

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ РЕЄСТРАЦІЇ ІНФОРМАЦІЇ**

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ  
СІКОРСЬКОГО»**

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**СУКАЛО АЛІНА СЕРГІЇВНА**

УДК 004.94

**ДИСЕРТАЦІЯ  
МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ  
ЗАСОБАМИ ГІПЕРКОМПЛЕКСНИХ ОБЧИСЛЕНЬ**

Спеціальність 01.05.02 – Математичне моделювання та обчислювальні методи.

Галузь знань - технічні науки.

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело  
\_\_\_\_\_ А.С. Сукало.

Науковий керівник Каліновський Яків Олександрович, доктор технічних наук, старший науковий співробітник.

Київ – 2019

## АНОТАЦІЯ

*Сукало А.С.* Методи моделювання задач цифрової обробки сигналів засобами гіперкомплексних обчислень. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – Математичне моделювання та обчислювальні методи. – Інститут проблем реєстрації інформації НАН України, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, 2019.

Дисертація присвячена підвищенню ефективності математичного моделювання задач цифрової обробки сигналів методами і засобами гіперкомплексних обчислень.

Перший розділ дисертаційної роботи має оглядовий характер і присвячений аналізу форм представлення інформації. Найбільш перспективними в використанні являються гіперкомплексні числові системи. Розглянуто основні властивості та операції в ГЧС. Особливу увагу приділено процедурам подвоєння ГЧС, які дозволяють будувати нові ГЧС більших вимірностей.

В другому розділі на основі детального дослідження методів побудови чотиривимірних гіперкомплексних числових систем, а саме системи кватерніонів, яка в силу своїх властивостей застосовується при вирішенні багатьох задач в математичному моделюванні, в дисертаційній роботі застосовано процедуру подвоєння Грасмана-Кліфорда гіперкомплексних систем для побудови цілих класів ГЧС четвертої вимірності. Це дозволяє класифікувати та систематизувати чотиривимірні гіперкомплексні системи.

Процедура подвоєння застосовується до основних гіперкомплексних числових систем другої вимірності: комплексних, подвійних та дуальних чисел. До того ж, подвоєння відбувається як комутативно, так і некомутативно. Таким чином вдалося одержати два класи систем четвертої вимірності – комутативний

та некомутативний класи, до кожного з яких належать по шість представників класів ізоморфізмів.

До некомутативного класу ГЧС належать системи кватерніонів та антикватерніонів, а до комутативного – система квадриплексних чисел. Для цих систем застосовані методи дослідження арифметичних та алгебраїчних характеристик.

Метод побудови ГЧС за допомогою процедури Грамана-Кліфорда узагальнено для неканонічних систем. Внаслідок чого було отримано ще два класи ГЧС четвертої вимірності, які є неканонічними – комутативний та некомутативний автоподвоювані класи.

Також виведено узагальнені таблиці Келі для цілого класу систем. Це дозволяє досліджувати основні характеристики не кожної системи окремо, а одразу для всього класу ГЧС.

Таким чином узагальнено закони знаходження суми, добутку, норми, спряжених елементів та ознак дільників нуля одразу для цілого класу систем, що призводить до зменшення кількості обчислювальних операцій при дослідженні таких структур і розширює коло ГЧС, які можуть застосовуватися в математичному моделюванні при вирішенні практичних задач.

Для ширшого застосування побудованих класів ГЧС у різних галузях науки і техніки, побудовано матричні представлення, що значно зменшує об'єм обчислювальних операцій при математичному моделюванні та розширює можливості їх використання для опису поворотів у тривимірному просторі.

В дисертаційній роботі матричне представлення побудовано трьома способами: на основі встановлених зв'язків побудованих ГЧС з узагальненими кватерніонами; за допомогою матричних представлень ГЧС другої вимірності; на основі мультиплікативності норми.

Дослідження основних характеристик ГЧС дають можливість побудувати аналітичні представлень основних нелінійностей побудованих класів ГЧС, що представлено в третьому розділі дисертаційної роботи. Зокрема, змодельовано представлення експоненти, логарифма, тригонометричних та гіперболічних

функцій, що сприятиме застосуванню систем досліджуваних класів в математичному моделюванні.

Представлення експоненти здійснено методом асоційованої системи лінійних диференціальних рівнянь. Показано ефективність цього методу порівняно з прямим методом представлення експоненти. Оскільки логарифм є оберненою функцією до експоненти, то його представлення будується за методом побудови обернених функцій. Дослідження тригонометричних та гіперболічних нелінійностей, також, проводилися методом асоціативної системи диференціальних рівнянь. Варто зазначити, що представлення всіх нелінійностей побудовано в узагальненому вигляді, тобто представлення конкретної функції для конкретної гіперкомплексної системи одержується шляхом підстановки відповідних значень параметрів.

Отримані вирази для нелінійностей від гіперкомплексної змінної можуть застосовуватись, по аналогії з нелінійностями від дійсних і комплексних змінних, при вирішенні широкого спектра практичних задач.

При дослідженні складних математичних моделей доводиться мати справу з громіздкими аналітичними перетвореннями та складними математичними обчисленнями. Значно спростити такі перетворення та скоротити час розрахункових операцій можливо завдяки програмним засобам, представлених інтегрованою системою символічної математики. Система комп'ютерної математики Maple повністю задовіляє таким умовам, оскільки містить сотні базових функцій та алгоритмів символічних перетворень, бібліотеку операторів, команд та функцій. Також, окрім основних математичних пакетів містяться ще й пакети підпрограм для вирішення задач лінійної і тензорної алгебри, теорії чисел, теорії ймовірності й математичної статистики, інтегральних перетворень, числової апроксимації та лінійної оптимізації.

Цей перелік можна продовжувати далі та доповнювати, зокрема, в четвертому розділі розроблено програмний комплекс гіперкомплексних обчислень, який не має аналогів в Україні та світі. Цей комплекс має свій

ідентифікатор, його можна визивати, приєднувати до програми і транспортувати на інші комп'ютери. Із процедур комплексу можна формувати програми обчислень, використовуючи засоби алгоритмічної мови Maple.

Такий пакет процедур дозволяє ефективно будувати математичні моделі різних рівнів складності з використанням гіперкомплексного представлення даних, що зменшує об'єм програмного коду та час виконання гіперкомплексних обчислень.

У п'ятому розділі представлено алгоритми математичного моделювання задач цифрової обробки сигналів засобами гіперкомплексних обчислень. Зокрема проаналізовано методи швидкої двовимірної згортки масивів різної вимірності та представлено структуру реверсивних цифрових фільтрів з гіперкомплексними коефіцієнтами. Показано, як підвищується ефективність моделювання таких задач шляхом ізоморфного переходу від ГЧС із сильнозаповненими таблицями множення базисних елементів до ГЧС, в яких відповідні таблиці є слабозаповненими. Таким чином зменшується кількість дійсних операцій, необхідних для виконання вищепоставлених задач.

Також, зменшити час моделювання задач цифрової обробки сигналів можливо засобами гіперкомплексних обчислень. Застосування програмного комплексу дозволить отримати результат швидше та без виконання значної кількості арифметичних операцій.

У рамках дисертаційного дослідження запропоновано концепцію і методологічні принципи представлення та обробки інформації у гіперкомплексному вигляді, які орієнтовані на використання в математичному моделюванні та комп'ютерних обчисленнях. Отримані такі результати, що істотно розширюють представлення про гіперкомплексні числові системи і можливості їх використання для побудови математичних моделей задач цифрової обробки сигналів:

1. Вперше побудовано на основі використання принципу подвоєння Грасмана-Кліфорда широкий клас комутативних і некомутативних ГЧС, використання яких при математичному моделюванні складних об'єктів багатовимірної

природи дозволяє підвищити їх адекватність та розширити область застосування цих ГЧС;

2. Вперше запропоновано узагальнену структуру та організацію арифметичних та алгебраїчних операцій для класів ГЧС четвертої вимірності, що дозволяє прискорити процес синтезу задач цифрової обробки сигналів;
3. Вперше для побудованих класів ГЧС запропоновано узагальнені представлення експоненціальної, логарифмічної, тригонометричних та гіперболічних функцій від гіперкомплексної змінної, використання яких дозволяє зменшити обчислювальну складність реалізації цих функцій в порівнянні з прямими методами;
4. Вперше розроблено принципи використання ГЧС для синтезу схем обчислень при вирішенні задач цифрової обробки сигналів, що дає можливість зменшення об'ємів обчислень.

**Ключові слова:** гіперкомплексна числова система, кватерніон, антикватерніон, узагальнений кватерніон, норма, спряження, дільники нуля, процедура подвоєння ГЧС, програмний комплекс, ізоморфізм, поворот вектора, передавальна функція цифрового фільтра, амплітудно-частотна характеристика фільтра, згортка.

## ABSTRACT

*Sukalo A.S.* Methods of modeling of digital signals processing by means of hypercomplex calculations. – Qualifying scientific work on the rights of manuscript.

The thesis for the degree of a candidate of technical sciences on the specialty 01.05.02 – Mathematical modeling and computational methods. – Institute for Information Recording Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, 2019.

The thesis is devoted to increase of efficiency of mathematical modeling the problems of digital signals processing by methods and means of hypercomplex calculations

The first section of the thesis is of a survey nature and is devoted to the analysis of the forms of information presentation. Hypercomplex number systems are the most promising in use. The basic properties and operations in the HNS are considered. Particular attention is paid to the procedures of doubling of the HNS, which allow the construction of new HNS of greater measurements.

In the second section, on the basis of a detailed study of the construction methods of four-dimensional hypercomplex numerical systems, namely the system of quaternions, which by virtue of its properties is used in solving many problems in mathematical modeling, in the dissertation work the Gramsman-Clifford procedure of doubling is used for constructing whole classes of HNS of the fourth dimensional. This allows for the classification and systematization of four-dimensional hypercomplex systems.

The doubling procedure applies to the basic hypercomplex number systems of the second dimension: complex, double, and dual numbers. In addition, doubling occurs both commutatively and non-commutatively. Thus we managed to obtain two classes of systems of the fourth dimensionality - commutative and noncommutative classes, each of which consists of six representatives of classes of isomorphism.

The noncommutative class of the HNS includes systems of quaternions and antiquaternions, the commutative class – a system of quardiceps numbers. For these systems, methods of study arithmetic and algebraic characteristics are used.

Also, a summary of Caylly tables for a whole class of systems is derived. This allows us to investigate the main characteristics of not every single system, but at once for the whole class of HNS.

Thus, the laws of finding the sum, product, norm, conjugate elements and signs of divisors zero at once for a whole class of systems are generalized, which leads to a decrease in the number of computational operations in the study of such structures and extends the range of HNS, which can be used in mathematical modeling in solving of digital signals problems.

For the wider application of the built-up classes of HNS in various fields of science and technology, matrix representations are constructed, which greatly reduces the volume of computational operations in mathematical modeling and extends the possibilities of their use for describing turns in three-dimensional space.

Research in the main characteristics of the HNS gives an opportunity to construct analytical representations of the basic nonlinearities of the constructed classes of the GHS, which is presented in the third section of the dissertation work. In particular, the representation of the exponent, logarithm, trigonometric and hyperbolic functions is simulated, which will promote the application of systems of the studied classes in mathematical modeling.

The representation of an exponent is carried out by the method of the associated system of linear differential equations. The efficiency of this method is shown in comparison with the direct representation method of the exponent. Since the logarithm is an inverse of the exponential function, its representation is based on the construction method of inverse functions. Investigation of trigonometric and hyperbolic nonlinearities, also, was carried out by the method of the associative system of differential equations. It is worth noting that the representation of all nonlinearities is constructed in a generalized form, that is, to obtain the representation



of a concrete function for a particular hypercomplex system by substituting the corresponding values of parameters.

The obtained expressions for nonlinearities from the hypercomplex variable can be applied, analogously to nonlinearities of real and complex variables, when solving a wide range of practical problems.

In the study of complex mathematical models, one has to deal with cumbersome analytic transformations and complex mathematical calculations. Significantly simplify such transformations and reduce the time of settlement operations possible, thanks to information technologies presented by the integrated system of symbolic mathematics. Such a system should include a method for representing the data of a special non-numeric structure, the language of processing such data and a library of functions for performing the necessary operations.

The system of computer mathematics Maple completely reverses these conditions, since it contains hundreds of basic functions and algorithms of symbol transformations, a library of operators, commands and functions. This list can be further extended and supplemented, in particular, in the fourth section a software complex of hypercomplex computations was developed. This complex has its own identifier, it can be called, attached to the program and transported to other computers. From the procedures of the complex, you can create computational programs using the means of the algorithmic language Maple.

This package of procedures allows you to effectively build mathematical models of different levels of complexity using hypercomplex data representation.

In the fifth section the algorithms of mathematical modeling of digital signals processing by means of hypercomplex computations are presented. In particular, the methods of fast two-dimensional convolution of arrays of various measurements are analyzed and the structure of reversible digital filters with hypercomplex coefficients is presented. It is shown how the efficiency of simulation of such problems increases by means of isomorphic transition from the HNS with highly-filled tables of multiplication of the basic elements to the HNS, in which the

corresponding tables are weakly filled. This reduces the number of actual operations required to perform the above tasks.

Also, to reduce the time of simulation of digital signal processing tasks is possible by means of hypercomplex computations. Application of the software complex will allow to obtain the result faster and without performing a significant number of arithmetic operations.

In the framework of the dissertation research, the concept and methodological principles of information representation and processing in the hypercomplex form are proposed, which are oriented to use in mathematical modeling and computer calculations. The following results are obtained, which considerably extend the concept of hypercomplex number systems and the possibility of their use for constructing mathematical models of digital signal processing tasks:

1. For the first time built on the basis of the use of the principle of doubling Grassman-Clifford a broad class of commutative and non-commutative HNS, the use of which in mathematical modeling of complex objects of multidimensional nature can increase their adequacy and extend the scope of these HNS;
2. For the first time a generalized structure and organization of arithmetic and algebraic operations for the fourth-dimensional GHS classes are proposed, which allows to accelerate the process of synthesis of digital signal processing tasks;
3. For the first time for the constructed classes of HNS the generalized representation of exponential, logarithmic, trigonometric and hyperbolic functions from the hypercomplex variable is proposed, the use of which allows to reduce the computational complexity of the realization of these functions in comparison with direct methods;
4. For the first time the principles of the use of HNS for the synthesis of computing circuits in solving digital signal processing tasks have been developed, which makes it possible to reduce the volume of computations.

**Key words:** hypercomplex number system, quaternion, antiquaternion, generalized quaternion, norm, conjugation, zero dividers, the procedure of the HNS

doubling, software complex, isomorphism, vector rotation, transfer function of the digital filter, amplitude-frequency characteristic of the filter, convolution.

1. Калиновский Я. А. Гиперкомплексные числовые системы четвертой размерности / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало. – Київ: ІПРІ НАН України. – 2017. – 126 с.
2. Калиновский Я. А. Система гиперкомплексных операций в Maple / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Я. В. Хицко, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2017. – Т. 19, № 2. – С. 11 – 23. (Індексується та реферується в ICI Journals Master List).
3. Калиновский Я. А. Исследование алгебраических и функциональных свойств обобщенных гиперкомплексных систем четвертой размерности / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2017. – Т. 19, № 1. – С. 22 – 33. (Індексується та реферується в ICI Journals Master List).
4. Каліновський Я. О. Побудова представлень логарифмічної функції в одному класі комутативних ГЧС четвертої вимірності / Я. О. Каліновський, Ю. Є. Боярінова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2016. – Т. 18, № 4. – С. 12 – 23. (Індексується та реферується в ICI Journals Master List).
5. Калиновский Я. А. Исследование свойств обобщенных гиперкомплексных числовых систем четвертой размерности, полученных процедурой удвоения Грасмана-Клиффорда / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2016. – Т. 18, № 3. – С. 3 – 11. (Індексується та реферується в ICI Journals Master List).
6. Калиновский Я. А. Разработка представлений гиперболических и тригонометрических нелинейностей в системе обобщенных кватернионов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Т. В. Синькова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2016. – Т. 18, № 1. – С. 14 – 22. (Індексується та реферується в ICI Journals Master List).

7. Калиновский Я. А. Свойства обобщенных кватернионов и их связь с процедурой удвоения Грассмана-Клиффорда / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Туренко (А. С. Сукало), Я. В. Хицко // Электронное моделирование. – 2015. – Т. 37, № 2. – С. 17 – 26. (Индексується та реферується в Cambridge Scientific Abstracts, Computer and Information Systems Abstracts, INIS Collection, Inspec, BINITI РАН).
8. Калиновский Я. А. Исследование вычислительных операций в гиперкомплексной числовой системе антикватернионов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Я. В. Хицко, А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Электронное моделирование. – 2014. – Т. 36, № 5. – С. 49 – 65. (Индексується та реферується в Cambridge Scientific Abstracts, Computer and Information Systems Abstracts, INIS Collection, Inspec, BINITI РАН).
9. Калиновский Я. А. Математическое моделирование представлений экспоненциальной и логарифмической функций в гиперкомплексной числовой системе обобщенных кватернионов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2015. – Т. 17, № 4. – С. 11 – 20.
10. Калиновский Я. А. Построение алгоритма цифровой подписи с использованием функций от обобщенных кватернионов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2015. – Т. 17, № 3. – С. 48 – 55.
11. Каліновський Я. О. Синтез матричних представлень узагальнених кватерніонів / Я. О. Каліновський, Ю. Є. Боярінова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2015. – Т. 17, № 2. – С. 14 – 29.
12. Каліновський Я. О. Дослідження зв'язків між узагальненими кватерніонами та процедурою подвоєння ГЧС / Я. О. Каліновський, Ю. Є. Боярінова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2015. – Т. 17, № 1. – С. 36 – 45.
13. Каліновський Я. О. Обчислювальні властивості одного класу некоммутативних гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності / Я.

- О. Каліновський, Ю. Є. Боярінова, А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2014. – Т. 16, № 3. – С. 12 – 24.
14. Калиновский Я. А. Программный комплекс для гиперкомплексных вычислений / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Т. В. Синькова, А. С. Сукало // Электронное моделирование. – 2017. – Т. 39, № 5. – С. 81 – 96.
15. Калиновский Я. А. Построение высокоразмерных изоморфных гиперкомплексных числовых систем для повышения эффективности вычислительных процессов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Т. В. Синькова, А. С. Сукало // Электронное моделирование. – 2016. – Т. 38, № 6. – С. 67 – 84.
16. Калиновский Я. А. Разработка представлений тригонометрических функций в числовой системе обобщенных кватернионов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Т. В. Синькова, А. С. Сукало // Электронное моделирование. – 2016. – Т. 38, № 3. – С. 23 – 32.
17. Туренко А. С. Дослідження обчислювальних властивостей системи антикватерніонів / А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2014. – Т. 16, № 2. – С. 62 – 73.
18. Туренко А. С. (Сукало А. С.) Дослідження властивостей одного узагальнення гіперкомплексної системи кватерніонів / А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2014. – Т. 16, № 1. – С. 19 – 27.
19. Kalinovsky Ya.A. Principles of constructing algorithms for processing digital signals using hypercomplex number systems / Ya.A. Kalinovsky, Yu.E. Boyarinova, Ya.V. Khitsko, A.S. Sukalo // 20th International Conference on System Analysis and Information Technology( SAIT 2018). – K.: Institute for Applied System Analysis of National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, 2018. – P. 194–195.
20. Каліновський Я. О. Моделювання практичних задач за допомогою програмного комплексу гіперкомплексних обчислень / Я.О. Каліновський, А. С. Сукало // Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних

методів та інформаційних технологій: матеріали Міжнародної наукової конференції (2 – 4 березня 2018 р.). – Рівне, 2018. – С. 49 – 51.

