактних задач для в’язкопластичних матеріалів проводились в роботі [11]. Динамічні п’єзоелектричні контактні задачі з адгезією розглядались в роботі [168].

Існування та єдиність розв'язків хеміваріаційних нерівностей, що моделюють контакт з тертям для в'язкопружних п'єзоматеріалів, вперше доведене в роботі [131]. Існування та єдиність слабкого розв'язку динамічної п'єзоелектричної контактної задачі без поверхневих ефектів, використовуючи метод Гальоркіна та теорію напівгруп, доведені в роботі [27].

Практична затребуваність зумовила потребу в різнобічному, системному дослідженні п'єзоелектричних процесів та полів з наявним різного роду керуванням. Використання таких складноструктурованих матеріалів як п'єзокераміка вимагає виваженого підходу до вибору керування п'єзосистемами. До найпростіших видів керування сигналом збудження п'єзокерамічного елемента відносяться частотні, амплітудні, фазові [239]. Але такі керування мають ряд недоліків. Частотне керування не завжди допускає зміну частоти в досить широких межах. При амплітудному керуванні несинусоїдальна форма напруги збуджень може призвести до «паразитних» коливань, що негативно впливає на параметри і показники роботи системи. Фазовий спосіб керування параметрами зазвичай використовується в сукупності з іншими видами (таке поєднання зіштовхується з цілим рядом проблем при реалізації), оскільки самостійного значення до теперішнього часу не набув. Також особливої уваги заслуговує імпульсний спосіб керування. Для п'єзоелектричних задач дуже зручно та ефективно використовувати керування у формі зворотного зв'язку. При такому керуванні швидка зміна керуючої напруги викликає швидку зміну позиції. Ця особливість є важливою в динамічних режимах роботи різноманітного обладнання, зокрема скануючих мікроскопів, систем стабілізації зображення, віброкомпенсаторів, генераторів ударних хвиль, перемикачів клапанів тощо.

Математичне представлення керування у формі зворотного зв'язку може мати різні форми, зокрема, інтегральну [15, 106, 159], субдиференціальну. Субдиференціальним визначаючим співвідношенням та субдиференціальним граничним умовам присвячені роботи [34, 136, 152, 242]. Задача контакту пружного в’язкопластичного п’єзоелектричного тіла та опори з тертям та субдиференціальними граничними умовами розглядалась в роботі [133]. В роботі [119] отримане існування слабких розв’язків абстрактного еволюційного включення другого порядку з некоерцитивним згасанням та багатозначним доданком в субдиференціальній формі, що описує динамічну контактну задачу з тертям між плоским здатним до дефомації п’єзоелектричним тілом та жорсткою опорою.

Зважаючи на те, що в більшості випадків прямий п’єзоелектричний ефект використовується дла побудови різного роду сенсорів, а зворотний – для побудови актуаторів, важливою умовою моделювання є точність позиціонування. Такі ефекти як нелінійність, гістерезис та крип, притаманні п’єзокераміці, є причинами сильних спотворень та відхилень від необхідних траєкторій роботи пристроїв. При значних керуючих полях п’єзокерамічні матеріали описуються нелінійною залежністю деформації від поля або від керуючої напруги. Деформація п’єзокераміки є складною функцією зовнішнього електричного поля. Приблизне порогове значення полів, при якому стають відчутними нелінійні ефекти, складає 100 В/мм. Тому для правильної роботи обладнання варто застосовувати керуючі поля в межах лінійності п’єзокерамічних матеріалів. Також п’єзокерамічним елементам притаманна повзучість, крип, що характеризується запізненням реакції на зміну величини керуючого електричного поля. Значний вплив повзучість становить при проведенні локальних вимірів та на початковому етапі роботи обладнання. Часові затримки дозволяють зменшити ефект повзучості шляхом часткової компенсації запізнення обладнання. Ефект гістерезису характеризується неоднозначністю залежності подовження елементу від напрямку зміни електричного поля. Наслідком гістерезису є траєкторна роззосередженість п’єзокераміки за одних і тих же керуючих напруг в залежності від напрямку руху. Гістерезисний ефект спостерігається в усіх сенсорах та актуаторах, дія яких грунтується на використанні «розумних» матеріалів [9, 176]. Ефект гістерезису може призвести до порушення стабільності замкнутої системи. В зв’язку з цим науковцями активно розробляються моделі гістерезису та шляхи його компенсації [9, 10, 14, 25, 52, 53, 59, 64-66, 107, 108, 110, 125, 173, 174, 176-178, 185, 186, 189, 233]. Зазвичай моделі гістерезису поділяють на фізичні та феноменологічні, такі як модель Прейзаха [14, 29, 42, 122, 171, 185] та модель Дюгема [29, 66, 122]. Дослідження моделі з фізичним гістерезисом приведені в роботах [66, 170], гістерезисна модель за допомогою нейронних мереж вивчається в роботах [109, 115, 123, 181], зокрема в роботі [115] задача оцінки гістерезису для механізму п’єзоелектричного позиціонування грунтується на функції сили тертя від гістерезису. В роботі [190] пропонується адаптивна схема керування для п’єзоелектричного актуатора з датчиком гістерезису, де гістерезисний ефект описується класичною моделлю Дюгема. В роботі [120] розроблена нелінійна динамічна модель актуатора з гістерзисом, електромеханічна модель з вхідною напругою описана в роботі [46], модель з керуючим зарядом розглядається в роботі [1]. Математичні методи апроксимації вхідної-вихідної поведінки гістерезису описані в роботах [14, 46, 57, 124, 185],

Застосовуючи такі підходи, для компенсації та оцінки гістерезисного ефекту були запропоновані різні методи керування. Для керування класом нелінійних систем з невідомим гістерезисом Прандтля-Ішлінського в роботі [174] представлений адаптивний метод проектування контроллера. Для компенсації нелінійності гістерезису при проектуванні датчика гістерезису була запропонована стратегія керування з прямим-зворотним зв’язком із регулятором зі зворотним зв’язком [116]. В роботі [20] запропоноване адаптивне керування для динамічної системи з гістерезисом з дискретним часом, в якій гістерезисний ефект описується моделлю Прандтля-Ішлінського без побудови зворотного гістерезису. В роботі [206] для класу невизначених збурених нелінійних системи зі стогим зворотним зв’язком, в яких спостерігається гістерезис Прандтля-Ішлінського, була використана схема покрокового поверненням з методом надійного адаптивного динамічного поверхневого керування. Для ідентифікації й компенсування ефекту гістерезису в роботі [43] була використані модифікована модель гістерезису Прандтля-Ішлінського і зворотна до неї модель. Тим не менш, модель гістерезису Прандтля-Ішлінського має основний недолік – вона не може демонструвати ні асиметричні петлі гістерезису, ні насичений вихід гістерезису. Конструкція датчика гістерезису може викликати складність побудови контролера, а його неправильна конструкція може ускладнити роботу контролера. В роботі [155] пропонується інтегральне керування позицією для системи п’єзоелектричного приводу, яке не вимагає датчика гістерезису чи схеми, що може компенсувати гістерезисний ефект. Більшість з вищевказаних моделей володіє великою складністю, і тому можуть виникати труднощі при їх поєднанні з конструкцією контролера. Декілька адаптивних схем управління, що включають гістерезис типу «мертвого ходу», запропоновані в роботах [2, 175, 178, 182]. Загальною рисою цих схем керування є те, що вони пов’язані з побудовою зворотного гістерезису для пом’якшення впливу гістерезисного ефекту. Ці результати забезпечують теоретичну основу для подальших досліджень в даному напрямку.

Зважаючи на швидкий розвиток нанонауки і нанотехнологій, п’єзоелектричне позиціонування станів набуває все більшої популярності для нанометричного роздільної здатності зміщення в багатьох галузях промисловості [35, 51, 105, 128, 160], зокрема для атомно-силових мікроскопів, скануючих тунельних мікроскопів, мікроманіпуляторів та іншого обладнання. Система п’єзоелектричного позиціонування зазвичай складається з чотирьох компонентів: механізм вигину-петлі, п’єзокерамічного приводу, п’єзоелектричного ланцюга приводу і датчика зміщення. Моделюванням такої системи, проектуванням контролера і застосуваннями цікавляться багато науковців у зв’язку з складною гістерезисною нелінійністю, що спостерігається в п’єзокерамічному приводі [12, 19, 114, 161, 164, 207]. Процеси моделювання та побудови контролера взаємопов’язані, тому моделі п’єзоелектричного позиціонування повинні враховувати динамічні ефекти від частотних характеристик приводу, гістерезису і нелінійної електричної поведінки. В роботах [19, 164] етапи позиціонування були описані лінійною системою і увага акцентувалась на компенсації гістерезису. Зокрема, в роботі [164] розглядалась компенсація зворотного гістерезису у випадку лінійної системи першого порядку. В роботі [19] був розроблений підхід стійкого керування для компенсації ефектів гістерезису у випадку системи другого порядку. В роботах [12, 114, 161, 207] нелінійності гістерезису розглядалися як порушення, а етапи позиціонування описувались лінійними системами різного порядку, тому були розроблені різні підходи керування для кожної окремої системи. В роботі [54] описані етапи п’єзоелектричного позиціонування, що відображають динамічні ефекти, пов’язані з частотними характеристиками приводу, гістерезисом і нелінійною електричною поведінкою. В якості однієї з моделей гістерезису для опису ефекту гістерезису на етапі позиціонування приймалась динамічна модель гізтерезису типу «мертвого ходу».

Для вивчення динаміки розв’язків наведених класів задач як правило застосовувались чисельні методи, використання яких вимагало суттєвого спрощення досліджуваних моделей, припущень щодо гладкості, монотонності функції взаємодії, значних обчислювальних ресурсів тощо. В більшості випадків при дослідженні розглянутих об’єктів виникають труднощі через незастосовність існуючого інструментарію для вивчення їх динаміки, неможливість врахування певних ефектів (які значно ускладнюють досліджувану систему), що в свою чергу викликає похибки і неточності отриманих результатів. Це зумовлюється, по-перше, нелінійністю, притаманною таким системам, по-друге, ця нелінійність може носити розривний характер тощо. Тому для ефективного дослідження необхідним є застосування не лише наближених, а й точних методів при вивченні поведінки таких процесів та полів. Насьогодні найбільш поширеними є наближені методи, оскільки існуючий математичний апарат точних досліджень не може в повній мірі, а іноді й взагалі, забезпечити дослідницький процес. Розробка нових методів вивчення поведінки розв'язків складних еволюційних моделей з негладкими, розривними правими частинами, зокрема якісних досліджень, активізувалась лише в останні роки і набуває все більшого поширення. Використання математичного інструментарію якісних досліджень дозволить обгрунтовувати чисельні дослідження та вивчати динаміку систем при часі $t \to \infty$.

1.2 Методологія якісного аналізу динаміки розв'язків нелінійних еволюційних задач без єдиності

Динаміка розв'язків класів процесів та полів різної природи, зокрема механіки суцільних середовищ, описується різного типу диференціальними рівняннями з частинними похідними. Варто зауважити, що у випадку нестаціонарних процесів зазвичай в дослідженнях використовують функції часу та стану u, які кожній парі $\{x, t\}$ з $Q \times T$, де Q – просторова область, а T – інтервал часу, ставлять у відповідність дійсне число або вектор $u(x, t)$. В даному випадку час і простір є рівноправними величинами. Однак, для математичного опису нестаціонарних процесів існує зручніший підхід. Він полягає в тому, що в дослідженнях використовують функції часу, які кожному моменту часу t ставлять у відповідність функцію стану виду $u(\cdot, t)$. Таким чином, розглядаються функції, які визначені на часовому інтервалі T, а значення приймають в певному просторі функцій стану, зокрема в гільбертовому просторі Соболєва H_0^1. Для роботи з такими функціями теоретичний апарат розроблений зокрема в [211, глава IV].

Враховуючи природу ефектів, що притаманні складним системам, виникає необхідність в послабленні умов на параметри відповідних математичних моделей, зокрема на функцію взаємодії. В дисертаційній роботі розглядаються еволюційні задачі хвильового типу з функціями взаємодії, на які не накладається жодних умов стосовно гладкості чи неперервності. Тож в загальному випадку вони можуть бути розривними, що є більш природнім з фізичної точки зору. Для таких систем не є можливим застосування класичного математичного апарату для знаходження розв’язків та встановлення їх властивостей. У випадку розривної функції взаємодії один з підходів полягає в переході від диференціального рівняння до диференціального включення, множина розв’язків якого включає в себе усі розв’язки початкового рівняння. Взагалі перехід до операторних включень використовують для вивчення односторонніх задач математичної фізики, для роботи з диференціальними рівняннями з частинними похідними, диференціальні оператори яких допускають розрив по фазовій змінній, з диференціальними рівняннями з розривною правою частиною тощо. Зручність такого підходу полягає у тому, що для дослідження диференціальних включень вже розроблений потужний математичний апарат, зокрема в роботах [5, 44, 48, 49, 72-75, 80-82, 84, 86-92, 94-98, 103, 129, 153, 156, 157, 172, 192-194, 199, 201-203, 212-218, 220-226, 230, 243]. Асимптотична поведінка розв’язків хвильових рівнянь при різних обмеженнях на функцію взаємодії досліджувалась в роботах J. Ball [7, 8], J. Sell [163], М.З. Згуровського та ін. [201-203] тощо. Зокрема, випадок неперервної функції взаємодії вивчався в роботі [8]. Випадок неавтономного рівняння з неперервною нелінійністю розглядався в роботах О.В. Капустяна [73], В.С. Мельника [96, 127], J. Valero [183]. Випадок, коли розширення функції взаємодії допускає максимально монотонний графік, вивчався М.З. Згуровським та його учнями [73, 82, 192, 217]. В неавтономному випадку існування розв’язків для задачі такого типу з немонотонними поверхневими ефектами доведене в роботі [119].

Таким чином, від деякого вихідного хвильового рівняння переходять до еволюційного включення, що дозволяє отримати ряд важливих результатів, необхідних для опису динаміки процесу. Включення досліджується в рамках еволюційної трійки просторів $(V; H; V^*)$ в фазовому просторі $X = V \times H$, де V – дійсний рефлексивний сепарабельний банахів простір, неперервно та щільно вкладений в дійсний гільбертів простір H (H ототожнюється з його топологічно спряженим простором H^*), V^* – спряжений до V простір. Має місце ланцюжок неперервних та щільних вкладень:

$$V \subset H \equiv H^* \subset V^*$$

[211, розділ I].

У випадку розривної функції взаємодії питання існування розв'язків в звичайному сенсі в даному випадку є некоректним. З цієї причини вводиться поняття слабкого розв'язку. Доведення існування слабкого розв'язку початково-крайової задачі на довільному інтервалі та встановлення його властивостей дозволяє отримати результат щодо можливості продовження його до глобального, тобто визначеного на проміжку $[0, +\infty)$. Виведення апріорних оцінок дає змогу встановити характер залежності слабких розв'язків від початкових даних.

Дослідження якісної поведінки розв'язків еволюційних систем в нескінченновимірних просторах зазвичай пов'язують з доведенням існування та встановленням топологічних та структурних характеристик глобального та траєкторного атракторів [80, 201-203, 220]. Для випадку, коли система допускає неоднозначну розв'язність, теорія глобальних та траєкторних атракторів узагальнена в роботах [90, 202, 203, 230] і базується на понятті багатозначного напівпотоку. Методи багатозначних напівпотоків використовуються в задачах, де неможливо отримати єдиність розв'язку задачі Коші, при цьому її розв'язки розглядаються в кожен момент часу. Тобто, багатозначний напівпотік є багатозначним аналогом класичних напівгруп.

Дамо визначення багатозначного напівпотоку. Нехай X – банахів простір, а $P(X)$ – множина всіх непорожніх підмножин з X.

Означення. Багатозначне відображення $\mathcal{G}: \mathbf{R}_+ \times X \to P(X)$ називається багатозначним напівпотоком, якщо виконуються такі властивості:

1. $\mathcal{G}(0,\cdot) = I_X$ – тотожнє відображення X;
2. для будь-яких t_1, $t_2 \in \mathbf{R}_+$ та для будь-якого $x \in X$ виконується таке вкладення:

$$\mathcal{G}(t_1 + t_2, x) \subset \mathcal{G}(t_1, \mathcal{G}(t_2, x)),$$

де $\mathcal{G}(t, B) = \bigcup_{x \in B} \mathcal{G}(t, x)$, $B \subset X$ [203, означення 1.1].

Означення. Багатозначний напівпотік $\mathcal{G}$ називається строгим [203, с. 5], якщо для будь-яких t_1, $t_2 \in \mathbf{R}_+$ та для будь-якого $x \in X$

$$\mathcal{G}(t_1 + t_2, x) = \mathcal{G}(t_1, \mathcal{G}(t_2, x)).$$

Означення 1.1 Багатозначний напівпотік $\mathcal{G}\colon \boldsymbol{R}_+ \times X \to P(X)$ називається асимптотично компактним, якщо для будь-якої такої послідовності $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$, $\varphi_n \in \mathcal{G}(t_n, \varphi_n(0))$ $\forall n \geq 1$, що $\{\varphi_n(0)\}_{n\geq 1}$ – обмежена, і для будь якої послідовності $\{t_n\}_{n\geq 1}$: $t_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, послідовність $\{\varphi_n(t_n)\}_{n\geq 1}$ має збіжну підпослідовність [8, с. 35].

Зауваження 1.1 Якщо для довільної непорожньої обмеженої множини $B \subset X$ множина $\bigcup_{t\geq T} \mathcal{G}(t, B)$ є обмеженою для деякого $T = T(B)$, то багатозначний напівпотік $\mathcal{G}$ асимптотично компактний тоді і тільки тоді, коли довільна послідовність $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ така, що для всіх $n \geq 1$

$$\xi_n \in \mathcal{G}(t_n, B), \quad t_n \to +\infty,$$

передкомпактна в X [80, 126, 203].

Означення. Відображення $x(\cdot)\colon \mathbf{R}_+ \to X$ називається траєкторією багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$, що відповідає початковому значенню x_0, якщо для будь-яких $t, \tau \in \mathbf{R}_+$ мають місце такі умови:

$$x(t + \tau) \in \mathcal{G}(t, x(\tau)), \;\; x(0) = x_0$$

[203, означення 1.2].

Для вивчення глобальної динаміки розв'язків математичних моделей досліджуваних в дисертаційній роботі об'єктів будуть використані методи та принципи теорії монотонних операторів [117, 210, 211], теорії глобальних та траєкторних атракторів для багатозначних напівпотоків, розробленої та розвинутої такими відомими вченими як М.Й. Вішик, М.З. Згуровський, В.С. Мельник, О.В. Капустян, П.О. Касьянов, В.В. Чепижов, І.Д. Чуєшов, J. Ball та їх учнями в роботах [7, 8, 21-24, 45, 70, 71, 73, 75-79, 82-89, 89-96, 99-104, 126, 127, 191, 194-197, 200-203, 227, 228, 234-236, 244]. Починаючи з основоположної роботи [126], ідеї та методи класичної теорії глобальних атракторів систематично застосовуються у випадку неєдиності розв'язку задачі Коші. Сучасні дослідження в цій області з багатьма застосуваннями містяться в монографіях [80, 203].

Для дослідження якісної поведінки розв'язків розглядається конструкція, представлена в роботах [7, 126, 127].

Означення. Множина $\mathcal{A}$ називається глобальним атрактором для багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$, якщо виконуються такі умови [203, розділ 1]:

1. для всіх $t \in \mathbf{R}_+$
$$\mathcal{A} \subset \mathcal{G}(t, \mathcal{A}),$$
тобто $\mathcal{A}$ – негативно напівінваріантна множина;
2. $\mathcal{A}$ – притягуюча множина, тобто, для будь-якої обмеженої множини $B \subset X$ виконується таке співвідношення:
$$\operatorname{dist}(\mathcal{G}(t, B), \mathcal{A}) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \tag{1.3}$$
де $\operatorname{dist}(C, D) = \sup_{c \in C} \inf_{d \in D} \| c - d \|_X$ – напівметрика Хаусдорфа;
3. $\mathcal{A} \subset Y$ для будь-якої замкнутої множини $Y \subset H$, що задовольняє співвідношення (1.3) (мінімальність).

Означення. Глобальний атрактор називається інваріантним, якщо виконується така рівність:

$$\mathcal{A} = \mathcal{G}(t, \mathcal{A})$$

для всіх $t \geq 0$ [203, розділ 1]. Зазначимо, що з означення глобального атрактора випливає його єдиність.

В роботах М.Й. Вішика, В.В. Чепижова було розроблено апарат дослідження потраєкторної динаміки розв'язків в розширеному фазовому просторі. В основі даної теорії лежить поняття траєкторного атрактора [23, 24]. Розглядається сімейство $\mathcal{K}_+$ всіх слабких розв'язків досліджуваної задачі, визначених на проміжку $[0, +\infty)$. Зауважимо, що для автономних задач простір траєкторій $\mathcal{K}_+$ – трансляційно інваріантний, тобто для будь-якого $u(\cdot) \in \mathcal{K}_+$ та для будь-якого $h \geq 0$ справедливо, що $u_h(\cdot) \in \mathcal{K}_+$, де $u_h(s) = u(h+s)$ при $s \geq 0$. В просторі $\mathcal{K}_+$ розглядається топогія, індукована з простору Фреше $C^{loc}(\mathbf{R}_+; X)$, тобто

$$f_n(\cdot) \to f(\cdot) \quad \text{в} \quad C^{loc}(\mathbf{R}_+; X) \quad \text{при} \quad n \to \infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\, M > 0 \;\; \Pi_M f_n(\cdot) \to \Pi_M f(\cdot) \quad \text{в} \quad C([0, M]; X) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

де Π_M – оператор звуження на проміжок $[0, M]$ [184].

На $\mathcal{K}_+$ визначають трансляційну напівгрупу $\{T(h)\}_{h\geq 0}$, $T(h)u(\cdot) = u_h(\cdot)$, $h \geq 0$, $u \in \mathcal{K}_+$. Крім того, вводиться поняття повної траєкторії.

Означення. Функція $u \in C^{loc}(\mathbf{R}; X) \cap L_\infty(\mathbf{R}; X)$ називається повною траєкторією для досліджуваної задачі, якщо для будь-якого $h \in \mathbf{R}_+$ $\Pi_+ u_h(\cdot) \in \mathcal{K}_+$, де Π_+ – оператор звуження на проміжок $[0, +\infty)$ [184, с. 180].

Позначимо через $\mathcal{K}$ сімейство всіх повних траєкторій задачі. Кажуть, що повна траєкторія $\varphi \in \mathcal{K}$ є стаціонарною, якщо $\varphi(t) = z$ для всіх $t \in \mathbf{R}$ і для деякого $z \in X$ [7, с. 486].

Означення. Множина $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}_+$ називається траєкторним атрактором в просторі траєкторій $\mathcal{K}_+$ відповідно до топології $C^{loc}(\mathbf{R}_+; X)$, якщо виконуються такі умови:

1. $\mathcal{U}$ – компактна множина в просторі $C^{loc}(\mathbf{R}_+;X)$ і обмежена множина в просторі $L_\infty(\mathbf{R}_+;X)$;
2. $\mathcal{U}$ – строго інваріантна множина щодо трансляційної напівгрупи $\{T(h)\}_{h\geq 0}$, тобто $T(h)\mathcal{U}=\mathcal{U}$ для всіх $h\geq 0$;
3. $\mathcal{U}$ – притягуюча множина в просторі траєкторій $\mathcal{K}_+$ в топології $C^{loc}(\mathbf{R}_+;X)$, тобто, для будь-якої обмеженої (в просторі $L_\infty(\mathbf{R}_+;X)$) множини $B\subset\mathcal{K}_+$ і довільного номера $M\geq 0$ справджується таке співвідношення:

$$dist_{C([0,M];X)}(\Pi_M T(t)B,\Pi_M\mathcal{U})\to 0 \quad \text{при} \quad t\to+\infty,$$

де Π_M – оператор звуження на проміжок $[0,M]$ [184, означення 1.2].

Важливим етапом досліджень є встановлення існування функції типу Ляпунова для задачі, що дозволяє отримати ряд структурних властивостей атрактора.

Означення. $\mathcal{V}:X\to\mathbf{R}$ є функцією типу Ляпунова для багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$, якщо:

– $\mathcal{V}$ – неперервна функція;
– $\mathcal{V}(\varphi(t))\leq\mathcal{V}(\varphi(s))$ для довільних $\varphi\in\mathcal{K}$ та $t\geq s\geq 0$;
– якщо $\mathcal{V}(\psi(t))$ є сталою функцією для деякої повної траєкторії ψ і для всіх $t\in\mathbf{R}$, то ψ – стаціонарна [7, с. 486].

Доведення існування глобального атрактора в фазовому просторі потребує виконання умов такої теореми.

Теорема 1.1 Нехай багатозначний напівпотік $\mathcal{G}$ – асимптотично компактний, і нехай кожна траєкторія $\varphi\in\mathcal{G}$, $\varphi:[0,+\infty)\to X$ – неперервне відображення з проміжку $(0,+\infty)$ в простір X. Припустимо, що існує функція Ляпунова $\mathcal{V}$ для багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$. Нехай множина точок спокою для багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$ – обмежена. Тоді багатозначний напівпотік $\mathcal{G}$ – точково дисипативний [8, с. 35], тож для нього існує глобальний атрактор $\mathcal{A}$. Для кожної повної траєкторії ξ з $\mathcal{A}$ граничні множини $\alpha(\xi)$, $\omega(\xi)$ – зв'язні підмножини множини точок спокою для багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$, на якій функція $\mathcal{V}$ – стала. У випадку повної незв'язності множини точок спокою (зокрема, якщо вона зліченна), існують границі

$$z_{-} = \lim_{t\to-\infty} \xi(t),$$

$$z_{+} = \lim_{t\to+\infty} \xi(t),$$

і z_{-}, z_{+} – точки спокою; для кожної траєкторії $\varphi \in \mathcal{G}$ $\varphi(t)$ прямує до точки спокою при $t \to +\infty$ [8, теорема 2.7].

Існування траєкторного атрактора та його зв'язок з глобальним та простором повних траєкторій встановлює така теорема.

Теорема 1.2 Нехай для багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$ існує глобальний атрактор $\mathcal{A}$. Припустимо, що виконуються такі умови: для будь-якої послідовності $\{\varphi_n(\cdot)\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{K}_{+}$, що задовольняє умову $\varphi_n(0) \to \varphi_0 \in \mathcal{A}$ в просторі X, існує таке $\varphi(\cdot) \in \mathcal{K}_{+}$, $\varphi(0) = \varphi_0$, що для деякої підпослідовності послідовність $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ в просторі X при $n \to \infty$ для всіх $t \geq 0$. Тоді формула

$$\mathcal{U} = \Pi_{+}\{\varphi(\cdot) \in \mathcal{K}: \varphi(0) \in \mathcal{A}\} = \Pi_{+}\mathcal{K}$$

визначає траєкторний атрактор в просторі траєкторій $\mathcal{K}_{+}$ [203, теорема 1.12].

Траєкторний атрактор, так би мовити, є глобальним атрактором для напівгрупи зсувів. Глобальний та траєкторний атрактори описують всю динаміку системи.

Означення. Багатозначний напівпотік $\mathcal{G}: \mathbf{R}_{+} \times X \to P(X)$ задовольняє flattening-властивість, якщо для кожної обмеженої множини $B \subset X$ та $\varepsilon > 0$ існує $t_0(B, \varepsilon)$ та скінченновимірний підпростір E простору X такі, що для обмеженого проектора $P: X \mapsto E$ множина $P(\bigcup_{t>t_0} \mathcal{G}(t, B))$ – обмежена в просторі X і

$$(I-P)(\cup_{t>t_0} \mathcal{G}(t,B)) \subset B(0,\varepsilon)$$

[68, означення 2.7].

Виконання flattening-властивості трактується як скінченновимірність динаміки всіх слабких розв'язків з точністю до малого параметра ε. Умови виконання flattening-властивості для багатозначного напівпотоку встановлюють такі леми.

Лема 1.1 Якщо багатозначний напівпотік $\mathcal{G}$ в повному метричному просторі X – асимптотично компактний, то він є ω-гранично компактним [68, лема 2.4].

Лема 1.2 Нехай $\mathcal{G}$ – багатозначний напівпотік в рівномірно опуклому банаховому просторі X. Якщо багатозначний напівпотік $\mathcal{G}$ – ω-гранично компактний, то він задовольняє flattening-властивість [68, лема 2.6].

У випадку стохастично збурених процесів та полів для дослідження якісної поведінки таких об'єктів застосовується методологія, що базується на ідеях та принципах теорії випадкових атракторів. Зокрема, в роботах [30-32] в якості адекватного математичного апарату для опису динаміки стохастично збурених еволюційних систем було запропоновано поняття випадкового атрактора, який був застосований до стохастично збурених систем реакції-дифузії і 2D-системи Нав'є-Стокса, до рівняння Бюргерса, керованого білим шумом, і нелінійного хвильового рівняння з гладким нелінійним доданком. Останнім часом з'явилося багато результатів щодо встановлення різних властивостей випадкових атракторів (див. роботи [3, 26]). Випадкові атрактори для стохастичного згасаючого нелінійного хвильового рівняння були досліджені в роботах [40, 187, 208]. Теорія випадкових атракторів була узагальнена для багатозначного випадку в роботах [17, 18, 71] для систем із притягуючою випадковою компактною множиною, а в роботах [61, 70, 78] для компактних систем, які є дисипативними за ймовірністю. В роботах [32, 40, 208] при додаткових умовах гладкості на функцію взаємодії автори довели існування та дослідили розмірність випадкового атрактора для стохастичного потоку, породженого хвильовим рівнянням. Використовучи підхід рівнянь енергії, в роботі [187] було доведено існування випадкового атрактора для стохастичного хвильового рівняння з критичними показниками в просторі $\mathbf{R}^3$. В роботі [60] були отримані теореми про існування глобального атрактора для багатозначних динамічних процесів у неавтономному випадку, коли функція взаємодії є гладкою лише по часовій змінній.

1.3 Висновки до розділу 1

В даному розділі описано сучасний стан та проблематику досліджень класу фізико-механічних процесів, математичними моделями яких є нелінійні хвильові об’єкти. Виявлено, що вибір керування та параметрів взаємодії для надійного функціонування таких систем зіштовхується з рядом труднощів. Серед них варто виокремити незастосовність класичного математичного апарату для дослідження динаміки розв’язків відповідних математичних моделей, велика обчислювальна складність алгоритмів пошуку розв’язків, складність математичного обґрунтування чисельних процедур, значні похибки через використання наближених неперервних керуючих функцій тощо.

Здійснено огляд існуючих підходів до вивчення динаміки розв’язків нелінійних еволюційних систем. Оскільки об’єкту дослідження дисертаційної роботи притаманна розривна нелінійність, то для таких систем не є можливим застосування класичного математичного апарату для знаходження розв’язків та встановлення їх властивостей. Доцільним є застосування методів нелінійного, багатозначного аналізу. Алгоритм дослідження глобальної динаміки функцій стану повинен бути математично обгрунтованим, а також характеризуватися зручністю при застосуванні до вирішення конкретних прикладних задач. Використовуючи вищеописану методологію та оперуючи вищенаведеними поняттями, зважаючи на специфіку математичних моделей в’язкопружних процесів та полів, для класу нелінійних еволюційних задач хвильового типу в наступних розділах дисертаційної роботи досліджується та аналізується глобальна динаміка їх розв’язків, зокрема доводиться існування притягуючих множин для розв’язків, встановлюються топологічні та структурні властивості атракторів.

РОЗДІЛ 2
АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ АВТОНОМНИХ ХВИЛЬОВИХ РІВНЯНЬ

Розділ присвячений дослідженню глобальної динаміки розв'язків автономного хвильового рівняння з розривною нелінійністю. Зокрема, для досліджуваного об'єкту була знайдена функція типу Ляпунова, а також доведено існування в фазовому просторі інваріантного компактного глобального атрактора для багатозначного напівпотоку, досліджено його структуру. Крім того, в розділі вивчено асимптотичну поведінку розв'язків стохастично збуреного хвильового рівняння, а саме доведено існування випадкового атрактора.

2.1 Якісний аналіз поведінки розв'язків еволюційної задачі хвильового типу з розривною нелінійністю

2.1.1 Постановка та припущення на параметри задачі

В обмеженій області $Q \subset \mathbf{R}^n$ з регулярною границею ∂Q розглянемо автономне диференціальне рівняння з частинними похідними гіперболічного типу:

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) + \beta y_t(x,t) - \Delta y(x,t) = f(y(x,t)), \\ y(x,t)|_{\partial Q} = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

де $y(\cdot,\cdot)$ – невідома функція стану, визначена на $Q \times \mathbf{R}_+$,

$\beta > 0$ – стала,

$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – задана функція взаємодії.

В ході дослідження будемо припускати виконання таких умов на функцію взаємодії:

– знакова умова:

$$\lim_{|y|\to+\infty}\frac{f(y)}{y} > -\lambda_1,$$

де λ_1 – перше власне значення для оператора $-\Delta$ в просторі $H_0^1(Q)$;

– умова не більш ніж лінійного росту:

$$\exists \quad D \geq 0: \quad |f(y)| \leq D(1+|y|) \quad \text{для всіх} \quad y \in \mathbf{R}.$$

Будемо використовувати такі позначення:

$$\overline{f}(s) := \overline{\lim}_{t\to s} f(t),$$

$$\underline{f}(s) := \underline{\lim}_{t\to s} f(t),$$

$$G(s) := [\underline{f}(s), \overline{f}(s)], \ s \in \mathbf{R}.$$

Припустимо, що функцію взаємодії можна представити у вигляді різниці монотонних функцій:

$$f(s) = f_1(s) - f_2(s), \quad s \in \mathbf{R},$$

де $f_i: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $i = 1,2$ – неспадні функції.

Зауважимо, що

$$[\underline{f}(s), \overline{f}(s)] \subseteq [\underline{f_1}(s), \overline{f_1}(s)] - [\underline{f_2}(s), \overline{f_2}(s)], \quad s \in \mathbf{R}.$$

Зазначимо, що в ході дослідження не накладатимемо жодних умов щодо гладкості чи неперервності функції взаємодії задачі (2.1). Таким чином, в загальному випадку будемо вважати її розривною по змінній y. Тому пошук розв'язків задачі (2.1) в класичному сенсі є некоректним. Зважаючи на це, розглянемо поняття слабкого розв'язку для досліджуваної задачі. Для цього перейдемо до операторної постановки задачі (2.1). На рис. 2.1 представлена поетапна схема проведення якісних досліджень поведінки розв'язків досліджуваного об'єкту.

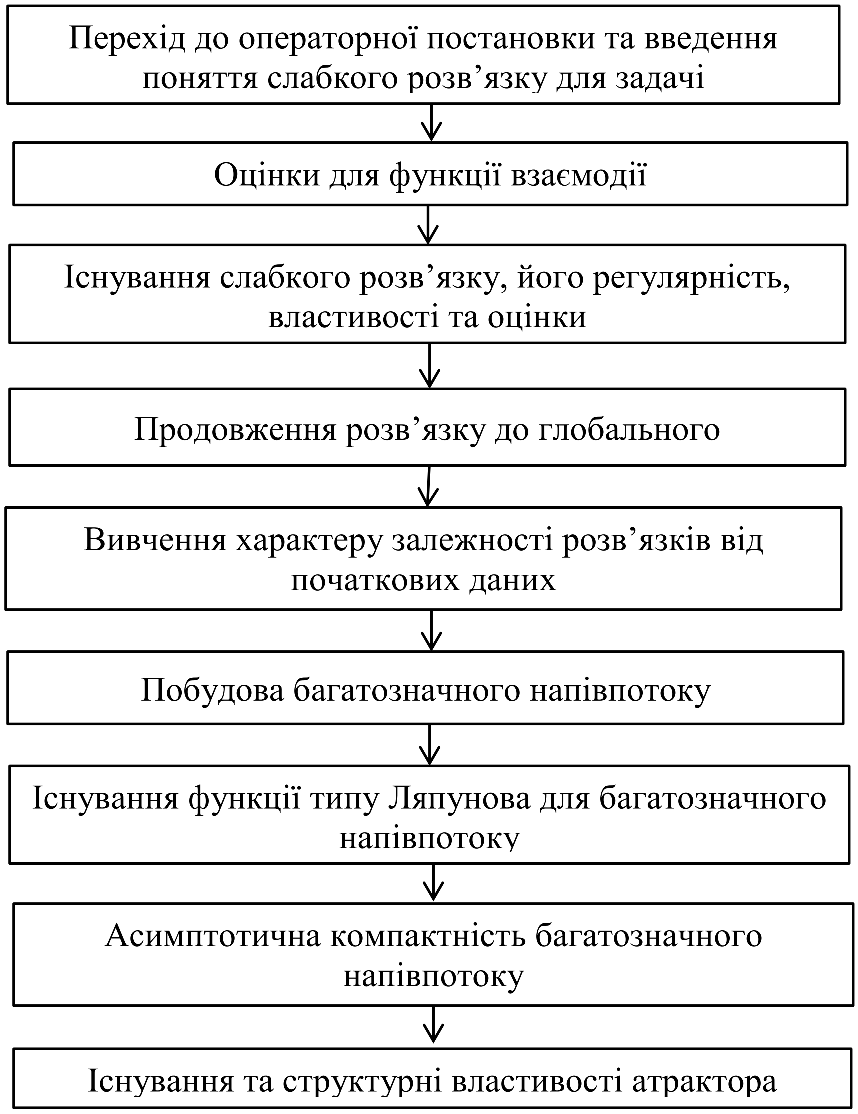

Рис. 2.1 Структурована схема процесу якісних досліджень для моделі (2.1)

Покладемо $V = H_0^1(Q)$ і $H = L^2(Q)$. Зауважимо, що $V \subset H \subset V^*$, простір V^* – дуальний до простору V; всі вкладення просторів є щільними та компактними [211, 238]. Гільбертів простір $X = V \times H$ – фазовий простір задачі (2.1). Через $(\cdot,\cdot)_V$, $\|\cdot\|_V$, $(\cdot,\cdot)_H$, $\|\cdot\|_H$ та $(\cdot,\cdot)_X$, $\|\cdot\|_X$ позначимо скалярні добутки та норми в просторах V, H та X відповідно [211, глава 1].

2.1.2 Слабкі розв'язки та їх властивості

Введемо поняття слабкого розв'язку для задачі (2.1).

Означення 2.1 Нехай $-\infty < \tau < T < +\infty$. Функція $\varphi(\cdot) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T$ називається слабким роз'язком задачі (2.1) на проміжку $[\tau, T]$, якщо:

– $\varphi(\cdot) \in L^\infty[\tau, T; X]$;

– існує такий функціонал $l = l(x,t) \in L^2(\tau, T; H)$, $l(x,t) \in G(y(x,t))$ для майже всіх $(x,t) \in Q \times (\tau, T)$, що для всіх $\psi \in V$ та для всіх $\eta \in C_0^\infty(\tau, T)$ виконується співвідношення

$$-\int_\tau^T (y_t(x,t), \psi(x))_H \eta_t(t) dt + \int_\tau^T [\beta(y_t(x,t), \psi(x))_H +$$
$$+ (y(x,t), \psi(x))_V + (l(x,t), \psi(x))_H] \eta(t) dt = 0. \qquad (2.2)$$

Враховуючи зроблені вище позначення та припущення, перейдемо до більш загального еволюційного включення, множина розв'язків якого включає множину розв'язків вихідної задачі (2.1):

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) + \beta y_t(x,t) - \Delta y(x,t) + [\underline{f_1}(y(x,t)), \overline{f_1}(y(x,t))] - \\ -[\underline{f_2}(y(x,t)), \overline{f_2}(y(x,t))] \ni \bar{0}, \\ y(x,t)|_{\partial Q} = 0. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Знайти настільки сильний розв'язок, який би задовольняв задачу (2.1) в кожній точці (x,t) є проблематичним. Саме тому ми переходимо до більш слабкого означення розв'язку для задачі (2.1), по суті розглядаючи слабкі розв'язки диференціального включення (2.3). Покладемо

$$G_i(s) := \int_0^s f_i(\xi) d\xi, \quad J_i(y(x)) := \int_Q G_i(y(x)) dx,$$

$$J(y) = J_1(y) - J_2(y), \;\; y \in H, \; i = 1{,}2,$$

де $G_i(\cdot)$ і $J_i(\cdot)$ – локально ліпшицеві, регулярні функціонали [28, розділ I]. Теорема Лебурга про середнє [28, розділ 2] гарантує існування таких сталих $c_1, c_2 > 0$ та $\mu \in (0, \lambda_1)$, що виконуються такі умови:

$$\begin{gathered} |J(y(x))| \le c_1(1+\| y(x) \|_H^2), \\ J(y(x)) \ge -\frac{\mu}{2} \| y(x) \|_H^2 - c_2 \quad \text{для всіх} \quad y(\cdot) \in H. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Для подальших досліджень, зокрема для доведення існування функції типу Ляпунова для задачі (2.1), необхідною є лема про можливість диференціювання композиції опуклих функціоналів, доведена в роботі [203, лема 2.16].

Лема 2.1 [203, лема 2.16] Нехай $y(\cdot) \in C^1([\tau, T]; H)$. Тоді для майже всіх t з проміжку (τ, T) функціонали $(J_i \circ y)(t)$ диференційовні в точці t. Більше того, виконується таке співвідношення*:*

$$\frac{d}{dt}(J_i \circ y)(t) = (p, y_t(t)) \quad \text{для всіх} \quad p \in \partial J_i(y(t)), \;\; i = 1{,}2,$$

і $\frac{d}{dt}(J_i \circ y)(\cdot) \in L_1(\tau, T)$.

Для довільних $a \in V, \;\; b \in H$ розглянемо задачу Коші (2.1) з початковими умовами

$$y(\tau) = a, \quad y_t(\tau) = b. \tag{2.5}$$

Розглянемо клас функцій $W_\tau^T = C([\tau, T]; X)$. З [203, лема 2.17], [180, лема 4.1], [180, лема 3.1], [119, теорема 4.1] прямо випливає такий результат.

Лема 2.2 Для будь-яких $\tau < T$, $a \in V$, $b \in H$ задача Коші (2.1), (2.5) має слабкий розв'язок $(y(\cdot), y_t(\cdot))^T \in L_\infty(\tau, T; X)$. Більше того, кожен слабкий розв'язок $(y(\cdot), y_t(\cdot))^T$ задачі Коші (2.1), (2.5) на проміжку $[\tau, T]$ є регулярним в такому сенсі

$$(y(\cdot), y_t(\cdot))^T \in W_\tau^T,$$

$$y_{tt}(\cdot) \in L_2(\tau, T; V^*).$$

Для будь-якого $\varphi_\tau = (a, b)^T \in X$ позначимо множину всіх слабких розв'язків задачі (2.1) на проміжку $[\tau, T]$ через

$$\mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau) =$$

$$= \left\{ \varphi(\cdot) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi(\cdot) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T \quad - \text{ слабкий розв'язок} \\ \text{задачі} \quad (2.1) \quad \text{на} \quad [\tau, T], \\ y(\tau) = a, y_t(\tau) = b \end{array} \right\}.$$

З регулярності слабкого розв'язку випливає, що

$$\mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau) \subset C([\tau, T]; X) = W_\tau^T.$$

Аналогічно міркуванням з [99, лема 4.1] отримуємо таку лему.

Лема 2.3 Якщо $\tau < T$, $\varphi_\tau \in X$, $\varphi(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau)$, то для будь-якого $s \in \boldsymbol{R}$ маємо, що

$$\psi(\cdot) = \varphi(\cdot + s) \in \mathcal{D}_{\tau-s, T-s}(\varphi_\tau). \tag{2.6}$$

Якщо $\tau < t < T$, $\varphi_\tau \in X$, $\varphi(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau,t}(\varphi_\tau)$ і $\psi(\cdot) \in \mathcal{D}_{t,T}(\varphi_t)$, то

$$\theta(s) = \begin{cases} \varphi(s), & s \in [\tau, t], \\ \psi(s), & s \in [t, T] \end{cases} \in \mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau). \tag{2.7}$$

Доведення. Виконання твердження (2.6) слідує з автономності задачі (2.1). Справедливість твердження (2.7) випливає з означення слабкого розв'язку для досліджуваної задачі. Таким чином, трансляція та конкатенація слабких розв'язків є також слабкими розв'язками. Доведення завершено.

Для довільного $u = (u_1, u_2)^T \in X$ розглянемо функцію такого виду:

$$\mathcal{V}(u) = \frac{1}{2} \| u \|_X^2 + J_1(u_1) - J_2(u_1). \tag{2.8}$$

Лема 2.4 Нехай $-\infty < \tau < T < +\infty$, $\varphi(\cdot) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T$ – розв'язок задачі (2.1) на проміжку (τ, T) з початковою умовою $\varphi_\tau \in X$, тобто $\varphi(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau)$. Тоді функція $\mathcal{V} \circ \varphi : [\tau, T] \to \boldsymbol{R}$ – абсолютно неперервна, і для майже всіх $t \in (\tau, T)$ виконується рівність

$$\frac{d}{dt} \mathcal{V}(\varphi(t)) = -\beta \| y_t(t) \|_H^2. \tag{2.9}$$

Доведення. Нехай $-\infty < \tau < T < +\infty$ і $\varphi(\cdot) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T \in W_\tau^T$ – довільний слабкий розв'язок задачі (2.1) на проміжку (τ, T). Оскільки справедливе вкладення $\partial J_i(y(\cdot)) \subset L_2(\tau, T; H)$, слідуючи результатам робіт [180] та [203, розділ 2] отримуємо, що функція $t \mapsto \| y_t(t) \|_H^2 + \| y(t) \|_V^2$ – абсолютно неперервна, і для майже всіх $t \in (\tau, T)$ виконується таке співвідношення:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\| y_t(t) \|_{\mathrm{H}}^2 + \| y(t) \|_{\mathrm{V}}^2] = (y_{tt}(t) - \Delta y(t), y_t(t))_{\mathrm{H}} = \\ = -\beta \| y_t(t) \|_{\mathrm{H}}^2 - (d_1(t), y_t(t))_{\mathrm{H}} + (d_2(t), y_t(t))_{\mathrm{H}}, \end{gathered} \tag{2.10}$$

де $d_i(t) \in \partial J_i(y(t))$ для майже всіх $t \in (\tau, T)$ і $d_i(\cdot) \in L_2(\tau, T; H)$, $i = 1,2$, згідно (2.2).

Оскільки $y(\cdot) \in C^1([\tau, T]; H)$ і $J_i : H \to \mathbf{R}$, $i = 1,2$ регулярні та локально ліпшицеві функціонали, відповідно до леми 2.1 отримуємо, що для майже всіх $t \in (\tau, T)$ існує $\frac{d}{dt}(J_i \circ y)(t)$, $i = 1,2$. Більше того, $\frac{d}{dt}(J_i \circ y)(\cdot) \in L_1(\tau, T)$, $i = 1,2$, і для майже всіх $t \in (\tau, T)$ та для всіх $p \in \partial J_i(y(t))$, $i = 1,2$ виконується співвідношення

$$\frac{d}{dt}(J_i \circ y)(t) = (p, y_t(t))_H, \quad i = 1{,}2.$$

Зокрема, для майже всіх $t \in (\tau, T)$ маємо, що

$$\frac{d}{dt}(J_i \circ y)(t) = (d_i(t), y_t(t))_H.$$

Беручи до уваги співвідношення (2.10), отримуємо виконання рівності (2.9). Доведення завершено.

Для побудови багатозначного напівпотоку необхідним є результат стосовно продовження слабкого розв'язку до глобального.

Лема 2.5 Нехай $T > 0$. Тоді будь-який слабкий розв'язок задачі (2.1) на проміжку $[0, T]$ може бути продовжений до глобального, визначеного на проміжку $[0, +\infty)$.

Доведення. Дійсно, оскільки ми отримали існування слабкого розв'язку для досліджуваної задачі, зміщення та склейка слабких розв'язків також є слабким розв'язком (лема 2.3), і використовуючи властивості функції $\mathcal{V}$, умови (2.4) та такі оцінки:

$$\forall \tau < T,\ \ \forall t \in [\tau, T],\ \ \forall \varphi_\tau \in X,\ \ \forall \varphi(\cdot) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T \in \mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau),$$

$$2c_1 + \left(1 + \frac{2c_1}{\lambda_1}\right) \| y(\tau) \|_V^2 + \| y_t(\tau) \|_H^2 \geq 2\mathcal{V}(\varphi(\tau)) \geq$$

$$\geq 2\mathcal{V}(\varphi(t)) = \| y(t) \|_V^2 + \| y_t(t) \|_H^2 + 2(J_1(y(t)) - J_2(y(t))) \geq$$

$$\geq \left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1}\right) \| y(t) \|_V^2 + \| y_t(t) \|_H^2 - 2c_2.$$

отримуємо справедливість потрібного твердження. Доведення завершено.

Для довільного $\varphi_0 \in X$ нехай $\mathcal{D}(\varphi_0)$ – множина всіх слабких розв'язків, визначених на проміжку $[0, +\infty)$), задачі (2.1) з початковими даними $\varphi(0) = \varphi_0$. Зауважимо, що з доведення леми 2.5 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 2.1 Для будь-якого $\varphi_0 \in X$ та $\varphi(\cdot) \in \mathcal{D}(\varphi_0)$ виконується нерівність:

$$\| \varphi(t) \|_X^2 \leq \frac{\lambda_1 + 2c_1}{\lambda_1 - \mu} \| \varphi(0) \|_X^2 + \frac{2(c_1 + c_2)\lambda_1}{\lambda_1 - \mu} \quad \forall t > 0. \tag{2.11}$$

Дослідимо залежність слабких розв'язків задачі від початкових даних. З наслідку 2.1 стандартним чином маємо таке твердження.

Теорема 2.1 Нехай $\tau < T$, $\{\varphi_n(\cdot)\}_{n \geq 1} \subset W_\tau^T$ – довільна послідовність слабких розв'язків задачі (2.1) на проміжку $[\tau, T]$ така, що послідовність $\varphi_n(\tau) \to \varphi_\tau$ слабко в просторі X при $n \to +\infty$, і нехай $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset [\tau, T]$ – така послідовність, що $t_n \to t_0$ при $n \to +\infty$. Тоді існує такий слабкий розв'язок $\varphi \in \mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau)$, що з точністю до деякої підпослідовності послідовність $\varphi_n(t_n) \to \varphi(t_0)$ слабко в просторі X при $n \to +\infty$.

Доведення. Доведення грунтується на міркуваннях, проведених при доведенні [203, теорема 2.5]. Нехай $\tau < T$ і $\{\varphi_n(\cdot) = (y_n(\cdot), y'_n(\cdot))\}_{n \geq 1} \subset W_\tau^T$ – послідовність слабких розв'язків задачі (2.1) на проміжку $[\tau, T]$, і $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset [\tau, T]$ – послідовність такі, що

$$\begin{gathered} \varphi_n(\tau) \to \varphi_\tau \quad \text{слабко в просторі} \quad X, \\ t_n \to t_0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \end{gathered} \tag{2.12}$$

З наслідку 2.1 випливає, що $\{\varphi_n(\cdot)\}_{n \geq 1}$ – обмежена послідовність в просторі $W_\tau^T \subset L_\infty(\tau, T; X)$. Нехай

$$d_{n,i}(t) \in \partial J_i(y_n(t)), \; i = 1,2 \quad \text{для майже всіх} \quad t \in (\tau, T).$$

Таким чином, з точністю до підпослідовності $\{\varphi_{n_k}(\cdot)\}_{k \geq 1} \subset \{\varphi_n(\cdot)\}_{n \geq 1}$ отримуємо такі збіжності:

$$y_{n_k}(\cdot) \to y(\cdot) \quad * - \text{слабко в просторі} \quad L_\infty(\tau, T; V),$$

$$y'_{n_k}(\cdot) \to y'(\cdot) \ \ * - \text{слабко в просторі} \ \ L_\infty(\tau, T; H),$$

$$y''_{n_k}(\cdot) \to y''(\cdot) \ \ * - \text{слабко в просторі} \ \ L_\infty(\tau, T; V^*),$$

$$d_{n_k,i}(\cdot) \to d_i(\cdot) \ \ * - \text{слабко в просторі} \ \ L_\infty(\tau, T; H), \ \ i = \overline{1,2},$$

$$y_{n_k}(\cdot) \to y(\cdot) \ \ \text{в просторі} \ \ L_2(\tau, T; H), \qquad (2.13)$$

$$y_{n_k}(t) \to y(t) \ \ \text{в просторі} \ \ H \ \ \text{для майже всіх} \ \ t \in [\tau, T],$$

$$y'_{n_k}(t) \to y'(t) \ \ \text{в просторі} \ \ V^* \ \ \text{для майже всіх} \ \ t \in (\tau, T),$$

$$\Delta y_{n_k}(\cdot) \to \Delta y(\cdot) \ \ \text{слабко в просторі} \ \ L_2(\tau, T; V^*),$$

при $k \to +\infty$, де для всіх $n \geq 1$ $d_{n,i}(\cdot) \in L_2(\tau, T; H)$, і виконується таке співвідношення:

$$y''_n(t) + \beta y'_n(t) + d_{n,1}(t) - d_{n,2}(t) - \Delta y_n(t) = \bar{0}, \qquad (2.14)$$

Оскільки $\partial J_i(\cdot)$, $i = 1,2$ демізамкнуті, і (2.14), то отримуємо, що $d_i(\cdot) \in \partial J_i(y(\cdot))$, $i = 1,2$, $\varphi(\cdot) := (y(\cdot), y_t(\cdot)) \in \mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau) \subset W_\tau^T$.

Зі збіжностей (2.12), (2.13) випливає, що для довільного фіксованого $h \in V$ послідовності дійсних функцій $(y_{n_k}(\cdot), h)_H$, $(y'_{n_k}(\cdot), h)_H : [\tau, T] \to \mathbf{R}$ рівномірно обмежені та рівностепенево неперервні. Враховуючи співвідношення (2.11), (2.13) та щільність вкладення $V \subset H$, отримуємо, що $y'_{n_k}(t_{n_k}) \to y'(t_0)$ слабко в просторі H, і $y_{n_k}(t_{n_k}) \to y(t_0)$ слабко в просторі V при $k \to +\infty$. Звідси випливає, що існує таке $\varphi \in \mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau)$, що з точністю до деякої підпослідовності послідовність $\varphi_n(t_n) \to \varphi(t_0)$ слабко в просторі X при $n \to +\infty$. Доведення завершено.

Отримаємо тепер результат стосовно залежності слабких розв’язків задачі (2.1) від початкових даних в сильній топології простору W_τ^T.

Теорема 2.2 Нехай $\tau < T$, $\{\varphi_n(\cdot)\}_{n\geq 1} \subset W_\tau^T$ – така послідовність слабких розв'язків задачі (2.1) на проміжку $[\tau, T]$, що послідовність $\varphi_n(\tau) \to \varphi_\tau$ сильно в просторі X при $n \to +\infty$, тоді з точністю до деякої підпослідовності послідовність $\varphi_n(\cdot) \to \varphi(\cdot)$ в просторі W_τ^T при $n \to +\infty$.

Доведення. Доведення грунтується на міркуваннях, проведених при доведенні [203, теорема 2.6]. Нехай $\tau < T$, і $\{\varphi_n(\cdot) = (y_n(\cdot), y_n'(\cdot))^T\}_{n\geq 1} \subset W_\tau^T$ – довільна послідовність слабких розв'язків задачі (2.1) на проміжку $[\tau, T]$:

$$\varphi_n(\tau) \to \varphi_\tau \quad \text{сильно в просторі} \quad X \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{2.15}$$

З теореми 2.1 маємо, що існує таке $\varphi(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau)$ і така підпослідовність $\{\varphi_{n_k}(\cdot)\}_{k\geq 1} \subset \{\varphi_n(\cdot)\}_{n\geq 1}$, що $\varphi_{n_k}(\cdot) \to \varphi(\cdot)$ слабко в просторі X, рівномірно на проміжку $[\tau, T]$ при $k \to +\infty$. Покажемо, що

$$\varphi_{n_k}(\cdot) \to \varphi(\cdot) \quad \text{в просторі} \quad W_\tau^T \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \tag{2.16}$$

Використаємо метод від супротивного. Припустимо, що існує $L > 0$ та послідовність $\{\varphi_{k_j}(\cdot)\}_{j\geq 1} \subset \{\varphi_{n_k}(\cdot)\}_{k\geq 1}$ такі, що для всіх $j \geq 1$ виконується співвідношення

$$\max_{t\in[\tau,T]} \| \varphi_{k_j}(t) - \varphi(t) \|_X = \| \varphi_{k_j}(t_j) - \varphi(t_j) \|_X \geq L.$$

Без втрати загальності, припустимо, що $t_j \to t_0 \in [\tau, T]$ при $j \to +\infty$. Таким чином, в силу неперервності $\varphi: [\tau, T] \to X$ маємо виконання такої нерівності:

$$\underline{\lim}_{j\to+\infty} \| \varphi_{k_j}(t_j) - \varphi(t_0) \|_X \geq L. \tag{2.17}$$

З іншого боку, покажемо, що

$$\varphi_{k_j}(t_j) \to \varphi(t_0) \quad \text{в просторі} \quad X \quad \text{при} \quad j \to +\infty. \tag{2.18}$$

Спочатку зауважимо, що

$$\varphi_{k_j}(t_j) \to \varphi(t_0) \quad \text{слабко в просторі} \quad X \quad \text{при} \quad j \to +\infty \tag{2.19}$$

(випливає з теореми 2.1). Далі покажемо, що

$$\overline{\lim}_{j\to+\infty} \parallel \varphi_{k_j}(t_j) \parallel_X \leq \parallel \varphi(t_0) \parallel_X. \tag{2.20}$$

Оскільки $J(\cdot)$ – секвенційно слабко неперервний функціонал, то $\mathcal{V}(\cdot)$ – секвенційно слабко напівнеперервна знизу функція в просторі X. Отже, отримуємо такі нерівності:

$$\begin{gathered} \mathcal{V}(\varphi(t_0)) \leq \underline{\lim}_{j\to+\infty}\mathcal{V}(\varphi_{k_j}(t_j)), \\ \int_\tau^{t_0} \parallel y'(s) \parallel_H^2 ds \leq \underline{\lim}_{j\to+\infty} \int_\tau^{t_j} \parallel y'_{k_j}(s) \parallel_H^2 ds \end{gathered} \tag{2.21}$$

і

$$\begin{gathered} \mathcal{V}(\varphi(t_0)) + \beta \int_\tau^{t_0} \parallel y'(s) \parallel_H^2 ds \leq \\ \leq \underline{\lim}_{j\to+\infty}(\mathcal{V}(\varphi_{k_j}(t_j)) + \beta \int_\tau^{t_j} \parallel y'_{k_j}(s) \parallel_{\mathrm{H}}^2 ds). \end{gathered} \tag{2.22}$$

Оскільки з енергетичного рівняння слідує, що обидві частини нерівності (2.22) рівні $\mathcal{V}(\varphi(\tau))$ (випливає з властивостей функції $\mathcal{V}$), з нерівності (2.21) випливає, що

$$\mathcal{V}(\varphi_{k_j}(t_j)) \to \mathcal{V}(\varphi(t_0)) \text{ при } j \to +\infty,$$

і отримуємо виконання нерівності (2.20). Збіжність (2.18) прямо слідує зі збіжності (2.19), (2.15) нерівності (2.20) та [211, розділ I]. Зауважимо, що збіжність (2.18) суперечить нерівності (2.17). Отже збіжність (2.16) виконується. Доведення завершено.

2.1.3 Побудова багатозначного напівпотоку розв'язків

Позначимо множину всіх непорожніх підмножин простору X через $P(X)$, а множину всіх непорожніх обмежених підмножин простору X через $\beta(X)$. Побудуємо багатозначне відображення $\mathcal{G}: \mathbf{R}_+ \times X \to P(X)$ таким чином:

$$\mathcal{G}(t, \varphi_0) = \{\varphi(t) = (y(t), y_t(t))^T \ |\varphi(\cdot) \in \mathcal{D}(\varphi_0)\}, \ t \geq 0. \tag{2.23}$$

Зазначимо, що багатозначне відображення $\mathcal{G}$ є строгим багатозначним напівпотоком.

Теорема 2.3 $\mathcal{G}$ – асимптотично компактний багатозначний напівпотік.

Доведення. Перевіримо асимптотичну компактність багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$ згідно зауваження 1.1. Візьмемо довільну множину $B \in \beta(X)$ та виберемо такі послідовності $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ та $\{v_n\}_{n\geq 1}$, що $\xi_n \in \mathcal{G}(t_n, v_n)$, $v_n \in B$, $n \geq 1$ при $t_n \to +\infty$ і $n \to +\infty$. Перевіримо передкомпактність послідовності $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ в просторі X. Без втрати загальності, для цього достатньо показати, що для послідовності $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ існує збіжна в просторі X підпослідовність. З наслідку 2.1 отримуємо, що існує таке $\xi \in X$ і така підпослідовність $\{\xi_{n_k}\}_{k\geq 1} \subset \{\xi_n\}_{n\geq 1}$, що $\xi_{n_k} \to \xi$ слабко в просторі X при $k \to \infty$ і $\| \xi_{n_k} \|_X \to a \geq \| \xi \|_X$ при $k \to +\infty$. Покажемо виконання нерівності $a \leq \| \xi \|_X$.

Зафіксуємо довільне $T_0 > 0$. Тоді для достатньо великого номера $k \geq 1$ справедливе вкладення

$$\mathcal{G}(t_{n_k}, v_{n_k}) \subset \mathcal{G}(T_0, \mathcal{G}(t_{n_k} - T_0, v_{n_k})).$$

Отже, з наслідку 2.1 випливає, що $\xi_{n_k} \in \mathcal{G}(T_0, \beta_{n_k})$, де $\beta_{n_k} \in \mathcal{G}(t_{n_k} - T_0, v_{n_k})$, і $\sup\limits_{k\geq 1} \| \beta_{n_k} \|_X < +\infty$. З теореми 2.1 отримуємо, що для деяких $\{\xi_{n_{k_j}}, \beta_{n_{k_j}}\}_{j\geq 1} \subset \{\xi_{n_k}, \beta_{n_k}\}_{k\geq 1}$, $\beta_{T_0} \in X$ виконується

$$\beta_{n_{k_j}} \to \beta_{T_0} \quad \text{слабко в просторі} \quad X \quad \text{при} \quad j \to +\infty,$$
$$\xi \in \mathcal{G}(T_0, \beta_{T_0}). \tag{2.24}$$

За означенням багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$ для будь-якого $j \geq 1$ покладемо

$$\xi_{n_{k_j}} = (y_j(T_0), y_j'(T_0))^T,$$

$$\beta_{n_{k_j}} = (y_j(0), y_j'(0))^T,$$

$$\xi = (y_0(T_0), y_0'(T_0))^T,$$

$$\beta_{T_0} = (y_0(0), y_0'(0))^T.$$

Покладемо (згідно означення 2.1) та (2.23)) $\varphi_j(\cdot) = (y_j(\cdot), y_j'(\cdot))^T \in C([0, T_0]; X)$, $y_j''(\cdot) \in L_2(0, T_0; V^*)$, $d_j(\cdot) \in L_\infty(0, T_0; H)$,

$$y_j''(t) + \beta y_j'(t) - \Delta y_j(t) + d_{j,1}(t) - d_{j,2}(t) = \bar{0},$$

$$d_{j,i}(t) \in \partial J_i(y_j(t)), \ \ i = 1,2 \quad \text{для майже всіх} \quad t \in (0, T_0).$$

Для кожного $t \in [0, T_0]$ виконується таке співвідношення:

$$I(\varphi_j(t)) := \frac{1}{2} \parallel \varphi_j(t) \parallel_X^2 + J_1(y_j(t)) - J_2(y_j(t)) + \frac{\beta}{2} (y_j'(t), y_j(t))_H.$$

Тоді, з леми 2.1, результатів робіт [180, 203] та [211, розділ IV] випливає така рівність:

$$\frac{dI(\varphi_j(t))}{dt} = -\beta I(\varphi_j(t)) + \beta \mathcal{H}(\varphi_j(t)) \quad \text{для майже всіх} \quad t \in (0, T_0),$$

де

$$\mathcal{H}(\varphi_j(t)) = J_1(y_j(t)) - \frac{1}{2}(d_{j,1}(t), y_j(t)) - J_2(y_j(t)) + \frac{1}{2}(d_{j,2}(t), y_j(t))_H.$$

З співвідношень (2.11), (2.24) маємо, що існує таке $\bar{R} > 0$, що для всіх $j \geq 0$ та для всіх $t \in [0, T_0]$ виконується нерівність

$$\| y_j'(t) \|_{\mathrm{H}}^2 + \| y_j(t) \|_{\mathrm{V}}^2 \leq \bar{R}^2.$$

Більше того, отримуємо такі збіжності:

$$\begin{gathered} y_j(\cdot) \to y_0(\cdot) \quad \text{слабко в просторі} \quad L_2(0, T_0; V), \\ y_j'(\cdot) \to y_0'(\cdot) \quad \text{слабко в просторі} \quad L_2(0, T_0; H), \\ y_j(\cdot) \to y_0(\cdot) \quad \text{в просторі} \quad L_2(0, T_0; H), \\ d_{j,i}(\cdot) \to d_i(\cdot) \quad \text{слабко в просторі} \quad L_2(0, T_0; H), \;\; i = 1,2, \\ y_j''(\cdot) \to y_0''(\cdot) \quad \text{слабко в просторі} \quad L_2(0, T_0; V^*), \\ \forall t \in [0, T_0] \quad y_j(t) \to y_0(t) \quad \text{в просторі} \quad H \end{gathered} \tag{2.25}$$

при $j \to +\infty$.

Для кожного $j \geq 0$ та $t \in [0, T_0]$ виконується така рівність:

$$I(\varphi_j(t)) = I(\varphi_j(0))e^{-\beta t} + \int_0^t \mathcal{H}(\varphi_j(s))e^{-\beta(t-s)}ds.$$

Зокрема, $I(\varphi_j(T_0)) = I(\varphi_j(0))e^{-\beta T_0} + \int_0^{T_0} \mathcal{H}(\varphi_j(s))e^{-\beta(T_0-s)}ds$.

Зі збіжностей (2.25) та леми 2.1 отримуємо, що

$$\int_0^{T_0} \mathcal{H}(\varphi_j(s))e^{-\beta(T_0-s)}ds \to \int_0^{T_0} \mathcal{H}(\varphi_0(s))e^{-\beta(T_0-s)}ds \quad \text{при} \quad j \to +\infty.$$

Таким чином,

$$\overline{\lim}_{j\to+\infty} I(\varphi_j(T_0)) \leq$$

$$\leq \overline{\lim}_{j\to+\infty} I(\varphi_j(0))e^{-\beta T_0} + \int_0^{T_0} \mathcal{H}(\varphi_0(s))e^{-\beta(T_0-s)}ds =$$

$$= I(\varphi_0(T_0)) + \left[\overline{\lim}_{j\to+\infty} I(\varphi_j(0)) - I(\varphi_0(0))\right] e^{-\beta T_0} \le$$

$$\le I(\varphi_0(T_0)) + c_3 e^{-\beta T_0},$$

де c_3 не залежить від $T_0 > 0$.

З іншого боку, зі збіжностей (2.25) маємо, що

$$\overline{\lim}_{j\to+\infty} I(\varphi_j(T_0)) \ge$$

$$\ge \frac{1}{2} \lim_{j\to+\infty} \| \varphi_j(T_0) \|_X^2 + J(y_0(T_0)) + \frac{\beta}{2}(y_0'(T_0), y_0(T_0))_H.$$

В результаті отримуємо, що $\frac{1}{2}a^2 \le \frac{1}{2} \| \xi \|_X^2 + c_3 e^{-\beta T_0}$ для будь-якого $T_0 > 0$. Таким чином, $a \le \| \xi \|_X$. Отже, багатозначний напівпотік $\mathcal{G}$ є асимптотично компактним, що є однією з умов теореми 1.1 про існування глобального атрактора, що притягує усі слабкі розв'язки досліджуваної задачі.

2.1.4 Існування та структурні властивості глобального атрактора

Позначимо через $\mathcal{K}_+ = \cup_{y_0 \in X} \mathcal{D}(y_0)$ сімейство всіх слабких розв'язків задачі (2.1), визначених на проміжку $[0, +\infty)$. На $\mathcal{K}_+$ визначимо трансляційну напівгрупу $\{T(h)\}_{h\ge 0}$, $T(h)y(\cdot) = y_h(\cdot)$, $h \ge 0$, $y \in \mathcal{K}_+$. Оскільки простір траєкторій $\mathcal{K}_+$ – трансляційно інваріантний, то $T(h)\mathcal{K}_+ \subset \mathcal{K}_+$ при $h \ge 0$.

На $\mathcal{K}_+$ розглянемо топологію, індуковану з простору Фреше $C^{loc}(\mathbf{R}_+; X)$. Зазначимо, що

$$f_n(\cdot) \to f(\cdot) \quad \text{в просторі} \quad C^{loc}(\mathbf{R}_+; X) \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall M > 0, \qquad \Pi_M f_n(\cdot) \to \Pi_M f(\cdot) \quad \text{в просторі} \quad C([0, M]; X) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

де Π_M – оператор звуження на проміжок $[0, M]$ [184, с. 179]. Позначимо, оператор звуження на проміжок $[0, +\infty)$ через Π_+.

Розглянемо задачу (2.1) на всій часовій прямій. Зазначимо, що аналогічно простору $C^{loc}(\mathbf{R}_+; X)$ простір $C^{loc}(\mathbf{R}; X)$ наділений топологією локальної рівномірної збіжності на кожному проміжку $[-M, M] \subset \mathbf{R}$ [184, с. 180]. Позначимо через $\mathcal{K}$ сімейство всіх повних траєкторій задачі (2.1). Зазначимо, що для будь-якого $h \in \mathbf{R}$ та для будь-якого $y(\cdot) \in \mathcal{K}$ $y_h(\cdot) \in \mathcal{K}$.

Для задачі (2.1), слідуючи [7, с. 486], позначимо через $Z(\mathcal{G})$ множину всіх точок спокою для багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$. Зазначимо, що

$$Z(\mathcal{G}) = \{(\bar{0}, y) \mid y \in V,\ -\Delta y + \partial J_1(y) - \partial J_2(y) \ni \bar{0}\}.$$

Зауважимо, що $Z(\mathcal{G})$ – обмежена множина в просторі X.

Лема 2.6 Визначений в (2.8) функціонал $\mathcal{V}: X \to \boldsymbol{R}$ – функція типу Ляпунова для багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$.

Доведення. Справедливість леми прямо випливає з леми 2.4, властивостей функції $\mathcal{V}$ [7, с. 486].

Доведемо існування інваріантного компактного глобального атрактора в фазовому просторі задачі.

Теорема 2.4 Для багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$ існує компактний інваріантний глобальний атрактор $\mathcal{A}$ в фазовому просторі X, що володіє такими структурними властивостями:

— для кожної повної траєкторії $\psi(\cdot) \in \mathcal{K}$ її граничні множини

$$\alpha(\psi) = \{z \in \mathrm{X} | \psi(t_j) \to z \ \text{ для деякої послідовності } \ t_j \to -\infty\},$$

$$\omega(\psi) = \{z \in \mathrm{X} | \psi(t_j) \to z \ \text{ для деякої послідовності } \ t_j \to +\infty\}$$

– зв’язні підмножини множини точок спокою $Z(\mathcal{G})$, на якій функція $\mathcal{V}$ – стала;

— якщо множина точок спокою $Z(\mathcal{G})$ – повністю незв’язна множина (зокрема, якщо $Z(\mathcal{G})$ – зліченна), то границі

$$z_- = \lim_{t\to-\infty}\psi(t),$$

$$z_+ = \lim_{t\to+\infty}\psi(t)$$

існують, і z_-, z_+ – точки спокою.

Кожна повна траєкторія $\varphi(t)$ прямує до точки спокою при $t \to +\infty$ для кожного розв'язку $\varphi(\cdot) \in \mathcal{K}_+$.

Доведення. З лем 2.2, 2.3, 2.6 та теорем 2.1–2.3 згідно до теореми 1.1 можемо стверджувати, що для багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$, породженого слабкими розв'язками задачі (2.1), існує інваріантний компактний в фазовому просторі X глобальний атрактор $\mathcal{A}$.

Таким чином, ми отримали, що при заданих характеристиках параметрів досліджуваної задачі, динаміка розв'язків спрямовується до множини точок спокою.