21. Калиновский Я. А. Обработка гиперкомплексных данных с использованием пакета символьных вычислений в среде Maple / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Глобальні та регіональні проблеми інформатизації в суспільстві і природокористуванні '2017: матеріали 5-ї Міжнародної науково-технічної конференції НУБіП України (22 – 23 червня 2017 р.). – К.: Компринт. – 2017. – С. 63 – 65.

22. Калиновский Я. А. Пакет гиперкомплексных символьных вычислений в среде Maple / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало, Я. В. Хицко // Системный анализ и информационные технологии: материалы 19-й Международной научно-практической конференции SAIT 2017. – К.: УНК «ИПСА» КПИ им. Игоря Сикорского, 2017. – С. 232.

23. Сукало А. С. Підсистема визначення алгебраїчних характеристик гіперкомплексних даних спеціалізованої бібліотеки процедур в середовищі символьних обчислень Maple / А. С. Сукало // Матеріали щорічної підсумкової конференції ІПРІ НАН України. – Київ, ІПРІ НАНУ. – 2017. – С. 51 – 52.

24. Калиновский Я. А. Применение обобщенных кватернионов в цифровой подписи / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Системный анализ и информационные технологии: материалы 18-й Международной научно-практической конференции SAIT 2016. – К.: УНК «ИПСА» КПИ им. Игоря Сикорского, 2016. – С. 327.

25. Калиновский Я. А. Обобщение кватернионов вращения и связь с процедурой удвоения Грассмана-Клиффорда / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Системный анализ и информационные технологии: материалы 17-й Международной научно-практической конференции SAIT 2015. – К.: УНК «ИПСА» КПИ им. Игоря Сикорского, 2015. – С. 50.

26. Туренко А. С. (Сукало А. С.) Програмно-алгоритмічні засоби дослідження обчислювальних властивостей гіперкомплексних чисел в

середовищі символічних обчислень Maple / А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Матеріали щорічної підсумкової конференції ІПРІ НАН України ( 26 – 27 травня 2015 р.). – Київ, ІПРІ НАНУ. – 2015. – С. 110 – 112.

27. Калиновский Я. А. Исследование классов изоморфизма неканонических гиперкомплексных числовых систем размерности 2 / Я. А. Калиновский, Я. В. Хицко, А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Системный анализ и информационные технологии: материалы 16-й Международной научно-практической конференции SAIT 2014. – К.: УНК «ИПСА» КПИ им. Игоря Сикорского, 2014. – С. 93.

28. Туренко А. С. (Сукало А. С.) Дослідження властивостей антикватерніонної гіперкомплексної числової системи / А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Матеріали щорічної підсумкової конференції ІПРІ НАН України. – Київ, ІПРІ НАНУ. – 2014. – С. 102 – 103.

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> .....	20
<b>РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ ЗАСТОСУВАННЯ ФОРМ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ДАНИХ В МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ</b> .....	29
1.1. Етапи формування та розвитку методів представлення інформації.....	29
1.2. Базові поняття теорії гіперкомплексних числових систем.....	33
1.3. Дослідження алгоритмів виконання процедур подвоєння ГЧС.....	36
1.4. Аналіз методів побудови представлень нелінійних функцій від гіперкомплексної змінної.....	38
1.5. Аналіз існуючих моделей задач цифрової обробки сигналів із представленням даних в гіперкомплексних числових системах і визначення напрямків подальших досліджень.....	41
Висновки до розділу 1.....	42
<b>РОЗДІЛ 2. УЗАГАЛЬНЕНА СТРУКТУРА ТА ОРГАНІЗАЦІЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ОПЕРАЦІЙ В СПЕЦІАЛІЗОВАНИХ КЛАСАХ ГЧС ЧЕТВЕРТОЇ ВИМІРНОСТІ</b> .....	44
2.1. Визначення досліджуваних класів ГЧС.....	44
2.2. Дослідження властивостей одного класу некомутативних ГЧС четвертої вимірності.....	46
2.2.1. Визначення класу некомутативних ГЧС.....	46
2.2.2. Встановлення зв'язків між узагальненими кватерніонами та процедурою подвоєння Грасмана-Кліфорда.....	48
2.2.3. Дослідження арифметичних та алгебраїчних операцій.....	50
2.3. Дослідження властивостей одного класу комутативних ГЧС четвертої вимірності.....	53
2.3.1. Виведення узагальненої таблиці Келі комутативного класу ГЧС.....	53
2.3.2. Дослідження арифметичних та алгебраїчних операцій.....	56
2.4. Автоподвоєння неканонічних систем другої вимірності.....	60
2.4.1. Комутативне автоподвоєння.....	61
2.4.2. Некомутативне автоподвоєння.....	63



2.4.3. Норми і спряження.....	65
2.5. Синтез матричних представлень.....	68
2.5.1. Матричні представлення некомутативних систем $D_n$ класу.....	69
2.5.2. Розробка матричного представлення комутативного класу $D_k$ .....	76
2.5.3. Моделювання матричного представлення комутативних автоподвоюваних систем.....	78
2.5.4. Матричне представлення некомутативних автоподвоюваних систем	79
Висновки до розділу 2.....	80
<b>РОЗДІЛ 3. МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ГЧС.....</b>	<b>81</b>
3.1. Моделювання представлень експоненціальної та логарифмічної функцій.....	81
3.1.1. Побудова експоненти та логарифма в $D_n$ класі ГЧС.....	81
3.1.2. Представлення експоненти та логарифма в $D_k$ класі ГЧС.....	87
3.1.3. Експоненціальна функція в комутативній системі $Q_4^k$ .....	93
3.1.4. Особливості побудови експоненти в некомутативній ГЧС $Q_4^n$ .....	95
3.2. Розробка представлень тригонометричних та гіперболічних нелінійностей.....	98
3.2.1. Представлення гіперболічних функцій в класі ГЧС $D_n$ .....	98
3.2.2. Побудова представлення тригонометричних функцій в некомутативному класі ГЧС $D_n$ .....	101
3.2.3. Моделювання представлення гіперболічних функцій в комутативному класі ГЧС $D_k$ .....	104
3.2.4. Представлення тригонометричних функцій в класі ГЧС $D_k$ .....	107
Висновки до розділу 3.....	111
<b>РОЗДІЛ 4. РОЗРОБКА ПРОГРАМНОГО КОМПЛЕКСУ ГШЕРКОМПЛЕКСНИХ ОБЧИСЛЕНЬ.....</b>	<b>113</b>
4.1. Основні принципи побудови програмного комплексу	113

гіперкомплексних обчислень.....	
4.2. Структура процедур програмного комплексу.....	117
4.3. Зберігання та редагування процедур ПК.....	122
4.4. Використання ПК для вирішення практичних задач.....	124
4.4.1. Моделювання алгоритму ділення двох гіперкомплексних чисел.....	124
4.4.2. Задача повороту вектора в тривимірному просторі.....	128
Висновки до розділу 4.....	131
<b>РОЗДІЛ 5. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ ЗАСОБАМИ ГІПЕРКОМПЛЕКСНИХ ОБЧИСЛЕНЬ.....</b>	<b>132</b>
5.1. Метод зменшення кількості операцій множення гіперкомплексних чисел для задач цифрової обробки сигналів.....	132
5.1.1. Побудова ізоморфних пар ГЧС на основі систем квадриплексних і бікомплексних чисел.....	135
5.2. Принципи застосування методів ГЧС до обчислення згортки.....	136
5.2.1. Лінійна згортка з використанням ГЧС.....	138
5.3. Двомірною лінійною згорткою.....	144
5.3.1. Структура алгоритму швидкої лінійної двомірної згортки масивів 2x2.....	144
5.3.2. Структура алгоритму швидкої лінійної двомірної згортки масивів 4x4.....	147
5.4. Представлення передавальної функції цифрового фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами.....	152
5.4.1. Моделювання роботи цифрового фільтра з квадриплексними коефіцієнтами.....	154
5.4.2. Застосування ізоморфізму між ГЧС для зменшення кількості операцій при моделюванні цифрового фільтра.....	160
Висновки до розділу 5.....	163
<b>ВИСНОВКИ.....</b>	<b>165</b>

<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....</b>	<b>168</b>
Додаток А. Довідка про впровадження результатів дисертаційного дослідження.....	182
Додаток Б. Таблиці Келі, правила множення, псевдонорми та ознаки дільників нуля систем некомутативного класу ГЧС.....	183
Додаток В. Основні алгебраїчні та арифметичні властивості комутативних ГЧС 4-ої вимірності.....	186
Додаток Г. Матричні представлення класів ГЧС 4-ої вимірності.....	190
Додаток Д. Представлення експоненціальної, логарифмічної, тригонометричних та гіперболічних функцій.....	192
Додаток Ж. Структура програмного комплексу гіперкомплексних обчислень.....	202
Додаток З. Список публікацій за темою дисертації.....	231

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Бурхливий розвиток інформаційних технологій сприяє розширенню кола задач, які потребують використання методів математичного моделювання. Це, в свою чергу, призводить до необхідності удосконалення існуючих та розробки нових таких методів. Однією з основних компонент математичного моделювання являється форма представлення інформації, вибір якої під час вирішення конкретної задачі сам по собі являється складною задачею. Питання форми представлення інформації тісно пов'язане з розвитком систем числення.

Аналізуючи етапи розвитку систем числення, можна побачити, що числові системи розвивалися, доповнюючи та удосконалюючи одна одну. Наступні системи мали більш широкі можливості по відношенню до попередніх, як по властивостях так і по вимірності. Питання розширення вимірності виникло з появою комплексних чисел, передумовою виникнення яких було добування арифметичного кореня з від'ємного числа [1].

Застосування комплексних чисел для вирішення практичних задач дало відчутні результати, це стало причиною пошуку числових систем вищих вимірностей, зокрема третьої та четвертої. Серед систем четвертої вимірності найбільше застосувань знайшла система кватерніонів. Кватерніони є результат некомутативного подвоєння системи комплексних чисел  $\mathbb{C}$  тією ж системою чисел. У зв'язку з цим доцільно дослідити й інші гіперкомплексні числові системи (ГЧС) четвертої вимірності, зокрема, як некомутативних так і комутативних. Таких ГЧС, в принципі, дуже багато, проте задачу можна значно спростити, обмежившись класами таких ГЧС, одержаних шляхом подвоєння за допомогою процедури Грасмана–Кліфорда основних ГЧС другої вимірності [2].

Представлення даних за допомогою ГЧС має декілька переваг, які дозволяють підвищити ефективність моделювання. Це обумовлено тим, що ГЧС мають такі властивості, яких немає у інших систем представлення інформації. Ці властивості дають можливість виконання всіх арифметичних

операцій та виконання різноманітних нелінійних перетворень з гіперкомплексними числами, що призводить до збільшення актуальності застосування гіперкомплексних числових систем на сучасному етапі розвитку математичного моделювання та комп'ютерних обчислень. До того ж, деякі математичні твердження набувають значно простішого вигляду або значно легше доводяться, якщо записати їх мовою дій над гіперкомплексними числами, зокрема кватерніонами.

Роботи теоретичного і практичного напрямків дослідження числових систем і особливо гіперкомплексних форм представлення даних активно розвиваються в США, Великій Британії, Німеччині, Росії, Франції, Японії, Румунії і в багатьох інших країнах.

В Україні, також, існують осередки розвитку теорії та практики ГЧС. Варто згадати академіка НАН України Ю.М. Березанського, який займався дослідженнями ГЧС нескінченних вимірностей. Монографія Ю.М. Березанського і О.О. Калюжного «Гармонічний аналіз в гіперкомплексних системах» перекладена на багато мов і набула світового поширення.

Значні результати в цьому напрямку були одержані в Інституті проблем реєстрації інформації НАН України, в якому професор Синьков М.В. започаткував методи дослідження ГЧС, пов'язані із їх застосуванням в комп'ютерній томографії, криптографії, синтезу цифрових фільтрів та алгоритмів виконання згортки з допомогою ГЧС. Його колеги, зокрема Каліновський Я.О. та Боярінова Ю.Є., активно продовжують дослідження у цьому напрямку.

В Житомирському державному університеті ім. І.Франка, в якому на базі кафедри математичного аналізу створено «Науково-дослідну лабораторію комплексного та гіперкомплексного аналізу», яку очолює Герус О.Ф.

Робота з гіперкомплексні даними, як в чисельному, так і в символічному вигляді, затруднюється громіздкістю одержуваних виразів. Особливо при використанні ГЧС великих вимірностей. Сучасні системи комп'ютерної алгебри (СКА) полегшують синтез математичних моделей.

У різних СКА є деякі засоби для оперування з багатовимірними об'єктами. Так, практично у всіх сучасних СКА є засоби для роботи з комплексними числами, найчастіше з чисельними коефіцієнтами. У деяких СКА є засоби для роботи з кватерніонами і кліффордними алгебрами. Практично цим і вичерпуються всі можливості в цій області.

Оскільки, ні в Україні, ні за кордоном не існує засобів для оперування з довільними гіперкомплексними числовими системами, тому доцільно розробити програмний комплекс гіперкомплексних обчислень, який значно полегшить роботу з гіперкомплексними виразами.

Розвиток теорії ГЧС породжує пошук методів та засобів дослідження їх арифметичних та алгебраїчних властивостей. Значну допомогу у цьому напрямку надають системи комп'ютерної алгебри. Зокрема, середовище символічних обчислень Maple. Воно дає можливості для створення комплексу гіперкомплексних обчислень, який по суті є своєрідним методом і засобом побудови різних моделей з використанням гіперкомплексних систем.

З вищесказаного випливає, що ГЧС – це сучасний апарат представлення даних в математичному моделюванні. Це обумовлює актуальність вибраного напрямку робіт та перспективність теоретичних та практичних досліджень, що пояснює вибір теми дисертаційної роботи.

#### **Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Дисертаційна робота виконувалася в рамках робіт Відділу спеціалізованих засобів моделювання Інституту проблем реєстрації інформації Національної академії наук України, до яких відносяться:

- науково-дослідна тема «ГПЕРНЕТ» - «Розробка теоретичних засад моделювання інформаційних мереж на базі методології інформаційного пошуку та гіперкомплексних числових систем» (реєстраційний номер 0113U001106), 2013-2015 рр.
- науково-дослідна тема «НАВІГАТОР» - «Розробка та дослідження моделі предметних областей при формуванні баз знань і забезпеченні семантичного пошуку» (реєстраційний номер 0116U000507), 2016-2020 рр.

**Метою дослідження** є підвищення ефективності математичного моделювання задач цифрової обробки сигналів методами та засобами обробки гіперкомплексних даних.

**Задачі дослідження.**

1. Проаналізувати сучасний стан математичного моделювання задач цифрової обробки сигналів, сформулювати вимоги до засобів їх реалізації і з позицій цих вимог проаналізувати методи побудови гіперкомплексних числових систем та дослідити їх основні характеристики.
2. Побудувати класи гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності шляхом застосування процедури подвоєння.
3. Дослідити алгебраїчні властивості класів ГЧС з точки зору їх застосування при вирішенні задач цифрової обробки сигналів.
4. Побудувати узагальнені моделі експоненціальної, тригонометричних та гіперболічних функцій в одержаних класах ГЧС для прискорення процесу моделювання на етапі проектування.
5. Побудувати за допомогою ГЧС математичні моделі задач цифрової обробки сигналів покращеної якості порівняно з традиційними.
6. Розробити структуру та модулі програмного комплексу гіперкомплексних обчислень та провести аналіз його ефективності.
7. Реалізувати за допомогою комплексу гіперкомплексних обчислень математичні моделі задач цифрової обробки сигналів.

**Об'єктом дослідження** є процес математичного моделювання задач цифрової обробки сигналів засобами гіперкомплексних обчислень.

**Предметом дослідження** є моделі задач згортки масивів різної вимірності та синтезу структури цифрових фільтрів.

**Методи дослідження** ґрунтуються на лінійній і загальній алгебрі, теорії груп та алгебр, теорії функцій комплексної змінної, теорії диференціальних рівнянь, методах дискретної математики.

**Наукова новизна одержаних результатів.** У рамках дисертаційного дослідження запропоновано концепцію і методологічні принципи

представлення та обробки інформації у гіперкомплексному вигляді, які орієнтовані на використання в математичному моделюванні та комп'ютерних обчисленнях. Отримані такі результати, що істотно розширюють представлення про гіперкомплексні числові системи і можливості їх використання для побудови математичних моделей задач цифрової обробки сигналів.

1. Вперше побудовано на основі використання принципу подвоєння Грасмана-Кліфорда широкий клас комутативних і некомутативних ГЧС, використання яких при математичному моделюванні складних об'єктів багатовимірної природи дозволяє підвищити їх адекватність та розширити область застосування цих ГЧС;
2. Вперше запропоновано узагальнену структуру та організацію арифметичних та алгебраїчних операцій для класів ГЧС четвертої вимірності, що дозволяє прискорити процес синтезу задач цифрової обробки сигналів;
3. Вперше для побудованих класів ГЧС запропоновано узагальнені представлення експоненціальної, логарифмічної, тригонометричних та гіперболічних функцій від гіперкомплексної змінної, використання яких дозволяє зменшити обчислювальну складність реалізації цих функцій в порівнянні з прямими методами;
4. Вперше розроблено принципи використання ГЧС для синтезу схем обчислень при вирішенні задач цифрової обробки сигналів, що дає можливість зменшення об'ємів обчислень.

**Практичні значення одержаних результатів** полягають в створенні передумов підвищення ефективності математичного моделювання вирішення задач цифрової обробки сигналів на базі використання гіперкомплексних числових систем. Практичні значення мають:

1. Аналітичні представлення норм, спряжених чисел, одиничних елементів, дільників нуля та обернених чисел в комутативних та некомутативних гіперкомплексних числових системах четвертої вимірності, які



використовуються при створенні математичних моделей, зокрема ефективних моделей цифрової обробки сигналів.

2. Модифікація виконання складних операцій в системах, у яких параметри можуть бути дільниками нуля, що забезпечує коректність комп'ютерних обчислень при побудові математичних моделей з використанням ГЧС;
3. Комплекс програмних засобів для числових та аналітичних обчислень в різних ГЧС, використання якого значно спрощує процес розробки математичних моделей, у яких використовуються ГЧС;
4. Математичні моделі обчислення компонентів лінійної згортки масивів різних вимірностей, використання в яких гіперкомплексного представлення даних дозволяє зменшити кількість операцій порівняно з існуючими моделями;
5. Структури рекурсивних цифрових фільтрів з гіперкомплексними параметрами, що дозволяють оптимізувати характеристики фільтрів по чутливості.

**Особистий внесок** полягає в теоретичному обґрунтуванні отриманих результатів, які перевірені на великій кількості прикладів. Всі наукові результати дисертації отримані автором самостійно.