2.1.5 Контрприклади

Зазначимо, що умова про представлення функції взаємодії у вигляді різниці субдиференціалів опуклих функціоналів є суттєвою. Нижче наведемо приклади [50], які показують, що в загальному випадку, коли функція взаємодії f є просто багатозначною, для багатозначного напівпотоку, породженого всіма розв'язками задачі, не існує компактного глобального атрактора. Це означає, що вибір функції взаємодії довільного вигляду не забезпечить стійкого функціонування системи.

Приклад Розглянемо задачу

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) + \beta y_t(x,t) - \Delta y(x,t) + [-\varepsilon, \varepsilon] \ni 0, \\ y(0,t) = y(\pi,t) = 0, \\ y(x,0) = \frac{\varepsilon}{\beta}\varphi_n(x), \ |\varphi_n'(x)| \leq 1, \\ y_t(x,0) = 0, \end{cases} \tag{2.26}$$

де $(x,t) \in (0,\pi) \times \mathbf{R}_+$.

Покажемо, що для задачі (2.26) існує такий розв'язок $y_n(x,t)$, що послідовність $\{y_n(\cdot,t_n)\}_{n\geq 1}$ – не передкомпактна в просторі $H_0^1(0,\pi)$ для деякої послідовності $\{t_n\}_{n\geq 1}$, $t_n \to \infty$ та деякої обмеженої в просторі $H_0^1(0,\pi)$ послідовності $\{\varphi_n(\cdot)\}_{n\geq 1}$.

З формули д'Аламбера випливає, що задача (2.26) має розв'язок у вигляді

$$y_n(x,t) = \frac{\varepsilon}{2\beta}(\varphi_n(x+t) - \varphi_n(t-x))$$

для будь-якої достатньо гладкої функції $\varphi_n\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такої, що $\varphi_n(x) = -\varphi_n(-x) = -\varphi_n(2\pi - x)$. Дійсно, $y_{n_{tt}}(x,t) - \Delta y_n(x,t) = 0$ і

$$\beta y_{n_t}(x,t) = \beta\frac{\varepsilon}{2\pi}(\varphi_n'(x+t) - \varphi_n'(t-x)) \in [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Нехай $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx$, $x \in (0,\pi)$. Тоді

$$y_n(x,t) = \frac{1}{n}\frac{\varepsilon}{2\beta}(\sin n(x+t) - \sin n(t-x)), \quad (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbf{R}_+;$$

$$y_{n_x}'(x,t) = \frac{\varepsilon}{2\beta}(\cos n(x+t) + \cos n(t-x)), \quad (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbf{R}_+.$$

Нехай $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbf{R}_+$ – така послідовність, що $t_n = \frac{2\pi}{n} + 2\pi n$ для будь-якого $n \geq 1$. Тоді

$$\| y_n(\cdot,t_n) - y_m(\cdot,t_m) \|_{H_0^1(0,\pi)}^2 = \frac{\varepsilon^2}{4\beta^2} \times$$

$$\times \int_0^{\pi} (\cos n(x+t_n) + \cos n(t_n - x) - \cos m(x+t_m) - \cos m(t_m - x))^2 dx =$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{\beta^2} \int_0^{\pi} (\cos nx - \cos mx)^2 dx = \frac{\pi \varepsilon^2}{\beta^2}, \quad \forall n, m \geq 1.$$

Отже, $\{y_n(\cdot, t_n)\}_{n \geq 1}$ – не передкомпактна в просторі $H_0^1(0,\pi)$ при $n \to +\infty$. Таким чином, для задачі (2.26) не існує глобального атрактора.

Приклад В обмеженій області $Q \in \boldsymbol{R}^n$ з регулярною границею ∂Q розглянемо задачу:

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) + \beta y_t(x,t) - \Delta y(x,t) \in -f(y(x,t)) + G(y(x,t)) + h, \\ y(x,t)|_{\partial Q} = 0, \end{cases} \tag{2.27}$$

де $y(\cdot,\cdot)$ – невідома функція стану, визначена на $Q \times \mathbf{R}_+$,

$\beta > 0$ – стала,

$h \in L^2(Q)$,

$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – така функція взаємодії, що

$$f \in \mathbf{C}(\mathbf{R}), \quad G = [g_1, g_2], \quad g_i \in \mathbf{C}(\mathbf{R}), \quad i = 1,2. \tag{2.28}$$

Покладемо $V = H_0^1(Q)$ і $H = L^2(Q)$. Простір $X = V \times H$ – фазовий простір задачі (2.27).

Існують мала стала $C \geq 0$ ($C < \min\{\beta, \lambda_1\}$) та сталі $D_i \geq 0$, $i = 1,2$ такі, що

$$\underline{\lim}_{|y| \to \infty} \frac{f(y)}{y} > -\lambda_1, \tag{2.29}$$

де λ_1 – перше власне значення для оператора $-\Delta$ в просторі V,

$$|g_i(y)| \leq C|y| + D_1, \quad \forall y \in \mathbf{R},\ i = 1,2, \tag{2.30}$$

$$|f(y)| \leq D_2(1 + |y|^{\frac{n}{n-2}}), \quad \forall y \in \mathbf{R}. \tag{2.31}$$

Нехай $T > 0$. Функція $\varphi(\cdot) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T \in L^\infty(0,T;X)$ називається слабким розв'язком задачі (2.27) на проміжку $(0,T)$, якщо для майже всіх пар $(x,t) \in Q \times (0,T)$ існує функціонал $l = l(x,t) \in L^2(0,T;H)$, $l(x,t) \in G(y(x,t))$ такий, що для всіх $\psi(\cdot) \in V$, $\eta(\cdot) \in \mathbf{C}_0^\infty(0,T)$ виконується таке співвідношення:

$$-\int_0^T (y_t(x,t), \psi(x))_H \eta_t(t)\, dt +$$

$$+\int_0^T [(\beta(y_t(x,t), \psi(x))_H + (y(x,t), \psi(x))_V + (f(y(x,t)), \psi(x))_H -$$

$$-(l(x,t), \psi(x))_H - (h(x), \psi(x))_H)\eta(t)]dt = 0.$$

При виконанні припущень (2.28)-(2.31) на параметри задачі (2.27) для всіх $\varphi_0 = (y_0, y_1)^T \in X$, $T > 0$ існує слабкий розв'язок $\varphi(\cdot)$ задачі (2.27) такий, що $\varphi(0) = \varphi_0$. Більше того, якщо $\varphi(\cdot) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T$ — це слабкий розв'язок задачі (2.27) з відповідним оператором $l(x,t) \in L^2(0,T;H)$, тоді $\varphi(\cdot) \in \mathbf{C}([0,T];X)$, функції

$$t \mapsto \| y_t(t) \|_H^2 + \| y(t) \|_V^2,$$

$$t \mapsto (F(y(t)), 1)_H$$

– абсолютно неперервні на проміжку $[0,T]$, і для $t, s \in [0,T]$, $s \le t$ виконуються такі співвідношення:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\| y_t(t) \|_H^2 + \| y(t) \|_V^2 + (F(y(t)), 1)_H) = \\ &= -\beta \| y_t(t) \|_H^2 + (l(t), y_t(t))_H + (h, y_t(t))_H, \end{aligned} \qquad (2.32)$$

$$\| y_t(t) \|_H^2 + \| y(t) \|_V^2 \le e^{-\delta(t-s)} \left(\| y_t(s) \|_H^2 + \| y(s) \|_V^{\frac{2n-2}{n-2}} \right) + D_3, \qquad (2.33)$$

де $F(y)=\int_0^y f(s)ds$, $y\in\mathbf{R}$, і сталі $\delta>0$, $D_3>0$ не залежать від φ.

Дійсно, спочатку виведемо умову (2.33). Розглянемо

$$Y(t)=\frac{1}{2}\parallel y_t(t)\parallel_H^2+\frac{1}{2}\parallel y(t)\parallel_V^2+(F(y(t)),1)_H+\alpha(y_t(t),y(t))_H,\ t\in[0,T],$$

де $\alpha>0$. Тоді для достатньо малих $C>0$ і $\delta>0$ виконується такий ланцюжок перетворень:

$$\frac{dY(t)}{dt}=(y_{tt}(t),y_t(t))_H-(\Delta y(t),y_t(t))_H+$$

$$+(f(y(t)),y_t(t))_H+\alpha(y_{tt}(t),y(t))_H+\alpha\parallel y_t(t)\parallel_H^2=$$

$$=(-\beta y_t(t)+l(t)+h,y_t(t))_H+\alpha\parallel y_t(t)\parallel_H^2+$$

$$+\alpha(-\beta y_t(t)+\Delta y(t)-f(y(t))+l(t)+h,y(t))_H=$$

$$=-(\beta-\alpha)\parallel y_t(t)\parallel_H^2+(l(t),y_t(t))_H+(h,y_t(t))_H-\alpha\beta(y_t(t),y(t))_H-$$

$$-\alpha\parallel y(t)\parallel_V^2-\alpha(f(y(t)),y(t))_H+\alpha(l(t)+h,y(t))_H\le$$

$$\le-(\beta-\alpha-\varepsilon)\parallel y_t(t)\parallel_H^2+C\parallel y(t)\parallel_H\parallel y_t(t)\parallel_H\le$$

$$\le-\alpha\parallel y(t)\parallel_V^2-\alpha(-\lambda_1+C+\varepsilon)\parallel y(t)\parallel_H^2+\alpha C\parallel y(t)\parallel_H^2+K\le$$

$$\le-\delta Y(t)+\widetilde{K}.$$

Маємо, що

$$F(y)\ge(-\frac{\lambda_1}{2}+\varepsilon)y^2+L,\quad F(y)\le M(1+|y|^{\frac{2\gamma-2}{\gamma-2}}),\quad\forall y\in\mathbf{R}\qquad(2.34)$$

Таким чином, з нерівностей (2.34) слідує нерівність (2.33). Всі решта тверджень, зокрема (2.32), випливають з результатів робіт [8, 180]. Існування розв’язку слідує з існування неперервного селектора для багатозначного відображення G.

Множина розв’язків задачі (2.27) не покривається всіма неперервними селекторами багатозначного відображення $G: \mathbf{R} \mapsto 2^{\mathbf{R}}$. Дійсно, нехай $f \equiv 0$, $G(y) \equiv [-\varepsilon, \varepsilon]$, $h \equiv 0$. Розглянемо розв’язки задачі

$$\begin{cases} \Delta y(x) \in [-\varepsilon, \varepsilon] \quad \text{в} \quad Q = (0, \pi), \\ y(0) = y(\pi) = 0, \end{cases}$$

тобто, стаціонарні розв’язки задачі (2.27). Тоді функція

$$y(x) = \frac{\varepsilon}{2} \sin x + \frac{\varepsilon}{8} \sin 2x, \quad x \in (0, \pi)$$

– розв’язок даної задачі, але не має такої функції $g \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$, що $g(y) \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ $\forall y \in \mathbf{R}$, і $\Delta y(x) = g(y(x))$, $x \in (0, \pi)$. Дійсно, припустимо протилежне. Нехай така функція існує. Рівняння

$$\frac{\varepsilon}{2} \sin x + \frac{\varepsilon}{8} \sin 2x = \frac{\varepsilon}{2}$$

має два розв’язки

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \text{і} \quad x = x^* \neq \frac{\pi}{2} \in (0, \pi).$$

Якщо $x = \frac{\pi}{2}$, то

$$g\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Якщо $x = x^*$, то

$$g\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = -\frac{\varepsilon}{2} \sin x^* - \frac{\varepsilon}{2} \sin 2x^* = -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{3\varepsilon}{8} \sin 2x^* \neq -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ця суперечність завершує приклад.

У випадку, коли $G(y) \equiv g(y)$ – однозначна функція, існування глобального атрактора доведене в роботі [8].

Виберемо клас розв’язків, для якого існує глобальний атрактор. Для цього будемо використовувати поняття «енергетичного» рівняння [8], яке описує закони збереження енергії. Нехай $\varphi(\cdot) \in C([0, +\infty); X)$ – розв’язок задачі (2.27). Введемо наступні позначення:

$$I(\varphi)=\frac{1}{2}\parallel y_t(t)\parallel_H^2+\frac{1}{2}\parallel y(t)\parallel_V^2+(F(y(t)),1)_H+\frac{\beta}{2}(y_t(t),y(t))_H,$$

$$g_\lambda(y)=\lambda g_1(y)+(1-\lambda g_2(y)),$$

$$G_\lambda(y)=\int_0^y g_\lambda(s)ds,\ \ \lambda\in[0,1],\ \ y\in\mathbf{R},$$

$$H(\varphi)=\beta(F(y(t)),1)_H-\frac{\beta}{2}(f(y(t)),y(t))_H+\frac{\beta}{2}(h,y(t))_H+(h,y_t(t))_H.$$

Означення 2.2 Слабкий розв'язок $\varphi(\cdot)$ задачі (2.27) з відповідною функцією $l(x,t)$ називається енергетичним розв'язком, якщо існує таке $\lambda\in[0,1]$ $\ (\lambda=\lambda(\varphi))$, що для всіх $t\geq 0$ виконується рівність:

$$\frac{d}{dt}I(\varphi(t))+\beta I(\varphi(t))-\frac{d}{dt}(G_\lambda(y(t)),1)_H=\frac{\beta}{2}(l(t),y(t))_H+H(\varphi(t)).\qquad(2.35)$$

Будь-який розв'язок задовольняє рівняння

$$\frac{d}{dt}I(\varphi(t))+\beta I(\varphi(t))-(l(t),y_t(t))_H=\frac{\beta}{2}(l(t),y(t))_H+H(\varphi(t)).$$

Будь-який «селекторний» розв'язок задовольняє рівняння

$$\frac{d}{dt}I(\varphi(t))+\beta I(\varphi(t))-(g(y(t)),y_t(t))_H=\frac{\beta}{2}(g(y(t)),y(t))_H+H(\varphi(t)).$$

Будь-який стаціонарний розв'язок $y(t)$ очевидно задовольняє рівність (2.35). Тому, множина всіх «селекторних» розв'язків (розв'язків задачі (2.27) з $l(x,t)=g(y(x,t))$, $g\in G$) не включає множину енергетичних розв'язків. Більше того, множина всіх енергетичних розв'язків є ширшою за множину всіх розв'язків задачі (2.27) з $l(x,t)=g_\lambda(y(x,t))$.

Покладемо

$$\mathcal{G}(t,\varphi_0)=\{\varphi(t)\mid\varphi(\cdot)\ -\text{енергетичний розв'язок задачі (2.27)}\,,$$
$$\varphi(0)=\varphi_0\}. \qquad (2.36)$$

Для багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$ існує інваріантний компактний в фазовому просторі X глобальний атрактор. Дійсно, маємо, що $\mathcal{G}$, визначене в (2.36) – багатозначний напівпотік (але не строгий; він буде строгим, якщо в означенні 2.2 проміжок $[0,+\infty)$ поділити на інтервали з різними λ). Зазначимо, що багатозначний напівпотік $\mathcal{G}$ – дисипативний; $\mathcal{G}$ має замкнутий графік (необхідно перейти до границі в рівності (2.35)); $\mathcal{G}$ – асимптотично напівкомпактний напівпотік. Аналогічно до роботи [8] отримаємо такі рівняння:

$$I(\varphi_j(t_j))-(G_{\lambda_j}(y_j(t_j)),1)_H=$$
$$=\Big(I(\varphi_j(t_j-M))-(G_{\lambda_j}(\varphi_j(t_j-M)),1)_H\Big)e^{-\beta M}+\int_0^M e^{\beta(t-M)}\times \qquad (2.37)$$
$$\times\,(H(\varphi_j(t))+\frac{\beta}{2}(l_j(t),y_j(t))_H-\beta(G_{\lambda_j}(\varphi_j(t)),1)_H)dt$$

Оскільки з точністю до підпослідовності $\lambda_j\to\lambda,\ \ j\to\infty$ послідовність $\varphi_j(t_j)\to\chi$ слабко в просторі V, $j\to\infty$, то будемо мати, що

$$(G_{\lambda_j}(\varphi_j(t_j)),1)_H\to(G_\lambda(\chi),1)_H,\ \ j\to\infty,$$

і аналогічно до результатів роботи [8] і (2.37) отримаємо, що $I(\varphi_j(t_j))\to I(\chi)$, $j\to\infty$.

Зауважимо, що можливо побудувати інший багатозначний напівпотік, породжений селекторними розв'язками, тобто,

$$\mathcal{G}(t,\varphi_0)=$$

$$= \left\{ \varphi(t) \left| \begin{array}{l} \varphi(\cdot) - \text{ розв}'\text{язок задачі } (2.27), \\ \varphi(0) = \varphi_0, \\ \exists g \in \mathrm{G}: \varphi(\cdot) \ - \text{ розв}'\text{язок відповідного рівняння з } \ g \end{array} \right. \right\}.$$

Однак у цьому випадку для послідовності $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ маємо, що $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$, $g_j(y) \in G(y)$ для всіх $y \in \mathbf{R}$. Для того, щоб $g_j(y) \to g(y)$, $j \to \infty$, для всіх $y \in \mathbf{R}$, $g \in G$, необхідно посилити умови на G. Але в такому випадку, виникає питання про розв'язність задачі (2.27).

2.2 Асимптотична поведінка розв'язків еволюційної задачі зі стохастичними збуреннями

2.2.1 Постановка задачі

В обмеженій області $Q \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$ розглянемо хвильове рівняння з негладким нелінійним доданком, збуреним адитивним білим шумом:

$$\begin{cases} dy_t(t) + (\beta y_t(t) - \Delta y(t) + f(y(t)))dt = \phi dw, \\ y(t)|_{\partial Q} = 0, \end{cases} \tag{2.38}$$

де $\beta > 0$ і $\phi \in H^2(Q) \cap H_0^1(Q)$ – задані,

w – стандартний Вінерівський процес,

f – неперервна (не обов'язково гладка) функція, яка задовольняє такі умови:

$$|f(y)| \leq C_1(1 + |y|^{\frac{n}{n-2}}), \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned} &f(y)y \geq C_2(F(y) - 1), \\ &F(y) \geq C_3(|y|^{\frac{2n-2}{n-2}} - 1), \end{aligned} \tag{2.40}$$

де $F(y) = \int_0^u f(s)ds$.

Для доведення існування випадкового атрактора для багатозначного стохастичного потоку, породженого розв’язками задачі (2.38), за виконання умов (2.39), (2.40) необхідно довести існування випадкового атрактора для абстрактної випадкової багатозначної динамічної системи, що дасть можливість дослідити динаміку розв’язків задачі (2.38). На рис. 2.2 приведена структурована схема процесу якісних досліджень для задачі (2.38).

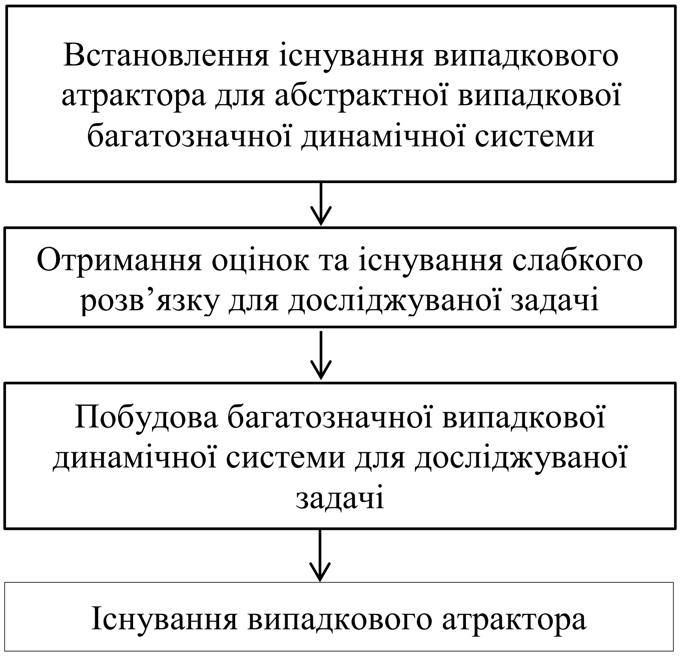

Рис. 2.2 Структурована схема процесу якісних досліджень для моделі (2.38)

2.2.2 Побудова багатозначної випадкової динамічної системи

Нехай $(X, \|\cdot\|)$ – сепарабельний банахів простір з борелівською σ-алгеброю $\sigma(X)$, $C(X)$ – множина всіх непорожніх замкнених підмножин в просторі X, для $A, B \subset X$ позначимо:

$$\bar{A} - \text{замикання множини } A \text{ в просторі } X;$$

$$dist(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \| x - y \|;$$

$$O_\delta(A) = \{y \in X \mid dist(y, A) < \delta\};$$

$$B_r = \{x \in X \mid \ \| x \| \leq r\}, \quad \| A \|_+ = \sup_{a \in A} \| a \|.$$

Нехай (Ω, Φ, P) – ймовірнісний простір, $\overline{\Phi}$ – P-поповнення Φ, $\{\theta_t : \Omega \mapsto \Omega\}_{t \in \mathbf{R}}$ – метрична динамічна система [3], яка є групою перетворень, що зберігають міру в Ω, такою, що відображення $(t, \omega) \mapsto \theta_t \omega$ – вимірне, де параметр t приймає значення в просторі $\mathbf{R}$, наділеному борелівською σ-алгеброю $\sigma(\mathbf{R})$.

Відображення $F: \Omega \mapsto C(X)$ називається випадковою множиною $F(\omega)$, якщо F – вимірне, тобто функція $\omega \mapsto dist(y, F(\omega))$ є вимірною.

Означення 2.3 Відображення $\mathcal{G}: \boldsymbol{R}_+ \times \Omega \times X \mapsto C(X)$ називається багатозначною випадковою динамічною системою, якщо

1. для будь-якого $x \in X$ відображення $(t, \omega) \mapsto \mathcal{G}(t, \omega)x$ – вимірне;
2. $\forall \omega \in \Omega, \forall t, s \geq 0, \forall x \in X$ виконуються такі співвідношення:

$$\mathcal{G}(0, \omega)x = x,$$

$$\mathcal{G}(t + s, \omega)x \subseteq \mathcal{G}(t, \theta_s \omega)\mathcal{G}(s, \omega)x.$$

Зазначимо, що достатньо буде припускати умову 2) для θ_t-інваріантної множини повної міри.

Означення 2.4 Випадкова множина $\mathcal{A}(\omega)$ називається випадковим атрактором для багатозначної випадкової динамічної системи $\mathcal{G}$, якщо для P-майже всіх $\omega \in \Omega$ виконуються такі умови:

1. множина $\mathcal{A}(\omega)$ – компактна;
2. для всіх $t \geq 0$ виконується таке вкладення:

$$\mathcal{A}(\theta_t \omega) \subset \mathcal{G}(t, \omega)\mathcal{A}(\omega);$$

3. для будь-яких $r > 0$ маємо, що

$$dist(\mathcal{G}(t,\theta_{-t}\omega)B_r, \mathcal{A}(\omega)) \to 0, \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Теорема 2.5 Припустимо, що багатозначна випадкова динамічна система $\mathcal{G}$ задовольняє такі умови:

1. P-майже скрізь існує така обмежена випадкова множина $B(\omega)$, що для P-майже всіх $\omega \in \Omega$ та для будь-якого $r > 0$ виконується

$$dist(\mathcal{G}(t,\theta_{-t}\omega)B_r, B(\omega)) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty; \tag{2.41}$$

2. $\forall\ t \geq 0,\ \forall\ \omega \in \Omega$ відображення $\mathcal{G}(t,\omega): X \mapsto C(X)$ є компактнозначним і напівнеперервним зверху;
3. $\forall\ r > 0$ відображення $(t,\omega) \mapsto \overline{\mathcal{G}(t,\omega)B_r}$ – вимірне;
4. для P-майже всіх $\omega \in \Omega$, $\forall\ r > 0$, $\forall\ t_n \nearrow +\infty$ довільна послідовність $\xi_n \in \mathcal{G}(t_n, \theta_{-t_n}\omega)B_r$ – передкомпактна в просторі X.

Тоді множина

$$\mathcal{A}(\omega) = \overline{\bigcup_{r>0} \Lambda_{B_r}(\omega)}, \text{ де } \Lambda_B(\omega) = \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t\geq T} \mathcal{G}(t,\theta_{-t}\omega)B} \tag{2.42}$$

є випадковим атрактором для багатозначної випадкової динамічної системи $\mathcal{G}$, причому, він є P-майже скрізь єдиним та мінімальним серед замкнутих множин, що задовольняють співвідношення (2.41).

Доведення. З умови (2.41) маємо існування P-майже скрізь обмеженої випадкової множини $D(\omega) \supset B(\omega)$ такої, що для P-майже всіх $\omega \in \Omega$, $\forall\ r > 0$ виконується:

$$\exists T = T(\omega, r) \quad \forall t \geq T \quad \mathcal{G}(t,\theta_{-t}\omega)B_r \subset D(\omega). \tag{2.43}$$

Покажемо, що множина $\mathcal{A}$ – випадковий атрактор. Відомо [26], що

$$y \in \Lambda_B(\omega) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists\, t_n \nearrow +\infty,\ n \to \infty,\ \ \exists\, y_n \in \mathcal{G}\big(t_n, \theta_{-t_n}\omega\big)B\colon\ y_n \to y,\ n \to \infty.$$

Таким чином, з умови 4 випливає, що існує така множина Ω_0, $P(\Omega_0) = 1$, що для всіх $\omega \in \Omega_0$ та для всіх $r > 0$ $\Lambda_{B_r}(\omega) \neq \emptyset$. Припустивши виконання умови 4 для всіх $\omega \in \Omega_0$, отримуємо, що для будь-якого $\omega \in \Omega_0$ та для будь-якого $r > 0$ має місце вкладення $\Lambda_{B_r}(\omega) \subset B(\omega)$. Тоді для будь-якого $\omega \in \Omega_0$ та для будь-якої послідовності $\{z_n\}_{n\geq 1} \subset \Lambda_{B_r}(\omega)$ існує $t_n \nearrow +\infty$, $n \to \infty$, та існує $\xi_n \in \mathcal{G}(t_n, \theta_{-t_n}\omega)B_r$ таке, що $\| \xi_n - z_n \| \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 1$. Тоді, в силу умови 4 послідовність $\{z_n\}_{n\geq 1}$ є передкомпактною, тому для всіх $\omega \in \Omega_0$ та для всіх $r > 0$ множина $\Lambda_{B_r}(\omega)$ – компактна.

Покажемо, що для всіх $\omega \in \Omega_0$ та для всіх $r > 0$ множина $\Lambda_{B_r}(\omega)$ притягує множину B_r в сенсі співвідношення (2.41). В протилежному випадку існують такі $\delta > 0$, $t_n \nearrow +\infty$, $n \to \infty$, та $\{y_n\}_{n\geq 1}$: $y_n \in \mathcal{G}(t_n, \theta_{-t_n}\omega)B_r$, що $dist(y_n, \Lambda_{B_r}(\omega)) \geq \delta$. Але з точністю до деякої підпослідовності послідовність $y_n \to y \in \Lambda_{B_r}(\omega)$, $n \to \infty$, звідки маємо суперечність. Тому для всіх $\omega \in \Omega_0$ множина $\mathcal{A}(\omega) = \overline{\bigcup_{r>0} \Lambda_{B_r}(\omega)}$ задовольняє умову 3 означення 2.4. Більше того, $\mathcal{A}(\omega) \subset B(\omega)$, тому $\mathcal{A}(\omega)$ – обмежена множина P-майже скрізь.

Покажемо, що $\mathcal{A}(\omega)$ – компакна P-майже скрізь множина. Покладемо $\Omega^0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, де $\Omega_n = \{\omega \in \Omega_0 \mid \theta_{-n}\omega \in \Omega_0\}$ $\forall n \geq 1$. Тоді $P(\Omega^0) = 1$. Для $\omega \in \Omega^0$ визначимо множину $K(\omega) = \bigcup_{r>0} \Lambda_{B_r}(\omega)$. Для кожної послідовності $\{\xi_n\}_{n\geq 1} \subset K(\omega)$ і для довільного $n \geq 1$ ми можемо знайти таке $r_n > 0$, що $\xi_n \in \Lambda_{B_{r_n}}(\omega)$. Тоді

$$\forall n \geq 1, \quad \forall \omega \in \Omega^0 \quad \exists T = T(\omega, n) \quad \forall t \geq T$$

$$\mathcal{G}(t, \theta_{-t}\omega)B_{r_n} \subset D(\theta_{-n}\omega).$$

Для $n \geq 1$ існує така послідовність $\eta_n \in \bigcup_{t \geq T+n} \mathcal{G}(t, \theta_{-t}\omega)B_{r_n}$, що $\| \eta_n - \xi_n \| \leq \frac{1}{n}$. Тому, для будь-якого $n \geq 1$ існує таке $m \geq T$, що виконуються вкладення:

$$\eta_n \in \mathcal{G}(n+m, \theta_{-m-n}\omega)B_{r_n} \subset$$

$$\subset \mathcal{G}(n, \theta_{-n}\omega)\mathcal{G}(m, \theta_{-m}\theta_{-n}\omega)B_{r_n} \subset \mathcal{G}(n, \theta_{-n}\omega)D(\theta_{-n}\omega).$$

Розглянемо для довільного $R > 0$ множини

$$\Omega(R) = \{\omega \mid \ \| D(\omega) \|_{+} \leq R\};$$

$$\Omega_{\infty}(R) = \{\omega \mid \theta_{-n}\omega \in \Omega(R) \text{ для нескінченної кількості } n\}.$$

З теореми Пуанкаре про рекурсію випливає, що $P(\Omega_{\infty}(R)) \geq P(\Omega(R))$. Оскільки множина $D(\omega)$ – обмежена P-майже скрізь, то $P(\Omega_{\infty}(R)) \to 1$ при $R \to \infty$. Для $\omega \in \Omega^0 \cap \Omega_{\infty}(R)$ можемо знайти таку підпослідовність $\{n_k(\omega)\}_{k=1}^{\infty}$, що для кожного $k \geq 1$ $\eta_{n_k} \in \mathcal{G}(n_k, \theta_{-n_k}\omega)B_R$. Тому для будь-якого $R > 0$ та для будь-якого $\omega \in \Omega^0 \cap \Omega_{\infty}(R)$ $K(\omega)$ – передкомпактна в просторі X, і множина $\mathcal{A}(\omega)$ – компактна P-майже скрізь.

З умови 3 випливає (див. роботу [17]), що відображення

$$\omega \mapsto \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{t=k}^{\infty} \mathcal{G}(t, \theta_{-t}\omega)B_n}$$

– $\overline{\Phi}$-вимірне. Тому внаслідок результатів роботи [30] маємо, що існує компактна випадкова множина $\tilde{\mathcal{A}}(\omega)$ така, що $\tilde{\mathcal{A}}(\omega) = \mathcal{A}(\omega)$ для P-майже всіх $\omega \in \Omega$. Таким чином, множина $\tilde{\mathcal{A}}(\omega)$ – компактна випадкова множина, яка задовольняє умову 3 означення 2.4. Тоді з результатів роботи [17] отримуємо, що для багатозначної випадкової динамічної системи $\mathcal{G}$ існує випадковий атрактор, який збігається з $\mathcal{A}(\omega)$ P-майже скрізь і є мінімальною множиною серед замкнених множин, що задовольняють співвідношення

(2.41). Таким чином, припущення 1-4 гарантують існування випадкового атрактора (2.42) для абстрактної багатозначної випадкової динамічної системи. В роботі [17] існування випадкового атрактора для абстрактної багатозначної динамічної системи доведене за умови компактності $B(\omega)$ (яка є сильнішою ніж умова 4), в роботі [70] – за умови передкомпактності $\mathcal{G}(t,\omega)B_r$, яка є також сильнішою ніж умова 4, оскільки

$$\xi_n \in \mathcal{G}(t_n,\theta_{-t_n}\omega)B_r \subset \mathcal{G}(1,\theta_{-1}\omega)\mathcal{G}(t_n-1,\theta_{-t_n}\omega)B_r \subset \mathcal{G}(1,\theta_{-1}\omega)D(\theta_{-1}\omega).$$

2.2.3 Існування випадкового атрактора

Повернемось до задачі (2.38). Покажемо, що для стохастичного потоку, породженого задачею (2.38), існує випадковий атрактор. Для цього розглянемо задачу (2.38) при умовах (2.39), (2.40), де w – двосторонній дійсний Вінерівський процес. Розглянемо канонічний Вінерівський ймовірнісний простір (Ω,Φ,P). Тоді ми маємо, що $w(t,\omega)=\omega(t)\ \forall\ t\in\mathbf{R}$, і формула

$$\theta_s\omega(t)=\omega(t+s)-\omega(s)$$

визначає метричну динамічну систему $\{\theta_s\colon\Omega\mapsto\Omega\}_{s\in\mathbf{R}}$ [3].

Аналогічно міркуванням, проведеним в роботі [32], визначимо $W=W(t,\omega)$ як розв’язок задачі

$$\begin{cases} dW_t(t)+\beta W_t(t)=dw, \\ W(0)=W_t(0)=0. \end{cases} \tag{2.44}$$

Після заміни змінних $v(t)=y(t)-\phi W(t)$ рівняння (2.38) перетвориться в таку систему

$$\begin{cases} v_{tt}(t)+\beta v_t(t)-\Delta v(t)+f(v(t)+\phi W(t))=\Delta\phi W(t), \\ v(t)|_{\partial Q}=0. \end{cases} \tag{2.45}$$

де $W(t,\omega)$ розв’язок задачі (2.44). Нехай $H = L^2(Q)$, $V = H_0^1(Q)$. Тепер отримаємо апріорну оцінку для слабкого розв’язку $\varphi(\cdot) = (v(\cdot), v_t(\cdot))^T$ задачі (2.45) в фазовому просторі $X = V \times H$ з нормою $\| \varphi(\cdot) \|_X$.

Домноживши рівняння (2.45) на $\tilde{v}(t) = v_t(t) + \eta v(t)$ для достатньо малого $\eta > 0$ отримаємо таке співвідношення [32]:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\| \tilde{v}(t) \|_H^2 + \| v(t) \|_V^2) + \eta \| v(t) \|_V^2 + (\beta - \eta) \| \tilde{v}(t) \|_H^2 -$$

$$-\eta(\beta - \eta)(\tilde{v}(t), v(t))_H + (f(y(t)), \tilde{v}(t))_H = (\tilde{v}(t), \Delta\phi W(t))_H,$$

де для достатньо малого $\eta > 0$ виконується такий ланцюжок перетворень:

$$\eta \| v(t) \|_V^2 + (\beta - \eta) \| \tilde{v}(t) \|_H^2 - \eta(\beta - \eta)(\tilde{v}(t), v(t))_H \geq$$

$$\geq \frac{\eta}{2}(\| v(t) \|_V^2 + \| \tilde{v}(t) \|_H^2),$$

$$|(\tilde{v}(t), \Delta\phi W(t))_H| \leq \frac{\eta}{4} \| \tilde{v}(t) \|_H^2 + C_\eta \| W(t) \|_H^2,$$

$$(f(y(t)), \tilde{v}(t))_H \geq \frac{d}{dt}(F(y(t)),1)_H + \eta C_2 (F(y(t)),1)_H -$$

$$-\eta C_1 |Q| - (f(y(t)), \phi(W_t(t) + \eta W(t)))_H,$$

$$|(f(y(t)), \phi)_H||W_t(t) + \eta W(t)| \leq$$

$$\leq \frac{C_2 \eta}{2}(F(y(t)),1)_H + C_\eta(1 + |W_t(t) + \eta W(t)|^{\frac{2n-2}{n-2}}).$$

З вищенаведених нерівностей для деякого малого $\delta > 0$ отримаємо, що

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}(\| \tilde{v}(t) \|_H^2 + \| v(t) \|_V^2 + (F(y(t)),1)_H) + \\ + \delta(\| \tilde{v}(t) \|_H^2 + \| v(t) \|_V^2 + (F(y(t)),1)_H) \leq g(t,\omega),\end{gathered} \tag{2.46}$$

де

$$g(t,\omega)=C(1+|W(t,\omega)|^{\frac{2n-2}{n-2}}+|W_t(t,\omega)|^{\frac{2n-2}{n-2}}),$$

і $C>0$ – деяка стала, яка не залежить від ω.

Тому, з леми Гроноулла для всіх $t\geq s$ з (2.46) маємо, що

$$\begin{gathered}\|\tilde{v}(t)\|_H^2+\|v(t)\|_V^2+(F(y(t)),1)_H)\leq\\ \leq e^{-\delta(t-s)}(\|\tilde{v}(s)\|_H^2+\|v(s)\|_V^2+(F(y(s)),1))_H+\\ +\int_s^t e^{-\delta(t-\tau)}g(\tau,\omega)d\tau.\end{gathered}\tag{2.47}$$

З нерівності (2.47) отримуємо остаточну оцінку: $\exists C>0\ \forall t\geq s,\ \forall\omega\in\Omega$

$$\|\varphi(t)\|_X^2\leq C(1+e^{-\delta(t-s)}\|\varphi(s)\|_X^{\frac{2n-2}{n-2}}+\int_s^t e^{-\delta(t-\tau)}g(\tau,\omega)d\tau).\tag{2.48}$$

З оцінки (2.48) випливає [60], що $\forall\omega\in\Omega$, $\forall s\in\mathbf{R}$, $\forall\varphi_s\in X$ існує принаймні один (слабкий) розв'язок задачі (2.45) $\varphi(\cdot)=(v(\cdot),v_t(\cdot))^T$ на проміжку $[s,+\infty)$, $\varphi(s)=\varphi_s$. У подальших міркуваннях позначатимемо його через $\varphi(t,\omega,s,\varphi_s)$. Більше того, кожен розв'язок задачі (2.45) на проміжку $[s,+\infty)$ належить простору $C([s,+\infty);X)$ і задовольняє нерівність (2.48) та таку рівність:

$$\frac{d}{dt}I_\omega(t,\varphi(t))+\beta I_\omega(t,\varphi(t))=H_\omega(t,\varphi(t)),\tag{2.49}$$

де

$$I_\omega(t,\varphi(t))=\frac{1}{2}\|v_t(t)\|_H^2+\|v(t)\|_V^2+(F(y(t)),1)_H+\frac{\beta}{2}(v_t(t),v(t))_H,$$

$$H_\omega(t,\varphi(t))=(v_t(t),\Delta\phi W(t))_H+\frac{\beta}{2}(v(t),\Delta\phi W(t))_H-$$

$$-\frac{\beta}{2}(f(y(t)),v(t))_H+(f(y(t)),\phi W_t(t))_H+\beta(F(y(t)),1)_H,$$

$$y(t)=v(t)+\phi W(t).$$

Крім того, справедливий наступний результат.

Лема 2.7 [60, лема 6] Нехай $\omega_n \to \omega_0$ в просторі Ω, $t_n \to t_0 \geq s$, $\varphi_n(\cdot)$ – розв’язок задачі (2.45) на проміжку $[s, +\infty)$ з випадковим параметром ω_n, $\varphi_n(s) \to \varphi_s$ слабко в просторі X, $n \to \infty$. Тоді існує $\varphi(\cdot)$ – розв’язок задачі (2.45) на проміжку $[s, +\infty)$ з випадковим параметром ω_0, $\varphi(s) = \varphi_s$ такий, що з точністю до деякої підпослідовності

$$\varphi_n(t_n) \to \varphi(t_0) \text{ слабко в просторі } X,$$

$$H_{\omega_n}(t_n, \varphi_n(t_n)) \to H_{\omega_0}(t_0, \varphi(t_0)), n \to \infty.$$

Якщо, більше того, $\varphi_n(s) \to \varphi_s$ сильно в просторі X, то $\varphi_n(t_n) \to \varphi(t_0)$ сильно в просторі X, $n \to \infty$.

Покладемо $\overline{W}(\cdot) = (\phi W(\cdot), \phi W_t(\cdot))^T$ і визначимо відображення

$$S: \mathbf{R}_d \times \Omega \times X \mapsto P(X),$$

$$S(t, s, \omega)\varphi_0 = \{\varphi(t, \omega, s, \varphi_0 - \overline{W}(s, \omega)) + \overline{W}(t, \omega)\}; \tag{2.50}$$

$$\mathcal{G}: \mathbf{R}_+ \times \Omega \times X \mapsto P(X),$$

$$\mathcal{G}(t, \omega)\varphi_0 = \{\varphi(t, \omega, 0, \varphi_0) + \overline{W}(t, \omega)\}. \tag{2.51}$$

Для кожного $s \in \mathbf{R}$ виконується така рівність [32]:

$$\mathcal{G}(t, \omega)x = S(t + s, s, \theta_{-s}\omega)x, \tag{2.52}$$

і відображення S, визначене в (2.50), для кожного $\omega \in \Omega$ породжує багатозначний процес [60], тобто

$$\forall \tau \in \mathbf{R} \quad S(\tau, \tau, \omega)x = x,$$

$$\forall\ t \geq r \geq s \quad S(t,s,\omega)x \subset S(t,r,\omega)S(r,s,\omega)x.$$

Теорема 2.6 Формула (2.51) визначає багатозначну випадкову динамічну систему, для якої існує випадковий атрактор в фазовому просторі $X = H_0^1(Q) \times L^2(Q)$.

Доведення. Покажемо виконання умови 2 означення 2.3. З рівняння (2.51) випливає, що $\forall \omega \in \Omega$, $\forall x \in X \quad \mathcal{G}(0,\omega)x = x$. Для $t_1, t_2 \geq 0$ маємо справедливість такого ланцюжка перетворень:

$$\mathcal{G}(t_1 + t_2, \omega)x = S(t_1 + t_2 + s, s, \theta_{-s}\omega)x \subset$$

$$\subset S(t_1 + t_2 + s, t_2 + s, \theta_{-s}\omega)S(t_2 + s, s, \theta_{-s}\omega)x =$$

$$= S(t_1 + t_2 + s, t_2 + s, \theta_{-t_2-s}\theta_{t_2}\omega)S(t_2 + s, s, \theta_{-s}\omega)x =$$

$$= \mathcal{G}(t_1, \theta_{t_2}\omega)\mathcal{G}(t_2, \omega)x.$$

Тепер перевіримо умови теореми 2.5 (з умов 2-3 зокрема, випливає замкненозначність та вимірність відображення $\mathcal{G}$). Нехай $\xi_n \in \mathcal{G}(t,\omega)\eta_n$. Тоді $\xi_n = \varphi_n(t,\omega,0,\eta_n) + \overline{W}(t,\omega)$, і внаслідок леми 2.7 маємо виконання умови 2.

Для фіксованих $a \in R$, $r \geq 0$, $y \in X$ розглянемо множину

$$E = \{(t,\omega)\ \mid\ dist(y, \overline{\mathcal{G}(t,\omega)B_r}) \leq a\}.$$

Якщо $(t_n, \omega_n) \in E$, $(t_n, \omega_n) \to (t_0, \omega_0)$, то існує така послідовність $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$, що $\eta_n \in B_r$, і $\eta_n \to \eta_0$ слабко в просторі X, $n \to \infty$, та існує така послідовність $\{y_n\}_{n\geq 1}$, що $y_n \in \mathcal{G}(t_n,\omega_n)\eta_n$, і $\| y_n - y \| \leq a$, $n \to \infty$. Оскільки $y_n = \varphi_n(t_n, \omega_n, 0, \eta_n) + \overline{W}(t, \omega_n)$, тому в силу леми 2.7 маємо, що $y_n \to z = \varphi(t_0, \omega_0, 0, \eta_0) + \overline{W}(t, \omega_0)$ слабко в просторі X, $n \to \infty$. Таким чином, $z \in \mathcal{G}(t_0, \omega_0)B_r$, і $\| z - y \| \leq \underline{\lim} \| y_n - y \| \leq a$. Отже, $(t_0, \omega_0) \in E$ і умова 3 має місце.

Відповідно до рівності (2.52) отримуємо, що

$$\mathcal{G}(t,\theta_{-t}\omega)\varphi_0 = S(0,-t,\omega)\varphi_0 = \{\varphi(0,\omega,-t,\varphi_0 - \overline{W}(-t))\}.$$

Тому з нерівності (2.48) маємо, що

$$\begin{gathered}\| \mathcal{G}(t,\theta_{-t}\omega)B_r \|_+^2 \leq \\ \leq C(1 + e^{-\delta t}(r + \| \overline{W}(-t) \|_X)^{\frac{2n-2}{n-2}} + \int_{-t}^{0} e^{\delta\tau} g(\tau,\omega)d\tau).\end{gathered} \tag{2.53}$$

Це означає, що умови (2.43) і 1) справедливі для $D(\omega) = B_{C(2+r(\omega))}$, де

$$r(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{\delta\tau} g(\tau,\omega)d\tau < \infty \quad P - \text{ майже скрізь.}$$

Перевіримо умову 4. Якщо $\xi_n \in \mathcal{G}(t_n,\theta_{-t_n}\omega)\eta_n$, де $t_n \nearrow +\infty$, $\eta_n \to \eta$ слабко в просторі X, $n \to \infty$, то з рівності (2.52) випливає, що $\xi_n = \varphi_n(0,\omega,-t_n,\eta_n - \overline{W}(-t_n,\omega))$, і з оцінки (2.53) маємо, що $\xi_n \to \xi$ слабко в просторі X, $n \to \infty$. Для $M > 0$ розглянемо

$$\begin{gathered}z_n(t) = \varphi_n(t-M,\omega,-t_n,\eta_n - \overline{W}(-t_n,\omega)) + \\ +\overline{W}(t-M,\omega) \in S(t-M,-t_n,\omega)\eta_n \subset \\ \subset S(t-M,-M,\omega)(\varphi_n(-2M,\omega,-t_n,\eta_n - \overline{W}(-t_n)) + \overline{W}(-2M)).\end{gathered}$$

Тому $z_n(t) = \tilde{\varphi}_n(t-M,\omega,-M,\gamma_M^n - \overline{W}(-M)) + \overline{W}(t-M)$, де

$$\begin{gathered}\gamma_M^n = \varphi_n(-2M,\omega,-t_n,\eta_n - \overline{W}(-t_n)) + \\ +\overline{W}(-2M) \to \gamma_M \quad \text{слабко в просторі} \quad X,\ \ n \to \infty.\end{gathered}$$

Тоді з леми 2.7 для будь-якого $t \in [0,M]$ отримуємо, що

$$\begin{gathered}z_n(t) \to z(t) = \tilde{\varphi}_n(t-M,\omega,-M,\gamma_M - \overline{W}(-M)) + \\ +\overline{W}(t-M) \quad \text{слабко в просторі} \quad X, n \to \infty.\end{gathered}$$

Застосувавши рівність (2.49) до функції $\tilde{\varphi}_n$, маємо, що

$$I_\omega(0,\xi_n) = e^{-\beta M} I_\omega(-M,\gamma_M^n - \overline{W}(-M)) + \int_{-M}^{0} e^{\beta p} H_\omega(p,\tilde{\varphi}_n(p)dp.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-M}^{0} e^{\beta p} H_\omega(p,\tilde{\varphi}_n(p)dp = \int_{-M}^{0} e^{\beta p} H_\omega(p,\tilde{\varphi}(p)dp =$$

$$= I_\omega(0,\tilde{\varphi}(0)) - e^{-\beta M} I_\omega(-M,\gamma_M - \overline{W}(-M)),$$

то виконується таке співвідношення:

$$\frac{1}{2}\lim\inf \| \xi_n \|_X^2 \le \frac{1}{2} \| \xi \|_X^2 + e^{-\beta M} |I_\omega(-M,\gamma_M - \overline{W}(-M))| +$$

$$+e^{-\beta M} \lim\sup |I_\omega(-M,\gamma_M^n - \overline{W}(-M))| .$$

Перейшовши в останній нерівності до границі при $M \to \infty$, отримуємо нерівність $\underline{\lim} \| \xi_n \|_X \le \| \xi \|_X$, яка означає, що послідовність $\{\xi_n\}_{n\ge 1}$ є передкомпактною в X. Таким чином, ми отримали існування випадкового атрактора для розв'язків досліджуваної стохастично збуреної задачі.

2.3 Висновки до розділу 2

В розділі досліджена глобальна динаміка розв'язків автономного хвильового рівняння з розривною нелінійністю та стохастично збуреного хвильового рівняння. Для першого об'єкту було встановлено існування, властивості та оцінки для слабких розв'язків, показаний характер залежності слабких розв'язків від початкових даних. Для задачі (2.1) був побудований багатозначний напівпотік на розв'язках, доведено його асимптотичну компактність, що дозволило отримати існування в фазовому просторі інваріантного компактного глобального атрактора. Також знайдено функцію типу Ляпунова, завдяки чому була досліджена структура глобального атрактора. Для стохастичного хвильового рівняння, збуреного адитивним білим шумом, в даному розділі було доведено існування випадкового атрактора. Основні результати даного розділу опубліковані в роботах [50, 62].

РОЗДІЛ 3
ЯКІСНИЙ АНАЛІЗ ПОВЕДІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ АВТОНОМНОГО ХВИЛЬОВОГО ВКЛЮЧЕННЯ З ФУНКЦІЄЮ ВЗАЄМОДІЇ СУБГРАДІЄНТНОГО ТИПУ

Даний розділ присвячений вивченню асимптотичної поведінки розв'язків автономного хвильового диференціально-операторного включення з функцією взаємодії, представленою у вигляді різниці субдиференціалів опуклих функціоналів. Зокрема, для включення було знайдено функцію типу Ляпунова, встановлено існування та структурні властивості притягуючих множин, а також отримано скінченновимірність динаміки всіх слабких розв'язків досліджуваної задачі з точністю до малого параметра. Крім того в розділі знайдено достатні умови існування рівномірного глобального атрактора для багатозначного напівпотоку в неавтономному випадку.

3.1 Постановка та припущення на параметри задачі

Розглянемо автономне диференціально-операторне включення хвильового типу:

$$y_{tt}(t) + Ay_t(t) + By(t) + \partial J_1(y(t)) - \partial J_2(y(t)) \ni \bar{0} \quad \text{для майже всіх} \quad t > 0, \tag{3.1}$$

де $A: H \to H$,

$B: V \to V^*$,

$\partial J_1(y(t)) - \partial J_2(y(t)): H \to H$,

$J_i: H \to \mathbf{R}$, $i = 1,2$ – локально ліпшицеві функціонали, що визначаються як $J_i(y) := \int_Q G_i(x, y(x))dx$, $i = 1,2$;

∂J_i – субдиференціали Кларка для $J_i(\cdot)$.

$(V; H; V^*)$ – еволюційна трійка просторів.

Припустимо, що параметри задачі (3.1) задовольняють такі основні припущення [119]:

1. $A: H \to H$ – такий лінійний симетричний оператор, що існує таке $\beta > 0$, що $(Av, v)_H = \beta \|v\|_H^2$ для всіх $v \in H$;
2. $B: V \to V^*$ – такий лінійний симетричний оператор, що існує таке $c_B > 0$, що $\langle Bv, v \rangle_V \geq c_B \|v\|_V^2$ для всіх $v \in V$;
3. $J_i: H \to \mathbf{R}$, $i = 1,2$ – такі функціонали, що

— $J_i(\cdot)$, $i = 1,2$ – локально ліпшицеві та регулярні (див. роботу [28]), тобто:

- для кожного $x, v \in H$ існують односторонні похідні за напрямком

$$J'_i(x; v) = \lim_{t \to 0} \frac{J_i(x+tv) - J_i(x)}{t}, \quad i = 1,2,$$

- для всіх $x, v \in H$, $J'_i(x; v) = J_i^{\circ}(x; v)$, де

$$J_i^{\circ}(x; v) = \overline{\lim_{y \to x, t \to 0}} \frac{J_i(y+tv) - J_i(y)}{t}, \quad i = 1,2;$$

— для $i = 1,2$ існують такі $c_i > 0$, що

$$\|l\|_H \leq c_i (1 + \|v\|_H) \quad \text{для всіх} \quad l \in \partial J_i(v) \quad \text{та для всіх} \quad v \in H;$$

— існує таке $c_2^* > 0$, що

$$(l, v)_H \leq \lambda \|v\|_H^2 + c_2^* \quad \text{для всіх} \quad l \in \partial J_2(v) \quad \text{та для всіх} \quad v \in H,$$

де $\partial J_i(y) = \{p \in H \mid (p, w)_H \leq J_i^{\circ}(y; w) \quad \text{для всіх} \quad w \in H\}$ позначають субдиференціали Кларка для $J_i(\cdot)$, $i = 1,2$ в $y \in H$ (див. роботу [28] для деталей); $\lambda \in (0, \lambda_1)$, $\lambda_1 > 0$: $c_B \|v\|_V^2 \geq \lambda_1 \|v\|_H^2$ для всіх $v \in V$.

Загальна схема проведення якісних досліджень поведіки розв'язків аналогічна до схеми, наведеної на рис. 2.1.

3.2 Слабкі розв'язки та їх властивості

Нехай гільбертів простір $X = V \times H$ – фазовий простір для задачі (3.1). Розв'язок задачі (3.1) розумітимемо в сенсі такого означення.

Означення. Нехай $-\infty < \tau < T < +\infty$. Функція $\varphi(\cdot) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T \in L_\infty[\tau, T; X]$ називається слабким розв'язком задачі (3.1) на проміжку $[\tau, T]$, якщо існують такі $l_i \in L_2(\tau, T; H)$, $i = 1,2$, $l_i(t) \in \partial J_i(y(t))$ для майже всіх $t \in (\tau, T)$, що для всіх $\psi \in V$ та для всіх $\eta \in C_0^\infty(\tau, T)$ виконується співвідношення

$$-\int_\tau^T (y_t(t), \psi)_H \eta_t(t) dt +$$
$$+\int_\tau^T [(y_t(t), \psi)_H + (y(t), \psi)_H + (l_1(t), \psi)_H - (l_2(t), \psi)_H] \eta(t) dt = 0.$$

Без втрати загальності, з метою спрощення міркувань покладемо

$$(y(\cdot), v(\cdot))_V = \langle Bu(\cdot), v(\cdot)\rangle_V,\ \|v(\cdot)\|_V^2 = \langle Bu(\cdot), v(\cdot)\rangle_V,$$
$$\beta(y(\cdot), v(\cdot))_H = (Au(\cdot), v(\cdot))_H, \tag{3.2}$$
$$\beta\|v(\cdot)\|_H^2 = (Av(\cdot), v(\cdot))_H \quad \text{для будь-яких} \quad y(\cdot), v(\cdot) \in V.$$

Нехай $J(y(\cdot)) = J_1(y(\cdot)) - J_2(y(\cdot))$, $y(\cdot) \in H$. Теорема Лебурга про середнє [28, розділ 2] гарантує існування таких сталих $c_3, c_4 > 0$ та $\mu \in (0, \lambda_1)$, що мають місце умови

$$|J(y(\cdot))| \le c_3(1 + \|y(\cdot)\|_H^2),$$
$$J(y(\cdot)) \ge -\frac{\mu}{2}\|y(\cdot)\|_H^2 - c_4 \quad \text{для всіх} \quad y(\cdot) \in H. \tag{3.3}$$

Для довільних $a \in V$, $b \in H$ розглянемо такі початкові умови для задачі (3.1):

$$y(\tau) = a, \quad y_t(\tau) = b. \tag{3.4}$$

Відповідно до [180, лема 4.1], [180, лема 3.1], [119, теорема 4.1], [203, лема 2.17] справедлива така лема.

Лема 3.1 Для будь-яких $\tau < T$, $a \in V$, $b \in H$ задача Коші (3.1), (3.4) має слабкий розв'язок $(y(\cdot), y_t(\cdot))^T \in L_\infty(\tau, T; X)$. Більше того, кожен слабкий розв'язок $(y(\cdot), y_t(\cdot))^T$ задачі Коші (3.1), (3.4) на проміжку $[\tau, T]$ належить простору $C([\tau, T]; X)$, і $y_{tt}(\cdot) \in L_2(\tau, T; V^*)$.

Введемо такі позначення: для всіх $\varphi_\tau = (a, b)^T \in X$ розглянемо множину всіх слабких розв'язків задачі (3.1):

$$\mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau) = \{\varphi(\cdot) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T \mid \varphi(\cdot) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T -$$
$$\text{слабкий розв'язок задачі (3.1) на проміжку } [\tau, T],$$
$$y(\tau) = a, \quad y_t(\tau) = b\}.$$

З леми 3.1 випливає, що множина $\mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau) \subset C([\tau, T]; X) = W_\tau^T$.

Лема 3.2 Якщо $\tau < T$, $\varphi_\tau \in X$, $\varphi(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau)$, то для будь-якого $s \in \boldsymbol{R}$ маємо, що

$$\psi(\cdot) = \varphi(\cdot + s) \in \mathcal{D}_{\tau-s,T-s}(\varphi_\tau). \tag{3.5}$$

Якщо $\tau < t < T$, $\varphi_\tau \in X$, $\varphi(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau,t}(\varphi_\tau)$ і $\psi(\cdot) \in \mathcal{D}_{t,T}(\varphi_t)$, то

$$\theta(s) = \begin{cases} \varphi(s), & s \in [\tau, t], \\ \psi(s), & s \in [t, T] \end{cases} \in \mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau). \tag{3.6}$$

Доведення. Виконання рівності (3.5) слідує з автономності задачі (3.1). Справедливість співвідношення (3.6) випливає з означення слабкого розв'язку для досліджуваної задачі. Таким чином, трансляція та конкатенація слабких розв'язків є також слабкими розв'язками.

Нехай $u = (u_1, u_2)^T \in X$. Визначимо функцію $\mathcal{V}$ таким чином:

$$\mathcal{V}(u) = \frac{1}{2}\|u\|_X^2 + J_1(u_1) - J_2(u_2). \tag{3.7}$$

Лема 3.3 Нехай $-\infty < \tau < T < +\infty$, $\varphi(\cdot) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T$ – розв'язок задачі (3.1) на проміжку (τ, T) з початковою умовою $\varphi_\tau \in X$, тобто $\varphi(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau)$. Тоді функція $\mathcal{V} \circ \varphi: [\tau, T] \to \boldsymbol{R}$ – абсолютно неперервна, і для майже всіх $t \in (\tau, T)$ виконується рівність,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{V}(\varphi(t)) = -\beta \parallel y_t(t) \parallel_H^2. \tag{3.8}$$

Доведення. Нехай $-\infty < \tau < T < +\infty$ і $\varphi(\cdot) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T \in W_\tau^T$ – довільний слабкий розв'язок задачі (3.1) на (τ, T). Оскільки $\partial J_i(y(\cdot)) \subset L_2(\tau, T; H)$, слідуючи результатам робіт [180] та [203, розділ 2] отримуємо, що функція $t \mapsto \parallel y_t(t) \parallel_H^2 + \parallel y(t) \parallel_V^2$ – абсолютно неперервна, і для майже всіх $t \in (\tau, T)$ виконується таке співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\parallel y_t(t) \parallel_{\mathrm{H}}^2 + \parallel y(t) \parallel_{\mathrm{V}}^2] &= (y_{tt}(t) + Ay(t), y_t(t))_{\mathrm{H}} = \\ &= -\beta \parallel y_t(t) \parallel_{\mathrm{H}}^2 - (d_1(t), y_t(t))_{\mathrm{H}} + (d_2(t), y_t(t))_{\mathrm{H}}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

де $d_i(t) \in \partial J_i(y(t))$ для майже всіх $t \in (\tau, T)$ і $d_i(\cdot) \in L_2(\tau, T; H)$, $i = 1,2$.

Оскільки $y(\cdot) \in C^1([\tau, T]; H)$ і $J_i: H \to \mathbf{R}$, $i = 1,2$ – регулярні та локально ліпшицеві функціонали, відповідно до леми 2.1 отримуємо, що для майже всіх $t \in (\tau, T)$ існує $\frac{d}{dt}(J_i \circ y)(t)$, $i = 1,2$. Більше того, $\frac{d}{dt}(J_i \circ y)(\cdot) \in L_1(\tau, T)$, $i = 1,2$, і для майже всіх $t \in (\tau, T)$ та для всіх $p \in \partial J_i(y(t))$, $i = 1,2$ виконується співвідношення

$$\frac{d}{dt}(J_i \circ y)(t) = (p, y_t(t))_H, \quad i = 1,2.$$

Зокрема, для майже всіх $t \in (\tau, T)$ маємо, що

$$\frac{d}{dt}(J_i \circ y)(t) = (d_i(t), y_t(t))_H.$$

Беручи до уваги співвідношення (3.9), отримуємо виконання рівності (3.8).

Для побудови багатозначного напівпотоку необхідним є результат стосовно можливості продовження слабкого розв'язку до глобального.

Лема 3.4 Нехай $T > 0$. Тоді будь-який слабкий розв'язок задачі (3.1) на проміжку $[0, T]$ може бути продовжений до глобального, визначеного на проміжку $[0, +\infty)$. Для будь-якого $\varphi_0 \in X$ і $\varphi \in \mathcal{D}(\varphi_0)$ виконується наступна нерівність:

$$\|\varphi(t)\|_X^2 \leq \frac{\lambda_1 + 2c_3}{\lambda_1 - \mu}\|\varphi(0)\|_X^2 + \frac{2(c_3 + c_4)\lambda_1}{\lambda_1 - \mu}, \quad \forall t > 0, \tag{3.10}$$

де для довільного $\varphi_0 \in X$ $\mathcal{D}(\varphi_0)$ – множина всіх слабких розв'язків, визначених на проміжку $[0, +\infty)$, задачі (3.1) з початковими даними $\varphi(0) = \varphi_0$.

Доведення. Твердження леми прямо випливає з лем 3.1–3.3, умов (3.2), (3.3) та таких оцінок:

$$\forall \tau < T, \;\; \forall t \in [\tau, T], \;\; \forall \varphi_\tau \in X, \;\; \forall \varphi(\cdot) = (y(\cdot), y_t(\cdot))^T \in \mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau),$$

$$2c_3 + \left(1 + \frac{2c_3}{\lambda_1}\right) \| y(\tau) \|_V^2 + \| y_t(\tau) \|_H^2 \geq 2\mathcal{V}(\varphi(\tau)) \geq$$

$$\geq 2\mathcal{V}(\varphi(t)) = \| y(t) \|_V^2 + \| y_t(t) \|_H^2 + 2(J_1(y(t)) - J_2(y(t))) \geq$$

$$\geq \left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1}\right) \| y(t) \|_V^2 + \| y_t(t) \|_H^2 - 2c_4.$$

Розглянемо клас функцій $W_\tau^T = C([\tau, T]; X)$. Нам необхідно дослідити характер залежності слабких розв'язків задачі (3.1) від початкових даних в слабких топологіях в фазовому та розширеному фазовому просторах.

Теорема 3.1 Нехай $-\infty < \tau < T < +\infty$, та $\{\varphi_n(\cdot)\}_{n\geq 1} \subset W_\tau^T$ – довільна послідовність слабких розв'язків задачі (3.1) на проміжку $[\tau, T]$ така, що $\varphi_n(\tau) \to \varphi_\tau$ слабко в просторі X при $n \to +\infty$, і нехай $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset [\tau, T]$ – така послідовність, що $t_n \to t_0$ при $n \to +\infty$. Тоді існує такий слабкий розв'язок $\varphi(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau)$, що з точністю до деякої підпослідовності послідовність $\varphi_n(t_n) \to \varphi(t_0)$ слабко в просторі X при $n \to +\infty$.

Доведення. Доведення даної теореми грунтується на міркуваннях, проведених при доведенні теореми 2.1 та [203, теорема 2.5]. Нехай $\tau < T$, $\{\varphi_n(\cdot) = (y_n(\cdot), y_n'(\cdot))\}_{n\geq 1} \subset W_\tau^T$ – послідовність слабких розв'язків задачі (3.1) на проміжку $[\tau, T]$, і $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset [\tau, T]$ – послідовність такі, що

$$\begin{gathered} \varphi_n(\tau) \to \varphi_\tau \quad \text{слабко в просторі} \quad X, \\ t_n \to t_0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Відповідно до леми 3.4 маємо, що послідовність $\{\varphi_n(\cdot)\}_{n\geq 1}$ – обмежена в просторі $W_\tau^T \subset L_\infty(\tau, T; X)$. Маємо, що існує підпослідовність $\{\varphi_{n_k}(\cdot)\}_{k\geq 1} \subset \{\varphi_n(\cdot)\}_{n\geq 1}$ така, що справедливі такі збіжності:

$$\begin{gathered} y_{n_k}(\cdot) \to y(\cdot) \quad * -\text{слабко в просторі} \quad L_\infty(\tau, T; V), \\ y_{n_k}'(\cdot) \to y'(\cdot) \quad * -\text{слабко в просторі} \quad L_\infty(\tau, T; H), \\ y_{n_k}''(\cdot) \to y''(\cdot) \quad * -\text{слабко в просторі} \quad L_\infty(\tau, T; V^*), \\ d_{n_k,i}(\cdot) \to d_i(\cdot) \quad * -\text{слабко в просторі} \quad L_\infty(\tau, T; H), \\ y_{n_k}(\cdot) \to y(\cdot) \quad \text{в просторі} \quad L_2(\tau, T; H), \\ y_{n_k}(t) \to y(t) \quad \text{в просторі} \quad H \quad \text{для майже всіх} \quad t \in [\tau, T], \\ y_{n_k}'(t) \to y'(t) \quad \text{в просторі} \quad V^* \quad \text{для майже всіх} \quad t \in (\tau, T), \\ Ay_{n_k}'(\cdot) \to Ay'(\cdot) \quad * -\text{слабко в просторі} \quad L_2(\tau, T; H), \\ By_{n_k}(\cdot) \to By(\cdot) \quad * -\text{слабко в просторі} \quad L_2(\tau, T; V^*), \end{gathered} \tag{3.12}$$

при $k \to +\infty$, де $d_{n,i}(\cdot) \in L_2(\tau, T; H)$ такі, що

$$y_n''(t) + Ay_n'(t) + d_{n,1}(t) - d_{n,2}(t) + By_n(t) = \overline{0},$$

$$d_{n,i}(t) \in \partial j_i(y_n(t))$$

для майже всіх $t \in (\tau, T)$, $n \geq 1$, $i = 1,2$.

Оскільки $\partial j_i(\cdot)$, $i = 1,2$ – демізамкнені, справедливий наступний висновок:

$$d_i(\cdot) \in \partial j_i(y(\cdot)),\ \ i = 1,2,$$

де $\varphi(\cdot) := (y(\cdot), y_t(\cdot)) \in \mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau) \subset W_\tau^T$.

Для фіксованого $h \in V$ з формули (3.12) випливає рівномірна обмеженість та рівностепенева неперервність послідовності дійсних функцій $(y_{n_k}(\cdot), h)$. Відповідно до нерівності (3.10), збіжностей (3.11), (3.12) та щільності простору V в просторі H отримаємо, що $y_{n_k}'(t_{n_k}) \to y'(t_0)$ слабко в просторі H і $y_{n_k}(t_{n_k}) \to y(t_0)$ слабко в просторі V при $k \to +\infty$.

Теорема 3.2 Нехай $\tau < T$, $\{\varphi_n(\cdot)\}_{n\geq 1} \subset W_\tau^T$ – послідовність слабких розв'язків задачі (3.1) на проміжку $[\tau, T]$ така, що $\varphi_n(\tau) \to \varphi_\tau$ сильно в X при $n \to +\infty$, тоді з точністю до деякої підпослідовності послідовність $\varphi_n(\cdot) \to \varphi(\cdot)$ в просторі W_τ^T при $n \to +\infty$.

Доведення. Доведення грунтується на міркуваннях, які були використані при доведені теореми 2.2 і [203, теорема 2.6]. Нехай $\tau < T$, і нехай $\{\varphi_n(\cdot) = (y_n(\cdot), y_n'(\cdot))^T\}_{n\geq 1} \subset W_\tau^T$ – це довільна послідовність слабких розв'язків задачі (3.1) на проміжку $[\tau, T]$:

$$\varphi_n(\tau) \to \varphi_\tau \quad \text{сильно в просторі} \quad X \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{3.13}$$

З теореми 3.1 маємо, що існує таке $\varphi(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau,T}(\varphi_\tau)$ і така підпослідовність $\{\varphi_{n_k}(\cdot)\}_{k\geq 1} \subset \{\varphi_n(\cdot)\}_{n\geq 1}$, що $\varphi_{n_k}(\cdot) \to \varphi(\cdot)$ слабко в просторі X, рівномірно на проміжку $[\tau, T]$ при $k \to +\infty$. Покажемо, що

$$\varphi_{n_k}(\cdot) \to \varphi(\cdot) \quad \text{в просторі} \quad W_\tau^T \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \tag{3.14}$$

Застосуємо метод від супротивного. Припустимо, що існує $L > 0$ та послідовність $\{\varphi_{k_j}(\cdot)\}_{j\geq 1} \subset \{\varphi_{n_k}(\cdot)\}_{k\geq 1}$ такі, що для всіх $j \geq 1$ виконується

$$\max_{t\in[\tau,T]} \| \varphi_{k_j}(t) - \varphi(t) \|_X = \| \varphi_{k_j}(t_j) - \varphi(t_j) \|_X \geq L.$$

Без втрати загальності, припустимо, що $t_j \to t_0 \in [\tau, T]$ при $j \to +\infty$. Таким чином, в силу неперервності $\varphi: [\tau, T] \to X$ маємо виконання такої нерівності:

$$\underline{\lim}_{j\to+\infty} \| \varphi_{k_j}(t_j) - \varphi(t_0) \|_X \geq L. \tag{3.15}$$

З іншого боку, покажемо, що

$$\varphi_{k_j}(t_j) \to \varphi(t_0) \quad \text{в просторі} \quad X \quad \text{при} \quad j \to +\infty. \tag{3.16}$$

Зауважимо, що

$$\varphi_{k_j}(t_j) \to \varphi(t_0) \quad \text{слабко в просторі} \quad X \quad \text{при} \quad j \to +\infty \tag{3.17}$$

(випливає з теореми 3.1). Далі покажемо, що

$$\overline{\lim}_{j\to+\infty} \| \varphi_{k_j}(t_j) \|_X \leq \| \varphi(t_0) \|_X. \tag{3.18}$$

Оскільки $J(\cdot)$ – секвенційно слабко неперервний функціонал, то $\mathcal{V}(\cdot)$ – секвенційно слабко напівнеперервна знизу функція в просторі X. Отже, отримуємо такі нерівності:

$$\mathcal{V}(\varphi(t_0)) \le \underline{\lim}_{j\to+\infty}\mathcal{V}(\varphi_{k_j}(t_j)),$$
$$\int_\tau^{t_0} \| y'(s) \|_H^2 \, ds \le \underline{\lim}_{j\to+\infty} \int_\tau^{t_j} \| y'_{k_j}(s) \|_H^2 \, ds \qquad (3.19)$$

і

$$\mathcal{V}(\varphi(t_0)) + \beta \int_\tau^{t_0} \| y'(s) \|_H^2 \, ds \le$$
$$\le \underline{\lim}_{j\to+\infty}(\mathcal{V}(\varphi_{k_j}(t_j)) + \beta \int_\tau^{t_j} \| y'_{k_j}(s) \|_{\mathrm{H}}^2 \, ds). \qquad (3.20)$$

Оскільки з енергетичного рівняння слідує, що обидві частини нерівності (3.20) рівні $\mathcal{V}(\varphi(\tau))$ (випливає з властивостей функції $\mathcal{V}$), з нерівності (3.19) випливає, що $\mathcal{V}(\varphi_{k_j}(t_j)) \to \mathcal{V}(\varphi(t_0))$ при $j \to +\infty$, і отримуємо виконання нерівності (3.18). Збіжність (3.16) прямо слідує зі збіжності (3.17), (3.13), нерівності (3.18) та [211, розділ I]. Зауважимо, що збіжність (3.16) суперечить нерівності (3.15). Отже збіжність (3.14) виконується.

3.3 Побудова багатозначного напівпотоку

Дослідимо глобальну поведінку всіх слабких розв’язків досліджуваної задачі при $t \to +\infty$. Побудуємо багатозначне відображення $\mathcal{G}: \mathbf{R}_+ \times X \to P(X)$ таким чином:

$$\mathcal{G}(t, \varphi_0) = \{\varphi(t) = (y(t), y_t(t))^T \ | \varphi(\cdot) \in \mathcal{D}(\varphi_0)\}, \ \ t \ge 0. \qquad (3.21)$$

Зазначимо, що багатозначне відображення $\mathcal{G}$ є строгим багатозначним напівпотоком.