В роботах, опублікованих у співавторстві, здобувачу належить наступні результати. Аналіз властивостей та методу побудови антикватерніонної гіперкомплексної числової системи [15, 70], що стало причиною аналізу процедур подвоєння ГЧС [23], та побудови нових класів ГЧС четвертої вимірності [2]. Аналіз систем ізоморфних комплексним, подвійним та дуальним числам [20]. Досліджено обчислювальні властивості некомутативного класу ГЧС четвертої вимірності [21, 22] та встановлено зв'язки систем даного класу з узагальненими кватерніонами [29, 30, 65]. Виконано обчислення по дослідженню представлення норми, спряжених чисел та дільників нуля в узагальнених ГЧС четвертої вимірності [71, 72], синтезовано матричні представлення узагальнених кватерніонів шляхом використання матриць другого порядку [87]. Виділено властивості узагальнених кватерніонів,

корисних для їх застосувань в цифрових підписах [53, 54]. Виконано очислення, необхідні для моделювання представлення експоненціальної і логарифмічних функцій [27, 31, 90] та побудова графіків амплітуд компонент тригонометричних та гіперболічних нелінійностей [28, 91]. Ідея створення програмного комплексу гіперкомплексних обчислень [39 - 41] та програмне наповнення підсистеми визначення алгебраїчних характеристик пакету гіперкомплексних обчислень [95, 98]. Показано переваги застосування програмного комплексу гіперкомплексних обчислень для моделювання задач [97, 121].

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертаційної роботи були представлені та обговорювались на таких конференціях:

- щорічні підсумкові конференція ІПРІ НАН України, Київ, (2014, 2015, 2017 рр.);
- 16-а ÷ 20-а Міжнародна науково-технічна конференція «Системний аналіз та інформаційні технології» SAIT 2014, Київ, (2014 - 2018 рр.);
- науковий семінар Житомирського державного університету імені Івана Франка, Житомир, (2018);
- 5-а Міжнародна науково-практична конференція «Глобальні та регіональні проблеми інформатизації в суспільстві і природокористуванні '2017», НУБіП України, Київ, 22-23 червня 2017 р.
- Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій», Рівне, 02-04 березня 2018 р;
- науковий семінар кафедри комп'ютерних наук Національного університету водного господарства та природокористування, Рівне, 2018 р.

**Публікації.** Результати дисертаційної роботи опубліковані в 28 наукових роботах, включаючи: 1 монографію, 14 статей у наукових фахових виданнях України (з них 7 статей у виданнях України, що входять до наукометричних баз даних), 3 статті в інших виданнях, 10 тез доповідей в збірниках матеріалів науково-технічних конференцій.

**Об'єм і структура дисертації.** Дисертація складається з вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 121 найменування і 7 додатків. Робота включає 138 сторінок основного тексту, 14 рисунків в тексті, 4 таблиці, 14 сторінок літературних джерел та 53 сторінки додатків. Повний обсяг роботи 234 сторінки.

У вступі обгрунтована актуальність проблеми дослідження нових класів ГЧС та розробки методів та програмних засобів дослідження їх основних властивостей з орієнтацією на їх практичні застосування. Сформульовано мету і задачі дослідження, визначені наукова новизна і практичне значення отриманих результатів.

Перший розділ «Аналіз застосування форм представлення даних в математичному моделюванні» має оглядовий характер і присвячений аналізу форм представлення інформації. Найбільш перспективними в використанні являються гіперкомплексні числові системи. Розглянуто основні властивості та операції в ГЧС. Особливу увагу приділено процедурам подвоєння ГЧС, які дозволяють будувати нові ГЧС більших вимірностей.

У другому розділі «Узагальнена структура та організація обчислювальних операцій в спеціалізованих класах ГЧС четвертої вимірності» на основі аналізу побудови системи кватерніонів, застосовано алгоритм виконання процедури Грасмана-Кліфорда (ГК-процедура) для побудови нових некомутативного та комутативного класів ГЧС четвертої вимірності. Досліджено основні арифметичні та алгебраїчні властивості систем цих класів. Зроблено порівняльний аналіз ГЧС некомутативного класу з узагальненими кватерніонами, що дозволило вивести узагальнені таблицю Келі та закони знаходження норм, спряжених чисел, дільників нуля для цілого некомутативного класу ГЧС. Проведено аналогічні дослідження в комутативному класі ГЧС. Узагальнено такий метод побудови гіперкомплексних систем для неканонічних автоподвоюваних ГЧС. Розділ завершується синтезом матричних представлень досліджуваних класів ГЧС.

Третій розділ «Розвиток методу дослідження функціональних властивостей ГЧС» містить виведення аналітичних представлень основних трансцендентних функцій побудованих класів ГЧС. Зокрема, змодельовано представлення експоненти, логарифма, тригонометричних та гіперболічних функцій методом асоційованої системи лінійних диференціальних рівнянь. Показано, що застосування цього методу зменшує обчислювальну складність побудови таких нелінійностей.

У четвертому розділі «Розробка програмного комплексу гіперкомплексних обчислень» розроблено програмні засоби для побудови та дослідження основних властивостей ГЧС різних вимірностей. Наведено лістинги процедур програмного комплексу (ПК) та приклади їх виконання. Застосовано процедури ПК для вирішення наступних задач: виконання алгоритму ділення двох гіперкомплексних чисел; поворот вектора в тривимірному просторі. Зроблено порівняльний аналіз алгоритмів розв'язування вищенаведених задач без застосування процедур ПК та з безпосереднім їх використанням, що явно показує ефективність розроблених методів та засобів математичного моделювання.

У п'ятому розділі «Математичне моделювання задач цифрової обробки сигналів засобами гіперкомплексних обчислень» експериментально показано зменшення обчислювальної складності математичного моделювання засобами гіперкомплексних обчислень наступних задач: представлення передавальної функції реверсивного цифрового фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтам; моделювання роботи фільтра з квадриплексними коефіцієнтами та дослідження його амплітудно-частотної характеристики; побудова алгоритмів швидкої двомірної згортки масивів різної вимірності на основі подання масивів даних в ізоморфних гіперкомплексних числових системах, отриманих множенням розмірності систем подвійних чисел і ортогональних подвійних чисел, що дає можливість простого за структурою переходу від однієї системи до іншої. Це призводить до зменшення кількості операцій, необхідних для виконання двомірних лінійних згорток масивів різної величини.

## РОЗДІЛ 1

### АНАЛІЗ ЗАСТОСУВАННЯ ФОРМ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ДАНИХ В МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ

#### 1.1. Етапи формування та розвитку методів представлення інформації

Бурхливий розвиток інформації «змусив» людей, в переносному значенні цього слова, шукати ефективні методи освоєння даних. Це призвело, в свою чергу, до розвитку не лише писемності, а й математики.

Початок розвитку математики ототожнюється з формуванням та розвитком поняття число, яке пройшло декілька етапів свого становлення і продовжує розвиватися до нашого часу [3].

Відкриття комплексних чисел призвело до підвищеного інтересу до кубічних рівнянь [4], оскільки при їх розв'язуванні зустрічаються комплексні числа. Значний внесок у цьому напрямку належить Н. Тартальї, адже він вивів формули для розв'язку кубічних рівнянь, які відомі нам як формули Кардана-Тартальї.

Правила додавання, віднімання і множення комплексних чисел описано в роботі Р. Бомбеллі «Алгебра» (1572 р.), яка складається з п'яти частин [5]. В XVI – XVII ст. вирази вигляду  $a + b\sqrt{-1}$  стали називати уявними. Проте, навіть для багатьох великих вчених алгебраїчна і геометрична сутність уявних величин була неясною. Зокрема, Лейбніц (1702 р.) писав: «Дух божий знайшов якнайтоншу віддушину в цьому диві аналізу, виродку в світі ідей, подвійній суті, що знаходиться між буттям і небуттям, яку ми називаємо уявним коренем з від'ємної одиниці» [6].

У XVIII ст. були створені всі передумови для узагальнення поняття тривимірних векторів. Це було початком розвитку як теорії гіперкомплексних чисел, так і поняття багатовимірних просторів.

Наступним етапом в розвитку поняття про число є відкриття ірландським математиком Р.Гамільтоном в 1843р. системи чотиривимірних чисел – кватерніонів, про які більш детально буде йти мова пізніше. Варто лише зазначити, що при збільшенні вимірності не всі властивості вихідних систем зберігаються. Наприклад: комплексні числа не можна упорядкувати так як дійсні числа; система кватерніонів є некомутативною; в деяких системах можуть з'явитися дільники нуля [7].

Система кватерніонів знайшла широке застосування в геометрії, механіці, теоретичній фізиці. Зокрема, шотландський фізик і математик Дж. К. Максвелл (1831 – 1879) у кватерніонах записав свої відомі рівняння – рівняння Максвела, які виявились основою теорії електромагнетизму. Максвелл писав: «Винахід кватерніонів – крок уперед до розуміння величин, зв'язаних з простором; він рівний за своїм значенням з винаходом Декарта системи координат».

Німецький математик Грассман (1809 – 1877) запровадив такі поняття, як лінійна залежність величин, лінійна незалежність базисних елементів,  $e_1, e_2, \dots, e_n$  та виражених через них “екстенсивних величин”  $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ , які зараз називаються гіперкомплексними числами. Він також вводить такі операції над “екстенсивними величинами”, як внутрішній та зовнішній добуток і зв'язав їх з геометричними образами: в двовимірному просторі зовнішній добуток – паралелограм, в тривимірному – паралелепіпед,  $n$  – вимірному –  $n$  - вимірний паралелепіпед [8].

Французький фізик і математик А. Пуанкаре (1854 – 1912) писав: «Поява кватерніонів дала могутній поштовх розвитку алгебри; виходячи від них, наука рушила шляхом узагальнення поняття числа, прийшовши до концепції матриці та лінійного оператора, які пронизують сучасну математику. Це була революція в арифметиці, подібна тій, яку зробив Лобачевський у геометрії» [9].

Нагадаємо, що перша гіперкомплексна числова система була запропонована у 1843 році ірландським математиком Вільямом Гамільтоном, це була система кватерніонів [10]. Множення комплексних чисел описує повороти на площині, бажання знайти щось аналогічне для поворотів у

тривимірному просторі й призвело до виникнення системи кватерніонів. Дослідження Гамільтона про кватерніони були опубліковані у двох великих книгах: «Lectures on Quaternions» (1853) та «Elements of Quaternions» (1866).

В 1858 р. А. Келі розробив матричне представлення кватерніонів, що дозволило використовувати методи матричного аналізу до теорії гіперкомплексної змінної.

Перші систематичні дослідження в галузі перерахунку ГЧС здійснив Б. Пірс у 1870 році. Е. Штуді у 1889 році сформулював поняття ізоморфних гіперкомплексних числових систем. Також він ввів поняття «канонічна гіперкомплексна числова система», тобто такої системи, в якій добуток двох базисних елементів дорівнює якомусь базисному елементу з коефіцієнтом  $\pm 1$  або  $0$ :  $e_i \cdot e_j = \rho e_k$ ,  $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\rho = \pm 1, 0$  [11].

Однією з праць, у якій систематизовано дані про теорію та застосування гіперкомплексних чисел, стала книга І. Л. Кантора та О. С. Солодовникова «Гіперкомплексні числа» (1973) [7].

Останнім часом спостерігається підвищений інтерес до гіперкомплексних чисел. Це обумовлено тим, що деякі математичні твердження набувають значно простішого вигляду або значно легше доводяться, якщо записати їх мовою дій над кватерніонами чи іншими гіперкомплексними числами.

На сучасному етапі розвиток теорії гіперкомплексних числових систем відбувається за такими основними напрямками: розвиток загальної теорії ГЧС та дослідження їх структурних властивостей [7, 12 - 17]; дослідження класів ізоморфізмів ГЧС та методів їх перерахунку [18 - 23]; дослідження функцій від гіперкомплексної змінної в різних системах та побудова їх представлень у вигляді гіперкомплексних функцій [24 - 30]; дослідження методів розв'язування різних типів диференціальних рівнянь від гіперкомплексної змінної та з гіперкомплексними коефіцієнтами [31 - 33]; розробка алгоритмічного та програмного забезпечення, призначеного для проведення алгебраїчних та аналітичних обчислень в різних гіперкомплексних числових системах [34 - 41].

Серед усіх гіперкомплексних числових систем найбільше застосувань знайшли кватерніони. Це обумовлено їх властивостями, адже за їх допомогою дуже зручно та ефективно моделювати обертання твердого тіла, в тому числі і навколо декількох осей. Наведемо найбільш важливі з таких застосувань:

1) в задачах навігації, орієнтації та управління рухом твердого тіла в тривимірному просторі [42, 43], в тому числі і під водою [44, 45];

2) в комп'ютерній графіці, де необхідно розрахувати як буде виглядати на екрані тіло, що обертається, в багатьох проміжних положеннях для створення ефектів анімації [46];

3) дослідження деформації пружних та еластичних конструкцій [47, 48];

4) фільтрація зображень [49];

5) обробка кольорового зображення [50, 51];

6) в криптографії для підвищення стійкості шифрів [52 – 54].

Варто зазначити, що й інші гіперкомплексні числові системи знаходять свої застосування. Наприклад, дуальні числа, бікватерніони та подвійні кватерніони використовуються: для моделювання обертання та переміщення [55]; в задачах моделювання та управління плоскими механізмами, роботами та маніпуляторами з багатьма ступенями свободи і навіть моделювання скелета людини [56 – 58]. Застосування гіперкомплексних числових систем при побудові алгоритмів обробки багатовимірних сигналів дає значний ефект, особливо на базі перетворення Фур'є [59, 60].

В останнє десятиріччя в зв'язку з розробкою методів фільтрації комплексних та гіперкомплексних сигналів спостерігається створення структур цифрових реверсивних фільтрів з гіперкомплексними коефіцієнтами.

Ретельно ознайомившись з історичним розвитком числових систем, можна висвітлити напрямки подальших наукових досліджень, чому і буде присвячений наступний підрозділ.

Завершити розгляд етапів розвитку числа хочеться висловом семи давньогрецьких мудреців (Піттак з Мітіліні, Солон Афіньський, Клеобул з Лінда, Біант Приєньський, Місон Хінейський, Фалес Мілетський, Хілон зі



Спарти): «Природа числа є те, що дає пізнання, скеровує і навчає кожного стосовно всього, що для нього сумнівне і невідоме. Справді, якби не було числа і його сутності, то ні для кого не було б нічого ясного ані в речах самих по собі, ані в їхніх взаємних стосунках... Можна помітити, що природа і сила числа діє не тільки в божественних речах, але також повсюди в усіх людських справах і стосунках, в усіх технічних мистецтвах і в музиці».

## 1.2. Базові поняття теорії гіперкомплексних числових систем

Як було зазначено вище, гіперкомплексні числові системи активно застосовуються в математичному моделюванні. Такі застосування спричинені, в першу чергу, завдяки ряду арифметичних та алгебраїчних властивостей даного класу систем, для короткого огляду яких, варто приділити увагу базовим поняттям теорії ГЧС.

Гіперкомплексна числова система вимірності  $n$  в загальному випадку має позначення

$$\Gamma(\mathbf{e}, n), \quad (1.1)$$

де  $e$  - ім'я елементів базису ГЧС, який має вигляд:

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \quad (1.2)$$

Елементи гіперкомплексної системи (1.1) мають вигляд

$$A = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n, \quad (1.3)$$

де  $a_1, a_2, \dots, a_n$  - коефіцієнти, які можуть належати системам дійсних, комплексних або інших гіперкомплексних чисел. В цьому випадку вважається, що гіперкомплексна числова система задана *над* відповідною системою дійсних, комплексних або іншою системою чисел.

В деяких випадках в базис ГЧС входить дійсна одиниця, яка являється одиничним елементом ГЧС. В такому випадку базис та елемент гіперкомплексної системи матимуть вигляд

$$\{1, e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\} \text{ та } A = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_{n-1} e_{n-1} \quad (1.4)$$

відповідно.

Над елементами ГЧС у вигляді (1.4) задано наступні операції:

1) Додавання двох чисел  $A = a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_n e_n$  та  $B = b_1e_1 + b_2e_2 + \dots + b_n e_n$

проводиться покомпонентно:

$$A + B = (a_1 + b_1)e_1 + \dots + (a_n + b_n)e_n \quad (1.5)$$

2) Віднімання. Операція віднімання виконується аналогічно додаванню:

$$A - B = (a_1 - b_1)e_1 - \dots - (a_n - b_n)e_n$$

3) Множення. Для визначення операції множення і повного завдання гіперкомплексної числової системи необхідно задати правила множення елементів базису (1.2). До того ж, система чисел повинна бути замкнутою відносно цієї операції.

В загальному випадку добуток двох базисних елементів з (1.2) представляє собою число тієї ж гіперкомплексної числової системи, тобто

$$e_i e_j = \gamma_{ij}^1 e_1 + \dots + \gamma_{ij}^n e_n, \quad (1.6)$$

де  $\gamma_{ij}^k \in R$  - структурні константи. Таким чином, для задання ГЧС необхідно задати  $n^3$  структурних констант.

Знаючи правила множення базисних елементів (1.6), множення гіперкомплексних чисел проводиться аналогічно множенню поліномів та групуванню доданків з однаковими базисними елементами:

$$A \cdot B = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_i b_j \gamma_{ij}^k e_k. \quad (1.7)$$

Варто зазначити, що в залежності від закону композиції операції множення, гіперкомплексні числові системи поділяються на класи, які відрізняються виконанням властивостей асоціативності та комутативності.

В залежності від виконання останньої, множину гіперкомплексних числових систем можна розділити на клас комутативних та некомутативних ГЧС [61]. До класу комутативних ГЧС входять системи для яких виконується рівність

$$AB = BA, \quad A, B \in \Gamma. \quad (1.8)$$

А до класу некомутативних ГЧС входять системи для яких виконується рівність

$$AB \neq BA, A, B \in \Gamma. \quad (1.9)$$

Також, до класу некомутативних ГЧС відносять системи, для яких виконується наступна рівність:

$$AB = -BA, A, B \in \Gamma \quad (1.10)$$

такі системи називають антикомутативними. Варто зазначити, що до класу антикомутативних систем не можуть входити ГЧС з одиничним елементом в базисі.

Стосовно асоціативності множення маємо два класи систем: асоціативний та неасоціативний. Для систем асоціативного класу виконується рівність:

$$(AB)C = A(BC), A, B, C \in \Gamma, \quad (1.11)$$

А для систем неасоціативного класу –

$$(AB)C \neq A(BC), A, B, C \in \Gamma. \quad (1.12)$$

4) Порівняння. Два гіперкомплексних числа вважаються рівними, якщо попарно рівні відповідні коефіцієнти при однакових базисних елементах, а саме:  $A = B$ , якщо  $a_i = b_i, i = 1, \dots, n$ .

5) Нульовий елемент. Нульовий елемент - це гіперкомплексне число, нейтральне відносно додавання, а саме:  $A + 0 = 0 + A = A$ .

Гіперкомплексне число дорівнює нулю, якщо дорівнюють нулю коефіцієнти при всіх базисних елементах:  $A = 0$ , якщо  $a_i = 0, i = 1, \dots, n$ .

6) Одиничний елемент. Одиничний елемент, або одиниця, - це гіперкомплексне число, нейтральне відносно операції множення.  $A \cdot E = A \cdot E = A$ , де  $E$  - одиничний елемент.

У деяких випадках одиничний елемент может бути елементом базису гіперкомплексної системи (див. (1.14)). В протилежному випадку його можна знайти, якщо розв'язати гіперкомплексне рівняння

$$A \cdot E = A \quad (1.13)$$

З допомогою цих операцій, можливо ввести наступні важливі характеристики ГЧС

7) Норма. В роботі [62] норма гіперкомплексного числа (1.3) визначається за формулою

$$N(A) = \left\| \sum_{i=1}^n \gamma_{ij}^k a_i \right\|, \quad (1.14)$$

де  $\gamma_{ij}^k$  - структурні константи гіперкомплексної числової системи. На цій основі будується матриця норми обчисливши детермінант якої, одержимо норму гіперкомплексного числа  $A$ .

8) Спряжений елемент. Спряжений елемент до  $A$  позначається  $\bar{A}$  і вводитьься на основі рівності

$$A\bar{A} = N(A). \quad (1.15)$$

9) Дільники нуля. Відмінне від нуля гіперкомплексне число  $A \neq 0$  називається *дільником нуля*, якщо існує таке інше гіперкомплексне число  $B \neq 0$ , що їх добуток дорівнює нулю  $AB = 0$ , а це означає таке ж співвідношення між їх псевдонормами:

$$N(AB) = 0. \quad (1.16)$$

На основі мультиплікативності норми гіперкомплексного числа, псевдонорма дільника нуля повинна дорівнювати нулю

$$N(A) = 0. \quad (1.17)$$

З (1.17) випливає ознака дільників нуля в будь-якій гіперкомплексній числовій системі (окрім систем дійсних, комплексних чисел, кватерніонів та октав для яких за теоремою Фробеніуса немає дільників нуля).

### 1.3. Дослідження алгоритмів виконання процедур подвоєння ГЧС

Рекурентні процедури подвоєння ГЧС дозволяють будувати ряди ГЧС підвищеної вимірності. Існують два типи процедур подвоєння: процедура Келі–

Діксона (КД–процедура) та процедура Грасмана–Кліфорда (ГК–процедура). Розглянемо алгоритми виконання кожної з них.

Процедура подвоєння Кейлі–Діксона полягає в побудові гіперкомплексної системи  $\Gamma_2(f, 2m)$  із системи  $\Gamma_1(e, m)$  таким чином що, кожний елемент  $\Gamma_2$  складається з пари елементів системи  $\Gamma_1$ , тобто [34, 63]:

$$(A, B) \in \Gamma_2, A, B \in \Gamma_1 \quad (1.18)$$

В системі  $\Gamma_2$  множення виконується за наступним правилом

$$(A, B) \cdot (C, D) = (AC - D\bar{B}, \bar{A}D + CB), A, B, C, D \in \Gamma_1, (A, B), (C, D) \in \Gamma_2, \quad (1.19)$$

а спряження -  $(\overline{(A, B)}) = (\bar{A}, -B)$ .

Алгоритм виконання КД-процедури складається з декількох етапів. На першому етапі маємо систему дійсних чисел  $\mathbf{R}$ , базис якої складається з одного елемента - дійсної одиниці 1.

Можна сконструювати два елемента: (1,0) та (0,1). Позначивши

$$(1,0) \rightarrow 1, (0,1) \rightarrow i \quad (1.20)$$

отримаємо систему комплексних чисел  $\mathbf{C}$ .

На другому етапі розглядаються числа, які мають вигляд  $(A, B)$ , де  $A, B \in \mathbf{C}$  з базисними елементами

$$1 \leftarrow (1,0), i \leftarrow (0,1), j \leftarrow (0,1) \text{ та } k \rightarrow (i,0) \quad (1.21)$$

причому четвертий базисний елемент утворюється з добутків двох неединичних елементів:  $ij = (i,0) = k$ ,  $ji = (-i,0) = -k$ .

Використовуючи (1.19), можна обчислити добутки всіх неединичних елементів базису (1.21):

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ik = -ki = -j, jk = -kj = i, ij = -ji = k. \quad (1.22)$$

На другому етапі КД–процедури одержуємо систему кватерніонів  $\mathbf{H}$ .

Продовжуючи цей процес, матимемо такий результат: якщо базис системи  $\Gamma_1$  складається з  $2^n$  елементів, то базис системи  $\Gamma_2$  складатиметься з  $2^{n+1}$  таких елементів, який містить:

1) одиничний елемент -  $1 \rightarrow (1,0)$ ;

- 2)  $2^n - 1$  базисних елементів системи  $\Gamma I$ :  $e_1 \rightarrow (0, e_1), \dots, e_{2^n-1} \rightarrow (0, e_{2^n-1})$ ;
- 3) нову уявну одиницю  $e_{2^n} \rightarrow (0, 1)$ ;
- 4)  $2^n - 1$  похідних базисних елементів, які є добутками нової уявної одиниці  $(0, 1)$  на базисні елементи системи  $\Gamma I$ .

Далі розглянемо алгоритм виконання процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда [7, 63–65]. Дана процедура дозволяє одержувати ГЧС з більш широкими можливостями (на відміну від КД–процедури) як по вимірності, так і по властивостях.

Будемо позначати процес подвоєння системи  $\Gamma_1(e, m)$  системою  $\Gamma_2(f, n)$  за допомогою ГК–процедури, так:

$$D(\Gamma_1(e, m), \Gamma_2(f, n)) = \Gamma_3(g, mn), \quad (1.23)$$

де  $D$  – оператор подвоєння, а  $mn$  – вимірність одержаної в результаті подвоєння ГЧС  $\Gamma_3$ .  $mn$  елементами базису  $g$  будуть всілякі добутки елементів базисів  $e$  та  $f$ :

$$g = \{e_1 f_1, e_1 f_2, \dots, e_1 f_n, \dots, e_m f_{n-1}, e_m f_n\}. \quad (1.24)$$

Таблиця Келі вихідної системи складатиметься з добутків елементів базису  $g$ , значення яких відображає властивості конкретної ГЧС.

#### **1.4. Аналіз методів побудови представлень нелінійних функцій від гіперкомплексної змінної**

Гіперкомплексним числовим системам та побудові нелінійностей від них присвячено чимало робіт. Так, в роботі [66] побудовано представлення експоненти від гіперкомплексних змінних шляхом застосування процедури Грасмана-Кліфорда.

Ще один спосіб побудови нелінійностей представлено в роботі [62], який полягає в наступному. Представлення експоненти в системі  $\Gamma(e, n)$  від числа

$M \in \Gamma(e, n) \in$  частинним розв'язком гіперкомплексного лінійного диференціального рівняння

$$\dot{X} = MX, \quad (1.25)$$

з початковою умовою

$$\text{Exp}(0) = e_1. \quad (1.26)$$

Для побудови розв'язку гіперкомплексного лінійного диференціального рівняння (1.25) представимо його у векторно-матричній формі. При цьому

$$\bar{X} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)^r, \quad (1.27)$$

а вектор-стовпчик  $\overline{MX}$ , отриманий із гіперкомплексного числа  $MX$ , можна представити у вигляді матричного добутку деякої матриці  $M$  вимірності  $n \times n$ , елементами якої є лінійні комбінації компонент гіперкомплексного числа  $M$ , на вектор-стовпчик  $\bar{X}$ :

$$\overline{MX} = M\bar{X}. \quad (1.28)$$

Тоді гіперкомплексне рівняння (1.25) можна представити у вигляді асоційованої системи із  $n$  лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\dot{\bar{X}} = M\bar{X}. \quad (1.29)$$

Далі необхідно знайти характеристичні значення  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  матриці  $M$ , тобто розв'язати характеристичне рівняння

$$M - \lambda E = 0. \quad (1.30)$$

Таким чином, характеристичні значення  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  будуть залежати від гіперкомплексного числа  $M$ . Компоненти вектор-стовпчика розв'язку  $\bar{X}$  і будуть компонентами експоненти від гіперкомплексного числа  $M$ :

$$\text{Exp}(M) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i e_i. \quad (1.31)$$

Як показано в роботах [66, 67] представлення тригонометричних та гіперболічних функцій полягає в знаходженні компонент частинних розв'язків гіперкомплексних лінійних диференціальних рівнянь, які мають вигляд:

$$\frac{d^2}{dt^2} X(t) = \pm M^2 \cdot X(t) \quad (1.32)$$

при відповідних початкових умовах. Якщо перед правою частиною рівняння (1.32) стоїть знак «+», то воно визначає гіперболічні функції, в протилежному випадку – тригонометричні.

Розбиваючи рівняння (1.32) на компоненти при однакових базисних елементах, отримуємо систему із чотирьох лінійних диференціальних рівнянь від дійсних аргументів з дійсними коефіцієнтами. Розв'язок цієї системи можна отримати на основі теорії систем лінійних диференціальних рівнянь в залежності від характеристичних коренів. При цьому, кожен частинний розв'язок системи буде компонентою при відповідному базисному елементу розв'язку рівняння (1.32), визначаючи тим самим відповідну функцію від гіперкомплексної змінної.

Розв'язки рівняння (1.32), які визначаються розв'язками системи лінійних диференціальних рівнянь, матимуть вигляд  $X = X(t, C_1, C_2, \dots, C_{2n})$ , де  $C_1, C_2, \dots, C_{2n}$  - довільні сталі інтегрування. Їх можна визначити, якщо вони будуть пов'язані системою з  $2n$  рівнянь, для чого необхідно знати значення відповідних функцій для двох конкретних значень.

Знаючи представлення таких нелінійних функцій від гіперкомплексної змінної як експонента, гіперболічні та тригонометричні функції, можливо побудувати і представлення обернених функцій. Якщо позначити пряму функцію через  $F(X)$ , де  $X = \sum_{j=1}^n x_j e_j$  — гіперкомплексна змінна, яка належить гіперкомплексній числовій системі  $\Gamma$  вимірності  $n$ , тоді обернена до неї функція  $F^{-1}(Y)$  буде визначатися за допомогою співвідношення:

$$F^{-1}(F(X)) = X \quad (1.33)$$

Із співвідношення (1.33) випливає, що область значень прямої функції повинна входити до області визначення оберненої функції. Крім того, область значень оберненої функції повинна входити до гіперкомплексної числової системи.



Як відомо з попередніх досліджень [68, 69], зображення таких нелінійностей як експонента, гіперболічні та тригонометричні функції, являють собою гіперкомплексні функції, тобто мають вигляд:

$$F(X) = \sum_{j=1}^n f_j(x_1, \dots, x_n) \cdot e_j, \quad (1.34)$$

звідки

$$F^{-1}\left(\sum_{j=1}^n f_j(x_1, \dots, x_n) \cdot e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot e_j. \quad (1.35)$$

Для того, щоб (1.35) було зображенням оберненої функції, її аргумент повинен бути просто гіперкомплексною змінною:

$$\sum_{j=1}^n f_j(x_1, \dots, x_n) \cdot e_j = \sum_{j=1}^n y_j \cdot e_j. \quad (1.36)$$

Якщо рівняння (1.36) перетворити в систему рівнянь

$$f_j(x_1, \dots, x_n) = y_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.37)$$

то її можна розв'язати відносно змінних  $x_1, \dots, x_n$ :

$$x_j = g_j(y_1, \dots, y_n); \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.38)$$

Якщо ці розв'язки підставити в (1.35), то одержимо зображення оберненої функції:

$$F^{-1}\left(\sum_{j=1}^n y_j \cdot e_j\right) = \sum_{j=1}^n g_j(y_1, \dots, y_n) \cdot e_j. \quad (1.39)$$

### **1.5. Аналіз існуючих моделей задач цифрової обробки сигналів із представленням даних у гіперкомплексних числових системах і визначення напрямків подальших досліджень**

Математичне моделювання задач цифрової обробки сигналів із представленням даних в гіперкомплексному вигляді дозволяє зменшити обчислювальну складність таких задач. Зокрема, якщо ж розглядати передавальну функцію з квадриплексними коефіцієнтами і згідно з підходом до зменшення складності таких фільтрів, виконати ізоморфний перехід до

бікомплексних коефіцієнтів, то всі арифметичні операції будуть вже виконуватися за правилами бікомплексної системи, для якої вони значно простіші.

Отже, зменшити обчислювальну складність математичного моделювання задач цифрової обробки сигналів за допомогою підходу, що ґрунтується на властивостях ізоморфного переходу між різними ГЧС. Виконання нелінійних операцій над гіперкомплексними числами за допомогою переходу від ГЧС із сильнозаповненою таблицею множення базисних елементів до ізоморфної їй ГЧС, таблиця множення базисних елементів якої є слабозаповненою, виконання операцій в ній, і зворотного переходу значно зменшує кількість необхідних дійсних операцій, особливо множення. Так при множенні гіперкомплексних чисел вимірності  $2^n$  кількість множень дійсних чисел знижується в  $n$  разів, а в інших випадках більш, ніж в  $n/2$  разів.

Тому доцільним напрямком дисертаційного дослідження являється систематизація та узагальнення чотиривимірних ГЧС з метою виокремлення таких ГЧС, які являються найбільш прийнятними при математичному моделюванні задач цифрової обробки сигналів.

Оскільки під час оперування з гіперкомплексними даними доводиться мати справу зі складними обчисленнями, то доцільним є пошук та розробка засобів оперування з гіперкомплексними даними.

## **Висновки до розділу 1**

В розділі проаналізовано сучасний стан та перспективи розвитку теоретичних та практичних аспектів представлення даних в гіперкомплексних числових системах. Такі дослідження показали доцільність використання гіперкомплексних числових систем для математичного моделювання задач цифрової обробки сигналів.

В результаті аналізу методів побудови ГЧС виділено принцип подвоєння для генерації систем четвертої вимірності, який на відміну від існуючих

дозволяє будувати класи ГЧС, які являються найбільш прийнятними при математичному моделюванні задач цифрової обробки сигналів.

Розглянуто алгоритми представлення основних алгебраїчних та функціональних характеристик гіперкомплексних числових систем, а саме: алгоритм побудови таблиць множення базисних елементів, закони виконання операцій додавання та множення, представлення спряжених елементів, закони відшукування псевдонорми та дільників нуля, що дає можливість застосувати ГЧС при математичному моделюванні практичних задач, зокрема, – задач цифрової обробки сигналів.

Досліджено метод представлення основних нелінійностей в гіперкомплексних системах за допомогою асоційованої системи лінійних диференціальних рівнянь. Застосування цього методу, порівняно з прямими методами, дає можливість зменшити середній час обчислення експоненціальної, логарифмічної, тригонометричних та гіперболічних функцій.

## РОЗДІЛ 2

### УЗАГАЛЬНЕНА СТРУКТУРА ТА ОРГАНІЗАЦІЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ОПЕРАЦІЙ В СПЕЦІАЛІЗОВАНИХ КЛАСАХ ГЧС ЧЕТВЕРТОЇ ВИМІРНОСТІ

#### 2.1. Визначення досліджуваних класів ГЧС

Як відомо [7, 63], системою кватерніонів  $H$  називається гіперкомплексна чотиривимірна система чисел з базисом  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ , таблиця множення елементів якого має вигляд:

$H$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_2$	$e_2$	$-e_1$	$e_4$	$-e_3$
$e_3$	$e_3$	$-e_4$	$-e_1$	$e_2$
$e_4$	$e_4$	$e_3$	$-e_2$	$-e_1$

(2.1)

Кватерніони є результат антикомутативного подвоєння системи комплексних чисел  $C$  тією ж системою чисел. Або, використовуючи систему позначень, введена в [62], запишемо:

$$H = D(C, C). \quad (2.2)$$

Якщо антикомутативно подвоїти систему комплексних чисел  $C$  системою подвійних чисел  $W(e,2)$  з таблицею множення

$W$	$e_1$	$e_2$
$e_1$	$e_1$	$e_2$
$e_2$	$e_2$	$e_1$

,

то одержимо систему антикватерніонів  $AH$ , або через оператор подвоєння:

$$AH = D(C(e,2), W(f,2)). \quad (2.3)$$

Дійсно, якщо взяти композицію базисів  $\{e_1, e_2\}$  та  $\{f_1, f_2\}$ , то одержимо базис  $\{e_1f_1, e_2f_1, e_1f_2, e_2f_2\}$ .

Таблиця множення одержаної гіперкомплексної числової системи будується за допомогою перемноження елементів цього базису. При цьому ми

вважаємо, що однойменні базисні елементи перемножаються за правилами систем  $S$  та  $W$ . При множенні їх між собою зберігається комутативність тільки тоді, коли хоча б один множник є  $e_1$  або  $f_1$ . Базисні елементи  $e_2$  та  $f_2$  антикомутують:  $e_2 f_2 = -f_2 e_2$ .

Наведемо декілька прикладів множення базисних елементів, з урахуванням цих правил:

$$e_1 f_1 \cdot e_1 f_1 = e_1 e_1 \cdot f_1 f_1 = e_1 f_1$$

$$e_2 f_1 \cdot e_2 f_1 = e_2 e_2 \cdot f_1 f_1 = -e_1 f_1$$

$$e_2 f_2 \cdot e_2 f_2 = -e_2 e_2 \cdot f_2 f_2 = e_1 f_1.$$

Якщо двосимвольні імена базисних елементів перейменувати в односимвольні:  $e_1 f_1 \rightarrow e_1$ ,  $e_2 f_1 \rightarrow e_2$ ,  $e_1 f_2 \rightarrow e_3$ ,  $e_2 f_2 \rightarrow e_4$ , то одержимо таблицю множення базисних елементів системи антикватерніонів:

$AH$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_2$	$e_2$	$-e_1$	$e_4$	$-e_3$
$e_3$	$e_3$	$-e_4$	$e_1$	$-e_2$
$e_4$	$e_4$	$e_3$	$e_2$	$e_1$

(2.4)

Запам'ятати дану таблицю допоможе рис. 2.1, на якому базисні елементи  $e_2, e_3, e_4$  системи антикватерніонів зображено вершинами трикутника. Добуток будь-яких двох елементів з цієї трійки рівний третьому, якщо рух від першого до другого множника співпадає з напрямком стрілки, якщо ж рух протилежний напрямку стрілки – третьому зі знаком мінус [70].

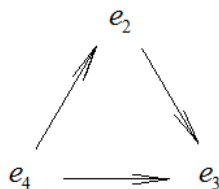


Рис. 2.1. - Схематичне зображення таблиці множення базисних елементів системи антикватерніонів

У зв'язку з приведеним вище доцільно дослідити й інші некомутативні гіперкомплексні числові системи (ГЧС) четвертої вимірності. Таких ГЧС, в

принципі, дуже багато. Оскільки вивчити всі системи дуже важко, то доцільно дослідити окремі класи таких ГЧС. Дослідимо клас ГЧС четвертої вимірності, одержаних шляхом некомутативного подвоєння за допомогою процедури Грасмана–Кліфорда основних ГЧС другої вимірності: комплексної –  $\mathcal{C}$ , подвійної –  $\mathcal{W}$  та дуальної –  $\mathcal{D}$ .