Теорема 3.3 Багатозначний напівпотік $\mathcal{G}$, породжений усіма глобально визначеними розв’язками задачі (3.1), є асимптотично компактним.

Доведення. Покажемо, що багатозначний напівпотік $\mathcal{G}$ є асимптотично компактним. Нехай $\xi_n \in \mathcal{G}(t_n, v_n)$, $v_n \in C \in \beta(X)$, $n \ge 1$, $t_n \to +\infty$, $n \to +\infty$. Перевіримо передкомпактність послідовності $\{\xi_n\}_{n\ge 1}$ в просторі X. Для цього без втрати загальності необхідно вибрати збіжну в просторі X

підпослідовність з послідовності $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$. З леми 3.4 отримуємо, що існує така підпослідовність $\{\xi_{n_k}\}_{k\geq 1}$ і $\xi \in X$, що $\xi_{n_k} \to \xi$ слабко в просторі X, $\|\xi_{n_k}\|_X \to a \geq \|\xi\|_X$ при $k \to +\infty$.

Покажемо, що $a \leq \|\xi\|_X$. Зафіксуємо довільне $T_0 > 0$. Тоді для достатньо великого $k \geq 1$ $\mathcal{G}(t_{n_k}, v_{n_k}) \subset \mathcal{G}(T_0, \mathcal{G}(t_{n_k} - T_0, v_{n_k}))$. Отже, $\xi_{n_k} \in \mathcal{G}(T_0, \beta_{n_k})$, де $\beta_{n_k} \in \mathcal{G}(t_{n_k} - T_0, v_{n_k})$ і $\sup\limits_{k\geq 1}\|\beta_{n_k}\|_X < +\infty$ (випливає з леми 3.4). З теореми 3.1 отримуємо, що для деякої послідовності $\{\xi_{k_j}, \beta_{k_j}\}_{j\geq 1} \subset \{\xi_{n_k}, \beta_{n_k}\}_{k\geq 1}$, $\beta_{T_0} \in X$ виконується:

$$\xi \in \mathcal{G}(T_0, \beta_{T_0}),\ \ \beta_{k_j} \to \beta_{T_0} \quad \text{слабко в просторі} \quad X \quad \text{при} \quad j \to +\infty. \tag{3.22}$$

За означенням багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$ покладемо для будь-якого $\forall j \geq 1$:

$$\xi_{k_j} = (y_j(T_0), y_j'(T_0))^T,\ \ \beta_{k_j} = (y_j(0), y_j'(0))^T,$$

$$\xi = (y_0(T_0), y_0'(T_0))^T,\ \ \beta_{T_0} = (y_0(0), y_0'(0))^T.$$

Покладемо $\varphi_j(\cdot) = (y_j(\cdot), y_j'(\cdot))^T \in C([0,T_0]; X)$, $y_j'(\cdot) \in L_2(0,T_0; V^*)$, $d_j(\cdot) \in L_\infty(0,T_0; H)$ і

$$y_j''(t) + By_j'(t) + Ay_j(t) + d_{j,1}(t) - d_{j,2}(t) = \bar{0}, \quad d_{j,i}(t) \in \partial J_i\left(y_j(t)\right),$$

$i = 1,2$ для майже всіх $t \in (0, T_0)$. Нехай для кожного $t \in [0, T_0]$

$$I(\varphi_j(t)) := \frac{1}{2}\left\|\varphi_j(t)\right\|_X^2 + J_1(y_j(t)) - J_2(y_j(t)) + \frac{\beta}{2}(y_j'(t), y_j(t)).$$

Тоді, в силу [203, лема 2.16], [180, лема 4.1], [180, лема 3.1]

$$\frac{dI(\varphi_j(t))}{dt} = -\beta I(\varphi_j(t)) + \beta \mathcal{H}(\varphi_j(t)) \quad \text{для майже всіх} \quad t \in (0, T_0),$$

де

$$\mathcal{H}(\varphi_j(t)) = J_1(y_j(t)) - \frac{1}{2}(d_{j,1}(t), y_j(t)) - J_2(y_j(t)) + \frac{1}{2}(d_{j,2}(t), y_j(t)).$$

З нерівності (3.10) та збіжності (3.22) отримуємо, що існує $\bar{R} > 0$: для всіх $j \geq 0$ та для всіх $t \in [0, T_0]$ $\|y_j'(t)\|_H^2 + \|y_j(t)\|_V^2 \leq \bar{R}^2$. Більше того, виконуються такі збіжності:

$$\begin{gathered} y_j(\cdot) \to y_0(\cdot) \quad \text{слабко в просторі} \quad L_2(0, T_0; V), \\ y_j'(\cdot) \to y'_0(\cdot) \quad \text{слабко в просторі} \quad L_2(0, T_0; H), \\ y_j(\cdot) \to y_0(\cdot) \quad \text{в просторі} \quad L_2(0, T_0; H), \\ d_{j,i}(\cdot) \to d_i(\cdot) \quad \text{слабко в просторі} \quad L_2(0, T_0; H), \\ y_j''(\cdot) \to y''_0(\cdot) \quad \text{слабко в просторі} \quad L_2(0, T_0; V^*), \\ \forall t \in [0, T_0] \;\; y_j(t) \to y_0(t) \quad \text{в просторі} \quad H \end{gathered} \tag{3.23}$$

при $j \to +\infty$. Для будь-якого $j \geq 0$ і $t \in [0, T_0]$

$$I(\varphi_j(t)) = I(\varphi_j(0)) e^{-\beta t} + \int_0^t \mathcal{H}(\varphi_j(s)) e^{-\beta(t-s)} ds,$$

зокрема,

$$I(\varphi_j(T_0)) = I(\varphi_j(0)) e^{-\beta T_0} + \int_0^{T_0} \mathcal{H}(\varphi_j(s)) e^{-\beta(T_0-s)} ds.$$

Зі збіжностей (3.23) і [203, лема 2.16] маємо, що

$$\int_0^{T_0} \mathcal{H}(\varphi_j(s)) e^{-\beta(T_0-s)} ds \to \int_0^{T_0} \mathcal{H}(\varphi_0(s)) e^{-\beta(T_0-s)} ds \quad \text{при} \quad j \to +\infty.$$

Таким чином,

$$\overline{\lim_{j\to+\infty}} I(\varphi_j(T_0)) \leq \overline{\lim_{j\to+\infty}} I(\varphi_j(0))e^{-\beta T_0} + \int_0^{T_0} \mathcal{H}(\varphi_0(s))e^{-\beta(T_0-s)}ds =$$

$$= I\big(\varphi_0(T_0)\big) + \left[\overline{\lim_{j\to+\infty}} I\left(\varphi_j(0)\right) - I\big(\varphi_0(0)\big)\right] e^{-\beta T_0} \leq I\big(\varphi_0(T_0)\big) + \varsigma e^{-\beta T_0},$$

де ς не залежить від $T_0 > 0$. З іншого боку, зі збіжностей (3.23) маємо, що виконується така нерівність:

$$\overline{\lim_{j\to+\infty}} I(\varphi_j(T_0)) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \lim_{j\to+\infty} \left\|\varphi_j(T_0)\right\|_X^2 + J_1(y_0(T_0)) - J_2(y_0(T_0)) + \frac{\beta}{2}(y_0'(T_0), y_0(T_0)).$$

В результаті, отримуємо, що

$$\frac{1}{2}a^2 \leq \frac{1}{2}\|\xi\|_X^2 + \varsigma e^{-\beta T_0}$$

для будь-якого $T_0 > 0$. Отже, $a \leq \|\xi\|_X$. Таким чином багатозначний напівпотік $\mathcal{G}$ є асимптотично компактним.

3.4 Існування та структурні властивості притягуючих множин

Позначимо через $\mathcal{K}_+ = \bigcup_{y_0 \in X} \mathcal{D}(y_0)$ сімейство всіх слабких розв'язків включення (3.1), визначених на проміжку $[0, +\infty)$. Зазначимо, що $\mathcal{K}_+$ – трансляційно інваріантний. На $\mathcal{K}_+$ визначимо трансляційну напівгрупу $\{T(h)\}_{h\geq 0}$, $T(h)y(\cdot) = y_h(\cdot)$, $h \geq 0$, $y \in \mathcal{K}_+$. В силу трансляційної інваріантності $\mathcal{K}_+$ заключаємо, що $T(h)\mathcal{K}_+ \subset \mathcal{K}_+$ при $h \geq 0$. Аналогічно попереднім міркуванням на $\mathcal{K}_+$ розглянемо топологію, індуковану з простору Фреше $C^{loc}(\mathbf{R}_+; X)$.

Розглянемо еволюційне включення (3.1) на всій часовій прямій.

Аналогічно до простору $C^{loc}(\mathbf{R}_+; X)$ простір $C^{loc}(\mathbf{R}; X)$ наділений топологією локально рівномірної збіжності на кожному проміжку $[-M, M] \subset \mathbf{R}$ (див. роботу [184, с. 180]).

Позначимо через $\mathcal{K}$ сімейство всіх повних траєкторій включення (3.1). Зазначимо, що для всіх $h \in \mathbf{R}$ та для всіх $y(\cdot) \in \mathcal{K}$ $y_h(\cdot) \in \mathcal{K}$.

Лема 3.5 Функція $\mathcal{V}$, визначена співвідношенням (3.7) – функція Ляпунова для багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$, породженого слабкими розв'язками задачі (3.1).

Доведення. Твердження леми прямо випливає з властивостей функції $\mathcal{V}$ (див. роботу [7, с. 486]).

Позначимо множину всіх точок спокою багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$ через $Z(\mathcal{G})$. Зауважимо, що для задачі (3.1)

$$Z(\mathcal{G}) = \{(\bar{0}, y) \mid y \in V, B(y) + \partial J_1(y) - \partial J_2(y) \ni \bar{0}\}.$$

Основні припущення на параметри задачі (3.1) гарантують обмеженість множини $Z(\mathcal{G})$ в просторі X.

Теорема 3.4 Для багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$, породженого усіма глобально визначеними розв'язками задачі (3.1), існує компактний інваріантний глобальний атрактор $\mathcal{A}$ в фазовому просторі X, що володіє такими структурними властивостями:

— для кожної повної траєкторії $\psi(\cdot) \in \mathcal{K}$ її граничні множини

$$\alpha(\psi) = \{z \in \mathrm{X} | \psi(t_j) \to z \ \text{ для деякої послідовності } \ t_j \to -\infty\},$$

$$\omega(\psi) = \{z \in \mathrm{X} | \psi(t_j) \to z \ \text{ для деякої послідовності } \ t_j \to +\infty\}$$

– зв'язні підмножини множини точок спокою $Z(\mathcal{G})$, на якій функція $\mathcal{V}$ – стала;

— якщо множина точок спокою $Z(\mathcal{G})$ – повністю незв'язна множина (зокрема, якщо $Z(\mathcal{G})$ – злічення), то границі

$$z_- = \lim_{t\to-\infty}\psi(t),$$

$$z_+ = \lim_{t\to+\infty}\psi(t)$$

існують, і z_-, z_+ – точки спокою.

Кожна повна траєкторія $\varphi(t)$ прямує до точки спокою при $t \to +\infty$ для кожного розв'язку $\varphi(\cdot) \in \mathcal{K}_+$.

Крім того, існує траєкторний атрактор $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}_+$ в просторі $\mathcal{K}_+$. При цьому виконується таке співвідношення

$$\mathcal{U} = \Pi_+\mathcal{K} = \Pi_+\{y(\cdot) \in \mathcal{K} \mid y(t) \in \mathcal{A} \quad \forall t \in \mathbf{R}\}. \tag{3.24}$$

Доведення. З лем 3.1, 3.2, 3.5, обмеженості множини всіх точок спокою та теорем 3.1–3.3 згідно до теореми 1.1 можемо стверджувати, що для багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$, породженого слабкими розв'язками задачі (3.1), існує інваріантний компактний в фазовому просторі X глобальний атрактор $\mathcal{A}$.

Розглянемо багатозначний напівпотік $\mathcal{G}(t,\varphi_0) = \{\varphi(t) \mid \varphi(\cdot) \in \mathcal{D}(\varphi_0)\}$ для будь-якого $t \geq 0$, породжений слабкими розв'язками задачі (3.1). Оскільки для багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$ існує інваріантний компактний в фазовому просторі X глобальний атрактор, то для доведення існування в просторі $\mathcal{K}_+$ траєкторного атрактора для досліджуваної задачі та виконання співвідношення (3.24) залишилось перевірити виконання умови теореми 1.2, а саме: для будь-якої послідовності $\{\varphi_n(\cdot)\}_{n\geq1} \subset \mathcal{K}_+$, що задавольняє $\varphi_n(0) \to \varphi_0 \in \mathcal{A}$ при $n \to \infty$ в просторі X, існує таке $\varphi(\cdot) \in \mathcal{K}_+$, $\varphi(0) = \varphi_0$, що з точністю до деякої підпослідовності послідовність $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ в просторі X для всіх $t \geq 0$.

З теорем 3.1, 3.2 маємо виконання даної умови для довільної послідовності слабких розв'язків задачі (3.1), визначених на проміжку $[\tau, T]$, для яких $\varphi_n(\tau) \to \varphi(\tau)$ при $n \to \infty$ в просторі X. Таким чином, можна вибрати таку підпослідовність $\{\varphi_{n,1}(\cdot)\}_{n\geq 1} \subset \{\varphi_n(\cdot)\}_{n\geq 1}$ розв'язків задачі (3.1), визначених на проміжку $[0,1]$, $\varphi_{n,1}(0) \to \varphi_0$, що існує таке $\hat{\varphi}_1(\cdot) \in \mathcal{K}_+$: $\hat{\varphi}_1(0) = \varphi_0$, що $\varphi_{n,1}(t) \to \hat{\varphi}_1(t)$ в просторі X. Далі виберемо підпослідовність $\{\varphi_{n,2}(\cdot)\}_{n\geq 1} \subset \{\varphi_{n,1}(\cdot)\}_{n\geq 1}$ слабких розв'язків задачі (3.1), визначених на проміжку $[0,2]$, $\varphi_{n,2}(0) \to \varphi_0$. Крім того, існує таке $\hat{\varphi}_2(\cdot) \in \mathcal{K}_+$: $\hat{\varphi}_2(0) = \varphi_0$, що $\varphi_{n,2}(t) \to \hat{\varphi}_2(t)$ в просторі X для всіх $t \in [0,2]$. З іншого боку, $\varphi_{n,2}(t) \to \hat{\varphi}_1(t)$ в просторі X для всіх $t \in [0,1]$. Таким чином, $\hat{\varphi}_1(t) = \hat{\varphi}_2(t)$ для всіх $t \in [0,1]$. Аналогічно виберемо підпослідовності $\{\varphi_{n,k}(\cdot)\}_{n\geq 1} \subset \{\varphi_{n,k-1}(\cdot)\}_{n\geq 1} \subset \cdots \subset \{\varphi_{n,1}(\cdot)\}_{n\geq 1} \subset \{\varphi_n(\cdot)\}_{n\geq 1}$, $k = 1,2,\ldots$, розв'язків задачі (3.1), визначених на проміжку $[0, +\infty)$, $\varphi_{n,k}(0) \to \varphi_0$, що $\varphi_{n,k}(t) \to \varphi(t)$ в просторі X, де $\varphi(\cdot) \in \mathcal{K}_+$, $\varphi(0) = \varphi_0$. Діагональний метод Кантора забезпечує вибір необхідної підпослідовності $\{\varphi_{n_k}\}_{k\geq 1}$: $\varphi_{n_k}(t) \to \varphi(t)$ при $k \to \infty$ для $t \geq 0$.

Таким чином, ми отримали виконання умови, достатньої для існування в просторі траєкторій $\mathcal{K}_+$ траєкторного атрактора $\mathcal{U} \in \mathcal{K}_+$ відносно топології $C^{loc}(\mathbf{R}_+; X)$ та справедливості співвідношення (3.24), яке встановлює його зв'язок з глобальним атрактором та простором повних траєкторій задачі (3.1).

Теорема 3.5 Нехай $B_r(x)$ – замкнута куля з центром в точці $x \in X$ радіуса $r > 0$, і нехай виконуються основні припущення на параметри задачі (3.1). Тоді багатозначний напівпотік $\mathcal{G}$ задовольняє наступну властивість: для кожної обмеженої множини $B \subset X$ та $\varepsilon > 0$ існує момент часу $t_0(B, \varepsilon)$ і скінченновимірний підпростір E в просторі X такий, що для обмеженого проектора $P: X \to E$ множина $P\left(\bigcup_{t\geq t_0} \mathcal{G}(t, B)\right)$ обмежена в просторі X, та

$$(I - P)(\bigcup_{t\geq t_0} \mathcal{G}(t, B)) \subset B_\varepsilon(\overline{0}),$$

де I – тотожнє відображення в просторі X.

Доведення. Грунтуючись на теоремах 3.1, 3.2, асимптотичній компактності багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$, беручи до уваги леми 1.1, 1.2 та враховуючи сепарабельність гільбертового простору X, отримуємо необхідне твердження.

Таким чином, маємо, що динаміка розв'язків задачі (3.1) є скінченновимірною з точністю до малого параметру ε при виконанні основних припущень на параметри задачі. Зазначимо, що хвильове рівняння (2.1) є частковим випадком диференціально-операторного включення (3.1). Таким чином, отримані в даному розділі результати щодо існування в розширеному фазовому просторі задачі траєкторного атрактора, його зв'язку з глобальними атрактором та простором повних траєкторій, скінченновимірності динаміки розв'язків з точністю до малого параметра, справджуються і для задачі (2.1).

3.5 Зауваження щодо дослідження неавтономного випадку

В даному підрозділі пропонується та обгрунтовується загальна схема якісного дослідження класів нескінченновимірних еволюційних задач в неавтономному випадку в сенсі теорії глобальних атракторів для багатозначних напівпотоків. Простір траєкторій задачі довизначається таким чином, щоб для нього виконувалась властивість трансляційної напівінваріантності. Дана властивість дає змогу побудувати багатозначний напівпотік на елементах розширеного простору траєкторій.

Нехай $p \geq 2$ і $q > 1$ такі, що $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $(V; H; V^*)$ – еволюційна трійка просторів, де вкладення $V \subset H$ – компактне. Для всіх $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, $0 \leq t_1 < t_2 < +\infty$ розглянемо простір

$$W_{t_1,t_2} := \{y(\cdot) \in L_p(t_1, t_2; V) \,:\, y'(\cdot) \in L_q(t_1, t_2; V^*)\},$$

де $y'(\cdot)$ похідна $y(\cdot) \in L_p(t_1, t_2; V)$ в сенсі розподілів $\mathcal{D}^*([t_1, t_2]; V^*)$. Простір W_{t_1,t_2}, наділений нормою

$$\| y \|_{W_{t_1,t_2}} := \| y \|_{L_p(t_1,t_2;V)} + \| y' \|_{L_q(t_1,t_2;V^*)} + \| y \|_{C([t_1,t_2];H)}, \quad y \in W_{t_1,t_2},$$

– банахів простір. Для кожного $\tau \geq 0$ розглянемо простір Фреше

$$W^{loc}([\tau, +\infty)) := \{y: [\tau, +\infty) \to H:$$

$$\Pi_{t_1,t_2} y \in W_{t_1,t_2} \text{ для кожного } [t_1, t_2] \subset [\tau, +\infty)\},$$

де Π_{t_1,t_2} – оператор звуження на скінченний часовий інтервал $[t_1, t_2]$. Нагадаємо, що послідовність $\{f_n\}_{n\geq 1}$ збігається в просторі $W^{loc}([\tau, +\infty))$ (в просторі $C^{loc}([\tau, +\infty); H)$) до $f \in W^{loc}([\tau, +\infty))$ (до $f \in C^{loc}([\tau, +\infty); H)$) при $n \to +\infty$ тоді і тільки тоді, коли послідовність $\{\Pi_{t_1,t_2} f_n\}_{n\geq 1}$ збігається в просторі W_{t_1,t_2} (в просторі $C([t_1, t_2]; H)$) до $\Pi_{t_1,t_2} f$ при $n \to +\infty$ для кожного скінченного часового проміжку $[t_1, t_2] \subset [\tau, +\infty)$. Введемо наступне позначення

$$T(h)y(\cdot) = \Pi_{0,+\infty}\, y(\cdot + h), \quad y \in W^{loc}(\mathbb{R}_+), \ h \geq 0,$$

де $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$, $\Pi_{0,+\infty}$ – оператор звуження на часовий проміжок $[0, +\infty)$.

Розглянемо сімейство розв'язків $\{\mathcal{K}_\tau^+\}_{\tau\geq 0}$ таке, що

$$\mathcal{K}_\tau^+ \subset W^{loc}([\tau, +\infty))$$

для всіх $\tau \geq 0$ і $\mathcal{K}_{\tau_0}^+ \neq \emptyset$ для деякого $\tau_0 \geq 0$. Під $\mathcal{K}_\tau^+$ розуміється сімейство всіх глобально визначених на проміжку $[\tau, +\infty)$ слабких розв'язків, зокрема для неавтономних еволюційних задач.

Для того, щоб зробити основні припущення на $\{\mathcal{K}_\tau^+\}_{\tau\geq 0}$, необхідно сформулювати допоміжні означення.

Означення. Функція $\varphi \in L_{\gamma}^{loc}(\mathbf{R}_+)$, $\gamma > 1$ називається трансляційно обмеженою в просторі $L_{\gamma}^{loc}(\mathbf{R}_+)$, якщо

$$\sup_{t\geq 0} \int_t^{t+1} |\varphi(s)|^{\gamma} ds < +\infty$$

[24, с. 105].

Означення. Функція $\varphi \in L_1^{loc}(\mathbf{R}_+)$ називається трансляційно рівномірно інтегровною в просторі $L_1^{loc}(\mathbf{R}_+)$, якщо

$$\lim_{K\to+\infty} \sup_{t\geq 0} \int_t^{t+1} |\varphi(s)| \mathbf{I}\{|\varphi(s)| \geq K\} ds = 0$$

[49]. Зазначимо, що критерій компактності Данфорда-Петтіса забезпечує трансляційну рівномірну інтегровність функції $\varphi \in L_1^{loc}(\mathbf{R}_+)$ в просторі $L_1^{loc}(\mathbf{R}_+)$ тоді і тільки тоді, коли для кожної послідовності елементів $\{\tau_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbf{R}_+$, послідовність $\{\varphi(\cdot + \tau_n)\}_{n\geq 1}$ містить слабко збіжну підпослідовність в просторі $L_1^{loc}(\mathbf{R}_+)$. Зазначимо, що для всіх $\gamma > 1$, кожна трансляційно обмежена в просторі $L_{\gamma}^{loc}(\mathbf{R}_+)$ функція є трансляційно рівномірно інтегровною в просторі $L_1^{loc}(\mathbf{R}_+)$ [49].

Основні припущення:

(A1) існують така трансляційно рівномірно інтегровна в просторі $L_1^{loc}(\mathbf{R}_+)$ функція $c_1 : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ і така стала $\alpha_1 > 0$, що для всіх $\tau \geq 0$, $y \in \mathcal{K}_{\tau}^+$ і $t_2 \geq t_1 \geq \tau$ виконується така нерівність:

$$\| y(t_2) \|_H^2 - \| y(t_1) \|_H^2 + \alpha_1 \int_{t_1}^{t_2} \| y(t) \|_V^p dt \leq \int_{t_1}^{t_2} c_1(t) dt; \quad (3.25)$$

(A2) існують така трансляційно рівномірно інтегровна в просторі $L_1^{loc}(\mathbf{R}_+)$ функція $c_2 : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ і така стала $\alpha_2 > 0$, що для всіх $\tau \geq 0$, $y \in \mathcal{K}_{\tau}^+$ і $t_2 \geq t_1 \geq \tau$ виконується така нерівність:

$$\int_{t_1}^{t_2} \| y'(t) \|_{V^*}^q \, dt \leq \alpha_2 \int_{t_1}^{t_2} \| y(t) \|_V^p \, dt + \int_{t_1}^{t_2} c_2(t) dt.$$

Для опису рівномірної глобальної динаміки розв'язків неавтономних дисипативних динамічних систем розглянемо об'єднаний простір траєкторій $\mathcal{K}_{\cup}^+$ для сімейства розв'язків $\{\mathcal{K}_\tau^+\}_{\tau \geq 0}$, зсунутих до нуля:

$$\mathcal{K}_{\cup}^+ := \bigcup_{\tau \geq 0} \{T(h) y(\cdot + \tau) : y(\cdot) \in \mathcal{K}_\tau^+, h \geq 0\} \subset W^{loc}(\mathbf{R}_+), \quad (3.26)$$

і розширений об'єднаний простір траєкторій для сімейства $\{\mathcal{K}_\tau^+\}_{\tau \geq 0}$:

$$\mathcal{K}^+ := \mathrm{c}l_{C^{loc}(\mathbf{R}_+;H)}[\mathcal{K}_{\cup}^+], \quad (3.27)$$

де $\mathrm{c}l_{C^{loc}(\mathbf{R}_+;H)}[\,\cdot\,]$ – замикання в просторі $C^{loc}(\mathbf{R}_+;H)$. Оскільки $T(h)\mathcal{K}_{\cup}^+ \subseteq \mathcal{K}_{\cup}^+$ для всіх $h \geq 0$, то

$$T(h)\mathcal{K}^+ \subseteq \mathcal{K}^+ \quad \text{для всіх} \quad h \geq 0, \quad (3.28)$$

внаслідок

$$\rho_{C^{loc}(\mathbf{R}_+;H)}(T(h)u, T(h)v) \leq \rho_{C^{loc}(\mathbf{R}_+;H)}(u, v) \quad \text{для всіх} \quad u, v \in C^{loc}(\mathbf{R}_+;H),$$

де $\rho_{C^{loc}(\mathbf{R}_+;H)}$ – стандартна метрика в просторі Фреше $C^{loc}(\mathbf{R}_+;H)$. Таким чином, множина

$$\mathcal{X} := \{y(0) : y \in \mathcal{K}^+\} \quad (3.29)$$

– замкнена в просторі H (це випливає з припущень (A1) та (A2)). Наділимо множину $\mathcal{X}$ метрикою

$$\rho_{\mathcal{X}}(x_1, x_2) = \| x_1 - x_2 \|_H, \quad x_1, x_2 \in \mathcal{X}.$$

Тоді отримаємо, що $(\mathcal{X}, \rho)$ – польський простір (повний сепарабельний метричний простір).

Визначимо багатозначний напівпотік $G: \mathbf{R}_+ \times \mathcal{X} \to 2^{\mathcal{X}}$ таким чином:

$$G(t, y_0) := \{y(t) : \ y(\cdot) \in \mathcal{K}^+ \ \text{ і } \ y(0) = y_0\}, \quad t \geq 0, y_0 \in \mathcal{X}. \qquad (3.30)$$

Згідно з (3.28)-(3.30) для всіх $t \geq 0$ та $y_0 \in \mathcal{X}$ множина $G(t, y_0)$ – непорожня.

Основним завданням даного підрозділу є вивчення рівномірної довгострокової поведінки множин розв'язків $\{\mathcal{K}_\tau^+\}_{\tau \geq 0}$ в сильній топології природного фазового простору H (при $t \to +\infty$) в сенсі існування компактного глобального атрактора для багатозначного напівпотоку G, породженого сімейством розв'язків $\{\mathcal{K}_\tau^+\}_{\tau \geq 0}$ та їх зсувами.

Приведемо результат стосовно властивості копмпактності сімейства $\mathcal{K}^+$ в топології, індукованій з простору $C^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+; H)$.

Теорема 3.6 Нехай виконуються припущення (A1)–(A2). Тоді є справедливими такі твердження:

(а) для всіх $y \in \mathcal{K}^+$ має місце така оцінка:

$$\| y(t) \|_H^2 \leq \| y(0) \|_H^2 \, e^{-c_3 t} + c_4, \quad t \geq 0, \qquad (3.31)$$

де додатні сталі c_3 і c_4 не залежать від $y \in \mathcal{K}^+$ і $t \geq 0$;

(б) для кожної обмеженої в просторі $L_\infty(\mathbf{R}_+; H)$ послідовності $\{y_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{K}^+$ існують така зростаюча послідовність $\{n_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathbb{N}$ та елемент $y \in \mathcal{K}^+$, що

$$\| \Pi_{\tau,T} y_{n_k} - \Pi_{\tau,T} y \|_{C([\tau,T];H)} \to 0, \quad k \to +\infty, \qquad (3.32)$$

для кожного скінченного часового проміжку $[\tau, T] \subset (0, +\infty)$. Якщо, крім того, існує таке $y_0 \in H$, що $y_{n_k}(0) \to y_0$ в просторі H, то $y(0) = y_0$.

Доведення. Доведемо твердження (а). Якщо умова (а) виконується для всіх $y \in \mathcal{K}_\cup^+$, то нерівність (3.31) виконується для всіх $y \in \mathcal{K}^+$ внаслідок

(3.27). Інша частина доведення виконання твердження (a) полягає у встановленні справедливості нерівності (3.31) для всіх $y \in \mathcal{K}_{\mathrm{U}}^{+}$.

Для довільного $y \in \mathcal{K}_{\mathrm{U}}^{+}$ існують такі $\tau, h \geq 0$ та $z(\,\cdot\,) \in \mathcal{K}_{\tau}^{+}$, що $y(\,\cdot\,) = T(\tau + h)z(\,\cdot\,)$. З припущення (A1) випливає така нерівність:

$$\| y(t_2) \|_H^2 - \| y(t_1) \|_H^2 + \alpha_1 \int_{t_1}^{t_2} \| y(t) \|_V^p \, dt \leq \int_{t_1}^{t_2} c_1(t + \tau + h) dt \quad (3.33)$$

для всіх $t_2 \geq t_1 \geq 0$. Оскільки вкладення $V \subset H$ – компактне, то воно є неперервним. Тому, існує така стала $\beta > 0$, що $\| b \|_H \leq \beta \| b \|_V$ для всіх $b \in V$. Згідно з (3.33), оскільки нерівність $a^2 \leq 1 + a^p$ виконується для всіх $a \geq 0$, то має місце така нерівність:

$$\| y(t_2) \|_H^2 - \| y(t_1) \|_H^2 + \alpha_3 \int_{t_1}^{t_2} \| y(t) \|_H^2 \, dt \leq$$
$$\leq \int_{t_1}^{t_2} [c_1(t + \tau + h) + \alpha_3] dt \quad (3.34)$$

для всіх $t_2 \geq t_1 \geq 0$, де $\alpha_3 = \frac{\alpha_1}{\beta^p}$. Покладемо

$$\rho(t) := \| y(t) \|_H^2 + \alpha_3 \int_0^t \| y(s) \|_H^2 \, ds - \int_0^t [c_1(s + \tau + h) + \alpha_3] ds, \quad t \geq 0.$$

Нерівність (3.34) і [7, лема 7.1] гарантують, що $\frac{d}{dt}\rho \leq 0$ в $D^*((0, +\infty))$, де $\frac{d}{dt}$ – похідна в сенсі $D^*((0, +\infty))$. Отже,

$$\frac{d}{dt} \| y(t) \|_H^2 + \alpha_3 \| y(t) \|_H^2 - [c_1(t + \tau + h) + \alpha_3] \leq 0 \quad \text{в} \quad D^*((0, +\infty)).$$

і,

$$\frac{d}{dt}[\| y(t) \|_H^2 \, e^{\alpha_3 t}] - e^{\alpha_3 t}[c_1(t + \tau + h) + \alpha_3] \leq 0 \quad \text{в} \quad D^*((0, +\infty)). \quad (3.35)$$

З [7, лема 7.1] та нерівності (3.35) випливає, що

$$\| y(t_2) \|_H^2 \leq \| y(t_1) \|_H^2 \, e^{-\alpha_3(t_2-t_1)} +$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} e^{-\alpha_3(t_2-t)}[c_1(t+\tau+h)+\alpha_3]dt$$

для всіх $t_2 \geq t_1 \geq 0$. Отже,

$$\| y(t_2) \|_H^2 \leq$$

$$\leq \| y(t_1) \|_H^2 \, e^{-\alpha_3(t_2-t_1)} + \int_{t_1}^{t_2} e^{-\alpha_3(t_2-t)}[c_1(t+\tau+h)+\alpha_3]dt \leq$$

$$\leq \| y(t_1) \|_H^2 \, e^{-\alpha_3(t_2-t_1)} + 1 + \int_{t_1+\tau+h}^{t_2+\tau+h} e^{-\alpha_3(t_2-t+\tau+h)} c_1(t)dt \leq$$

$$\leq \| y(t_1) \|_H^2 \, e^{-\alpha_3(t_2-t_1)} + 1 + \frac{K}{\alpha_3} +$$

$$+\int_{t_1+\tau+h}^{t_2+\tau+h} e^{-\alpha_3(t_2-t+\tau+h)} |c_1(t)| \mathbf{I}\{|c_1(t)| \geq K\}dt,$$

для всіх $K > 0$, $t_2 \geq t_1 \geq 0$. Оскільки функція $c_1: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ – трансляційно рівномірно інтегровна в просторі $L_1^{loc}(\mathbf{R}_+)$ (див. припущення (A1)), то існує таке $K_0 > 0$, що

$$\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} |c_1(s)| \mathbf{I}\{|c_1(s)| \geq K_0\}ds \leq 1.$$

Отже,

$$\| y(t_2) \|_H^2 \leq \quad \| y(t_1) \|_H^2 \, e^{-\alpha_3(t_2-t_1)} + 1 + \frac{K_0}{\alpha_3} + \frac{e^{\alpha_3+1}}{\alpha_3},$$

звідки випливає оцінка (3.31) з $c_3 := \alpha_3$ з $c_4 := 1 + \frac{K_0 + e^{\alpha_3+1}}{\alpha_3}$, де додатні сталі c_3 та c_4 не залежать від $y \in \mathcal{K}^+$ і $t \geq 0$.

Доведемо твердження (б). Нехай $\{y_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{K}^+$ – довільна послідовність, обмежена в просторі $L_\infty(\mathbf{R}_+; H)$. Оскільки $\mathcal{K}_\cup^+$ – щільна множина польського простору $\mathcal{K}^+$, наділеного топологією, індукованою з простору $C^{loc}(\mathbf{R}_+; H)$, то для всіх $n \geq 1$ існує таке $u_n \in \mathcal{K}_\cup^+$, що

$$\rho_{C^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+;H)}(y_n,u_n) \le \frac{1}{n} \quad \text{для кожного} \quad n \ge 1. \tag{3.36}$$

Зазначимо, що апріорна оцінка (3.31) забезпечує обмеженість послідовності $\{u_n\}_{n\ge1}$ в просторі $L_\infty(\mathbf{R}_+;H)$. Таким чином, подальше доведення полягає у встановленні справедливості твердження (б) для послідовності $\{u_n\}_{n\ge1}$.

Зафіксуємо $n \ge 1$. Співвідношення (3.26) гарантує існування таких $\tau_n, h_n \ge 0$ та $z_n(\cdot) \in \mathcal{K}^+_{\tau_n}$, що $u_n(\cdot) = z_n(\cdot + \tau_n + h_n)$. Тоді, з припущень (A1) та (A2) випливає

$$\begin{gathered} \| u_n(t_2) \|_H^2 - \| u_n(t_1) \|_H^2 + \alpha_1 \int_{t_1}^{t_2} \| u_n(t) \|_V^p \, dt \le \int_{t_1}^{t_2} c_1(t+\tau_n+h_n)dt, \\ \int_{t_1}^{t_2} \| u_n{}'(t) \|_{V^*}^q \, dt \le \alpha_2 \int_{t_1}^{t_2} \| u_n(t) \|_V^p \, dt + \int_{t_1}^{t_2} c_2(t+\tau_n+h_n)dt, \end{gathered} \tag{3.37}$$

для всіх $t_2 \ge t_1 \ge 0$ і $n \ge 1$.

Зауважимо, що

$$\sup_{n\ge1} \int_{t_1}^{t_2} |c_1(t+\tau_n+h_n)|dt < \infty \quad \text{і} \quad \sup_{n\ge1} \int_{t_1}^{t_2} |c_2(t+\tau_n+h_n)|dt < \infty, \tag{3.38}$$

для всіх $t_2 \ge t_1 \ge 0$, оскільки $c_1, c_2 \colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ – трансляційно рівномірно інтегровні в просторі $L_1^{loc}(\mathbf{R}_+)$.