## 2.2. Дослідження властивостей одного класу некомутативних ГЧС четвертої вимірності

### 2.2.1. Визначення класу некомутативних ГЧС

Досліджуваний в даній роботі клас некомутативних ГЧС четвертої вимірності складається з некомутативних подвоєнь ГЧС другої вимірності за допомогою ГК–процедури [2, 21-23, 30].

Базис таких ГЧС складається з чотирьох елементів:

$$g = \{g_1, g_2, g_3, g_4\} = \{e_1 f_1, e_1 f_2, e_2 f_1, e_2 f_2\}. \quad (2.5)$$

Звичайно, двосимвольні елементи можна замінити односимвольними елементами з індексами. Але це буде зроблено пізніше, оскільки на даному етапі доцільно користуватися двосимвольними.

Досліджуваний клас ГЧС буде визначатися наступними умовами:

1. Елементи базисів  $e_1$  та  $f_1$  – одиничні елементи своїх систем;
2. Елементи таблиці Келі ГЧС  $g$  є добутки вигляду:  $g_i g_k = e_j f_s e_t f_r$ ,

значення яких можна обчислити шляхом комутації множників та використання таблиць Келі подвоєнаних ГЧС; при цьому будемо вважати, що  $e_1$  та  $f_1$  комутують з  $e_2$  та  $f_2$ , тобто  $e_1 f_2 = f_2 e_1, e_2 f_1 = f_1 e_2$ , а останні антикомутують між собою, тобто  $e_2 f_2 = -f_2 e_2$ .

Наприклад:

$$g_1 g_1 = e_1 f_1 e_1 f_1 = e_1 e_1 f_1 f_1 = e_1 f_1 = g_1;$$

$$g_2 g_1 = e_1 f_2 e_1 f_1 = e_1 e_1 f_2 f_1 = e_1 f_2 = g_2;$$

$$g_2 g_3 = e_1 f_2 e_2 f_1 = -e_1 e_2 f_2 f_1 = -e_2 f_2 = -g_4;$$

$$g_2 g_2 = e_1 f_2 e_1 f_2 = e_1 e_1 f_2 f_2 = e_1 f_2 f_2;$$

$$g_4 g_4 = e_2 f_2 e_2 f_2 = -e_2 e_2 f_2 f_2.$$

Останні два приклади елементів таблиці Келі можна довести до кінця тільки для конкретних подвоєваних ГЧС [66, 71, 72].

3. Елементи таблиці Келі, які знаходяться під головною діагоналлю, але не в першому стовпчику, протилежні елементам, симетричним відносно головної діагоналі, тобто

$$g_3 g_2 = -g_2 g_3; g_4 g_2 = -g_2 g_4; g_4 g_3 = -g_3 g_4.$$

З урахуванням цих умов узагальнена таблиця Келі для ГЧС цього класу буде мати такий вигляд:

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$
$g_1$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$
$g_2$	$g_2$	$e_1 f_2 f_2$	$-g_4$	$-e_2 f_2 f_2$
$g_3$	$g_3$	$g_4$	$e_2 e_2 f_1$	$e_2 e_2 f_2$
$g_4$	$g_4$	$e_2 f_2 f_2$	$-e_2 e_2 f_2$	$-e_2 e_2 f_2 f_2$

(2.6)

Як відомо [7, 62, 73] існують три класи ізоморфізмів ГЧС другої вимірності. Виберемо з цих класів по одному представнику: систему комплексних чисел  $C$ , систему подвійних чисел  $W$  і систему дуальних чисел  $D$ .

Як показано в роботі [77], перші дві операнди в операторі подвоєння можна комутувати, оскільки одержані таблиці Келі відрізняються тільки порядком рядків та стовпчиків, тобто вони є ізоморфними.

З урахуванням цього досліджуваний клас ГЧС складається з шести представників класів ізоморфізмів, таблиці Келі яких наведено в додатку А:

1.  $D_n(C, C, 4) = H$  - система кватерніонів;
2.  $D_n(C, W, 4) = AH$  - система антикватерніонів;
3.  $D_n(C, D, 4) \simeq D_n(C, D, 4)$ ;
4.  $D_n(W, W, 4)$ ;
5.  $D_n(D, D, 4)$ ;

$$6. \quad \mathcal{D}_n(W, D, 4) \approx \mathcal{D}_n(D, W, 4).$$

### 2.2.2. Встановлення зв'язків між узагальненими кватерніонами та процедурою подвоєння Грасмана-Кліфорда

Вперше узагальнені кватерніони були застосовані при зображенні просторово-часових груп Куртом Геделем в 1949 році у роботі [74], в якій він представив розв'язок рівнянь Енштейна гравітаційного поля за допомогою цих кватерніонів.

Узагальнені кватерніони також досліджені в роботах багатьох інших авторів, наприклад [75-78]. Проаналізуємо деякі результати одержані ними.

Узагальнений кватерніон має вигляд:

$$q = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 \quad (2.7)$$

де  $a_i$  - дійсні числа, а  $e_i$  при  $i = 2, \dots, 4$  - уявні одиниці, які задовільняють наступну таблицю Келі

$H_{\alpha\beta}$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_2$	$e_2$	$-\alpha e_1$	$e_4$	$-\alpha e_3$
$e_3$	$e_3$	$-e_4$	$-\beta e_1$	$\beta e_2$
$e_4$	$e_4$	$\alpha e_3$	$-\beta e_2$	$-\alpha \beta e_1$

), (2.8)

де  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Оскільки  $e_1$  - дійсна одиниця, то узагальнений кватерніон  $q$  складається з двох частин: дійсної та уявної, які позначаються, відповідно,  $S(q) = a_1 e_1$  та  $V(q) = a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$ , таким чином (2.7) можна записати у вигляді

$$q = S(q) + V(q) \quad (2.9)$$

Система кватерніонів  $H$  належить до класу узагальнених кватерніонів  $H_{\alpha\beta}$  при  $\alpha = 1, \beta = 1$ . Якщо підставити дані значення  $\alpha$  та  $\beta$  в (2.8), то отримаємо таблицю Келі системи кватерніонів (2.1).

Коротко наведемо властивості узагальнених кватерніонів. Операція множення вводиться таким же чином, як і для будь-яких інших гіперкомплексних чисел. Тобто виконується правило:



$$\begin{aligned}
& (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4)(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4) = \\
& = (a_1b_1 - \alpha a_2b_2 - \beta a_3b_3 - \alpha\beta a_4b_4)e_1 + \\
& + (a_2b_1 + a_1b_2 - \beta a_4b_3 + \beta a_3b_4)e_2 + \\
& + (a_3b_1 + \alpha a_4b_2 + a_1b_3 - \alpha a_2b_4)e_3 + \\
& + (a_4b_1 - a_3b_2 + a_2b_3 + a_1b_4)e_4
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Або з допомогою (2.8), (2.10) можна записати у вигляді

$$qp = S(q)S(p) - \langle V(q), V(p) \rangle + S(q)V(p) + S(p)V(q) + V(p) \times V(q), \tag{2.11}$$

де  $S(q) = a_1e_1$ ,  $S(p) = b_1e_1$ ,  $\langle V(q), V(p) \rangle = \alpha a_2b_2 + \beta a_3b_3 + \alpha\beta a_4b_4$ ,

$$V(p) \times V(q) = \beta(a_3b_4 - a_4b_3)e_2 + \alpha(a_4b_2 - a_2b_4)e_3 + (a_2b_3 - a_3b_2)e_4$$

Спряження для даних чисел вводиться як і для кватерніонів, тобто, якщо вихідне число  $q = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4$  то спряжене до нього має вигляд:

$$\bar{q} = a_1e_1 - a_2e_2 - a_3e_3 - a_4e_4 \tag{2.12}$$

На основі спряження вводиться норма, яка визначається із рівності

$$N(q) = q\bar{q} = \bar{q}q = a_1^2 + \alpha a_2^2 + \beta a_3^2 + \alpha\beta a_4^2 \tag{2.13}$$

Також, в роботі [79] розглянуто конкретні ГЧС в залежності від того, який знак мають  $\alpha$  та  $\beta$ .

Наведено наступні випадки:

1.  $\alpha = \beta = 1$ , тоді гіперкомплексна числова система  $H_{\alpha\beta}$  є системою кватерніонів;
2.  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -1$ ,  $H_{\alpha\beta}$  є системою антикватерніонів;
3.  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $H_{\alpha\beta}$  - система псевдо-кватерніонів;
4.  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 0$ ,  $H_{\alpha\beta}$  - система псевдо-антикватерніонів;
5.  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $H_{\alpha\beta}$  - система  $\frac{1}{4}$ -кватерніонів.

Якщо аналізувати отримані результати далі, то можна побачити, що система антикватерніонів  $\mathbf{AH}$  відповідає другому випадку узагальнених кватерніонів  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -1$  і називається в роботі [79] системою антикватерніонів.

Системі  $D(\mathbf{C}, \mathbf{D}, 4)$  відповідає третій випадок узагальнених кватерніонів – система псевдо-кватерніонів при  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ .

Системі  $D(W, D, 4)$  відповідає четвертий випадок – система псевдо-антикватерніонів при  $\alpha = -1, \beta = 0$ .

I, нарешті, п'ятому випадку  $1/4$ -кватерніонів при  $\alpha = 0, \beta = 0$  відповідає система  $D(D, D, 4)$ .

У випадку узагальнених кватерніонів розглядаються 5 окремих ГЧС, а за допомогою процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда отримано 6 систем. Тобто, система  $D(W, W, 4)$  для узагальнених кватерніонів не розглядається. Проаналізувавши таблицю Келі даної системи можна визначити, що вона відповідає таблиці множення базисних елементів узагальнених кватерніонів (2.8) при  $\alpha = -1, \beta = -1$ .

### 2.2.3. Дослідження арифметичних та алгебраїчних операцій

В даному класі систем введено операції додавання та множення таким чином: сумою двох чисел  $w_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4$  і  $w_2 = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4$  із будь-якої з систем, наведених в додатку А є число  $w_3$  :

$$w_3 = w_1 + w_2 = (a_1 + b_1)e_1 + (a_2 + b_2)e_2 + (a_3 + b_3)e_3 + (a_4 + b_4)e_4. \quad (2.14)$$

Щодо *добутку*, то для кожної із систем він матиме інший вигляд, оскільки залежить від таблиці Келі в розглядуваній гіперкомплексній числовій системи. Правила множення двох елементів із кожної з систем некомутативного класу визначаються з (2.10), шляхом підстановки конкретних значень  $\alpha$  та  $\beta$ , які наведемо в додатку Б.

Відповідно до правил додавання та множення можна виділити їх основні властивості:

- 1) операція додавання комутативна:  $w_1 + w_2 = w_2 + w_1$ ;
- 2) операція додавання асоціативна:  $(w_1 + w_2) + w_3 = w_1 + (w_2 + w_3)$ ;
- 3) операція множення некомутативна, тобто:

$$w_1w_2 \neq w_2w_1. \quad (2.15)$$

Доведемо, наприклад, для системи  $D_n(W, D, 4)$ , дійсно:

$$\begin{aligned}
w_1 w_2 &= (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4)(b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4) = \\
&= (a_1 b_1 - a_2 b_2) e_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) e_2 + \\
&+ (a_1 b_3 - a_2 b_4 + a_3 b_1 + a_4 b_2) e_3 + (a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1) e_4
\end{aligned}$$

але зворотній порядок такий:

$$\begin{aligned}
w_2 w_1 &= (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4)(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) = \\
&= (b_1 a_1 - b_2 a_2) e_1 + (b_1 a_2 + b_2 a_1) e_2 + \\
&+ (b_1 a_3 - b_2 a_4 + b_3 a_1 + b_4 a_2) e_3 + (b_1 a_4 + b_2 a_3 - b_3 a_2 + b_4 a_1) e_4 = \\
&= (a_1 b_1 - a_2 b_2) e_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) e_2 + \\
&+ (a_1 b_3 + a_2 b_4 + a_3 b_1 - a_4 b_2) e_3 + (a_1 b_4 - a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1) e_4 \neq w_1 w_2
\end{aligned}$$

Для інших систем  $D_n$  класу доведення аналогічне.

4) операція множення асоціативна:  $w_1(w_2 w_3) = (w_1 w_2) w_3$ .

Це можна довести безпосередньо, використовуючи правила множення базисних елементів.

5) Таким же чином можна довести дистрибутивність:  
 $w_1(w_2 + w_3) = w_1 w_2 + w_1 w_3$ ;

6) для кожної із розглядуваних систем визначена дія множення на скаляр  $k \in R$ ,  $k w_1 = k a_1 e_1 + k a_2 e_2 + k a_3 e_3 + k a_4 e_4$ ;

7) для  $\forall k_1, k_2 \in R$  справедливо  $(k_1 w_1)(k_2 w_2) = k_1 k_2 (w_1 w_2)$ .

Як уже було зазначено в розділі 1, норма гіперкомплексного числа вводить на основі (1.14). Таким чином, для  $D_n$  матриця норми має вигляд:

$$N(w) = \begin{vmatrix} a_1 & -\alpha a_2 & -\beta a_3 & -\alpha \beta a_4 \\ a_2 & a_1 & -\beta a_4 & \beta a_3 \\ a_3 & \alpha a_4 & a_1 & -\lambda a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}. \quad (2.16)$$

Обчисливши детермінант матриці одержимо норму:

$$N(w) = (a_1^2 + \alpha a_2^2 + \beta a_3^2 + \alpha \beta a_4^2)^2. \quad (2.17)$$

Часто вираз (2.18) розглядають без показника степеня 2, і називають такий вираз псевдонормою.

$$N(w) = a_1^2 + \alpha a_2^2 + \beta a_3^2 + \alpha \beta a_4^2. \quad (2.18)$$

В теорії кватерніонів такий вигляд псевдонорми відповідає геометричній інтерпретації

Для конкретної гіперкомплексної числової системи некомутативного класу  $D_n$  псевдонорма визначається за таким алгоритмом шляхом підставлення своїх значень  $\alpha$  та  $\beta$  в (2.18). Варто зазначити, що для кожної з цих систем матриця норми матиме інший вигляд, а відповідно з цим і відрізнятиметься представлення псевдонорми, що можна побачити в додатку Б.

У деяких системах псевдонорма може бути від'ємною. Можна показати, що введена таким методом псевдонорма мультиплікативна для кожної із розглядуваних систем, тобто виконується рівність:

$$N(w_1 w_2) = N(w_1) N(w_2). \quad (2.19)$$

Маючи представлення норми, можливо ввести поняття спряженого елемента. Нехай ми маємо довільне число  $w = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$ , спряжене до нього позначимо  $\bar{w} = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4$ , де  $b_1, b_2, b_3, b_4$  - невідомі коефіцієнти.

Як запропоновано в [62], означення спряженого вводиться на основі рівності

$$w \bar{w} = N(w), \quad (2.20)$$

Підставивши введені позначення та скориставшись правилом множення і прирівнявши коефіцієнти при однакових базисних елементах отримаємо лінійну алгебраїчну систему відносно змінних  $b_1, b_2, b_3, b_4$ .

Для гіперкомплексних числових систем  $D_n$  така лінійна алгебраїчна система матиме вигляд

$$\begin{cases} a_1 b_1 - \alpha a_2 b_2 - \beta a_3 b_3 - \alpha \beta a_4 b_4 = a_1^2 + \alpha a_2^2 + \beta a_3^2 + \alpha \beta a_4^2 \\ a_2 b_1 + a_1 b_2 - \beta a_4 b_3 + \beta a_3 b_4 = 0 \\ a_3 b_1 + \alpha a_4 b_2 + a_1 b_3 - \alpha a_2 b_4 = 0 \\ a_4 b_1 - a_3 b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_4 = 0 \end{cases}, \quad (2.21)$$

розв'язками якої є:

$$b_1 = a_1, b_2 = -a_2, b_3 = -a_3, b_4 = -a_4. \quad (2.22)$$

Тому якщо вихідне число  $w = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$ , то спряжене до нього класі має вигляд:

$$\bar{w}_{D_m} = a_1 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3 - a_4 e_4. \quad (2.23)$$

Дійсно, перевіримо, наприклад, для системи  $AN$ :

$$\begin{aligned} w \cdot \bar{w} &= (a_1 a_1 - a_2 (-a_2) + a_3 (-a_3) + a_4 (-a_4))e_1 + (a_1 (-a_2) + a_2 a_1 - a_3 (-a_4) + a_4 (-a_3))e_2 + \\ &+ (a_1 (-a_3) + a_3 a_1 - a_2 (-a_4) + a_4 (-a_2))e_3 + (a_1 (-a_4) + a_4 a_1 + a_2 (-a_3) - a_3 (-a_2))e_4 = \\ &= (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2)e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4 = N(w) \end{aligned}$$

Також, аналізуючи структуру норми, буває необхідним перевірити, при проведенні обчислень, чи являється число дільником нуля, наприклад, при виконанні алгоритму ділення, що буде безпосередньо показано пізніше.

Нагадаємо, що відмінне від нуля гіперкомплексне число  $w_1 \neq 0$  називається *дільником нуля*, якщо існує таке інше гіперкомплексне число  $w_2 \neq 0$ , що їх добуток дорівнює нулю  $w_1 w_2 = 0$ , а це означає таке ж співвідношення між їх нормами:

$$N(w_1 w_2) = 0. \quad (2.24)$$

На основі (2.19) норма дільника нуля повинна дорівнювати нулю

$$N(w_1) = 0. \quad (2.25)$$

З (2.25) випливають ознаки дільників нуля в будь-якій з розглядуваних гіперкомплексних числових систем.

### 2.3. Дослідження властивостей одного класу комутативних ГЧС четвертої вимірності

#### 2.3.1. Виведення узагальненої таблиці Келі комутативного класу ГЧС

Застосування гіперкомплексних числових систем при вирішенні практичних задач у багатьох напрямках науки і техніки призводять до підвищення інтересу багатьох дослідників у цьому напрямку. Зокрема, той факт, що система квадриплексних чисел  $K$  є результатом комутативного подвоєння системи комплексних чисел спонукає до проведення досліджень аналогічних підрозділу 2.2, тобто дослідження класу комутативних гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності, які є результатом

комутативного подвоєння систем комплексних  $C$ , подвійних  $W$  та дуальних чисел  $D$  за допомогою ГК–процедури.

Аналогічно, як у випадку некомутативного подвоєння, будемо позначати процес подвоєння системи  $\Gamma_1(e, m)$  системою  $\Gamma_2(f, 2)$  так:

$$D_k(\Gamma_1(e, m), \Gamma_2(f, 2)) = \Gamma_3(g, 2m),$$

де  $D_k$  – оператор комутативного подвоєння, а  $2m$  – вимірність одержаної в результаті подвоєння ГЧС  $\Gamma_3$ .  $2m$  елементами базису  $g$  будуть всілякі добутки елементів базисів  $e$  та  $f$ :  $g = \{e_1 f_1, e_1 f_2, e_2 f_1, \dots, e_m f_2\}$ .

Згідно ГК–процедури ми представляємо довільне число із будь-якої подвоюваної системи  $\Gamma_1$  у вигляді:  $z = a_1 e_1 + a_2 e_2$ , де  $e_1$  – одиничний базисний елемент, а  $e_2^2 = -1, +1, 0$  для систем  $C$ ,  $W$  та  $D$  відповідно. В загальному можемо записати

$$e_2^2 = \alpha e_1, \quad (2.26)$$

$$\alpha \in \{-1, +1, 0\}.$$

На наступному кроці ГК–процедури розглядаємо гіперкомплексні числа із системи  $\Gamma_2$ , яку називатимемо системою, що подвоює

$$u = z_1 f_1 + z_2 f_2 \quad (2.27)$$

де  $f_1$  – одиничний базисний елемент, а  $f_2^2 = -1, +1, 0$ . Аналогічно з (2.26) можна записати

$$f_2^2 = \beta f_1, \quad (2.28)$$

$\beta \in \{-1, +1, 0\}$ , причому  $f_2$  комутує з  $e_2$ , тобто

$$f_2 e_2 = e_2 f_2 \quad (2.29)$$

Тоді (2.27) матиме вигляд:

$$u = (a_1 e_1 + a_2 e_2) f_1 + (a_3 e_1 + a_4 e_2) f_2 = a_1 e_1 f_1 + a_2 e_2 f_1 + a_3 e_1 f_2 + a_4 e_2 f_2 \quad (2.30)$$

Базис таких ГЧС складається з чотирьох елементів:

$$g = \{g_1, g_2, g_3, g_4\} = \{e_1 f_1, e_2 f_1, e_1 f_2, e_2 f_2\}.$$

Таблиця Келі для ГЧС досліджуваного класу буде мати такий вигляд:

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$
$g_1$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$
$g_2$	$g_2$	$\alpha g_1$	$g_4$	$\alpha g_3$
$g_3$	$g_3$	$g_4$	$\beta g_1$	$\beta g_2$
$g_4$	$g_4$	$\alpha g_3$	$\beta g_2$	$\alpha \beta g_1$

(2.31)

На цьому етапі можна побачити, що таблиця множення базисних елементів (2.31) має аналогічний вигляд таблиці Келі узагальнених кватерніонів (2.8), для яких визначено ряд арифметичних та алгебраїчних операцій.

Отже, досліджуваний клас ГЧС складається з таких представників класів ізоморфізмів:

1.  $\mathbf{K} = D_k(\mathbf{C}, \mathbf{C}, 4)$  - система квадриплексних чисел;
2.  $D_k(\mathbf{C}, \mathbf{W}, 4)$ ;
3.  $D_k(\mathbf{C}, \mathbf{D}, 4)$ ;
4.  $D_k(\mathbf{W}, \mathbf{C}, 4)$ ;
5.  $D_k(\mathbf{W}, \mathbf{W}, 4)$ ;
6.  $D_k(\mathbf{W}, \mathbf{D}, 4)$ ;
7.  $D_k(\mathbf{D}, \mathbf{C}, 4)$ ;
8.  $D_k(\mathbf{D}, \mathbf{W}, 4)$ ;
9.  $D_k(\mathbf{D}, \mathbf{D}, 4)$ .

Таблиці Келі вищенаведених ГЧС можна легко отримати, підставивши в (2.31) конкретні значення  $\alpha$  та  $\beta$ . В додатку Б наведено результати проведення даного алгоритму.

Як показано в роботі [64], перші дві операнди в операторі подвоєння можна комутувати, оскільки одержані таблиці Келі відрізняються тільки порядком рядків та стовпчиків, тобто вони є ізоморфними. Тому досліджуваний клас звужується і складається з шести представників класів ізоморфізмів:

1.  $D_k(\mathbf{C}, \mathbf{C}, 4)$ ;
2.  $D_k(\mathbf{C}, \mathbf{W}, 4) \simeq D_k(\mathbf{W}, \mathbf{C}, 4)$ ;
3.  $D_k(\mathbf{C}, \mathbf{D}, 4) \simeq D_k(\mathbf{D}, \mathbf{C}, 4)$ ;

4.  $D_k(W, W, 4)$ ;
5.  $D_k(W, D, 4) \approx D_k(D, W, 4)$ ;
6.  $D_k(D, D, 4)$ ,

де  $\approx$  - оператор ізоморфізму.

Як видно з додатка Б,  $D_k(C, C, 4)$  є добревідомою системою квадриплексних чисел  $K$ , яка вже знайшла чимало застосувань в науці і техніці. А система  $D_k(C, D, 4)$  в роботі [62], отримана шляхом перерахування класів ізоморфізмів ГЧС, має позначення  $\Gamma_{41}$ .

### 2.3.2. Дослідження арифметичних та алгебраїчних операцій

В комутативному класі ГЧС сума визначається, також, за правилом (2.14), а добуток залежить від таблиці Келі розглядуваної гіперкомплексної числової системи.

Оскільки ми маємо узагальнену таблицю множення базисних елементів досліджуваного класу (2.31), то можемо знайти загальне правило множення для цілого комутативного класу ГЧС:

$$\begin{aligned}
 w_1 \cdot w_2 &= (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4)(b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4) = \\
 &= (a_1 b_1 + \alpha a_2 b_2 + \beta a_3 b_3 + \alpha \beta a_4 b_4) e_1 + \\
 &+ (a_2 b_1 + a_1 b_2 + \beta a_4 b_3 + \beta a_3 b_4) e_2 + \\
 &+ (a_3 b_1 + \alpha a_4 b_2 + a_1 b_3 + \alpha a_2 b_4) e_3 + \\
 &+ (a_4 b_1 + a_3 b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_4) e_4
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Для того, щоб знайти правило множення для конкретної ГЧС досліджуваного класу достатньо підставити конкретні значення  $\alpha$  та  $\beta$ .

Основними властивостями операцій додавання та множення є: комутативність, асоціативність, дистрибутивність додавання відносно множення, множення на скаляр.

Аналогічно як і для класу некомутативних ГЧС, норма гіперкомплексного числа вводиться на основі (1.24).

Для  $D_k$  класу матриця норми має вигляд:



$$N(w) = \begin{vmatrix} a_1 & \alpha a_2 & \beta a_3 & \alpha \beta a_4 \\ a_2 & a_1 & \beta a_4 & \beta a_3 \\ a_3 & \alpha a_4 & a_1 & \alpha a_2 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad (2.33)$$

і, відповідно, норма матиме наступне представлення

$$N(w) = (a_1^2 - \alpha a_2^2 - \beta a_3^2 + \alpha \beta a_4^2)^2 - \alpha \beta (2a_1 a_4 - 2a_2 a_3)^2. \quad (2.34)$$

Для конкретної ГЧС норма визначається за таким алгоритмом шляхом підстановки конкретних значень  $\alpha$  і  $\beta$ . Варто зазначити, що для кожної із систем матриця норми матиме інший вигляд, що можна побачити із додатка Б:

Можна побачити, в системах  $K$  та  $D_k(W, W, 4)$  норма може бути від'ємною. Безпосередніми обчисленнями можна показати, що введена таким чином норма мультиплікативна для будь-якої розглядуваної ГЧС, тобто виконується рівність (2.19).

Як було показано вище, спряжене число можна знайти розв'язуючи лінійну систему рівнянь, отриману з рівності (2.20) шляхом прирівняння відповідних коефіцієнтів при однакових базисних елементах.

Для комутативного класу лінійна алгебраїчна система відносно невідомих  $b_1, b_2, b_3, b_4$  матиме вигляд

$$\begin{cases} a_1 b_1 + \alpha a_2 b_2 + \beta a_3 b_3 + \alpha \beta a_4 b_4 = (a_1^2 - \alpha a_2^2 - \beta a_3^2 + \alpha \beta a_4^2)^2 - \alpha \beta (2a_1 a_4 - 2a_2 a_3)^2 \\ a_2 b_1 + a_1 b_2 + \beta a_4 b_3 + \beta a_3 b_4 = 0 \\ a_3 b_1 + \alpha a_4 b_2 + a_1 b_3 + \alpha a_2 b_4 = 0 \\ a_4 b_1 + a_3 b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_4 = 0 \end{cases}, \quad (2.35)$$

розв'язками якої є:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 (a_1^2 - \alpha a_2^2 - \beta a_3^2 - \alpha \beta a_4^2) + 2\alpha \beta a_3 a_2 a_4, \\ b_2 &= a_2 (-a_1^2 + \alpha a_2^2 - \beta a_3^2 - \alpha \beta a_4^2) + 2\beta a_1 a_3 a_4 \\ b_3 &= a_3 (-a_1^2 - \alpha a_2^2 + \beta a_3^2 - \alpha \beta a_4^2) + 2\alpha a_1 a_2 a_4 \\ b_4 &= a_4 (-a_1^2 - \alpha a_2^2 - \beta a_3^2 + \alpha \beta a_4^2) + 2a_1 a_2 a_3 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Тобто, спряжене в комутативному класі має вигляд:

$$\begin{aligned}
\overline{w}_{D_k} = & \left( a_1 (a_1^2 - \alpha a_2^2 - \beta a_3^2 - \alpha \beta a_4^2) + 2\alpha \beta a_3 a_2 a_4 \right) e_1 + \\
& + \left( a_2 (-a_1^2 + \alpha a_2^2 - \beta a_3^2 - \alpha \beta a_4^2) + 2\beta a_1 a_3 a_4 \right) e_2 + \\
& + \left( a_3 (-a_1^2 - \alpha a_2^2 + \beta a_3^2 - \alpha \beta a_4^2) + 2\alpha a_1 a_2 a_4 \right) e_3 + \\
& + \left( a_4 (-a_1^2 - \alpha a_2^2 - \beta a_3^2 + \alpha \beta a_4^2) + 2a_1 a_2 a_3 \right) e_4
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Для ГЧС розглядуваного класу спряжені числа можна отримати простіше, виходячи із наступних міркувань. Ці ГЧС отримуються з допомогою ГК-процедури подвоєння  $D_k(\Gamma_1(e, n), \Gamma_2(f, 2))$  однієї системи вимірності 2 другою системою вимірності 2. В кожній з цих ГЧС спряжені числа отримуються зміною знака перед членом, який містить другий базисний елемент: якщо  $X = x_1 e_1 + x_2 e_2$ , то спряжене число  $\overline{X} = x_1 e_1 - x_2 e_2$ . Таким чином, маємо два рівня спряження:

- 1) по ГЧС  $\Gamma_1(e, n)$  в операторі подвоєння  $D_k(\Gamma_1(e, n), \Gamma_2(f, 2))$ ;
- 2) по ГЧС  $\Gamma_2(e, n)$  в операторі подвоєння.

Комбінуючи ці спряження, можна отримати четвірку спряжених чисел в будь-якій із розглядуваних ГЧС:

$$\begin{aligned}
X &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 \\
\overline{X}_1 &= x_1 e_1 - x_2 e_2 + x_3 e_3 - x_4 e_4 \\
\overline{X}_2 &= x_1 e_1 + x_2 e_2 - x_3 e_3 - x_4 e_4 \\
\overline{X}_3 &= x_1 e_1 - x_2 e_2 - x_3 e_3 + x_4 e_4
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Цілком природньо, що добуток цих чотирьох чисел дорівнює псевдонормі. З допомогою (2.32) можна отримати:

$$X \cdot \overline{X}_1 \cdot \overline{X}_2 \cdot \overline{X}_3 = ((x_1^2 - \alpha x_2^2 - \beta x_3^2 + \alpha \beta x_4^2)^2 - \alpha \beta (2x_1 x_4 - 2x_2 x_3)^2) \cdot e_1 = N(X),$$

що співпадає з виразом (2.34) за виключенням базисного елемента  $e_1$ , який в даному випадку можна опустити, маючи на увазі, що це дійсне число.

Однак використання спряжених чисел у вигляді (2.38) є незручним, так як при конкретних обчисленнях питання полягає в тому, що по вихідному гіперкомплексному числу потрібно знайти таке гіперкомплексне число, що їх добуток дорівнює нормі. Так як, наприклад, в алгоритмі ділення. Тоді потрібно або перемножити трійку спряжених, або розв'язати систему рівнянь (2.35). Наведемо одразу кінцеві результати. Якщо ввести позначення:

$$\Delta = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2; \quad \lambda = x_2x_3 - x_1x_4,$$

то спряжене число буде мати вигляд:

$$\bar{X} = (x_1\Delta + x_4\lambda)e_1 - (x_2\Delta + \beta x_3\lambda)e_2 - (x_3\Delta + \alpha x_2\lambda)e_3 + (x_4\Delta + x_1\lambda)e_4. \quad (2.39)$$

Підставляючи в (2.39) різні набори значень параметрів  $\alpha$  і  $\beta$ , отримаємо вирази для спряжених чисел в різних ГЧС.

Як було відмічено раніше, в загальному випадку в ГЧС існують дільники нуля, норма яких дорівнює нулю.

В комутативному класі ГЧС рівність (2.25) має вигляд:

$$(a_1^2 - \alpha a_2^2 - \beta a_3^2 + \alpha\beta a_4^2)^2 - \alpha\beta(2a_1a_4 - 2a_2a_3)^2 = 0, \quad (2.40)$$

$$\text{або } (a_1^2 - \alpha a_2^2 - \beta a_3^2 + \alpha\beta a_4^2)^2 = \alpha\beta(2a_1a_4 - 2a_2a_3)^2. \quad (2.41)$$

Оскільки обидві частини рівності (2.41) піднесені до квадрату, то розглянемо два випадки:

$$1) \quad a_1^2 - \alpha a_2^2 - \beta a_3^2 + \alpha\beta a_4^2 = \sqrt{\alpha\beta}(2a_1a_4 - 2a_2a_3),$$

$$a_1^2 + \alpha\beta a_4^2 - 2\sqrt{\alpha\beta}a_1a_4 = \alpha a_2^2 + \beta a_3^2 - 2\sqrt{\alpha\beta}a_2a_3$$

$$(a_1 - \sqrt{\alpha\beta}a_4)^2 = (\sqrt{\alpha}a_2 - \sqrt{\beta}a_3)^2$$

$$a_1 - \sqrt{\alpha\beta}a_4 = \pm(\sqrt{\alpha}a_2 - \sqrt{\beta}a_3). \quad (2.42)$$

$$2) \quad a_1^2 - \alpha a_2^2 - \beta a_3^2 + \alpha\beta a_4^2 = -\sqrt{\alpha\beta}(2a_1a_4 - 2a_2a_3)$$

$$a_1^2 + \alpha\beta a_4^2 + 2\sqrt{\alpha\beta}a_1a_4 = \alpha a_2^2 + \beta a_3^2 + 2\sqrt{\alpha\beta}a_2a_3$$

$$(a_1 + \sqrt{\alpha\beta}a_4)^2 = (\sqrt{\alpha}a_2 + \sqrt{\beta}a_3)^2$$

$$a_1 + \sqrt{\alpha\beta}a_4 = \pm(\sqrt{\alpha}a_2 + \sqrt{\beta}a_3). \quad (2.43)$$

З (2.42) та (2.43) випливають ознаки дільників нуля для всіх ГЧС комутативного класу.

Проведемо такий аналіз, наприклад, для ГЧС квадриплексних чисел  $K$ :

$$N(w) = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2 - (2a_1a_4 - 2a_2a_3)^2 = 0,$$

звідки  $(a_1 - a_4)^2 + (a_2 - a_3)^2 = 0$ , і ознаки дільника нуля в цій системі матимуть

вигляд  $a_1 = a_4$ ,  $a_2 = a_3$ .

Ознаки дільників нуля для всіх ГЧС досліджуваного класу наведено в додатку Б.

#### 2.4. Автоподвоєння неканонічних систем другої вимірності

Як показано в [7, 64], будь-яка неканонічна ГЧС другої вимірності ізоморфна ГЧС, яка має вигляд:

$$\begin{array}{c|cc} Q_2 & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 \\ e_2 & e_2 & pe_1 + qe_2 \end{array} . \quad (2.44)$$

Норма в цій ГЧС має вигляд  $N = a_1^2 + qa_1a_2 - pa_2^2$ , а спряжене число  $\bar{A} = (a_1 + qa_2)e_1 - a_2e_2$ . При цьому, якщо дискримінант цієї ГЧС  $k = p + \frac{q^2}{4}$  додатний, то система ізоморфна системі подвійних чисел  $\mathcal{W}$ , якщо  $k$  від'ємне – системі комплексних чисел  $\mathcal{C}$ , якщо рівний нулю, то ця ГЧС ізоморфна системі дуальних чисел  $\mathcal{D}$  [7].

Систему кватерніонів  $\mathcal{H}$  отримуємо некомутативним подвоєнням ГЧС (2.44) з параметрами  $p = -1, q = 0$ , тобто системи комплексних чисел  $\mathcal{C}$ , за допомогою процедури Грасмана-Кліфорда:  $\mathcal{H} = \mathcal{D}_n(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ .

Система квадриплексних чисел  $\mathcal{K}$  отримується аналогічно системі кватерніонів, але подвоєння тут уже комутативне:  $\mathcal{K} = \mathcal{D}_k(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ .

Незважаючи на невеликі відмінності в побудові таблиць множення для квадриплексних чисел  $\mathcal{K}$  та кватерніонів  $\mathcal{H}$  (додаток Б та додаток В відповідно) їхні властивості кардинально відрізняються.

Операндами операторів подвоєння можуть бути різні гіперкомплексні числові системи. При цьому отримуватимемо різноманітні ГЧС четвертої вимірності, властивості і закони операцій яких доведеться встановлювати окремо для кожної системи.

Використання в операторах подвоєння ГЧС узагальненого вигляду дозволяє отримати цілі класи гіперкомплексних числових систем четвертої

вимірності з двома параметрами, які будуть фігурувати в усіх властивостях і операціях над числами в цих ГЧС. Виконавши підстановку значень цих двох параметрів, отримаємо властивості цих ГЧС [2].

В принципі, в операторі подвоєння можуть використовуватися як однакові ГЧС  $Q_2$ , так і різні в тому сенсі, що у них будуть різні набори значень параметрів. Оскільки другий варіант значно важчий при синтезі ГЧС, то на цьому етапі дослідження обмежимося першим варіантом. Тобто, мова йде про «автоподвоєння» системи  $Q_2$ .

#### 2.4.1. Комутативне автоподвоєння

Розглянемо комутативне автоподвоєння системи  $Q_2$ . Нехай ми маємо два екземпляри ГЧС  $Q_2$ . Не дивлячись на те, що ці системи однакові і таблиця множення має вигляд (2.44), для опису дій оператора множення їх необхідно розрізнити в тому сенсі, що ідентифікатори базисів у них різні. Але таблиці множення однакові з точністю до ідентифікатора базису, що ніяк не відображається на властивостях системи і законах операцій в них.

І так, задача зводиться до знаходження результатів дій оператора комутативного множення на ГЧС  $Q_1(e,2)$  та  $Q_2(f,2)$ :

$$Q_4^k(ef,4) = D_k(Q_1(e,2), Q_2(f,2)). \quad (2.45)$$

Якщо базиси подвоєваних систем мають вигляд:  $e = \{e_1, e_2\}$  і  $f = \{f_1, f_2\}$ , то базис  $ef$  триманої системи буде прямим добутком базисів:

$$ef = \{e_1f_1, e_1f_2, e_2f_1, e_2f_2\}. \quad (2.46)$$

Четверта вимірність базису отримується внаслідок комутативності базисних елементів:  $e_i f_j = f_j e_i$ . Далі для побудови таблиці множення необхідно знайти всі можливі добутки базисних елементів базису  $ef$ . При цьому враховується комутативність всіх базисних елементів обох подвоєваних базисів  $e$  та  $f$  між собою.