Зі співвідношень (3.37) та (3.38) випливає, що послідовність $\{u_n\}_{n\ge1}$ – обмежена в просторі $W^{loc}(\mathbf{R}_+)$. Таким чином, теорема Банаха-Алаоглу та [202, теореми 1.16, 1.21] забезпечують існування зростаючої послідовності $\{n_k\}_{k\ge1} \subseteq \mathbb{N}$ та елементів

$$\bar{c}_1 \in L_1^{loc}(\mathbf{R}_+)$$

і

$$y \in W^{loc}(\mathbf{R}_+) \subset C^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+;H)$$

таких, що

$$
\begin{array}{ll}
u_{n_k} \to y & \text{слабко в } L_p^{\mathrm{l}oc}(\mathbf{R}_+;V), \\
u'_{n_k} \to y' & \text{слабко в } L_q^{\mathrm{l}oc}(\mathbf{R}_+;V^*), \\
u_{n_k} \to y & \text{слабко в } C^{\mathrm{l}oc}(\mathbf{R}_+;H), \\
u_{n_k}(t) \to y(t) & \text{в } H \text{ для м.в. } t>0, \\
c_1(\,\cdot\, + \tau_{n_k} + h_{n_k}) \to \bar{c}_1 & \text{слабко в } L_1^{\mathrm{l}oc}(\mathbf{R}_+), \quad k\to\infty,
\end{array} \tag{3.39}
$$

де остання збіжність виконується внаслідок трансляційної рівномірної інтегровності функції $c_1 \in L_1^{\mathrm{l}oc}(\mathbf{R}_+)$ в просторі $L_1^{\mathrm{l}oc}(\mathbf{R}_+)$. Згідно з (3.39), можемо перейти до границі в співвідношенні (3.25). Таким чином, отримуємо, що y задовольняє нерівність (3.25).

Розглянемо неперервні та незростаючі (за припущенням (A1)) функції на $\mathbf{R}_+$:

$$
\begin{gathered}
J_k(t) = \| u_{n_k}(t) \|_H^2 - \int_0^t c_1(s+\tau_{n_k}+h_{n_k})ds, \\
J(t) = \| y(t) \|_H^2 - \int_0^t \bar{c}_1(s)ds, \quad k\geq 1
\end{gathered} \tag{3.40}
$$

[72]. З останніх двох тверджень в (3.39) випливає, що

$$
J_k(t) \to J(t) \ \text{ при } \ k\to+\infty \ \text{ для м.в. } t>0. \tag{3.41}
$$

Аналогічно до [203, с. 57] (та посилання там) покажемо, що збіжність (3.32) виконується. Від супротивного припустимо, що існують додатня стала $L>0$, скінченний проміжок $[\tau,T]\subset(0,+\infty)$ і підпослідовність $\{u_{k_j}\}_{j\geq1} \subseteq \{u_{n_k}\}_{k\geq1}$ такі, що

$$
\max_{t\in[\tau,T]} \| u_{k_j}(t) - y(t) \|_H = \| u_{k_j}(t_j) - y(t_j) \|_H \geq L,
$$

для всіх $j\geq1$. Припустимо також, що $t_j \to t_0 \in [\tau,T]$ при $j\to+\infty$. З неперервності $\Pi_{\tau,T}y\colon [\tau,T]\to H$ випливає

$$
\liminf_{j\to+\infty} \| u_{k_j}(t_j) - y(t_0) \|_H \geq L. \tag{3.42}
$$

З іншого боку, доведемо, що

$$u_{k_j}(t_j) \to y(t_0) \ \text{ в } \ H, \ j \to +\infty. \tag{3.43}$$

Для цього спершу зазначимо, що

$$u_{k_j}(t_j) \to y(t_0) \ \text{ слабко в } \ H, \quad j \to +\infty. \tag{3.44}$$

Дійсно, для фіксованого $h \in V$ з (3.39) випливає, що послідовність дійсних функцій $\{(\Pi_{\tau,T} u_{n_k}(\,\cdot\,), h)_H : [\tau, T] \to \mathbf{R}\}_{k\geq 1}$ – рівномірно обмежена і еквінеперервна. Враховуючи обмеженість послідовності $\{\Pi_{\tau,T} u_{n_k}\}_{k\geq 1}$ в просторі $C([\tau, T]; H)$ та щільність множини V в просторі H, отримуємо, що $u_{n_k}(t) \to y(t)$ слабко в просторі H, рівномірно на проміжку $[\tau, T]$ при $k \to +\infty$. Таким чином, маємо (3.44).

Далі доведемо, що

$$\limsup_{j\to+\infty} \| u_{k_j}(t_j) \|_H \ \leq \| y(t_0) \|_H. \tag{3.45}$$

Розглянемо неперервні незростаючі функції J і J_{k_j}, $j \geq 1$, визначені в (3.40). Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Неперервність J та (3.41) забезпечують існування такого $\bar{t} \in (\tau, t_0)$, що

$$\lim_{j\to\infty} J_{k_j}(\bar{t}) = J(\bar{t})$$

і

$$|J(\bar{t}) - J(t_0)| < \varepsilon.$$

Тоді

$$J_{k_j}(t_j) - J(t_0) \leq |J_{k_j}(\bar{t}) - J(\bar{t})| + |J(\bar{t}) - J(t_0)| \leq |J_{k_j}(\bar{t}) - J(\bar{t})| + \varepsilon,$$

для достатньо великого $j \geq 1$. Отже,

$$\limsup_{j\to+\infty} J_{k_j}(t_j) \le J(t_0),$$

і нерівність (3.45) виконується.

Тепер зазначимо, що збіжність (3.43) справджується внаслідок співвідношень (3.44), (3.45) [211, розділ I]. Зауважимо, що твердження (3.43) суперечить припущенню (3.42). Таким чином, згідно з (3.36), перше твердження теореми виконується для кожної послідовності $\{y_n\}_{n\ge1} \subset \mathcal{K}^+$.

Для завершення доведення справедливості твердження (б) зазначимо, що, якщо існує таке $y_0 \in H$, що $y_{n_k}(0) \to y_0$ в просторі H, то, внаслідок третьої збіжності в (3.39), $y(0) = y_0$. Теорема доведена.

Основним результатом є така теорема.

Теорема 3.7 Нехай виконуються припущення (A1)–(A2). Тоді для багатозначного напівпотоку G, визначеного співвідношенням (3.30), в фазовому просторі $\mathcal{X}$ існує компактний глобальний атрактор $\mathfrak{R}$.

Доведення. З теореми 3.6 випливають такі властивості багатозначного напівпотоку G, визначеного співвідношенням (3.30):

(а) для всіх $t \ge 0$ відображення $G(t,\cdot\,)\colon \mathcal{X} \to 2^{\mathcal{X}}\setminus\{\emptyset\}$ має замкнений графік;

(б) для всіх $t \ge 0$ та $y_0 \in \mathcal{X}$ множина $G(t, y_0)$ – компактна в просторі $\mathcal{X}$;

(в) множина $G(1, \tilde{C})$, де

$$\tilde{C} := \{z \in \mathcal{X} : \| z \|_H^2 < c_4 + 1\},$$

– передкомпактна та притягує кожну обмежену підмножину $C \subset \mathcal{X}$.

Дійсно, властивість (а) випливає з теореми 3.6 (див. співвідношення (3.27) і (3.30)); властивість (б) прямо випливає з умови (а) та теореми 3.6(б); властивість (в) виконується, оскільки $G(1, \tilde{C})$ – передкомпактне в просторі $\mathcal{X}$ (теорема 3.6(б) і співвідношення (3.30)) і мають місце такий ланцюжок нерівностей:

$$dist_{\mathcal{X}}(G(t,C),G(1,\tilde{C})) \le dist_{\mathcal{X}}(G(1,G(t-1,C)),G(1,\tilde{C})) \le$$
$$\le dist_{\mathcal{X}}(G(1,\tilde{C}),G(1,\tilde{C})) = 0$$

для достатньо великих t.

Згідно з властивостями (а)–(в), з [127, теорема 1, 2, зауваження 2, твердження 1] випливає, що для багатозначного напівпотоку G існує компактний глобальний атрактор $\mathfrak{R}$ в фазовому просторі $\mathcal{X}$.

3.6 Висновки до розділу 3

В розділі досліджена глобальна динаміка розв’язків автономного хвильового диференціально-операторного включення з функцією взаємодії субградієнтного типу. Для нього було встановлено існування, властивості та оцінки для слабких розв’язків. Крім того, показаний характер залежності слабких розв’язків від початкових даних. Для задачі (3.1) був побудований багатозначний напівпотік, породжений усіма слабкими розв’язками досліджуваної задачі. Доведено асимптотичну компактність багатозначного напівпотоку, що дозволило отримати існування в фазовому просторі задачі інваріантного компактного глобального атрактора. Знайдено функцію типу Ляпунова для задачі, завдяки чому була досліджена структура глобального атрактора. Більше того, встановлено скінченновимірність динаміки всіх слабких розв’язків досліджуваної задачі з точністю до малого параметру. Також доведено існування траєкторного атрактора в розширеному фазовому просторі задачі та встановлено його зв’язок з глобальним атрактором та простором повних траєкторій. Отримані в останньому підрозділі результати дають змогу застосувати існуючий математичний інструментарій якісного аналізу автономних задач у неавтономному випадку, зокрема знайдено достатні умови існування рівномірного глобального атрактора для багатозначного напівпотоку. Варто зазначити, що при дослідженні конкретних неавтономних нелінійних еволюційних задач справедливість основних припущень, що гарантують виконання отриманих результатів, забезпечується лише стандартними умовами знаку та росту для функції взаємодії. Основні результати даного розділу опубліковані в роботах [198, 204, 205, 231].

РОЗДІЛ 4
ГЛОБАЛЬНА ДИНАМІКА РОЗВ'ЯЗКІВ КЛАСУ КОНТАКТНИХ В'ЯЗКОПРУЖНИХ ЗАДАЧ

У даному розділі пропонується структурна схема розв'язання задач дослідження глобальної поведінки функцій стану для класів процесів, що відбуваються в складних технічних системах. Проводиться умовна класифікація таких процесів. Формулюються основні задачі дослідження глобальної поведінки функцій стану. Описується алгоритм застосування отриманих в попередніх розділах результатів. Поетапно це можна представити у такому вигляді (див. рис. 4.1):

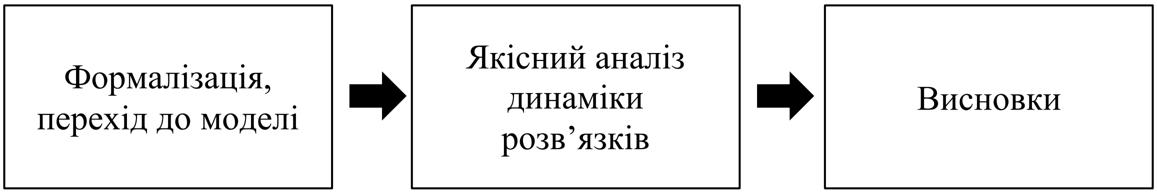

Рис. 4.1 Етапи дослідження глобальної динаміки розв'язків

Для класу в'язкопружних задач, на основі проведених в попередніх розділах якісних досліджень, отримуються результати щодо асимптотичної поведінки їх функцій стану.

4.1 Алгоритм дослідження глобальної динаміки розв'язків

4.1.1 Структурна схема розв'язання задач дослідження глобальної поведінки функцій стану

Підхід до розв'язання задач дослідження глобальної поведінки функцій стану класів процесів та полів різної природи передбачає загальну процедуру дослідження таких об’єктів, що грунтується на якісному аналізі їх динаміки при заданих параметрах. При дослідженні складних процесів та полів важливим є визначення їх місця серед інших класів, з’ясування основних особливостей, що їх поєднують. Аналізуючи різні класи технічних систем та їх структурні елементи, визначається їх загальна природа. При формалізації чітко виділяється об’єкт дослідження та його основні властивості, вказуються відомі та невідомі параметри. Спираючись на властивості функції взаємодії та застосовуючи математичний інструментарій якісного аналізу, отримуються результати щодо можливості виходу досліджуваних об’єктів на бажані стаціонарні стани. Структурна схема розв’язання задач дослідження глобальної поведінки функцій стану передбачає спрощення процедури вибору функції взаємодії для стабільного функціонування системи, яка включає:

1. формалізацію досліджуваної системи;
2. якісний аналіз динаміки розв’язків відповідної математичної моделі;
3. висновки.

Спрощення полягає в виключенні проміжної ланки 2) для дослідника, якому пропонуються характеристики параметрів досліджуваного об’єкту. В свою чергу, якісний аналіз динаміки розв’язків обґрунтовує вибір функції взаємодії і є важливою складовою досліджень, що дозволяє описати поведінку систем при $t \to \infty$.

Для проведення якісного аналізу необхідною є формалізація складних систем різної природи або окремих їх структурних елементів. При побудові структурної схеми будемо грунтуватись на методах та принципах, описаних в [219]. Таким чином, на першому етапі побудуємо ієрархічну схему структурно підпорядкованих елементів (рис. 4.2), яка демонструє міжрівневі зв’язки і приводить до визначення спільного базового елементу.

На схемі (рис. 4.2) процеси різної природи (які мають місце в складних технічних системах) умовно поділені на п’ять загальних класів. Кожен клас включає процеси, які володіють такими спільними характеристиками як:

– автономність,

– дисипативність,

– нелінійність (можливо розривного характеру).

Загальні класи процесів в складних технічних системах				
Фізико-механічні (гідро-, електромеханічні (зокрема п'єзоелектричні) процеси	Теплові (процеси поверхневого змішувального теплообміну, випарювання, конденсація)	Хімічні (гідроліз, дегідрація, синтез, пероліз, корозія)	Біологічні (біосинтез, процеси біосферного колообігу речовин, процеси, що відбуваються в корі головного мозку)	Дифузійні (абсорбція, адсорбція, діаліз, осмос, екстракція, горіння в пористому середовищі тощо)
Властивості процесів: - автономність, - дисипативність, - нелінійність				
Системи надточного позиціонування, системи стабілізації, гідромеханічні коробки передач тощо	Теплонасосні установки, системи геотермального теплопостачання тощо	Системи переробки складних ефірів, хімікотехнологічні системи синтезу метанолу, аміаку тощо	Біорегенераційні технології (наприклад, штучні космічні екосистеми)	Системи видобутку нафти, кліматологічні моделі, технології медицини тощо

Розв'язання практичних задач

Формалізовані моделі процесів

Існування та властивості множин станів стійкого функціонування систем

Математичні моделі процесів → диференціально-операторні включення

Існування та властивості притягуючих множин розв'язків

Якісний аналіз поведінки функцій стану

Рис. 4.2 Структурована схема вивчення глобальної динаміки процесів та полів різної природи

Далі в схемі (рис. 4.2) наведені приклади складних систем, яким притаманні такі процеси.

Формалізація таких задач виокремлює вхідні та вихідні, відомі та невідомі параметри досліджуваної системи. Аналіз математичних моделей, побудованих на основі формалізованих, приводить до необхідності розгляду диференціально-операторних включень, що зумовлюється неможливістю застосування класичного математичного апарату для дослідження початкової задачі через її складність (розривність нелінійного доданку).

Для класів дифузійних процесів та полів якісні дослідження проводились в роботах [44, 45, 48, 49, 75, 77, 78, 101, 183, 203, 212, 213, 221] та ін. Розглянемо першу групу процесів – фізико-механічні. Важливим підкласом для них є в'язкопружні процеси. Зокрема, огляд джерел приводить до розгляду об'єктів типу «маса-пружність-згасання» ([54, 69, 155] та ін.), які є частковим випадком диференціально-операторного включення (3.1); і як результат формалізації маємо загальний вигляд їх математичних моделей:

$$my_{tt}(t) + by_t(t) + cy(t) = 0$$

де m – маса тіла,

y – зміщення тіла,

b – коефіцієнт згасання (в'язкості),

c – коефіцієнт пружності.

Такі системи можуть бути окремими функціональними одиницями, або входити в якості елементів до більш складних технічних систем. Зазвичай вони є об'єктом керування в таких системах. Розглянемо керування такими системами в загальному вигляді:

$$u(t) = f(y(t)),$$

що представляє собою керування у формі зворотного зв'язку, яке може бути однією з нелінійних складових функції взаємодії. Схематичне зображення такого керування наведене на рис. 4.3.

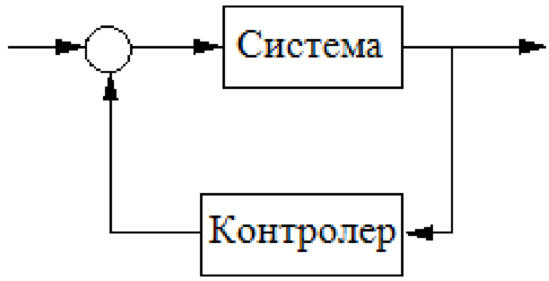

Рис. 4.3 Схематичне зображення системи з керуванням у формі зворотного зв'язку

Керування у формі зворотного зв'язку розуміють як вплив результату функціонування системи на параметри, від яких залежить функціонування системи надалі [4, 36]. Керування може мати як силовий так і імпульсний характер (не обов'язково неперервний). Таким чином маємо загальний вигляд еволюційної математичної моделі класів керованих в'язкопружних процесів:

$$my_{tt}(t) + by_t(t) + cy(t) = u(t).$$

Наведемо декілька прикладів математичних моделей складних систем з в'язкопружними елементами, для яких є застосовним розроблений в попередніх розділах інструментарій дослідження глобальної поведінки функцій стану.

Приклад. Розглянемо математичну модель для п'єзокерованого актуатора злипання-ковзання [69], що грунтується на моделі п'єзоелектричного актуатора та моделі тертя. В п'єзокерованому актуаторі злипання-ковзання п'єзоелектричний актуатор використовується для керування тілом.

Зв'язок п'єзоелектричного актуатора з станом моделюється як система маса-пружність-згасання, сила взаємодії між п'єзоелектричним актуатором та позицією тіла визначається як

$$F_s = m_s\ddot{y} + c_s\dot{y} + k_s y,$$

де F_s – сила взаємодії між п’єзоелектричним актуатором та позицією тіла,

m_s – маса тіла,

y – зміщення позиції тіла,

c_s – коефіцієнт згасання,

k_s – жорсткість.

Не враховуючи гістерезисну нелінійність, поєднана система п’єзоелектричного актуатор і стану тіла моделюється як система другого порядку:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = Tu,$$

де m –маса системи,

c – коефіцієнт згасання,

k_s – жорсткість,

T – коефіцієнт електромеханічної трансформації,

u – сигнал напруги, прикладеної до п’єзоелектричного актуатора.

Значення параметрів залежать від геометрії та маси і п’єзоелектричного актуатора, і тіла. Співвідношення між ними мають вигляд:

$$m = \frac{4m_p}{\pi^2} + m_s,$$

$$c = c_p + c_s,$$

$$k = k_p + k_s,$$

де m_p – маса п’єзоелектричного актуатора,

c_p – коефіцієнт згасання п’єзоелектричного актуатора,

k_p – жорсткість п’єзоелектричного актуатора.

Слід зазначити, що u – це, зокрема, будь-які асиметричні форми сигналу для приведення в дію робочої частини, наприклад, пилоподібного вигляду. Ці сигнали можуть подаватись за наперед встановленою схемою, а можуть залежати від зміщення робочого тіла. Математичне представлення такої залежності може бути пов'язане з специфікою застосувань такого актуатора.

Приклад. В складних системах точного позиціонування при невеликих зміщеннях механізм позиціонування системи п'єзоприводу описується як динамічне рівняння другого порядку. Грунтуючись на моделі Бук-Вена, динамічне рівняння може бути представлене в такий спосіб [155]:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_h = k(d_e r - h), \tag{4.1}$$

де m – маса п'єзоприводу,

b – коефіцієнт згасання,

k – коефіцієнт пружності,

x – зміщення,

F_h – сумарна сила, що включає гістерезис,

r – вхідна напруга,

d_e – відношення зміщення до вхідної напруги,

h – нелінійний гістерезис.

Права частина рівняння (4.1) може мати відмінний від представленого вигляд в залежності від особливостей взаємодії параметрів системи та керування (наприклад, за допомогою напруги чи заряду). Для даної системи п'єзоприводу отримані в попередньому розділі результати дозволять підлаштовувати вхідну напругу в залежності від вихідного зміщення системи.

Приклад. Розглянемо, запропоновану в [54] загальну модель, що характеризує динамічну поведінку стану в п'єзоелектричній системі, включаючи частотну характеристику стану, гістерезис напруги-заряду і нелінійну електричну поведінку. Повні електричні рівняння можуть бути виражені у вигляді:

$$R_0\dot{q}(t) + v_h(t) + v_A(t) = k_{amp}v_{in}(t),$$

$$v_h(t) = H(q),$$

$$q(t) = q_c(t) + q_p(t),$$

$$v_A(t) = q_c(t)/C_A,$$

$$q_p(t) = T_{em}x(t),$$

де R_0 – внутрішній опір керованої системи,

q – повний заряд в п’єзокерамічному актуаторі,

$\dot{q}$ – результуючий струм, що протікає через систему,

v_h – згенерована напруга через гістерезис,

v_A – перетворена напруга,

k_{amp} – фіксоване підсилення підсилювача потужності напруги,

v_{in} – керуючий вхідний сигнал для п’єзоелектричного підсилювача потужності,

$H(q)$ – гістерезис,

q_c – заряд, накопичений в лінійній ємності п’єзоелектричної кераміки C_A,

q_p – перетворений заряд з механічного боку за рахунок п’єзоелектричного ефекту T_{em}, що є електромеханічним перетворювачем з коефіцієнтом трансформації,

x – вихідне зміщення механічної частини.

Детальні описи позначень, пов’язаних з п’єзоелектричними приводами, можна знайти в [15], [16]. Повні електричні рівняння можуть бути додатково спрощені

$$R_0 C_A \dot{q}(t) + q(t) - T_{em} x(t) = C_A k_{amp} \left[v_{in}(t) - \frac{H(q)}{k_{amp}} \right]. \tag{4.2}$$

З механічної точки зору наступні динамічні електромеханічні рівняння можуть бути отримані з законів п’єзоелектрики та Ньютона:

$$F_A = T_{em} v_A(t), \tag{4.3}$$

$$m\ddot{x}(t) + b_s \dot{x}(t) + k_s x(t) = F_A, \tag{4.4}$$

де m – маса механізму зміщення,

x – вихідне зміщення механічної частини,

b_s – коефіцієнт згасання,

k_s – жорсткість механізму зміщення,

F_A – перетворена сила з електричної частини.

Визначимо $v_A(t)$ з (4.3) в сенсі $q(t)$:

$$v_A(t) = \frac{1}{C_A} q(t) - \frac{T_{em}}{C_A} x(t).$$

Динамічне електромеханічне рівняння (4.4) можна записати у вигляді:

$$m\ddot{x}(t) + b_s \dot{x}(t) + \overline{k_s} x(t) = \frac{T_{em}}{C_A} q(t), \tag{4.5}$$

де $\overline{k_s} = k_s + \frac{T_{em}^2}{C_A}$.

Шляхом об’єднання електричної моделі (4.2) та електромеханічної моделі (4.5), отримана загальна динамічна модель етапу п’єзоелектричного позиціонування:

$$R_0 C_A \dot{q}(t) + q(t) - T_{em} x(t) = C_A k_{amp} \left[v_{in}(t) - \frac{H(q)}{k_{amp}} \right],$$

$$m\ddot{x}(t) + b_s\dot{x}(t) + \overline{k_s}x(t) = \frac{T_{em}}{C_A}q(t).$$

Ці два рівняння представляють аналітичну модель етапу п'єзоелектричного позиціонування, яка дуже схожа до моделі звичайного електродвигуна з постійним магнітним полем.

В літературі існує два підходи для роботи з гістерезисною нелінійністю $H(q)$. Одним з них є припущення $R_0 = 0$, і повна модель описується [54]

$$m\ddot{x}(t) + b_s\dot{x}(t) + k_s x(t) = T_{em}\left[k_{amp}v_{in}(t) - H(q)\right]. \tag{4.6}$$

Знову ж таки права частина даного рівняння може мати інше представлення, яке залежить від особливостей функціонування п'єзоелектричної системи, способу моделювання гістерезису тощо. Для етапу п'єзоелектричного позиціонування (4.6), враховуючи отримані результати в попередніх розділах, можна налаштовувати керуючий вхідний сигнал, залежно від вихідного зміщення механічної частини та зважаючи на присутні ефекти, для адекватної роботи контролера.

4.1.2 Вибір функції взаємодії та розширення класу взаємодій

Праві частини в'язкопружних контактних задач можуть бути описані монотонними, можливо багатозначними законами, які приводять до варіаційних нерівностей. Такі задачі можуть моделюватися за допомогою опуклих, недиференційовних потенціалів (так званих суперпотенціалів) та потребують розгляду класичної теорії опуклого аналізу та робіт J. Moreau ([135] та ін.), R.T. Rockafellar ([158] та ін.) тощо.

В інших випадках нелінійний доданок може бути змодельований за допомогою немонотонних, можливо багатозначних законів. Їх опис вимагає використання неопуклих, недиференційовних потенціалів. Такі задачі відомі як хеміваріаційні нерівності (за P. Panagiotopoulos, див.[144–152]).

Для прикладу розглянемо класичний випадок одностороннього контакту у вигляді багатозначного, монотонного контактного закону між контактною напругою та відповідними граничними зміщеннями [16]:

$$-t_n = \begin{cases} 0, & u_{cn} \le d, \\ [0, +\infty), & u_{cn} = d, \end{cases}$$

де t_n – контактна напруга,

u_{cn} – границя,

d – початкове відхилення.

Співвідношення

$$-t_{cn} \in \partial I_{U_{ad}}(u_{cn})$$

отримується шляхом субдиференціювання наступної потенціальної функції, яка має форму індикаторної функції $I_{U_{ad}}$ для множини кінематично допустимих відносних зсувів:

$$U_{ad} = \{u_{cn} \in \mathbf{R}^1, u_{cn} - d \le 0\},$$

$$\phi_n(u_{cn}) = I_{U_{ad}}(u_{cn}) = \begin{cases} 0, & u_{cn} \le d, \\ +\infty, & u_{cn} = d. \end{cases}$$

Розглянемо наступний одновимірний закон, який моделює ефект розшарування і для стиснення, і для розтягування [16]. Для спрощеня позначень приймають:

— граничне значення контактної напруги рівним t_1,

— граничне значення рівним u_1.

Немонотонний закон має вигляд:

$$-t_n = \begin{cases} 0, & u_{cn} < -u_1, \\ [0, t_1), & u_{cn} = -u_1, \\ c_1 = \frac{-t_1}{u_1} u_{cn}, & -u_1 < u_{cn} < u_1, \\ [-t_1, 0), & u_{cn} = u_1, \\ 0, & u_{cn} > u_1. \end{cases} \tag{4.7}$$

Цей закон може бути виведений шляхом диференціювання наступного негладкого та неопуклого потенціалу, який може бути представлений у вигляді різниці опуклих функцій:

$$\overline{\phi}_n(u_{cn}) = \min\left\{\frac{1}{2} c_1 u_{cn}^2, \frac{1}{2} c_1 u_1^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} c_1 u_{cn}^2 - \left\{\begin{matrix} 0, & u_{cn} < u_1 \\ c_1 u_{cn} + \frac{1}{2} c_1 (u_{cn} - u_1)^2, & u_{cn} > u_1 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \phi_1(u_{cn}) - \phi_2(u_{cn}).$$

Зважаючи на структуру потенціалу, закон (4.7) можна записати у вигляді:

$$-t_{cn} = w_1 - w_2,$$

$$w_1 \in \partial\phi_1(u_{cn}),$$

$$w_2 \in \partial\phi_2(u_{cn}).$$

Головна перевага використання різниці опуклих функцій стає очевидною при розгляді підходу енергетичної оптимізації для негладкої механіки.

Розривність та багатозначність правих частин досліджуваних задач є більш природними ніж неперервність, яка майже не зустрічається в реальних фізичних, механічних процесах. Це зумовлюється різноманітними ефектами та явищами, що супроводжують такі процеси. Неперервне представлення функції взаємодії допускає значні похибки моделювання, що можуть спостерігатись як на початковому етапі, так і при $t \to +\infty$. Ці похибки можуть бути співрозмірними з амплітудою зміни системи.

Чисельні алгоритми для відображення повної картини динаміки досліджуваних процесів при $t \to \infty$ є недостатніми або володіють значною обчислювальною складністю. Крім того, для їх обгрунтування необхідно встановити певну регулярність розв’язків (яка зазвичай припускається), що, зважаючи на ускладненість математичних моделей розривністю та багатозначністю функції взаємодії, потребує грунтовних теоретичних досліджень, а саме виведення апріорних оцінок для розв’язків, встановлення характеру залежності розв’язків від початкових даних, знаходження функції типу Ляпунова та отримання скінченновимірності динаміки розв’язків з точністю до малого параметру.

Розривний характер правої частини вимагає розробки математичної теорії якісних досліджень поведінки розв’язків класів нелінійних в’язкопружних процесів та полів, що є підгрунтям для глобального моделювання динаміки досліджуваних систем.

4.1.3 Задачі дослідження глобальної динаміки функцій стану

При дослідженні функціонування складних технічних систем або окремих їх елементів важливим моментом є врахування усіх визначальних параметрів у відповідних математичних моделях. Орієнтовна схема переходу до постановки задачі для подальших якісних досліджень динаміки розв’язків при $t \to \infty$ представлена на рис. 4.4.

Таким чином вибудовуємо модель, для якої важливим є розв’язання таких трьох задач.

Задача перша. Відомі характеристики параметрів досліджуваної задачі. Необхідно з’ясувати, куди спрямовується динаміка розв’язків досліджуваного об’єкту.

Задача друга. Відомі характеристики параметрів досліджуваної задачі.

Необхідно описати глобальну поведінку системи з точністю до заданого малого параметру.

Задача третя. Задані стан і характеристики системи. Необхідно підібрати параметри взаємодії, щоб заданий стан попадав в множину точок спокою для досліджуваної задачі.

Рис. 4.4 Орієнтовна схема переходу до постановки задачі

Вирішення таких завдань для досліджуваних в роботі об’єктів базується на отриманих в попередніх розділах результатах. Якщо ж досліджуваний процес не належить до таких типів процесів та полів, то для розв’язку поставлених задач необхідно звернутись до робіт М.З. Згуровського та В.С. Мельника, в яких розроблені конструктивні методи дослідження та аналізу критичних точок багатозначних відображень.

4.1.4 Опис та загальні характеристики алгоритму

Узагальнимо та систематизуємо усі складові процесу проведення якісного аналізу динаміки процесів, що протікають в складних технічних системах. На рис. 4.5 представлені етапи дослідження глобальної поведінки різного роду процесів, зокрема класу процесів, які характеризуються нелінійністю, автономністю та дисипативністю.

Для процесів та полів в даній дисертаційній роботі досліджено асимптотичну поведінку функцій стану відповідних математичних моделей, що є «ядром» для проведення якісного аналізу. Отримані результати дозволяють досліднику, формалізувавши задачу, побудувавши відповідну математичну модель та перевіривши виконання усіх припущень на параметри задачі, отримати відповіді на питання стосовно спрямування динаміки розв'язків, опису глобальної поведінки розв'язків з точністю до малого параметру та вибору параметрів взаємодії для стабільного функціонування системи.

Таким чином, для класів в'язкопружних моделей, які можна звести до хвильового рівняння виду (2.1), ми можемо підібрати такі функції J_1 та J_2 (при виконанні припущень на параметри задачі), щоб заданий стан був розв'язком включення

$$\Delta y \in \partial J_1(y) - \partial J_2(y).$$

В свою чергу для класів в'язкопружних моделей, які можна звести до хвильового включення виду (3.1), ми можемо підібрати такі функції J_1 та J_2 (при виконанні припущень на параметри задачі), щоб заданий стан був розв'язком включення

$$-By \in \partial J_1(y) - \partial J_2(y).$$

Для стохастично збуреного хвильового рівняння питання про існування функції Ляпунова залишається відкритим, тому про структуру атрактора сказати нічого не можна.

Отже, при виконанні припущень на параметри задач (2.1) та (3.1) динаміка розв’язків відповідних моделей спрямовується до множини точок спокою при $t \to \infty$. Крім того, вона є скінченновимірною з точністю до малого параметру.

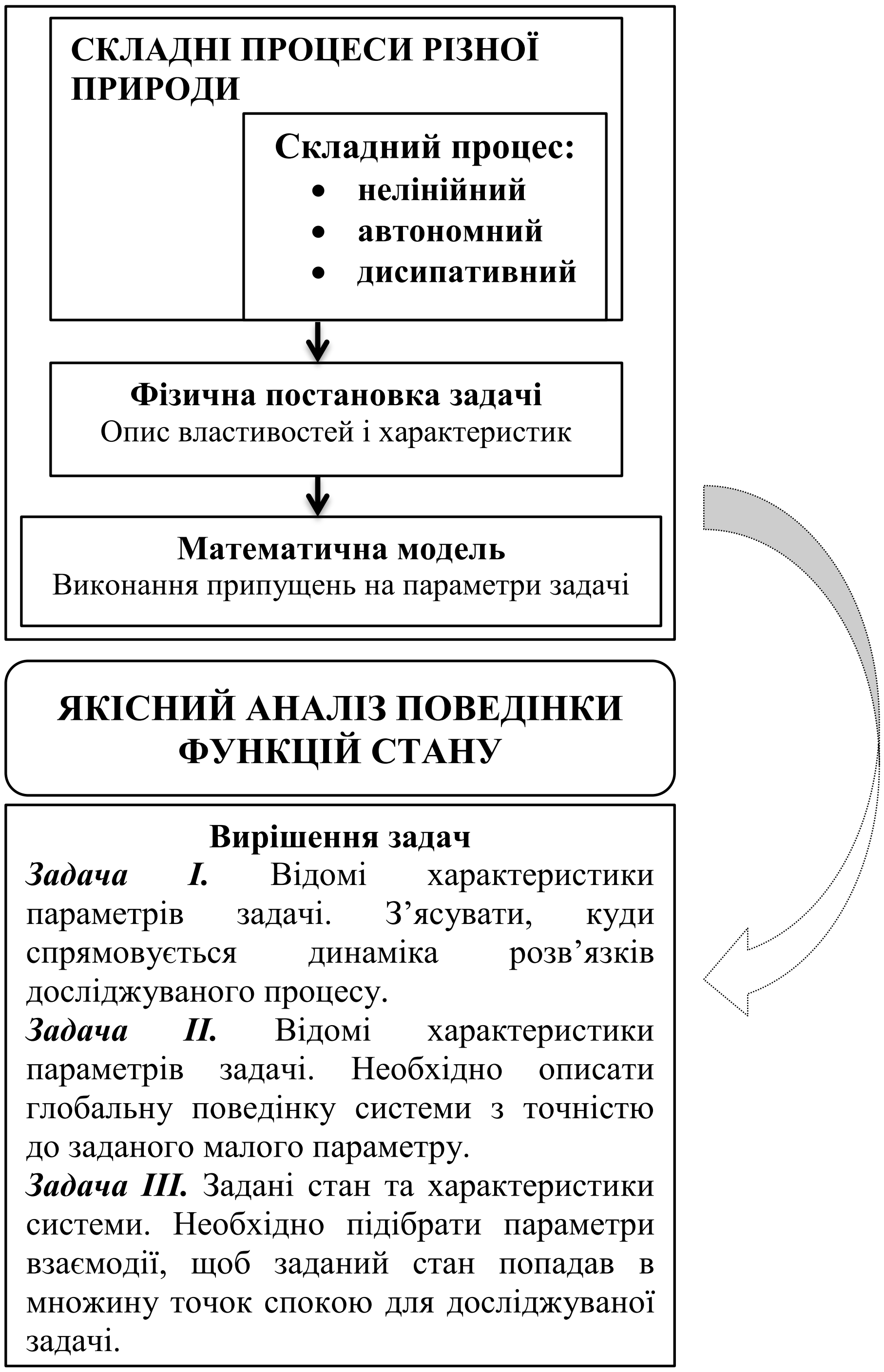

Рис. 4.5 Структурна схема якісного аналізу поведінки розв’язків

Таким чином, дослідник, маючи формалізовану модель процесу типу (2.1) чи (3.1), що протікає в складній технічній системі або в її структурному елементі, з параметрами, що задовольняють відповідним основним припущенням, може стверджувати, що функція взаємодії, яка допускає представленя у вигляді різниці субдиференціалів опуклих функціоналів, забезпечує стійкість такої системи або її певної частини. Крім того, він має теоретичні висновки та обгрунтування, необхідні для проведення чисельних розрахунків.