Розглянемо декілька прикладів:

1.  $e_1 f_1 \cdot e_1 f_1 = e_1 e_1 \cdot f_1 f_1 = e_1 f_1$ .

Тут другий член рівності отримується із першого комутацією  $e_1$  та  $f_1$ . Далі кожен множник обчислюється за таблицею множення (2.44). Знак множення можна опустити, оскільки вже отримуються позначення елементів базису.

$$2. e_1 f_2 \cdot e_1 f_2 = e_1 e_1 \cdot f_2 f_2 = e_1 (p f_1 + q f_2) = p \cdot e_1 f_1 + q \cdot e_1 f_2.$$

$$3. e_2 f_2 \cdot e_2 f_2 = e_2 e_2 \cdot f_2 f_2 = (p \cdot e_1 + q \cdot e_2)(p \cdot f_1 + q \cdot f_2) = p^2 \cdot e_1 f_1 + pq \cdot e_1 f_2 + pq \cdot e_2 f_1 + q^2 \cdot e_2 f_2.$$

Доцільно замінити позначення двосимвольних елементів базису  $ef$  односимвольними  $E = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ . З врахуванням цього таблиця множення для ГЧС (2.45) матиме вигляд:

$Q_4^k(E)$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$
$E_1$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$
$E_2$	$E_2$	$pE_1 + qE_2$	$E_4$	$pE_3 + qE_4$
$E_3$	$E_3$	$E_4$	$pE_1 + qE_3$	$pE_2 + qE_4$
$E_4$	$E_4$	$pE_3 + qE_4$	$pE_2 + qE_4$	$p^2 E_1 + pqE_2 + pqE_3 + q^2 E_4$

(2.47)

Дослідження цієї ГЧС дає результати для багатьох ГЧС, отриманих комутативним автоподвоєнням системи  $Q_2$  з різними параметрами  $p$  та  $q$ . Так як множина цих параметрів нескінченна, то і всі результати дослідження системи  $Q_3$  розповсюджуються на нескінченну множину ГЧС четвертої вимірності. Наприклад, щоб застосувати формулу множення двох чисел  $M = \sum_{i=1}^4 m_i e_i$  та  $X = \sum_{i=1}^4 x_i e_i$  в якій небуť конкретній ГЧС четвертої вимірності,

отриманої внаслідок автоподвоєння, достатньо підставити у формулу множення

в системі  $Q_4^k$ :

$$M \cdot X = (m_1 x_1 + p m_2 x_2 + p m_3 x_3 + p^2 m_4 x_4) e_1 + (m_1 x_2 + m_2 (x_1 + q x_2) + p m_3 x_4 + m_4 (p x_3 + p q x_4)) e_2 + \\ + (m_1 x_3 + p m_2 x_4 + m_3 (x_1 + q x_3) + m_4 (p x_2 + p q x_4)) e_3 + (m_1 x_4 + m_2 (x_3 + q x_4) + m_3 (x_2 + q x_4) + \\ + m_4 (x_1 + q x_2 + q x_3 + q^2 x_4)) e_4$$

параметри  $p$  та  $q$ .

Такий підхід спрощує дослідження ГЧС, а також програмно-алгоритмічне забезпечення для виконання операцій в розглядуваних конкретних ГЧС.

### 2.4.2. Некомутативне автоподвоєння

Розглянемо некомутативне автоподвоєння системи  $Q_2$ . Обчислення результатів дій оператора некомутативного подвоєння, в загальному, аналогічне комутативному випадку, але є принципові відмінності, на яких зупинимося докладніше.

Тут задача зводиться до обчислення результатів дії оператора некомутативного подвоєння на ГЧС  $Q_1(e)$  та  $Q_2(f)$ :

$$Q_4^n(ef, 4) = D_n(Q_1(e, 2), Q_2(f, 2)). \quad (2.48)$$

Базис системи  $Q_4^n(ef, 4)$  будується як і в попередньому випадку: якщо базиси подвоєваних систем мають вигляд  $e = \{e_1, e_2\}$  та  $f = \{f_1, f_2\}$ , то базис  $ef$  отриманої системи також буде прямим добутком базисів

$$ef = \{e_1f_1, e_1f_2, e_2f_1, e_2f_2\}, \quad (2.49)$$

тобто враховується  $e_i f_j = f_j e_i$ , але при обчисленні добутків базисних елементів необхідно дотримуватись наступних правил:

1. Елемент з індексом «1» комутує з будь-яким елементом вхідного базису:  
 $e_1 f_j = f_j e_1; e_i f_1 = f_1 e_i;$
2. Елементи з індексами «2» антикомутують:  $e_2 f_2 = -f_2 e_2$ .

Таким чином, вимірність базису, також, рівна чотирьох.

Далі для побудови таблиці множення необхідно знайти всі можливі добутки базисних елементів базису  $ef$  з врахуванням вищенаведених правил. При цьому, перший стовпчик і перший рядок таблиці множення, у відповідності з першим правилом, повністю співпадають з таблицею для  $Q_4$ . А інші комірочки таблиці можуть відрізнятися. Тому наведемо повністю всі обрахунки.

1.  $e_1 f_2 \cdot e_1 f_2 = e_1 e_1 \cdot f_2 f_2 = e_1 (p f_1 + q f_2) = p e_1 f_1 + q e_1 f_2;$
2.  $e_1 f_2 \cdot e_2 f_1 = -e_1 e_2 \cdot f_2 f_1 = -e_2 f_2;$
3.  $e_1 f_2 \cdot e_2 f_2 = -e_1 e_2 \cdot f_2 f_2 = -e_2 (p f_1 + q f_2) = -p e_2 f_1 - q e_2 f_2;$
4.  $e_2 f_1 \cdot e_1 f_2 = e_2 e_1 \cdot f_1 f_2 = e_2 f_2;$

5.  $e_2 f_1 \cdot e_2 f_1 = e_2 e_2 \cdot f_1 f_1 = (p e_1 + q e_2) f_1 = p e_1 f_1 + q e_2 f_1$ ;
6.  $e_2 f_1 \cdot e_2 f_2 = e_2 e_2 \cdot f_1 f_2 = (p e_1 + q e_2) f_2 = p e_1 f_2 + q e_2 f_2$ ;
7.  $e_2 f_2 \cdot e_1 f_2 = e_2 e_1 \cdot f_2 f_2 = e_2 (p f_1 + q f_2) = p e_2 f_1 + q e_2 f_2$ ;
8.  $e_2 f_2 \cdot e_2 f_1 = -e_2 e_2 \cdot f_2 f_1 = -(p e_1 + q e_2) f_2 = -p e_1 f_2 - q e_2 f_2$ ;
9.  $e_2 f_2 \cdot e_2 f_2 = -e_2 e_2 \cdot f_2 f_2 = -(p e_1 + q e_2) (p f_1 + q f_2) = -p^2 e_1 f_1 - p q e_1 f_2 - p q e_2 f_1 - q^2 e_2 f_2$ ;

На цьому кроці доцільно замінити базис (2.49) односимвольним базисом  $E = \{E_1, E_3, E_2, E_4\}$ , так як в протилежному випадку базисні елементи кватерніона ( $p = -1, q = 0$ ) будуть множитися за правилом «проти часової стрілки», що суперечить загальноприйнятому «за часовою стрілкою». З врахуванням цього таблиця множення в системі  $Q_4^n$  матиме наступний вигляд:

$Q_4(E)$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$
$E_1$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$
$E_2$	$E_2$	$pE_1 + qE_2$	$E_4$	$pE_3 + qE_4$
$E_3$	$E_3$	$-E_4$	$pE_1 + qE_3$	$-pE_2 - qE_4$
$E_4$	$E_4$	$-pE_3 - qE_4$	$pE_2 + qE_4$	$-p^2 E_1 - pqE_2 - pqE_3 - q^2 E_4$

(2.50)

При невеликих відмінностях таблиць множення (2.47) та (2.50), структура і властивості систем  $Q_4^k$  та  $Q_4^n$  значно відрізняються. Так, наприклад, формула множення двох чисел в ГЧС  $Q_4^n$  матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
 M \cdot X = & (m_1 x_1 + p m_2 x_2 + p m_3 x_3 - p^2 m_4 x_4) e_1 + (m_1 x_2 + m_2 (x_1 + q x_2) + p m_3 x_4 - m_4 (p x_3 + p q x_4)) e_2 + \\
 & + (m_1 x_3 - p m_2 x_4 + m_3 (x_1 + q x_3) + m_4 (p x_2 - p q x_4)) e_3 + (m_1 x_4 - m_2 (x_3 + q x_4) + m_3 (x_2 + q x_4) + \\
 & + m_4 (x_1 + q x_2 - q x_3 - q^2 x_4)) e_4
 \end{aligned}$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що ГЧС  $Q_4^k$  є асоціативною, а ГЧС  $Q_4^n$  неасоціативна при  $q \neq 0$ . Дійсно, розглянемо в системі  $Q_4^k$  рівність  $(E_2 E_3) E_4 = E_2 (E_3 E_4)$ :

$$(E_2 E_3) E_4 = E_4 E_4 = -p^2 E_1 - p q E_2 - p q E_3 - q^2 E_4;$$

$$\begin{aligned}
 E_2 (E_3 E_4) &= E_2 (-p E_2 - q E_4) = -p (p E_1 + q E_2) - q E_2 E_4 = -p^2 E_1 - p q E_2 - q (p E_3 + q E_4) = \\
 &= -p^2 E_1 - p q E_2 - p q E_3 - q^2 E_4
 \end{aligned}$$

тобто, рівність  $(E_2 E_3) E_4 = E_2 (E_3 E_4)$  виконується. Проте інші рівності, наприклад  $(E_3 E_2) E_4 = E_3 (E_2 E_4)$  не виконуються:



$$(E_3E_2)E_4 = -E_4E_4 = p^2E_1 + pqE_2 + pqE_3 + q^2E_4;$$

$$E_3(E_2E_4) = E_3(pE_3 + qE_4) = p(pE_1 + qE_3) + q(-pE_2 - qE_4) = p^2E_1 + pqE_2 - pqE_3 - q^2E_4.$$

$$\text{Отже, } (E_2E_3)E_4 \neq E_2(E_3E_4). \quad (2.51)$$

Властивість неасоціативності не впливає на розрахунки, якщо в моделях відсутні рівняння степеня вище першого. В протилежному випадку, потрібно слідкувати за порядком обрахунків.

### 2.4.3. Норми і спряження

Норма в системах  $Q_4^k$  і  $Q_4^n$  будується аналогічно як і в класах гіперкомплексних числових систем  $D_n$  та  $D_k$ , тобто за формулою (1.24).

Таким чином, в ГЧС  $Q_4^k$  матриця норми матиме вигляд:

$$N_k(w) = \begin{vmatrix} a_1 & pa_2 & pa_3 & p^2a_4 \\ a_2 & a_1 + qa_2 & pa_4 & pa_3 + pqa_4 \\ a_3 & pa_4 & a_1 + qa_3 & pa_2 + pqa_4 \\ a_4 & a_3 + qa_4 & a_2 + qa_4 & a_1 + qa_2 + qa_3 + q^2a_4 \end{vmatrix}.$$

Обчисливши детермінант цієї матриці, та скориставшись засобами системи символьних обчислень Maple, а саме командою «**factor**», отримаємо наступне представлення норми:

$$N_k(w) = \left[ (a_1^2 - pa_2^2 - pa_3^2 + p^2a_4^2) + q(a_1 - pa_4)(a_2 + a_3) + q^2a_1a_4 \right]^2 - (2pa_1a_4 - 2pa_2a_3)^2. \quad (2.52)$$

Можна побачити, що при  $q=0$ , (2.52) є частинним випадком (2.34), що впливає, безпосередньо з методу побудови досліджуваних в даній роботі класів ГЧС.

В ГЧС  $Q_4^n$ :

$$N_n(w) = \begin{vmatrix} a_1 & pa_2 & pa_3 & -p^2a_4 \\ a_2 & a_1 + qa_2 & -pa_4 & pa_3 - pqa_4 \\ a_3 & pa_4 & a_1 + qa_3 & -pa_2 - pqa_4 \\ a_4 & a_3 + qa_4 & -a_2 - qa_4 & a_1 - qa_2 + qa_3 - q^2a_4 \end{vmatrix}$$

В цьому випадку детермінант матриці має досить громіздкий вигляд:

$$\begin{aligned}
N_n(w) = & 2a_1^3qa_3 - a_1^3q^2a_4 + a_1^2q^2a_3^2 - 2a_1^2pa_2^2 - q^2a_2^2a_1^2 + 2p^2a_4^2a_1^2 - \\
& - 2pa_3^2a_1^2 - 2p^3a_2^2a_4^2 + 2p^2a_2^2a_3^2 - 2p^3a_3^2a_4^2 - a_1q^4a_2a_3a_4 - a_1q^2a_2^2pa_4 - \\
& - a_1q^3a_2a_4^2p + 2a_1p^2a_3a_4^2q + a_1pa_3^2q^2a_4 + a_1pq^3a_4^2a_3 - 2a_1^2a_2pqa_4 - \\
& - 2pa_2^2a_1qa_3 + pa_2^2q^3a_3a_4 + 2p^2a_2a_4qa_3^2 - p^2a_2a_4^2q^2a_3 + pa_3^2a_2q^3a_4 + \\
& + a_1^4 - a_1q^3a_2^2a_3 + a_1q^3a_2a_3^2 - 2a_1pa_3^3q + a_1p^2q^2a_4^3 + a_1^2q^2a_3a_2 - \\
& - a_1^2q^3a_3a_4 - q^3a_2a_1^2a_4 + pa_2^3q^2a_3 + 2p^2a_2^3qa_4 + p^2a_2^2q^2a_4^2 - \\
& - 2p^3a_2a_4^3q - pa_3^3a_2q^2 - p^2a_3^2a_4^2q^2 + p^2a_2^4 + p^2a_3^4 + p^4a_4^4
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Варто зазначити, що вираз (2.53) неможливо спростити навіть з використанням команд системи символьних обчислень Maple. Однак, підставивши значення конкретного аргумент, можна значно спростити таке представлення. Наприклад,  $w = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ .

$$N_n(w) = 1 + 2q - 4p - 6pq + 6p^2q - 2p^3q + 2q^3p - q^4 + 6p^2 - 4p^3 - 2q^3 + p^4$$

Загальний підхід пошуку спряжених чисел оснований на використанні представлення для норми гіперкомплексного числа (1.24). Для спряжених з  $w$  чисел  $w_{c1}, \dots, w_{c,n-1}$  повинна виконуватись рівність

$$w \cdot w_{c1} \cdot \dots \cdot w_{c,n-1} = N(w) \varepsilon, \tag{2.54}$$

де  $\varepsilon$  - одиничний елемент розглядуваної ГЧС.

Нижче наведені компоненти числа  $\overline{w} = \overline{w_1}e_1 + \overline{w_2}e_2 + \overline{w_3}e_3 + \overline{w_4}e_4$  спряженого числа  $w$  в ГЧС  $Q_4^k$ :

$$\begin{aligned}
\overline{w_1} = & 3a_1q^2a_3a_2 + a_1q^3a_3a_4 - 2a_1q^2a_4^2p + q^3a_2a_1a_4 + q^4a_2a_3a_4 - 2q^2a_2^2pa_4 - \\
& - q^3a_2a_4^2p + 2p^2a_4a_3a_2 + p^2a_3a_4^2q - 2pa_3^2q^2a_4 + p^2qa_4^2a_2 - pq^3a_4^2a_3 + \\
& + 2a_1^2qa_2 + 2a_1^2qa_3 + a_1^2q^2a_4 + a_1q^2a_3^2 - a_1pa_2^2 + q^2a_2^2a_1 + q^3a_2^2a_3 + q^3a_2a_3^2 - \\
& - qa_2^3p - p^2a_2^4a_1 - pa_3^2a_1 - pa_3^3q + p^2q^2a_4^3 + a_1^3 - 2pa_3qa_4a_1 - 2a_1a_2pqa_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{w_2} = & -p^2a_4^3q - p^2a_4^2a_2 + a_2q^2a_4^2p + pqa_4^2a_1 + pa_4^2q^2a_3 + 2a_2^2pqa_4 + \\
& + pa_4qa_3^2 + 2pa_4a_3a_1 + pa_2^3 - pa_3^2a_2 - a_2q^3a_3a_4 - a_2a_1q^2a_4 - \\
& - q^2a_3a_2^2 - a_1qa_2^2 - a_2a_1^2 - a_2q^2a_3^2 - 2a_2a_1qa_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{w_3} = & 2a_2pa_4a_1 - a_3pa_2^2 - a_3a_1^2 - 2a_2a_1qa_3 - a_1qa_3^2 - a_1q^2a_4a_3 + pqa_4^2a_1 - \\
& - q^2a_3a_2^2 - a_2q^2a_3^2 - a_2q^3a_3a_4 + a_2^2pqa_4 + a_2q^2a_4^2p + pa_3^3 + 2pa_4qa_3^2 - \\
& - p^2a_3a_4^2 + pa_4^2q^2a_3 - p^2a_4^3q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{w_4} = & -a_2pa_4^2q - pa_4^2a_3q + 2a_2a_3a_1 + qa_2^2a_3 + a_2qa_3^2 + \\
& + a_2q^2a_4a_3 - a_4a_1^2 + p^2a_4^3 - pa_4a_3^2 - pa_4a_2^2
\end{aligned}$$

Вирази компонент спряженого числа можна значно спростити, підставивши значення конкретного аргументу. Наприклад, при  $w = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$  ці компоненти будуть такими:

$$\overline{w_1} = 1 + 4q + p^2 + 4q^3 + q^4 + 6q^2 - 6pq - 6q^2p + p^2q^2 - 2q^3p + 2p^2q - 2p$$

$$\overline{w_2} = -p^2q - p^2 + 2q^2p + 4pq + 2p - q^3 - 3q^2 - 3q - 1$$

$$\overline{w_3} = 2p - 1 - q + q^2 + q^3 - 2q^2p - p^2 + p^2q$$

$$\overline{w_4} = 2pq + 1 + 2q + q^2 + p^2 - 2p$$

В гіперкомплексній числовій системі  $Q_4^n$  спряжені числа мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \overline{w_1} = & a_1q^2a_3a_2 - a_1q^3a_3a_4 - q^3a_2a_1a_4 - q^4a_2a_3a_4 - 2q^2a_2^2pa_4 - \\ & - q^3a_2a_4^2p + p^2a_3a_4^2q + p^2qa_4^2a_2 + pq^3a_4^2a_3 + \\ & + 2a_1^2qa_3 - a_1^2q^2a_4 + a_1q^2a_3^2 - a_1pa_2^2 - q^2a_2^2a_1 - q^3a_2^2a_3 + q^3a_2a_3^2 - \\ & - qa_2^3p + p^2a_4^2a_1 - pa_3^2a_1 - pa_3^3q + p^2q^2a_4^3 + a_1^3 - 2a_1a_2pqa_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{w_2} = & -p^2a_4^3q - p^2a_4^2a_2 + a_2q^2a_4^2p - pqa_4^2a_1 - pa_4^2q^2a_3 + 2a_2^2pqa_4 + \\ & + pa_4qa_3^2 + pa_2^3 + pa_3^2a_2 + a_2q^3a_3a_4 + a_2a_1q^2a_4 + \\ & + a_1qa_2^2 + q^2a_3a_2^2 - 2a_2a_1qa_3 - a_2q^2a_3^2 - a_2a_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{w_3} = & 2pa_4a_3qa_2 + a_3pa_2^2 - a_3a_1^2 - a_1qa_3^2 + a_1q^2a_4a_3 - pqa_4^2a_1 + q^2a_3a_2^2 - \\ & - a_2q^2a_3^2 + a_2q^3a_3a_4 - a_2^2pqa_4 - a_2q^2a_4^2p + pa_3^3 - p^2a_3a_4^2 - pa_4^2q^2a_3 + p^2a_4^3q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{w_4} = & a_2qa_3^2 - qa_2^2a_3 + pa_4^2a_3q + pa_4a_2^2 - 2a_1a_3qa_4 - a_2q^2a_4a_3 + pa_4a_3^2 - \\ & - p^2a_4^3 + a_2pa_4^2q - a_4a_1^2 \end{aligned}$$

І після підстановки значень конкретного аргументу, матимемо наступний результат:

$$\overline{w_1} = -2q^3 - q^4 - 2q^2p + 2p^2q + 2q - 2p - 4pq + p^2 + p^2q^2 + 1$$

$$\overline{w_2} = -p^2q - p^2 + 2pq + 2p + q^3 + q^2 - q - 1$$

$$\overline{w_3} = 2p - 1 - q + q^2 + q^3 - 2q^2p - p^2 + p^2q$$

$$\overline{w_4} = 2pq - 1 - 2q - q^2 - p^2 + 2p$$

## 2.5. Синтез матричних представлень

При побудові алгоритмів математичного моделювання різних процесів з використанням ГЧС, розглядаються дві форми представлення інформації: натуральна та матрична.