4.2 Глобальна динаміка функцій стану для контактної в'язкопружної задачі

Розглянемо приклад п'єзоелектричної задачі [119], яку за певних припущень на параметри можна звести до задачі (3.1). Нехай два тіла контактують: одне – в'язкопружне здатне до деформації тіло, що володіє п'єзоелектричними властивостями, інше – жорстка опора (див. рис. 4.6).

Нехай $\mathbf{R}^d$ – d-вимірний дійсний лінійний простір. Припускається, що тіло в недеформованому стані заповнює відкриту обмежену область $Q \subset \mathbf{R}^d$, $d = 2$ з ліпшицево неперервною границею Γ. Нехай границя Γ, з одного боку, складається з двох неперетинних вимірних частин Γ_D та Γ_N, $m(\Gamma_D) > 0$, і, з іншого боку, – з двох неперетинних вимірних частин Γ_a та Γ_b, $m(\Gamma_a) > 0$. Припустимо, що тіло зафіксоване з боку Γ_D, тоді поле зміщень $u: Y \to \mathbf{R}^d$, $u = u(x,t)$, де $Y = Q \times (0, +\infty)$, зникає там. Більше того, поверхнева тяга щільності g діє на частину границі області Γ_N, і електричний потенціал $\varphi: Q \to \mathbf{R}$ зникає на Γ_a. Тіло Q лежить на підтримуючому середовищі, що призводить до ефекту тертя.

Для побудови математичної моделі контактного п'єзоелектричного процесу необхідно розглянути визначаючі співвідношення п'єзоелектрики [27, 56, 58, 121]: рівняння руху, рівняння рівноваги, основні співвідношення (1.1), (1.2), співвідношення деформації-зміщення та електричного поля-потенціалу. Нехай $\mathcal{S}^d$ – лінійний тензорний простір другого порядку на $\mathbf{R}^d$.

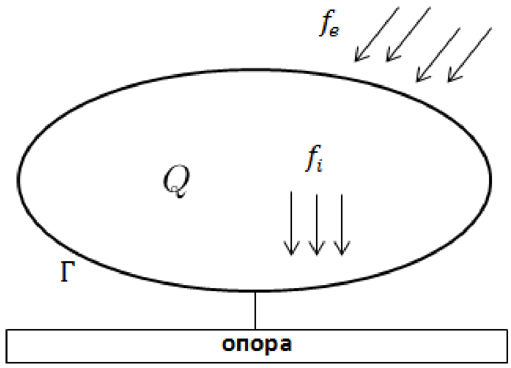

Рис. 4.6 Схематичне зображення контакту п'єзоелектричного тіла Q (з границею Г) та опори

Рівняння руху для поля напруги задається таким чином:

$$\rho u'' - Div\sigma = \rho f - \gamma u' \quad \text{в} \quad Y,$$

де ρ – стала щільності маси (нормована при $\rho = 1$);

Div – оператор дивергенції для тензорних функцій, визначений як $Div\sigma = (\sigma_{ij,j})$;

$\sigma: Y \to \mathcal{S}_d$, $\sigma = (\sigma_{ij})$ – тензор напруги;

f – сили, що діють на п'єзоелектричне тіло;

$\gamma \in L^\infty(Q)$ – невід'ємна функція, що характеризує в'язкість (згасання) середовища.

В просторі $\mathcal{S}^d$ введений скалярний добуток та норма відповідно

$$\sigma: \tau = \sum_{ij} \sigma_{ij}\tau_{ij},$$
$$\| \tau \|_{\mathbf{S}^d}^2 = \tau: \tau,\ \sigma_{ij}, \tau_{ij} \in \mathbf{S}^d.$$

Рівноважне рівняння для електричного зміщення запишемо у такій формі:

$$divD = 0 \quad \text{в} \quad Y,$$

де div –оператор дивергенції для векторних функцій, тобто $divD = (D_{i,i})$;

$D: Q \to \mathbf{R}^d$, $D = (D_i)$, $i, j = 1, \ldots, d$ – поле електричного зміщення.

П'єзоелектричні основні співвідношення (1.1), (1.2), що описують поведінку матеріалу, запишемо у такому вигляді:

$$D = \mathcal{P}\varepsilon(u) + \mathcal{B}E(\varphi) \quad \text{в} \quad Y,$$

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{P}^{\mathrm{T}}E(\varphi) \quad \text{в} \quad Y,$$

де $\mathcal{P}: Q \times \mathbf{S}^d \to \mathbf{R}^d$ – лінійний п'єзоелектричний оператор з п'єзомодулями $p = (p_{ijk})$, $i, j, k = 1,2$;

$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u))$, $i, j = 1,2$ – лінійний тензор деформації;

$\mathcal{B}: Q \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ – лінійний оператор діелектричної проникності з діелектричними константами $\beta = (\beta_{ij})$, $i, j = 1,2$;

$E(\varphi) = (E_i(\varphi))$, $i = 1,2$ – електричне векторне поле;

$\mathcal{A}: Q \times \mathbf{S}^d \to \mathbf{S}^d$ – лінійний оператор пружності з тензором пружності $a = (a_{ijkl})$, $i, j, k, l = 1,2$;

$\mathcal{P}^{\mathrm{T}}: Q \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{S}^d$ – транспонований до $\mathcal{P}$ оператор з коефіцієнтами $p^{\mathrm{T}} = (p^{\mathrm{T}}_{ijk}) = (p_{kij})$, $i, j, k = 1,2$;

Співвідношення пружної деформації-зміщення має такий вигляд:

$$\varepsilon(u) = 1/2(\nabla u + (\nabla u)^{\mathrm{T}}) \quad \text{в} \quad Y,$$

де $\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u))$ – лінійний тензор деформації.

Рівняння електричного поля-потенціалу задається таким чином:

$$E(\varphi) = -\nabla\varphi \quad \text{в} \quad Y,$$

де $\quad E(\varphi) = (E_i(\varphi))$ – електричне векторне поле;

$\varphi: Q \to \mathbf{R}$ – електричний потенціал (скалярне поле).

Взаємодія між тілом та опорою описується, зважаючи на адгезію чи поверхневе тертя, немонотонним можливо багатозначним законом між силами та відповідними зміщеннями. Сили, що діють на тіло f включають в себе зовнішню силу f_e та об'ємну силу f_i, яка є реакцією на дію поверхневих ефектів. f_i може бути багатозначною функцією від зміщення u. Закон реакції-зміщення може мати різні форми залежно від характеру взаємодії та способу керування п'єзоелектричною системою. На відміну від випадку, що розглядається в [119], для даної задачі закон реакції зміщення запишемо у такому вигляді:

$$-f_i(x,t) \in \partial G_1(x, u(x,t)) - \partial G_2(x, u(x,t)) \quad \text{в} \quad Y,$$

де $\quad G_i(\cdot,\cdot): Q \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$, $i = 1{,}2$ – вимірні в (x, u), опуклі в u для майже всіх $x \in Q$ функціонали;

$\partial G_i(x,\cdot)$, $i = 1{,}2$ – їх субдиференціали [28, розділ 2].

Розглянемо випадок, коли $g \equiv 0$ та $f_e \equiv 0$. Тоді формулювання механічної задачі буде наступне: знайти поле зміщень $u: Y \times \mathbf{R}^d$ та електричний потенціал $\varphi: Q \times \mathbf{R}$ такі, що:

$$
\begin{gathered}
u_{tt} - Div\sigma = f_i - \gamma u_t \quad \text{в} \quad Y, \\
divD = 0 \quad \text{в} \quad Y, \\
\sigma = \mathrm{A}\varepsilon(u) - \mathrm{P}^{\mathrm{T}}E(\varphi) \quad \text{в} \quad Y, \\
D = \mathrm{P}\varepsilon(u) + \mathrm{B}E(\varphi) \quad \text{в} \quad Y, \\
-f_i(x,t) \in \partial G_1(x, u(x,t)) - \partial G_2(x, u(x,t)) \quad \text{в} \quad Y, \qquad (4.8) \\
u = 0 \quad \text{в} \quad \Gamma_D \times (0,T), \\
n = 0 \quad \text{в} \quad \Gamma_N \times (0,T),
\end{gathered}
$$

$$\varphi = 0 \quad \text{в} \quad \Gamma_a \times (0, T),$$

$$Dn = 0 \quad \text{в} \quad \Gamma_b \times (0, T),$$

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1,$$

де n позначає зовнішню одиничну нормаль до границі області Γ,

u_0, u_1 – початкові зміщення та швидкість відповідно.

Проведемо процедуру якісного аналізу для формалізованої моделі контактного процесу між п'єзоелектричним тілом та опорою (4.8). Розглянемо задачу (4.8) з матеріальними сталими для п'єзокераміки PZT-4 [154, 188] (рис. 4.7).

Коефіцієнти пружності, 10^{10} N/m^2															
a_{1111}	a_{1112}	a_{1121}	a_{1122}	a_{1211}	a_{1212}	a_{1221}	a_{1222}	a_{2111}	a_{2112}	a_{2121}	a_{2122}	a_{2211}	a_{2212}	a_{2221}	a_{2222}
13.9	0	0	7.43	0	2.56	2.56	0	0	2.56	2.56	0	7.43	0	0	11.5

П'єзомодулі, C/m^2							
p_{111}	p_{112}	p_{121}	p_{122}	p_{211}	p_{212}	p_{221}	p_{222}
0	12.7	12.7	0	-5.2	0	0	15.1

Діелектричні сталі, 10^{-9} C/Vm			
β_{11}	β_{12}	β_{21}	β_{22}
6.45	0	0	5.62

Рис. 4.7 Матеріальні сталі для PZT-4

Для того, щоб для задачі (4.8) можна було застосувати отримані в попередньому розділі математичні результати, слідуючи [119], розглянемо простір

$$V = \{v \in H^1(Q; \mathbf{R}^d) : v = 0 \text{ на } \Gamma_D\} \subset H^1(Q; \mathbf{R}^d).$$

Нехай $H = L^2(Q; \mathbf{R}^d)$, $\mathcal{H} = (Q; \mathbf{R}^d)$ – гільбертові простори з скалярними добутками $\langle y, v \rangle_H = \int_Q uvdx$ та $\langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} = \int_Q \sigma : \tau dx$ відповідно. Тоді $\langle y, v \rangle_V = \langle \varepsilon(y), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}}$, $\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}}$, $y, v \in V$ – скалярний добуток та відповідна норма в просторі V. Отже, $(V, \|\cdot\|_V)$ – гільбертовий простір.

Припустимо, що $G_i: Q \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$, $i = 1,2$ задовольняють стандартні умови Каратеодорі, та існують $c^{(i)} \in L_1(Q)$ і $\alpha^{(i)} > 0$, такі, що $||d^{(i)}||_{\mathbf{R}^d} \leq c^{(i)}(x) + \alpha^{(i)}||y||_{\mathbf{R}^d}$ для майже всіх $x \in \Omega$ та будь-якого $y \in \mathbf{R}^d$, $d^{(i)} \in \partial G_i(x, y)$.

Зробимо такі припущення щодо визначаючих тензорів:

- $a = (a_{ijkl})$, $a_{ijkl} \in L^\infty(Q)$, $a_{ijkl} = a_{klij}$, $a_{ijkl} = a_{jikl}$, $a_{ijkl} = a_{ijlk}$, $a_{ijkl}(x)\tau_{ij}\tau_{kl} \geq \alpha\tau_{ij}\tau_{ij}$ для майже всіх $x \in Q$ та для всіх $\tau = (\tau_{ij}) \in S_+^d$, $\alpha > 0$,
- $p = (p_{ijk}), p_{ijk} \in L^\infty(Q)$,
- $\beta = (\beta_{ij}), \beta_{ij} = \beta_{ji} \in L^\infty(Q), \beta_{ij}(x)\zeta_i\zeta_j \geq m_\beta||\zeta||_{\mathbf{R}^d}^2$ для майже всіх $x \in Q$ та для всіх $\zeta = (\zeta_i) \in \mathbf{R}^d$, $m_\beta > 0$.

За даних припущень задача (4.8) допускає операторну постановку (3.1).

При наведених вище припущеннях на параметри задачі (4.8) всі отримані результати для багатозначного напівпотоку $\mathcal{G}$, визначеного в (3.21), виконуються. Зокрема, для будь-якого $\bar{y} \in V$ такого, що $A\bar{y} \in H$, існують такі функціонали G_1 та G_2, що припущення (J) виконується, і $Z(\mathcal{G}) = \{\bar{y}\}$.

Таким чином, динаміка досліджуваної системи є скінченновимірною з точністю до малого параметру і всі розв'язки потраєкторно виводяться на стаціонарні стани. Отже, функція взаємодії, яка допускає представлення у вигляді різниці субдиференціалів опуклих функціоналів та задовольняє основні припущення на параметри задачі, дозволяє підтримувати стійке функціонування системи.

Для досліджуваної п'єзоелектричної задачі був проведений чисельний аналіз. На рисунку 4.8 зображено розподіл станів задачі (4.8) для однорідних початкових умов в третьому наближенні.

Чисельне дослідження наочно підтверджує стабілізацію станів системи з певного моменту часу, теоретично обгрунтовану в дисертаційній роботі.

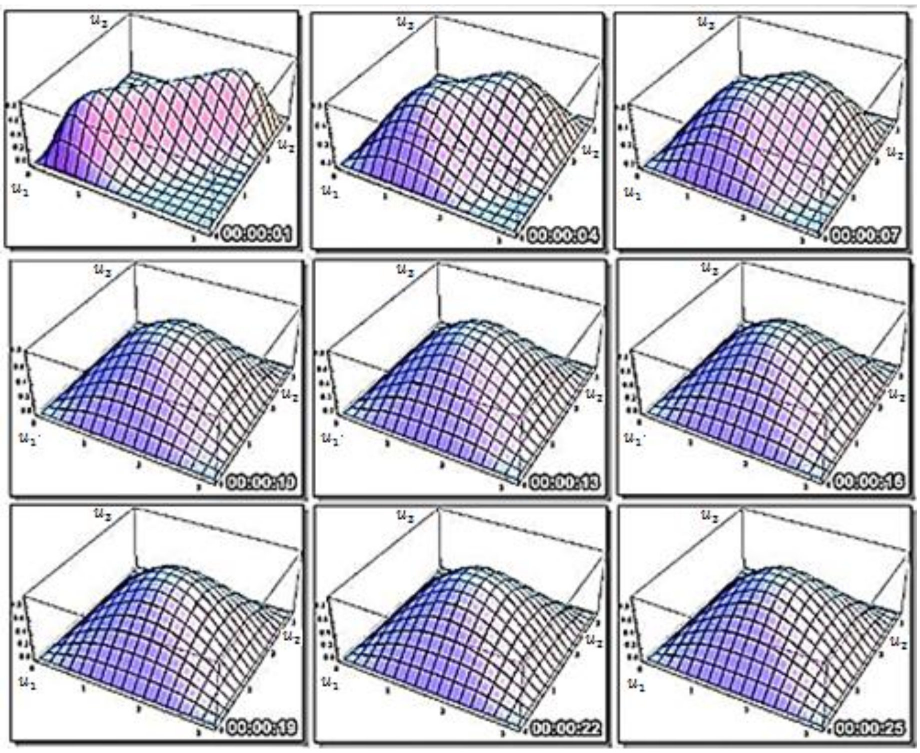

Рис. 4.8 Розподіл станів задачі (4.8) в часі $t \in (0,25]$ для однорідних початкових умов: третє гальоркінське наближення для функцій стану

4.3 Висновки до розділу 4

У даному розділі запропонована загальна структурна схема розв’язання задач дослідження глобальної поведінки функцій стану для класів процесів, що протікають в складних технічних системах. Проводиться умовна класифікація таких процесів. Також формулюються основні задачі дослідження глобальної поведінки функцій стану, описується алгоритм застосування отриманих в попередніх розділах результатів. Також приводяться приклади технічних систем, в яких протікають процеси, до яких можна застосувати отримані в дисертаційній роботі результати.

Крім того, розглядається задача контактного процесу між п’єзоелектричним тілом та жорсткою опорою, яка при природних припущеннях на параметри допускає представлення вигляду (3.1), і для неї застосовуються отримані в роботі результати. Отримано, що динаміка досліджуваної системи є скінченновимірною з точністю до малого параметру і всі розв'язки потраєкторно виводяться на стаціонарні стани. Таким чином, функція взаємодії, яка допускає представлення у вигляді різниці субдиференціалів опуклих функціоналів та задовольняє основні припущення на параметри досліджуваної задачі, дозволяє підтримувати стійке функціонування системи. Основні результати даного розділу опубліковані в роботах [198, 204, 231].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішена проблема дослідження асимптотичної поведінки розв'язків класу дисипативних динамічних систем хвильового типу з нерегулярними обмеженнями методами теорії глобальних та траєкторних атракторів нескінченновимірних динамічних систем.

Основні висновки і підсумки роботи полягають у наступному:

— досліджено якісну поведінку слабких розв'язків еволюційної системи хвильового типу з розривною нелінійністю в скалярному випадку, а саме встановлені властивості та оцінки для слабких розв'язків, з'ясовано характер залежності слабких розв'язків від початкових даних, знайдено функцію типу Ляпунова, доведено існування компактного інваріантного глобального атрактора для слабких розв'язків та отримано його структурні властивості;

— досліджено асимптотичну поведінку розв'язків стохастично збуреної еволюційної задачі хвильового типу, а саме доведено існування випадкового атрактора для абстрактної некомпактної багатозначної динамічної системи, що дозволило отримати існування випадкового атрактора для початкової задачі;

— встановлено умови існування та структурні властивості притягуючих множин для диференціально-операторного включення хвильового типу, а саме встановлені властивості та оцінки для слабких розв'язків, з'ясовано характер залежності слабких розв'язків від початкових даних, знайдено функцію типу Ляпунова, доведено існування глобального та траєкторного атракторів, встановлено взаємозв'язок між ними та простором повних траєкторій, встановлено структурні властивості глобального атрактора, доведено скінченновимірність з точністю до малого параметра динаміки розв'язків; визначено достатні умови існування рівномірного компактного глобального атрактора у неавтономному випадку;

— побудувано алгоритм розв'язання задач дослідження глобальної поведінки функцій стану для еволюційних задач з нерегулярними обмеженнями, який може застосовуватись до класів математичних моделей, що описують поведінку складних процесів та полів різної природи; запропонована процедура виключає залучення дослідника до складних та громіздких математичних міркувань: якщо математична модель процесу зводиться до досліджуваних в даній роботі об’єктів і виконуються відповідні основні припущення на параметри задачі, то існує притягуюча множина для усіх розв’язків задачі, усі розв’язки прямують до множини точок спокою, а динаміку процесу можна описати за допомогою скінченної кількості параметрів;

— отримані результати роботи застосовані до контактної п’єзоелектричної задачі.

Отримані теоретичні результати можуть бути використані в процесах керування для зменшення або компенсації небажаних ефектів, для обґрунтування чисельних алгоритмів пошуку слабких розв’язків, при виведенні систем на задані стаціонарні рівні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Adriaens, H.J.M.T.A., Koning, W.L., Banning, R.: Modeling Piezoelectric Actuators. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. **5**(4), 331–341 (2000)
2. Ahmad, N.J., Khorrami, F.: Adaptive control of systems with back-lash hysteresis at the input. In: Proc. Amer. Control Conf., Hyatt Regency San Diego San Diego, California, USA, 2-4 June 1999
3. Arnold, L.: Random dynamical systems. Springer-Verlag, New-York (1998)
4. Astrom, K.J., Murray, R.M.: Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers. Princeton University Press, Princeton and Oxford (2010)
5. Aubin, J.P., Cellina, A.: Differential Inclusions. Set-Valued Maps and Viability Theory. Springer-Verlag, Berlin, New York, Tokyo (1984)
6. Ayyed, Y., Barboteu, M., Fernandez, J.R.: A frictionless viscoelastodynamic contact problem with energy properties: Numerical analysis and computation aspects. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **198**, 669–679 (2009)
7. Ball, J.M.: Continuity properties and global attractors of generalized semiflows and the Navier-Stokes equations. Journal of Nonlinear Sciences. **7**(5), 475–502 (1997)
8. Ball, J.M.: Global attractors for damped semilinear wave equations. DCDS. **10**, 31–52 (2004)
9. Banks, H.T., Smith, R.C.: Hysteresis Modeling in Smart Material Systems. J. Appl. Mech. Eng. **5**, 31–45 (2000)
10. Banning, R., Koning, W.L., Adriaens, J.J., Koops, R.K.: State-space Analysis and Identification for a Class of Hysteretic Systems. Automatica. **37**(12), 1883–1892 (2001)
11. Barboteu, N., Sofonea, M.: Analysis and Numerical Approach of a

Piezoelectric Contact Problem. Annals of the Academy of Romanian Scientists. **1**(1), 7–30 (2009)

12. Bashash, S., Jalili, N.: Robust adaptive control of coupled parallel piezo-flexural nanopositioning stages. IEEE/ASME Trans. Mechatronics. **14**(1), 11–20 (2009)
13. Batra, R.C., Yang, J.S.: Saint-Venant's principle in linear piezoelectricity. Journal of Elasticity. **38**, 209–218 (1995)
14. Brokate, M., Sprekels, J.: Hysteresis and Phase Transitions. Springer-Verlag, New York (1996)
15. Burns, J., King, B.: Representation of Feedback Operators for Hyperbolic Systems. Computation and Control IV. Progress in Systems and Control Theory. **20**, 57–73 (1995)
16. Cagnol, J., Miara, B., Mielke, A., Stavroulakis, G.: State of the Art, Trends and Directions in Smart Systems. The Pennsylvania State University CiteSeerX Archives. 1–58 (2007)
17. Caraballo, T., Langa, J., Valero, J.: Global attractors for multivalued random dynamical systems. Nonlinear Analysis. **48**, 805–829 (2002)
18. Caraballo, T., Langa, J., Melnik, V., Valero, J.: Pullback attractors of nonautonomous and stochastic multivalued dynamical systems. Set-Valued Analysis. **11**, 153–201 (2003)
19. Chen, X.K., Hisayam, T.: Adaptive sliding-mode position control for piezo-actuated stage. IEEE Trans. Ind. Electron. **55**(11), 3927–3934 (2008)
20. Chen, X., Su, C.-Y., Fukuda, T.: Adaptive Control for the Systems Preceded by Hysteresis. IEEE Transactions on Automatic Control. **53**, 1019–1025 (2008)
21. Chepyzhov, V.V., Vishik, M.I.: Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension. J. Math. Pures Appl. **73**(3), 279–333 (1994)
22. Chepyzhov, V.V., Vishik, M.I.: Attractors of non-autonomous evolution equations with translation-compact symbols. Operator Theory: Advances and Applications. **78**, 49–60 (1995)

23. Chepyzhov V.V., Vishik, M.I.: Evolution equations and their trajectory attractors. J. Math. Pures Appl. **76**(10), 913–964 (1997)

24. Chepyzhov, V.V., Vishik, M.I.: Attractors for equations of mathematical physics. American Mathematical Soc., Providence, RI (2002)

25. Chua, L.O., Bass, S.C.: A generalized hysteresis model. IEEE Trans. Circuit Theory. **19**, 36–48 (1972)

26. Chueshov, I.: Monotone random systems, theory and applications. Springer, New-York (2002)

27. Cimatti, G.: The piezoelectric continuum. Annali di Matematica. **183**, 495–514 (2004)

28. Clarke, F.H.: Optimization and nonsmooth analysis. John Wiley & Sons Inc., New York (1983)

29. Coleman, B.D., Hodgdon, M.L.: On a Class of Constitutive Relations for Ferromagnetic Hysteresis. Arch. Rational Mech. Anal. (1987). doi: 10.1007/BF00282052

30. Crauel, H.: Global random attractors are uniquely determined by attracting deterministic compact sets. Ann. Mat. Pura Appl. **126**, 57–72 (1999)

31. Crauel, H., Flandoli, F.: Attractors for random dynamical systems. Prob. Theory and Related Fields. **100**, 365–393 (1994)

32. Crauel, H., Debussche, A., Flandoli, F.: Random attractors. J. Dyn. Diff. Eqns. **9**, 307–341 (1997)

33. Das, A.: Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Springer, NY (2007)

34. Dem’yanov, V., Stavroulakis, G., Polyakova, L., Panagiotopoulos, P.: Quasidifferentiability and nonsmooth modeling in Mechanics, Engineering and Economics. Nonconvex Optimization and Its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1996)

35. Devasia, S., Eleftheriou, E., Moheimani, S.O.R.: A survey of control issues in nanopositioning. IEEE Trans. Control Syst. Technol. **15**(5), 802–823 (2007)

36. Doyle, J., Francis, B., Tannenbaum, A.: Feedback Control Theory. Macmillan Publishing Co. (1990)
37. Duvaut, G., Lions, J.L.: Un proble'me d'e'lasticite' avec frottementr. J. de Me'c. **10**, 409–420 (1971)
38. Duvaut, G., Lions, J.L.: Les ine'quations en me'canique et en physique. Dunod, Paris (1972)
39. Eck, C., Jaru$\check{s}$ek, J., Krbec, M.: Unilateral Contact Problems. Variational Methods and Existence Theorems. Chapman & Hall/CRC, Boca Roton (2005)
40. Fan, X.: Random attractors for a damped sine-Gordon equation with white noise. Pacific J. Math. **216**, 63–76 (2004)
41. Fischer-Cripps, A.C.: Introduction to Contact Mechanics. Springer, New York (2007)
42. Ge, P., Jouaneh, M.: Generalized Preisach model for hysteresis nonlinearity of piezoceramic actuators. Precision Eng. **20**(2), 99–111 (1997)
43. Ghafarirad, H., Rezaei, S.M., Abdullah, A., Zareinejadab, M., Saadat, M.: Observer-based sliding mode control with adaptive perturbation estimation for micropositioning actuators. Precision Engineering. **35**, 271–281 (2011)
44. Gluzman, M.O., Gorban, N.V., Kasyanov, P.O.: Lyapunov type functions for classes of autonomous parabolic feedback control problems and applications. Applied Mathematics Letters. **39**, 19–21 (2015)
45. Gluzman, M.O., Gorban, N.V., Kasyanov, P.O.: Lyapunov Functions for Differential Inclusions and Applications in Physics, Biology, and Climatology. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Continuous and Distributed Systems II: Theory and Applications. Studies in Systems, Decision and Control, vol. 30, pp. 233–243. Springer, Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London (2015)
46. Goldfarb, M., Celanovic, N.: Modeling piezoelectric stack actuators for control of micromanipulation. IEEE Control Syst. Mag. **17**(3), 69–79 (1997)
47. Goeleven, D., Motreanu, D., Dumont, Y., Rochdi, M.: Variational and

Hemivariational Inequalities: Theory, Methods and Applications. Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London (2003)

48. Gorban, N.V., Kasyanov, P.O.: On Regularity of All Weak Solutions and Their Attractors for Reaction-Diffusion Inclusion in Unbounded Domain. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Continuous and Distributed Systems: Theory and Applications. Solid Mechanics and Its Applications, vol. 211, pp. 205–220. Springer, Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London (2014)
49. Gorban, N.V., Kapustyan, O.V., Kasyanov, P.O.: Uniform Trajectory Attractor for Non-Autonomous Reaction-Diffusion Equations with Carathe'odory's Nonlinearity. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. **98**, 13–26 (2014)
50. Gorban, N.V., Kapustyan, V.O., Kasyanov, P.O., Paliichuk, L.S.: On Global Attractors for Autonomous Damped Wave Equation with Discontinuous Nonlinearity. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Continuous and Distributed Systems: Theory and Applications. Solid Mechanics and Its Applications, vol. 211, pp. 221–237. Springer, Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London (2014)
51. Grossard, M., Boukallel, M., Chaillet, N., Rotinat-Libersa, C.: Modeling and robust control strategy for a control-optimized piezoelectric microgripper. IEEE/ASME Trans. Mechatronics. **16**(4), 674–683 (2011)
52. Gu, G.Y., Zhu, L.M.: High-speed tracking control of piezoelectric actuators using an ellipse-based hysteresis model. Rev. Sci. Instrum. **81**(8), 085104-1–085104-9 (2010)
53. Gu, G.Y., Zhu, L.M.: Modeling of rate-dependent hysteresis in piezoelectric actuators using a family of ellipses. Sens. Actuators A, Phys. **165**(2), 202–209 (2011)
54. Gu, G.-Y., Zhu, L.-M., Su, C.-Y., Ding, H.: Motion Control of Piezoelectric Positioning Stages: Modeling, Controller Design, and Experimental Evaluation. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. **18**(5), 1459–1471

(2013)

55. Han, W., Sofonea, M.: Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society (2002)
56. Hüeber, S., Matei, A., Wohlmuth, B.I.: A mixed variational formulation and an optimal a priori error estimate for a frictional contact problem in elasto-piezoelectricity. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.). **48**, 209–232 (2005)
57. Hughes, D., Wen, J.: Preisach modelling of piezoceramic and shape memory alloy hysteresis. Smart Materials and Structures. **6**, 287–300 (1997)
58. Ikeda, T.: Fundamentals of Piezoelectricity. Oxford University Press, Oxford (1990)
59. Ikhouane, F., Rodellar, J.: Systems with Hysteresis-Analysis, Identification and Control Using the Bouc-Wen Model. Wiley, New York (2007)
60. Iovane, G., Kapustyan, O.V.: Global attractors for non-autonomous wave equation without uniqueness of solution. System Research and Information Technologies. **2**, 107–120 (2006)
61. Iovane, G., Kapustyan, O.V.: Random dynamics of stochastically perturbed evolution inclusion and problem of distribution of power in hierarchical structure. Journal of Automation and Information Sciences. **4**, 122–135 (2006)
62. Iovane, G., Kapustyan, O.V., Paliichuk, L.S., Pereguda, O.V.: On random attractor of semilinear stochastically perturbed wave equation without uniqueness. System Research and Information Technologies. **1**, 87–96 (2013)
63. Jaeger, J.C.: Elasticity, fracture and flow. Methuen and Co. ltd. and Science Paperbacks, London (1971)
64. Jan, C., Hwang, C.-L.: Robust Control Design for Piezoelectric Actuator System with Dominant Hysteresis. In: Proceedings of the 26th Annual Conference of the IEEE 2000, vol. 3, pp. 1515–1520. Nagoya, Japan (2000)

65. Janaideh, M.A., Rakheja, S., Su, C.Y.: An analytical generalized Prandtl-Ishlinskii model inversion for hysteresis compensation in micropositioning control. IEEE/ASME Trans. Mechatronics. **16**(4), 734–744 (2011)
66. Jiles, D.C., Atherton, D.L.: Theory of Ferromagnetic Hysteresis. J. Magnet. Magn. Mater. **61**, 48–60 (1986)
67. Johnson, K.: Contact Mechanics. Cambridge University Press, Cambridge (1985)
68. Kalita, P., Łukaszewicz, G.: Global attractors for multivalued semiflows with weak continuity properties. Nonlinear Analysis. **101**, 124–143 (2014)
69. Kang, D.: Modeling of the Piezoelectric-Driven Stick-Slip Actuators. Master of Science Thesis, University of Saskatchewan, Canada (2012)
70. Kapustyan, O.V.: Random attractors for non-unique resolved dissipative in probability systems. Ukrain. Math. Journal. **56**, 892–900 (2004)
71. Kapustyan, O.V.: Random attractor of stochastically perturbed evolution inclusion. Differential Equations. **40**(10), 1314–1318 (2004)
72. Kapustyan, O.V., Valero, J.: On the Kneser property for the complex Ginzburg-Landau equation and the Lotka-Voltera system with diffusion. J. Math. Anal. Appl. **357**, 254–272 (2009)
73. Kapustyan, O.V., Valero, J.: Comparison between trajectory and global attractors for evolution systems without uniqueness of solutions. International Journal of Bifurcation and Chaos. **20**(9), 2723–2734 (2010)
74. Kapustyan, V.O., Kas'yanov, P.O., Kohut, O.P.: On the solvability of one class of parameterized operator inclusions. Ukrainian Mathematical Journal. **60**(12), 1619–1630 (2008)
75. Kapustyan, O.V., Valero, J., Iovane, G.: Asymptotic behaviour of reaction-diffusion equations with non-damped impulsive effects. Nonlinear Analysis. **68**, 2516–2530 (2008)
76. Kapustyan, V.O., Kas'yanov, P.O., Valero, J.: Structure and regularity of the global attractor of a reaction-diffusion equation with non-smooth nonlinear term. Discrete and Continuous Dynamical Systems. **34**(10), 4155–

4182 (2014)

77. Kapustyan, V.O., Kas’yanov, P.O., Valero, J.: Regular Solutions and Global Attractors for Reaction-Diffusion Systems without Uniqueness. Communications on Pure and Applied Analysis. **13**(5), 1891–1906 (2014)
78. Kapustyan, O.V., Valero, J., Pereguda, O.V.: Random attractors for the reaction-diffusion equation perturbed by a stochastic cadlag process. Theor. Probability and Math. Statist. **73**, 57–69 (2006)
79. Kapustyan, O.V., Kasyanov, P.O., Valero, J., Zgurovsky, M.Z.: Structure of Uniform Global Attractor for General Non-Autonomous Reaction-Diffusion System. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Continuous and Distributed Systems: Theory and Applications. Solid Mechanics and Its Application, vol. 211, pp. 163–180. Springer, Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London (2014)
80. Kapustyan, O.V., Mel’nik, V.S., Valero, J., Yasinsky, V.V.: Global attractors of multi-valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness. Наукова думка, Київ (2008)
81. Kasyanov, P.O.: Differential-operator inclusions and multivariational inequalities with pseudomonotone mappings. Cybernetics and Systems Analysis. **46**(2), 282–289 (2010)
82. Kasyanov, P.O.: Multivalued dynamic of solutions of autonomous differential-operator inclusion with pseudomonotone nonlinearity. Cybernetics and Systems Analysis. **47**(5), 800–811 (2011)
83. Kasyanov, P.O.: Multivalued dynamics of solutions of autonomous operator differential equations with pseudomonotone nonlinearity. Mathematical Notes. **92**(1–2), 205–218 (2012)
84. Kasyanov, P.O., Kapustyan, A.V.: Global attractor of nonautonomous inclusion with discontinious right-hand side. Ukrain. Math. Zh. **55(**11), 1467–1475 (2003)
85. Kas’yanov, P.O., Mel’nyk, V.S.: On properties of subdifferential mappings in Fre'chet spaces. Ukrain. Math. Zh. **57**(10), 1621–1634 (2005)

86. Kas'yanov, P.O., Mel'nyk, V.S.: Evolution inequalities with noncoercive W_{λ_0}-pseudomonotone volterra-type mappings. Ukrainian Mathematical Journal. **60**(11), 1752–1777 (2008)
87. Kas'yanov, P.O., Mel'nyk, V.S.: On some topological properties for special classes of Banach spaces I. System Research & Information Technologies. **1**, 127–143 (2008)
88. Kas'yanov, P.O., Mel'nyk, V.S.: On some topological properties for special classes of Banach spaces II. System Research & Information Technologies. **3**, 88–100 (2008)
89. Kasyanov, P.O., Kapustyan, O.V., Valero, J.: Pullback attractors for a class of extremal solutions of the 3D Navier-Stokes equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications. **373**(2), 535–547 (2011)
90. Kas'yanov, P.O., Mel'nyk, V.S., Piccirillo, A.M.: On some approximations and main topological descriptions for special classes of Frechet spaces with integrable derivatives. System Research & Information Technologies. **4**, 93–110 (2007)
91. Kas'yanov, P.O., Mel'nyk, V.S., Piccirillo, A.M.: Local subdifferentials and multivariational inequalities in Banach and Frechet spaces. Opuscula mathematica. **3**, 295–311 (2008)
92. Kasyanov, P.O., Mel'nyk, V.S., Piccirillo, A.M.: On some approximations and main topological descriptions for special classes of Banach spaces with integrable derivatives. Methods of Functional Analysis and Topology. **14**(3), 255–270 (2008)
93. Kasyanov, P.O., Mel'nyk, V.S., Toscano, S.: Periodic solutions for nonlinear evolution equations with W_{λ_0}-pseudomonotone maps. Nonlinear Oscillations. **9**(2), 187–212 (2006)
94. Kasyanov, P.O., Mel'nyk, V.S., Toscano, L.: The multivalued penalty method for evolution variational inequalities with W_{λ_0}-pseudomonotone multivalued maps. Nonlinear Oscillations. **10**(4), 481–509 (2007)

95. Kasyanov, P.O., Mel'nyk, V.S., Toscano, S.: Initial time value problem solutions for evolution inclusions with S_k type operators. Systems Research & Information Technologies. **1**, 116–130 (2009)
96. Kasyanov, P.O., Mel'nyk, V.S., Toscano, S.: Solutions of Cauchy and periodic problems for evolution inclusions with multi-valued w_{λ_0}-pseudomonotone maps. Journal of Differential Equations. **249**(6), 1258–1287 (2010)
97. Kasyanov, P.O., Mel'nyk, V.S., Valero, J.: On the method of approximation for evolutionary inclusions of pseudomonotone type. Bulletin of the Australian Mathematical Society. **77**(1), 115–143 (2008)
98. Kasyanov, P.O., Mel'nyk, V.S., Yasinskiy, V.V.: Evolution inclusions and inequalities in Banach spaces with $W\lambda_0$-pseudomonotone maps. Наукова думка, Київ (2007)
99. Kasyanov, P.O., Toscano, L., Zadoianchuk, N.V.: Long-time behavior of solutions for autonomous evolution hemivariational inequality with multidimensional "reaction-displacemen" law. Abstract and Applied Analysis. **2012**, 1–29 (2012)
100. Kasyanov, P.O., Toscano, L., Zadoianchuk, N.V.: A criterion for the existence of strong solutions for the 3D Navier-Stokes equations. Applied Mathematics Letters. **26**(1), 15–17 (2013)
101. Kasyanov, P.O., Toscano, L., Zadoianchuk, N.V.: Regularity of Weak Solutions and Their Attractors for a Parabolic Feedback Control Problem. Set-Valued and Variational Analysis. **21**(2), 271–282 (2013)
102. Kasyanov, P.O., Toscano, L., Zadoianchuk, N.V.: Topological Properties of Strong Solutions for the 3D Navier-Stokes Equations. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Continuous and Distributed Systems: Theory and Applications. Solid Mechanics and Its Applications, vol. 211, pp. 181–187. Springer, Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London (2014)
103. Kasyanov, P.O., Zadoyanchuk, N.V., Yasinsky, V.V.: Periodic solutions for a class of nonlinear hyperbolic evolution equations. Cybernetics and

Systems Analysis. **45**(5), 774–784 (2009)

104. Kasyanov, P.O., Melnik, V.S., Toscano, S., Zadoyanchuk, N.V.: Periodic Solutions of Evolutionary Equations in the Class of Nonreflexive Banach Spaces. Journal of Automation and Information Sciences. **40**(9), 1–19 (2008)
105. Kenton, B.J., Leang, K.K.: Design and control of a three-axis serialkinematic high-bandwidth nanopositioner. IEEE/ASME Trans. Mechatronics. **17**(2), 356–369 (2012)
106. Khalil, H.: Nonlinear systems. Prentice Hall, New Jersey (2002)
107. Krasnosel’skii, M., Pokrovskii, P.: Systems with Hysteresis. Springer, New York (1989)
108. Krejci, P., Kuhnen, K.: Inverse control of systems with hysteresis and creep. Control Theory Appl. **148**(3), 185–192 (2001)
109. Kuczmann, M., Ivanyi, A.: A New Neural-Network-Based Scalar Hysteresis Model. IEEE Transactions on Magnetics. **38**(2), 857–860 (2002)
110. Kuhnen, K.: Modeling, identification and compensation of complex hysteretic nonlinearities: A modified Prandtl-Ishlinskii approach. Eur. J. Control. **9**(4), 407–418 (2003)
111. Kuttler, K., Shillor, M.: A dynamic model with friction and adhesion with application to rocks. Journal of Mathematical Analysis and Applications. **247**, 87–109 (2000)
112. Kuttler, K., Shillor, M.: Dynamic contact with Signorini’s condition and slip rate dependent friction. Journal of Differential Equations. **2004**(83), 1–21 (2004)
113. Lebedev, L.P., Cloud, M.J.: Tensor Analysis. World Scientific Pub Co Inc, London (2003)
114. Liaw, H.C., Shirinzadeh, B., Smith, J.: Enhanced sliding mode motion tracking control of piezoelectric actuators. Sens. Actuators A, Phys. **138**(1), 194–202 (2007)
115. Lin, F., Shieh, H., Huang, P.: Adaptive Wavelet Neural Network Control

With Hysteresis Estimation for Piezo-Positioning Mechanism. IEEE Transactions on Neural Network. **17**(2), 432–444 (2006)

116. Lin, C.-J., Yang, S.-R.: Precise positioning of piezo-actuated stages using hysteresis-observer based control. Mechatronics. **16**, 417–426 (2006)
117. Lions, J.L.: Quelques me'thodes de re'solution des probl\`$e$mes aux limites non line'aires. Dunod-Gauthier Villars, Paris (1969)
118. Liu, Z.H.: Existence results for evolution noncoercive hemivariational inequalities. J. Optimiz. Theory Appl. **120**, 417–427 (2004)
119. Liu, Z., Migo'rski, S.: Noncoercive Damping in Dynamic Hemivariational Inequality with Application to Problem of Piezoelectricity. Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. **9**(1), 129–143 (2008)
120. Low, T.S., Guo, W.: Modeling of a three-layer piezoelectric bimorph beam with hysteresis. Journal of Microelectromechanical Systems. **4**, 230–237 (1995)
121. Maceri, F., Bisegna, P.: The unilateral frictionless contact of a piezoelectric body with a rigid support. Math. Comput. Modelling. **28**, 19–28 (1998)
122. Macki, J.W., Nistri, P., Zecca, P.: Mathematical Models for Hysteresis. SIAM Review. **35**(1), 94–123 (1993)
123. Makaveev, D., Dupre, L., Melkebeek, J.: Neural-Network-Based Approach to Dynamic Hysteresis for Circular and Elliptical Magnetization in Electrical Steel Sheet. IEEE Transactions on Magnetics. **38**(5), 3189–3191 (2002)
124. Mayergoyz, I.D.: Mathematical models of hysteresis. IEEE Transactions on Magnetics. **22**, 603–608 (1986)
125. Mayergoyz, I.D.: Mathematical Models of Hysteresis. Springer-Verlag, Berlin (1991)
126. Mel’nik, V.S.: Multi-valued dynamics of nonlinear infinite-dimensional dynamical systems. Preprint of NASU. 94–17, (1994)
127. Melnik, V.S., Valero, J.: On Attractors of Multivalued Semi-Flows and Differential Inclusions. Set-Valued Analysis. **6**(1), 83–111 (1998)
128. Merry, R., Maassen, M., Molengraft, M., Wouw, N., Steinbuch, M.:

Modeling and waveform optimization of a nano-motion piezo stage. IEEE/ASME Trans.Mechatronics. **16**(4), 615–626 (2011)

129. Migo'rski, S.: Existence and relaxation results for nonlinear second order evolution inclusions. Discussiones Math. **15**, 129–148 (1995)
130. Migo'rski, S.: Dynamic hemivariational inequality modeling viscoelastic contact problem with normal damped response and friction. Applicable Analysis. **2005**, 669–699 (2005)
131. Migo'rski, S.: Hemivariational inequality for a frictional contact problem in elasto-piezo-electricity. Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. **6**, 1339–1356 (2006)
132. Migo'rski, S., Ochal, A.: Hemivariational inequality for viscoelastic contact problem with slip dependent friction. Nonlinear Analysis. **61**, 135–161 (2005)
133. Migo'rski, S., Ochal, A., Sofonea, M.: An evolution problem in nonsmoth elasto-viscoplasticity. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. **71**(12), e2766–e2771 (2009)
134. Migo'rski, S., Ochal, A., Sofonea, M.: History-dependent subdifferential inclusions and hemivariational inequalities in contact mechanics. Nonlinear Analysis: Real World Applications. **12**(6), 3384–3396 (2011)
135. Moreau, J.: La notion de sur-potentiel et les liaisons unilate'rales en e'lastostatique. C. R. Acad. Sci. **267A**, 954–957 (1968)
136. Naniewicz, Z., Panagiotopoulos, P.: Mathematical theory of hemivariational inequalities and applications. Nonconvex Optimization and Its Applications. Pure and Applied Mathematics. A Series of Monographs and Textbooks. Marcel Dekker, Inc., New York (1995)
137. Nelson, E.: Tensor Analysis. Princeton University Press, NJ (1967)
138. Ochal, A.: Existence results for evolution hemivariational inequalities of second order. Nonlinear Analysis. **60**, 1369–1391 (2005)
139. Paliichuk, L.S.: Qualitative behavior of semilinear stochastically perturbed wave equation without uniqueness. In: Збірник тез Третьої

Міжуніверситетської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики, Києво-Могилянська академія, Київ, 25–27 квітня 2013

140. Paliichuk, L.S.: On global attractors for autonomous damped wave equation with discontinuous nonlinearity. In: Book of Abstracts of Crimea International Mathematical Conference «CIMC-2013», V.I. Vernadsky Crimean National University, Sudak, 22 September – 4 October 2013

141. Paliichuk, L.S.: On the limit cycles for controlled piezoelectric fields. In: Book of Abstracts of 17-th Intern. Conf. «System Analysis and Information Technologies», ESC «IASA» of NTUU «KPI», Kyiv, 22–25 June 2015

142. Paliichuk, L.S.: The long-term forecasts for controlled piezoelectric fields. In: Book of Abstracts of third International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine Valery Sergeevich Melnik «Nonlinear analysis and applications», ESC «IASA» of NTUU «KPI», Kyiv, 1–3 April 2015

143. Paliichuk, L.S.: Dynamics of weak solutions for second-order autonomous evolution equation with discontinuous nonlinearity. In: Book of Abstracts of International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, Ivan Franko Lviv National University, Lviv, 18–23 September 2017

144. Panagiotopoulos, P.D.: Non-convex superpotentials in the sence of F.H. Clarke and applications. Mech. Res. Commun. **8**, 335–340 (1981)

145. Panagiotopoulos, P.D.: Nonconvex energy functions. Hemivariational inequalities and substationarity principles. Acta Mech. **48**, 160–183 (1983)

146. Panagiotopoulos, P.D.: Une ge'nralization non-convexe de la notion du sur-potentiel et ses applications. C.R. Acad. Sci. Paris. **296B**, 580–584 (1983)

147. Panagiotopoulos, P.D.: Hemivariational inequalities and substationarity in the static theory of v. Karman plates. ZAMM. **66**, 219–229 (1985)

148. Panagiotopoulos, P.D.: Inequality problems in mechanics and Applications. Convex and nonconvex energy functions. Birkhiiuser Verlag, Boston-Basel

(1985)

149. Panagiotopoulos, P.D.: Nonconvex proble'ms of semipermeable media and related topics. ZAMM. **66**, 29–36 (1985)

150. Panagiotopoulos, P.D.: Hemivariational inequalities in frictional contact problems and applications. Mechanics of material interfaces. **11**, 25–42 (1986)

151. Panagiotopoulos, P.D.: Hemivariational Inequalities, Applications in Mechanics and Engineering. Springer-Verlag, Berlin (1993)

152. Panagiotopoulos, P.D., Koltsakis, E.K.: The nonmonotone skin effects in plane elasticity problems obeying to linear elastic and subdifferential laws. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. **70**(1), 13–21 (1990)

153. Papageorgiou, N.S., Yannakakis, N.: Second order nonlinear evolution inclusions I: existence and relaxation results. Acta Mat. Sinica, English Series. **21**, 977–996 (2005)

154. Park, S., Sun, C.: Crack extension in piezoelectric materials. SPIE. Smart Materials. **2189**, 357–368 (1994)

155. Park, J.H., Jeong, S.C., Koo, J.H., Jung, H.Y., Lee, S.M.: Integral tracking control for a piezoelectric actuator system. Engineering and Technology. **6**(3), 295–298 (2012)

156. Perestyuk, M.O., Kasyanov, P.O., Zadoyanchuk, N.V.: On Faedo-Galerkin method for evolution inclusions with W_{λ_0}-pseudomonotone maps. Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. **44**, 105–132 (2008)

157. Perestyuk, M.O., Kasyanov, P.O., Zadoyanchuk, N.V.: On solvability of second order evolution inclusions with Volterra type operators. Miskolc Mathematical Notes. **9**, 115–139 (2008)

158. Rockafellar, R.T.: Convex Analysis. Princeton University Press, Princeton (1970)

159. Rowley, C., Batten, B.: Dynamic and Closed-Loop Control. Fundamentals and Applications of Modern Flow Control. **231**, 1–40 (2009)

160. Salapaka, S.M., Salapaka, M.V.: Scanning probe microscopy. IEEE Control

Syst. Mag. **28**(2), 65–83 (2008)

161. Salapaka, S., Sebastian, A., Cleveland, J.P., Salapaka, M.V.: High bandwidth nano-positioner: A robust control approach. Rev. Sci. Instrum. **793**(9), 3232–3241 (2002)
162. Schouten, J.A.: Tensor Analysis for Physicists. Dover Publications, NY (2001)
163. Sell, G.R., You, Yu.: Dynamics of Evolutionary Equations. Springer, New York (2002)
164. Shen, J., Jywe, W., Chiang, H., Shu, Y.: Precision tracking control of a piezoelectric-actuated system. Presicion Eng. **32**(2), 71–78 (2008)
165. Shillor, M., Sofonea, M., Telega, J.J.: Models and Analysis of Quasistatic Contact. Variational Methods. Springer, Berlin (2004)
166. Sofonea, M., Essoufi, El-H.: A piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction. Math. Modelling and Anal. **9**, 229–242 (2004)
167. Sofonea, M., Matei, A.: Variational Inequalities with Applications. A Study of Antiplane Frictional Contact Problems. Springer, New-York (2009)
168. Sofonea, M., Arhab, R., Tarraf, R.: Analysis of electroelastic frictionless contact problems with adhesion. Journal of Applied Mathematics. **2006**, 1–25 (2006)
169. Sofonea, M., Han, W., Shiller, M.: Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Demage. Chapman & Hall/CRC, New York (2006)
170. Somov, Y.I.: Modelling physical hysteresis and control of a fine piezodrive. In: Proceedings of International Conference «Physics and Control», vol. 4, pp. 1189–1194 (2003)
171. Song, G., Zhao, J.Q., Zhou, X.Q., Abreu-Garcia, J.A.D.: Tracking control of a piezoceramic actuator with hysteresis compensation using inverse Preisach model. IEEE/ASME Trans.Mechatronics. **10**(2), 198–209 (2005)
172. Stanzhitsky, A., Gorban, N.: On the dynamics of solutions for autonomous

reaction-diffusion equation in RN with multivalued nonlinearity. Український математичний вісник. **6**(2), 235–251 (2009)

173. Su, C.-Y., Stepanenko, Y., Svoboda, J., LeungRobust, T.P.: Adaptive Control of a Class of Nonlinear Systems with Unknown Backlash-Like Hysteresis. IEEE Transactions on Automatic Control. **45**(12), 2427–2432 (2000)
174. Su, C.-Y., Wang, Q., Chen, X.K., Rakheja, S.: Adaptive Variable Structure Control of a Class of Nonlinear Systems with Unknown Prandtl-Ishlinskii Hysteresis. IEEE Transactions on Automatic Control. **50**(12), 2069–2074 (2005)
175. Sun, X., Zhang, W., Jin, Y.: Stable adaptive control of backlash nonlinear systems with bounded disturbance. In: Proc. 31th Conf. Decision Control, Tucson, AZ, USA (1992)
176. Tan, X., Baras, J.S.: Modeling and Control of Hysteresis in Magnetostrictive Actuators. Automatica. **40**(9), 1469–1480 (2004)
177. Tan, X., Baras, J.S.: Adaptive Identification and Control of Hysteresis in Smart Materials. IEEE Transactions on Automatic Control. **50**(6), 827–839 (2005)
178. Tao, G., Kokotovic, P.V.: Adaptive Control of Plants with Unknown Hysteresis. IEEE Transactions on Automatic Control. **40**(2), 200–212 (1995)
179. Tao, G., Lewis, F.L.: Adaptive Control of Nonsmooth Dynamic Systems. Springer-Verlag, New York (2001)
180. Temam, R.: Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. Springer-Verlag, New York (1988)
181. Tong, Z., Tan, Y., Zeng, X.: Modeling hysteresis using hybrid method of continuous transformation and neural networks. Sensors and Actuators A: Physical. **119**, 254–262 (2005)
182. Utkin, V.I.: Variable structure systems with sliding mode: A survey. IEEE Trans. Automat. Contr. **22**, 212–222 (1977)
183. Valero, J., Kapustyan, A.V.: On the connectedness and asymptotic

behaviour of solutions of reaction–diffusion systems. Journal of Mathematical Analysis and Applications. **323**(1), 614–633 (2006)

184. Vishik, M.I., Chepyzhov, V.V.: Trajectory and global attractors of three-dimensional Navier-Stokes systems. Mathematical Notes. **71**(1–2), 177–193 (2002)
185. Visintin, A.: Differential Models of Hysteresis. Springer-Verlag, New York (1994)
186. Visone, C.: Hysteresis modelling and compensation for smart sensors and actuators. J. Phys., Conf. Series. **138**(1), 1–25 (2008)
187. Wang, B.: Asymptotic behavior of stochastic wave equation with critical exponents on R^3. Trans. AMS. **363**, 3639–3663 (2011)
188. Wang, X.D., Jiang, L.Y.: Coupled behaviour of interacting dielectric cracks in piezoelectric materials. International Journal of Fracture. **132**, 115–133 (2005)
189. Wang, Q.Q., Su, C.Y.: Robust adaptive control of a class of nonlinear systems including actuator hysteresis with Prandtl-Ishlinskii presentations. Automatica. **42**(5), 859–867 (2006)
190. Xie, W.-F., Fu, J., Yao, H., Su, C.Y.: Observer Based Control of Piezoelectric Actuators with Classical Duhem Modeled Hysteresis. In: Proceedings of the American Control Conference, St. Louis, MO, USA (2009)
191. Zadoyanchuk, N.V., Kasyanov, P.O.: Faedo-Galerkin method for nonlinear second-order evolution equations with Volterra operators. Nonlinear Oscillations. **10**(2), 203–228 (2007)
192. Zadoyanchuk, N.V., Kasyanov, P.O.: Faedo–Galerkin method for second-order evolution inclusions with W_λ-pseudomonotone mappings. Ukrainian Mathematical Journal. **61**(2), 236–258 (2009)
193. Zadoyanchuk, N.V., Kas’yanov, P.O.: Singular-perturbation method for nonlinear second-order evolution inclusions with Volterra operators. Nonlinear Oscillations. **12**(1), 27–44 (2009)

194. Zadoianchuk, N.V., Kasyanov, P.O.: Dynamics of solutions of a class of second-order autonomous evolution inclusions. Cybernetics and Systems Analysis. **48**(3), 414–420 (2012)

195. Zgurovsky, M.Z., Kasyanov, P.O.: Multivalued Dynamics of Solutions for Autonomous Operator Differential Equations in Strongest Topologies. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Continuous and Distributed Systems: Theory and Applications. Solid Mechanics and Its Applications, vol. 211, pp. 149–162. Springer, Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London (2014)

196. Zgurovsky, M.Z., Kasyanov, P.O.: Evolution Inclusions in Nonsmooth Systems with Applications for Earth Data Processing : Uniform Trajectory Attractors for Nonautonomous Evolution Inclusions Solutions with Pointwise Pseudomonotone Mappings. In: Gao, D., Ruan, N., Xing, W. (eds.) Advances in Global Optimization, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol. 95, pp. 283–294. Springer, Cham (2015)

197. Zgurovsky, M.Z., Kasyanov, P.O.: Uniform Trajectory Attractors for Nonautonomous Dissipative Dynamical Systems. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Continuous and Distributed Systems II: Theory and Applications. Studies in Systems, Decision and Control, vol. 30, pp. 221–232. Springer, Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London (2015)

198. Zgurovsky, M.Z., Kasyanov, P.O., Paliichuk, L.S.: Automatic feedback control for one class of contact piezoelectric problems. System research and information technologies. **1**, 56–68 (2014)

199. Zgurovsky, M.Z., Kasyanov, P.O., Valero, J.: Noncoercive evolution inclusions for Sk type operators. International Journal of Bifurcation and Chaos. **20**(9), 2823–2834 (2010)

200. Zgurovsky, M.Z., Kasyanov, P.O., Zadoianchuk, N.V.: Long-time behavior of solutions for quasilinear hyperbolic hemivariational inequalities with application to piezoelectricity problem. Applied Mathematics Letters. **25**,

1569–1574 (2012)

201. Zgurovsky, M.Z., Mel’nik, V.S., Kasyanov, P.O.: Evolution Inclusions and Variation Inequalities for Earth Data Processing I. Springer, New York (2011)
202. Zgurovsky, M.Z., Mel’nik, V.S., Kasyanov, P.O.: Evolution Inclusions and Variation Inequalities for Earth Data Processing II. Springer, New York (2011)
203. Zgurovsky, M.Z., Kasyanov, P.O., Kapustyan, O.V., Valero, J., Zadoianchuk, N.V.: Evolution Inclusions and Variation Inequalities for Earth Data Processing III. Springer, New York (2012)
204. Zgurovsky, M.Z., Kasyanov, P.O., Paliichuk, L.S., Tkachuk, A.M.: Dynamics of Solutions for Controlled Piezoelectric Fields with Multivalued «Reaction-Displacement» Law. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Continuous and Distributed Systems II: Theory and Applications. Studies in Systems, Decision and Control, vol. 30, pp. 267–276. Springer, Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London (2015)
205. Zgurovsky, M.Z., Gluzman, M.O., Gorban, N.V., Kasyanov, P.O., Paliichuk, L.S., Khomenko, O.V.: Uniform global attractor for non-autonomous dissipative dynamical systems. DCDS. Series B. **22**(5), 2053–2065 (2017)
206. Zhang, X.Y., Lin, Y.: Adaptive tracking control for a class of purefeedback non-linear systems including actuator hysteresis and dynamic uncertainties. IET Control Theory and Applications. **21**, 1541–1561 (2011)
207. Zhong, J.H., Yao, B.: Adaptive robust precision motion control of a piezoelectric positioning stage. IEEE Trans. Control Syst. Technol. **16**(5), 1039–1046 (2008)
208. Zhou, S., Yin, F., Ouyang, Z.: Random attractor for damped nonlinear wave equation with white noise. SIAM J. Dyn. Syst. **4**, 883–903 (2005)
209. Божидарник, В.В., Сулим, Г.Т.: Елементи теорії пружності. Світ, Львів (1994)

210. Вайнберг, М.М.: Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. Наука, Москва (1972)

211. Гаевский, Х., Грегер, К., Захариас, К.: Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. Мир, Москва (1978)

212. Горбань, Н.В.: Довгострокові прогнози функцій стану квазілінійних гіперболічних систем в $\mathbf{R}^N$. Системні дослідження та інформаційні технології. **4**, 134–139 (2011)

213. Горбань, Н.В.: Довгострокові прогнози функцій стану автономних включень типу реакції-дифузії в $\mathbf{R}^N$. Системні дослідження та інформаційні технології. **1**, 92–101 (2014)

214. Задоянчук, Н.В., Касьянов, П.О.: Про розв’язність диференціально-операторних включень II порядку з некоерцитивними операторами W_{λ_0}-псевдомонотонного типу. Доповіді НАН України. **4**, 19–24 (2008)

215. Задоянчук, Н.В., Касьянов, П.О.: Про розв’язність нелінійних еволюційих рівнянь з М-псевдомонотонними некоерцитивними відображеннями. Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. **19–20**, 7–12 (2008)

216. Задоянчук, Н.В., Касьянов, П.О.: Про розв’язність нелінійних еволюційних рівнянь II порядку з некоерцитивними W_{λ_0}-псевдомонотонними відображеннями. Наукові вісті НТУУ «КПІ». **3**, 142–149 (2008)

217. Задоянчук, Н.В., Касьянов, П.О.: Анализ и управление дифференциальным включением второго порядка с +-коэрцитивным демпфированием. Кибернетика и системный анализ. **2**, 152–160 (2010)

218. Задоянчук, Н.В., Касьянов, П.О.: Метод исследования динамических контактных задач с нелинейным демпфированием. Доповіді НАН України. **5**, 18–22 (2010)

219. Згуровский, М.З., Панкратова, Н.Д.: Основи системного аналізу. Видавнича група BHV, Київ (2007)

220. Згуровский, М.З., Касьянов, П.О., Мельник, В.С.: Дифференциально-операторные включения и вариационные неравенства в бесконечномерных пространствах. Наукова думка, Київ (2008)

221. Капустян, О.В., Шкляр, Т.Б.: Якісна поведінка розв'язків неавтономного параболічного включення з трансляційно-компактною правою частиною. Вісник Київського університету. **22**, 17–20 (2009)

222. Капустян, О.В., Шкляр, Т.Б.: Про додатні розв'язки для одного класу еволюційних включень субдиференціального типу. УМЖ. **63**(4), 472–480 (2011)

223. Капустян, В.О., Касьянов, П.О., Когут, О.П.: Властивості розв'язків класу параметризованих операторних включень. Наукові вісті НТУУ «КПІ». **5**, 129–136 (2008)

224. Касьянов, П.О.: Періодичні розв'язки для класу диференціально-операторних включень з відображеннями типу S_k. Наукові вісті НТУУ «КПІ». **6**, 144–148 (2008)

225. Касьянов, П.О.: Про періодичні розв'язки еволюційних включень першого порядку з W_{λ_0}-псевдомонотонними відображеннями. Доповіді НАН України. **6**, 23–28 (2008)

226. Касьянов, П.О.: Метод Фаедо-Гальоркіна для еволюційних включень з некоерцитивними W_{λ_0}-псевдомонотонними відображеннями. Доповіді НАН України. **1**, 14–20 (2009)

227. Касьянов, П.О.: Про розв'язність одного класу параметризованих мультиваріаційних нерівностей. Доповіді НАН України. **2**, 20–25 (2009)

228. Касьянов, П.О.: Про слабку розв'язність класу еволюційних варіаційних нерівностей в нескінченновимірних просторах. Доповіді НАН України. **3**, 19–24 (2009)

229. Касьянов, П.О., Задоянчук, Н.В.: Властивості розв'язків еволюційних включень другого порядку з відображеннями псевдомонотонного типу. Журнал обчислювальної та прикладної математики. **3**(102), 63–78 (2010)

230. Касьянов, П.О., Мельник, В.С.: О разрешимости дифференциально-операторных включений и эволюционных вариационных неравенств, порожденных отображениями W_{λ_0}-псевдомонотонного типа. Український математичний вісник. **4**(4), 535–581 (2007)
231. Касьянов, П.О., Палійчук, Л.С.: Потраєкторна поведінка класу керованих п'єзоелектричних полів з немонотонним потенціалом. Наукові вісті Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». **2**, 21–26 (2014)
232. Касьянов, П.О., Горбань, Н.В., Палійчук, Л.С., Капустян, О.В.: Глобальні атрактори для автономного хвильового рівняння з розривною не лінійністю. Збірник тез Всеукр. наук.-метод. конф. «Сучасні науково-методичні проблеми у вищій школі», НУХТ, Київ, 26–27 червня
233. Красносельский, М.А., Покровский, А.В.: Системы с гистерезисом. Наука, Москва (1983)
234. Ладыженская, О.А.: О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье-Стокса. Записки научных семинаров ЛОМИ. **27**, 91–115 (1972)
235. Ладыженская, О.А.: О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье-Стокса и других диссипативных систем. Записки научных семинаров ЛОМИ. **111**, 57–73 (1982)
236. Ладыженская, О.А.: Об аттракторах нелинейных эволюционных задач с диссипацией. Записки научных семинаров ЛОМИ. **18**, 72–85 (1986)
237. Лурье, А.И.: Теория упругости. Наука, Москва (1970)
238. Мазья, В.Г.: Пространства С.Л. Изд. Ленинградского университета, Ленинград (1985)
239. Мірошниченко, А.П., Шорохов, А.Є.: Особливості керування параметрами п'єзокерамічних двигунів. Вісник КНУТД. **3**, 33–37 (2012)
240. Палійчук, Л.С.: Глобальні атрактори для автономного хвильового рівняння з розривною не лінійністю. Збірник тез 15-ої Міжнар. конф.

“Системний аналіз та інформаційні технології «САІТ», ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», Київ, 27–31 травня 2013

241. Палійчук, Л.С.: Якісна поведінка розв’язків класу керованих п’єзоелектричних полів з немонотонним потенціалом. Збірник тез 16-ої Міжнар. конф. «Системний аналіз та інформаційні технології «САІТ», ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», Київ, 26–30 травня 2014

242. Панагиотопулос, П.: Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. Мир, Москва (1989)

243. Станжицький, О., Горбань, Н.: Глобальний атрактор для автономного хвильового рівняння в R^N з неперервною нелінійністю. Український математичний журнал. **60**(2), 260–267 (2008)

244. Чуешов, И.Д.: Введение в теорию бесконечномерных диссипативных систем. Акта, Харьков (1999)

ДОДАТОК А

Список публікацій за темою дисертації

1. Iovane, G., Kapustyan, O.V., Paliichuk, L.S., Pereguda, O.V.: On random attractor of semilinear stochastically perturbed wave equation without uniqueness. System Research and Information Technologies. **1**, 87–96 (2013) (Google Scholar)
2. On Global Attractors for Autonomous Damped Wave Equation with Discontinuous Nonlinearity. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Continuous and Distributed Systems: Theory and Applications. Solid Mechanics and Its Applications, vol. 211, pp. 221–237. Springer, Cham (2014) (Scopus, SpringerLink, Google Scholar)
3. Zgurovsky, M.Z., Kasyanov, P.O., Paliichuk, L.S.: Automatic feedback control for one class of contact piezoelectric problems. System research and information technologies. **1**, 56–68 (2014) (Google Scholar)
4. Zgurovsky, M.Z., Kasyanov, P.O., Paliichuk, L.S., Tkachuk, A.M.: Dynamics of Solutions for Controlled Piezoelectric Fields with Multivalued “Reaction-Displacement” Law. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Continuous and Distributed Systems II: Theory and Applications. Studies in Systems, Decision and Control, vol. 30, pp. 267–276. Springer, Cham (2015) (Scopus, Web of Science, SpringerLink, Google Scholar)
5. Zgurovsky, M.Z., Gluzman, M.O., Gorban, N.V., Kasyanov, P.O., Paliichuk, L.S., Khomenko, O.V.: Uniform global attractor for non-autonomous dissipative dynamical systems. DCDS. Series B. **22**(5), 2053–2065 (2017) (Scopus, Web of Science, Google Scholar, SCImago)
6. Касьянов, П.О., Палійчук, Л.С.: Потраєкторна поведінка класу керованих п’єзоелектричних полів з немонотонним потенціалом. Наукові вісті Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». **2**, 21–26 (2014) (Google Scholar)
7. Paliichuk, L.S.: Qualitative behavior of semilinear stochastically perturbed wave equation without uniqueness. In: Збірник тез Третьої

Міжуніверситетської наукової конференції молодих вчених з математики та фізики, Києво-Могилянська академія, Київ, 25–27 квітня 2013

8. Палійчук, Л.С.: Глобальні атрактори для автономного хвильового рівняння з розривною нелінійністю. Збірник тез 15-ої Міжнар. конф. «САІТ-2013», ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», Київ, 27–31 травня 2013
9. Касьянов, П.О., Горбань, Н.В., Палійчук, Л.С., Капустян, О.В.: Глобальні атрактори для автономного хвильового рівняння з розривною не лінійністю. Збірник тез Всеукр. наук.-метод. конф. «Сучасні науково-методичні проблеми у вищій школі», НУХТ, Київ, 26–27 червня
10. Paliichuk, L.S.: On global attractors for autonomous damped wave equation with discontinuous nonlinearity. In: Book of Abstracts of Crimea International Mathematical Conference «CIMC-2013», V.I. Vernadsky Crimean National University, Sudak, 22 September – 4 October 2013
11. Палійчук, Л.С.: Якісна поведінка розв’язків класу керованих п’єзоелектричних полів з немонотонним потенціалом. Збірник тез 16-ої Між. конф. «САІТ-2014», ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», Київ, 26–30 травня 2014
12. Paliichuk, L.S.: On the limit cycles for controlled piezoelectric fields. In: Book of Abstracts of 17-th Intern. Conf. «SAIT-2015», ESC «IASA» of NTUU «KPI», Kyiv, 22–25 June 2015
13. Paliichuk, L.S.: The long-term forecasts for controlled piezoelectric fields. In: Book of Abstracts of third International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine V.S. Melnik «Nonlinear analysis and applications», ESC «IASA» of NTUU «KPI», Kyiv, 1–3 April 2015
14. Paliichuk, L.S.: Dynamics of weak solutions for second-order autonomous evolution equation with discontinuous nonlinearity. In: Book of Abstracts of International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 18–23 September 2017

Апробація результатів дисертації

Результати дисертації доповідалися на серії спільних наукових семінарів КПІ ім. Ігоря Сікорського та механіко-математичного факультету МДУ імені М.В. Ломоносова (2012, 2013, 2014рр.), семінарі НДВ системної математики ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського та на таких конференціях:

- Міжнародна конференція з функціонального аналізу, присвячена 125-річчю С. Банаха, 18-23.09.2017р., ЛНУ ім. Івана Франка, м. Львів (секц. доповідь);
- 15-та Міжнародна конференція «Системний аналіз та інформаційні технології «САІТ 2013», 27-31.05.2013р., ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», м. Київ (секц. доповідь);
- третя Міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, 25-27.04.2013р., Національний університет «Києво-Могилянська академія», м. Київ (секц. доповідь);
- Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми у вищій школі», 26-27.06.2013р., НУХТ, м. Київ (секц. доповідь);
- Кримська міжнародна математична конференція «КММК-2013», 22.09.-04.10.2013р., ТНУ ім. В.І. Вернадського, м. Судак (секц. доповідь);
- 16-та Міжнародна конференція «Системний аналіз та інформаційні технології «САІТ 2014», 26-30.05.2014р., ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», м. Київ (секц. доповідь);
- 3-тя Міжнародна конференція, присвячена пам'яті члена-кореспондента НАН України В.С. Мельника, «Нелінійний аналіз та застосування», 1-2.04.2015р., ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», м.Київ (секц. доповідь);
- 17-та Міжнародна конференція «Системний аналіз та інформаційні технології «САІТ 2015», 22-25.06.2015р., ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», м. Київ (секц. доповідь).

ДОДАТОК Б

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Директор ННК «ІПСА»
КПІ ім. Ігоря Сікорського,
д.ф.-м.н., доцент

_______________ П.О. Касьянов
«19» грудня 2017 року

АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи молодшого наукового співробітника науково-дослідного відділу системної математики ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського Палійчук Лілії Сергіївни на тему «Багатозначний аналіз еволюційних систем хвильового типу з нерегулярними обмеженнями» на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень.

Комісія у складі:

Голова – професор кафедри математичних методів системного аналізу, д.т.н., проф. П.І. Бідюк;

Члени комісії:

професор кафедри математичних методів системного аналізу, д.т.н., проф. В.Я. Данилов;

завідувач НДВ прикладного нелінійного аналізу ННК «ІПСА», д.ф.-м.н., проф. О.С. Макаренко

цим актом засвідчує, що результати дисертаційної роботи Палійчук Лілії Сергіївни на тему «Багатозначний аналіз еволюційних систем хвильового типу з нерегулярними обмеженнями» впроваджені в навчальний процес ІПСА.

Нові наукові результати дисертаційної роботи Л.С. Палійчук, отримані при дослідженні якісної поведінки розв'язків еволюційних систем хвильового типу з нерегулярними обмеженнями, а саме властивості та структура граничних множин, обґрунтування скінченновимірності динаміки розв'язків з точністю до малого параметру нелінійних еволюційних задач без єдиності розв'язку відповідних задач Коші, використовуються при викладанні теоретичного матеріалу навчальної дисципліни «Елементи нелінійного аналізу» та «Системний аналіз стохастично розподілених процесів».

Голова комісії
д.т.н., проф. _______________ П.І. Бідюк
Члени комісії
д.т.н., проф. _______________ В.Я. Данилов

д.ф.-м.н., проф. _______________ О.С. Макаренко