При матричному представленні кожному базисному елементу  $e_i$  відповідає матриця  $M(e_i)$  розмірами  $n \times n$  [80]. Таким чином, всі дії з гіперкомплексними числами зводяться до дій над матрицями, для яких розроблено різноманітне математичне забезпечення.

Гіперкомплексна числова система є елементом скінченновимірної алгебри з фіксованим базисом, тобто кільцем, яке має структуру векторного простору. Тому на гіперкомплексні числові системи поширюються всі властивості кільця, а саме теорема про вкладеність кільця [81]: будь-яке кільце ізоморфно вкладається в повне кільце матриць. На цій теоремі ґрунтується матричне представлення гіперкомплексних числових систем.

Оскільки ми розглядаємо класи некомутативних та комутативних гіперкомплексних числових систем, то при їх застосуванні у різних галузях науки та техніки дослідження матричного представлення є доцільним, оскільки значно зменшує об'єм обчислювальних операцій при математичному моделюванні та розширює можливості їх використання для опису поворотів у тривимірному просторі.

Матричні представлення деяких гіперкомплексних числових систем досліджені в ряді робіт. Зокрема, в роботі [80] побудовано матричне представлення ГЧС на основі ізоморфізму. В роботі [82] з допомогою комплексних матриць другого порядку представлено комплексні числа, кватерніони, квадриплексні числа і бікватерніони. Матричне представлення антикватерніонів представлено комплексними матрицями другого порядку в роботі [83], таке ж матричне представлення антикватерніонів вперше запропоноване Дж. Коклем у 1849 році [84].

### 2.5.1. Матричні представлення некомутативних систем $\mathcal{D}_n$ класу

В роботах [85, 86] доведено теорему про ізоморфізм узагальнених кватерніонів  $(H_{\alpha\beta}, +, \cdot)$  та повним кільцем матриць  $(\mathbf{M}_{(4,R)}, \oplus, \otimes)$ , тобто, існує таке відображення  $\psi$ , що

$$\psi : (H_{\alpha\beta}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbf{M}_{(4,R)}, \oplus, \otimes). \quad (2.55)$$

Вигляд матриці  $(\mathbf{M}_{(4,R)}, \oplus, \otimes)$  визначають з допомогою оператора Гамільтона  $\varphi_q$ , а саме

$$\varphi_q : H_{\alpha\beta} \rightarrow H_{\alpha\beta}, \varphi_q(x) = qx, x \in H_{\alpha\beta} \quad (2.56)$$

Введений таким чином оператор Гамільтона може бути представлений у вигляді матриці

$$\varphi_q = \begin{bmatrix} a_1 & -\alpha a_2 & -\beta a_3 & -\alpha\beta a_4 \\ a_2 & a_1 & -\beta a_4 & \beta a_3 \\ a_3 & \alpha a_4 & a_1 & -\alpha a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

$$\text{Тобто, } \psi : (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \mapsto \begin{bmatrix} a_1 & -\alpha a_2 & -\beta a_3 & -\alpha\beta a_4 \\ a_2 & a_1 & -\beta a_4 & \beta a_3 \\ a_3 & \alpha a_4 & a_1 & -\alpha a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}.$$

Оскільки ми встановили зв'язки між узагальненими кватерніонами та некомутативними ГЧС четвертої вимірності побудованими з допомогою ГК-процедури подвоєння, то можна побудувати матричне представлення кожної із розглядуваних систем, підставляючи конкретні значення  $\alpha$  та  $\beta$  [87]:

1. система кватерніонів  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{M}_H = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}; \quad (2.58)$$

2. система антикватерніонів  $\mathbf{AH}$ :

$$\mathbf{M}_{AH} = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}; \quad (2.59)$$

3. система  $\mathcal{D}_n(\mathbf{C}, \mathbf{D}, 4)$ :

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D}_n(\mathbf{C}, \mathbf{D}, 4)} = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}; \quad (2.60)$$

4. система  $\mathcal{D}_n(\mathbf{W}, \mathbf{D}, 4)$ :

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D}_n(\mathbf{W}, \mathbf{D}, 4)} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}; \quad (2.61)$$

5. система  $\mathcal{D}_n(\mathbf{D}, \mathbf{D}, 4)$ :

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D}_n(\mathbf{D}, \mathbf{D}, 4)} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & a_1 & 0 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}; \quad (2.62)$$

6. система  $\mathcal{D}_n(\mathbf{W}, \mathbf{W}, 4)$ :

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D}_n(\mathbf{W}, \mathbf{W}, 4)} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

Для перевірки істинності такого матричного представлення, представимо базисні елементи будь-якої із розглядуваних систем (наприклад, системи  $\mathcal{D}_n(\mathbf{W}, \mathbf{D}, 4)$ ) у вигляді матриць. Для цього представимо базисні елементи у вигляді

$$w = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4, \quad (2.64)$$

звідки  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = 0$ ,  $a_4 = 0$ . Підставляючи в (2.61), отримаємо:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Аналогічно отримаємо матричне представлення інших базисних елементів

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи задовільняють вони таблиці Келі системи  $D_n(W, D, 4)$ .

$$e_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e_1, e_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$e_4^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, e_2 e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_4,$$

$$e_3 e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -e_4, e_2 e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_3,$$

$$e_4 e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -e_3, e_3 e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$e_4 e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Як бачимо, в такому представленні базисні елементи задовільняють таблиці Келі, отже, матричне представлення істинне. Аналогічно можна перевірити істинність даного матричного представлення і для інших систем.

Також, виходячи з рівності (2.19), тобто виконання мультиплікативності норми дозволяє нам зробити висновок про те, що матриця норми може бути матричним представленням гіперкомплексного числа. Тоді матимемо наступні матричні представлення гіперкомплексних чисел із некомутативного класу ГЧС:

$$\mathbf{M}_H = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{AH} = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{D_n(C,D,4)} = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{D_n(W,D,4)} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{D_n(D,D,4)} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & a_1 & 0 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{D_n(D,D,4)} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & a_1 & 0 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}.$$

Оскільки, ГЧС як некомутативного, так і комутативного класів побудовано із систем другої вимірності внаслідок подвоєння, то можлива побудувати матричне представлення систем досліджуваних класів ще одним способом - використовуючи матричні представлення систем другої вимірності.

Для цього нагадаємо матричне представлення систем  $C$ ,  $W$ ,  $D$ :

- система комплексних чисел

$$c = a + bi, i^2 = -1 \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

- система подвійних чисел

$$c = a + be, e^2 = 1 \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

- система дуальних чисел

$$c = a + b\varepsilon, \varepsilon^2 = 0 \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad (2.67)$$



Ізоморфізм алгебр кватерніонів, антикватерніонів та напівкватерніонів  $(D_n(\mathbf{C}, \mathbf{D}, 4))$  комплексним матрицям другого порядку встановлено в роботі [76]. Зокрема, алгебра кватерніонів ізоморфна комплексній матриці другого порядку

$$\mathbf{M}_H = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}, \quad (2.68)$$

алгебра антикватерніонів - комплексній матриці другого порядку

$$\mathbf{M}_{AH} = \begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}, \quad (2.69)$$

алгебра напівкватерніонів - комплексній матриці другого порядку

$$\mathbf{M}_{D_n(\mathbf{C}, \mathbf{D}, 4)} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}, \quad (2.70)$$

де  $A$  та  $B$  - матриці другого порядку ізоморфні комплексним числам  $a$  та  $b$ , а  $\bar{A}$  та  $\bar{B}$  - матриці, ізоморфні комплексним числам  $\bar{a}$  та  $\bar{b}$  які спряжені комплексним числам  $a$  та  $b$ .

Також, Розенфельд називає ГЧС  $D_n(\mathbf{W}, \mathbf{D}, 4)$  алгеброю напівантикватерніонів і показує її ізоморфізм подвійним матрицям другого порядку, які мають вигляд

$$\mathbf{M}_{D_n(\mathbf{W}, \mathbf{D}, 4)} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}, \quad (2.71)$$

де  $A$  та  $B$  - матриці другого порядку ізоморфні подвійним числам  $c$  та  $d$ , а  $\bar{A}$  - матриця, ізоморфна подвійному числу  $\bar{c}$ , яке спряжене для  $c$ .

Узагальнене матричне представлення систем  $D_n$  класу можна побудувати, виходячи з наступних міркувань. Кожну із розглядуваних систем можна представити у вигляді

$$\Gamma = D_n(\Gamma_1(e, 2), \Gamma_2(f, 2), 4), \quad (2.72)$$

де  $\Gamma_1(e, 2)$  та  $\Gamma_2(f, 2)$  - ГЧС другої вимірності, які ми вибираємо із систем комплексних -  $\mathbf{C}$ , подвійних -  $\mathbf{W}$  та дуальних чисел -  $\mathbf{D}$ .

Якщо проаналізувати (2.68), (2.69), (2.70) та (2.71), то можна побачити, що у перших трьох випадках матриці відрізняються лише коефіцієнтом  $\lambda$  при

елементу матриці  $m_{2,1}$  (другий рядок, перший стовпчик). У випадку кватерніонів цей коефіцієнт рівний  $\lambda = -1$ , тобто квадрату комплексної уявної одиниці  $\lambda = i^2$ ,  $i \in \mathbf{C}$ . У випадку антикватерніонів (2.69)  $\lambda = 1 = e^2$ ,  $e \in \mathbf{W}$ . У випадку напівкватерніонів  $\lambda = 0 = \varepsilon^2$ ,  $\varepsilon \in \mathbf{D}$ . У випадку напівантикватерніонів  $\lambda = 1 = e^2$ ,  $e \in \mathbf{W}$ . Тобто,

$$A, B \in \Gamma_1, \lambda \in \Gamma_2. \quad (2.73)$$

Тоді загальне матричне представлення матиме вигляд:

$$\mathbf{M}_{D_n(\Gamma_1, \Gamma_2, 4)} = \begin{pmatrix} A & B \\ \lambda \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix}, \quad (2.74)$$

Побудуємо матричне представлення некомутативного класу ГЧС, використовуючи (2.74). Для цього потрібно представити числа із кожного класу у вигляді комплексних, подвійних чи дуальних чисел з комплексними, подвійними чи дуальними коефіцієнтами. Результати наведено в додатку В.

Для перевірки істинності даного матричного представлення, побудуємо матричне представлення базисних елементів для будь-якої із систем, використовуючи (2.64), та перевіримо чи в такому представленні вони задовільняють таблиці Келі. Розглянемо на прикладі системи  $D_n(\mathbf{W}, \mathbf{W}, 4)$ :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$e_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e_1, e_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e_1,$$

$$e_4^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -e_1, e_2 e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_4,$$

$$\begin{aligned}
e_3 e_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -e_4, \quad e_2 e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_3, \\
e_4 e_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -e_3, \quad e_3 e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -e_2, \\
e_4 e_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = e_2.
\end{aligned}$$

Як бачимо, в такому представленні базисні елементи, також, задовільняють таблиці Келі. За аналогічним алгоритмом виконується перевірка істинності такого представлення і для інших систем некомутативного класу.

Доведемо істинність даного матричного представлення для загального випадку.

Оскільки, ми встановили зв'язки між подвоєваними ГЧС та узагальненими кватерніонами, то (2.7) можна записати у вигляді

$$q = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 = (a_1 e_1 + a_2 e_2) e_1 + (a_3 e_1 + a_4 e_2) e_3 = c_1 e_1 + c_2 e_3, \quad (2.75)$$

де  $c_1$  та  $c_2 \in \Gamma_1$ , а  $e_3 \in \Gamma_2$ .

Розглянемо таке лінійне відображення  $f_q : H_{\alpha\beta} \rightarrow H_{\alpha\beta}$ , яке визначається як

$$f_q(p) = pq \quad (2.76)$$

для всіх  $p \in H_{\alpha\beta}$ . Матимемо:

$$f_q(e_1) = e_1(c_1 e_1 + c_2 e_3) = c_1 e_1 + c_2 e_3,$$

$$\begin{aligned}
f_q(e_3) &= e_3(c_1 e_1 + c_2 e_3) = e_3 c_1 e_1 + e_3 c_2 e_3 = e_3(a_1 e_1 + a_2 e_2) + e_3(a_3 e_1 + a_4 e_2) e_3 = \\
&= (a_1 e_3 e_1 + a_2 e_3 e_2) + (a_3 e_3 e_1 e_3 + a_4 e_3 e_2 e_3)
\end{aligned}$$

скориставшись (2.8), матимемо

$$\begin{aligned}
f_q(e_3) &= (a_1 e_3 - a_2 e_2 e_3) + (-\beta a_3 e_1 + \beta a_4 e_2) = (a_1 e_1 - a_2 e_2) e_3 - \beta(a_3 e_1 - a_4 e_2) = \\
&= -\beta(a_3 e_1 - a_4 e_2) + (a_1 e_1 - a_2 e_2) e_3 = -\beta \overline{c_2} + \overline{c_1} e_3.
\end{aligned}$$

Тобто,  $f_q(e_1) = c_1 e_1 + c_2 e_3$ ,  $f_q(e_3) = -\beta \overline{c_2} + \overline{c_1} e_3$ .

Таке перетворення визначається матрицею другого порядку, яка має вигляд

$$\mathbf{M}_n = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -\beta c_2 & c_1 \end{pmatrix} \middle| c_1, c_2 \in \Gamma_1, \beta \in \Gamma_2 \right\}. \quad (2.77)$$

Як бачимо, отримали підтвердження того, що між узагальненими кватерніонами та подвоєннями існує зв'язок. Більше того, можемо визначити значення  $\alpha$ , та  $\beta$ , порівнюючи (2.74) та (2.77): коефіцієнт  $\alpha$  та  $\beta$  дорівнюють від'ємному квадрату уявної одиниці першої та другої подвоєнаних систем, тобто

$$\alpha = -e^2, \beta = -f^2, \text{ де } e \in \Gamma_1, f \in \Gamma_2. \quad (2.78)$$

### 2.5.2. Розробка матричного представлення комутативного класу систем $\mathcal{D}_k$

Побудуємо матричні представлення ще одного – комутативного класу ГЧС за допомогою перетворення (2.76). Для цього нагадаємо, що даний клас систем ми отримали шляхом комутативного подвоєння систем другої вимірності. Саме цей факт ми і використаємо при побудові матричного представлення.

Кожну із розглядуваних комутативних систем четвертої вимірності можна представити у вигляді

$$\Gamma = \mathcal{D}_k(\Gamma_1(e,2), \Gamma_2(f,2), 4), \quad (2.79)$$

де  $\Gamma_1(e,2)$  та  $\Gamma_2(f,2)$  - ГЧС другої вимірності, які ми вибираємо із систем комплексних –  $\mathcal{C}$ , подвійних –  $\mathcal{W}$  та дуальних чисел –  $\mathcal{D}$ .

Таким чином

$$\mathbf{w} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 = (a_1 e_1 + a_2 e_2) e_1 + (a_3 e_1 + a_4 e_2) e_3 = c_1 e_1 + c_2 e_3, \quad (2.80)$$

де  $c_1$  та  $c_2 \in \Gamma_1$ , а  $e_3 \in \Gamma_2$ .

Аналогічно, як у випадку некомутативного подвоєння систем, розглянемо таке лінійне відображення  $f_w: \mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{D}_k$ , яке визначається як  $f_w(p) = pw$  для всіх  $p \in \mathcal{D}_k$ .

$$f_w(e_1) = e_1(c_1e_1 + c_2e_3) = c_1e_1 + c_2e_3,$$

$$\begin{aligned} f_w(e_3) &= e_3(c_1e_1 + c_2e_3) = e_3c_1e_1 + e_3c_2e_3 = e_3(a_1e_1 + a_2e_2) + e_3(a_3e_1 + a_4e_2)e_3 = \\ &= (a_1e_3e_1 + a_2e_3e_2) + (a_3e_3e_1e_3 + a_4e_3e_2e_3) \end{aligned}$$

скориставшись (2.31), матимемо

$$\begin{aligned} f_w(e_3) &= (a_1e_3 + a_2e_2e_3) + (\beta a_3e_1 + \beta a_4e_2) = (a_1e_1 + a_2e_2)e_3 - \beta(a_3e_1 + a_4e_2) = \\ &= \beta(a_3e_1 + a_4e_2) + (a_1e_1 + a_2e_2)e_3 = \beta c_2 + c_1e_3 \end{aligned}$$

Тобто,  $f_w(e_1) = c_1e_1 + c_2e_3$ ,  $f_w(e_3) = \beta c_2e_1 + c_1e_3$ .

Таке перетворення визначається матрицею другого порядку, яка має вигляд

$$\mathbf{M}_k = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ \beta c_2 & c_1 \end{pmatrix} \middle| c_1, c_2 \in \Gamma_1, \beta \in \Gamma_2 \right\}. \quad (2.81)$$

Для побудови матричних представлень ГЧС досліджуваного класу, використаємо (2.65) - (2.67), результати наведено в додатку В.

Використовуючи (2.64), перевіримо істинність даного матричного представлення. Побудуємо матричне представлення базисних елементів для будь-якої із систем та перевіримо, чи в такому представленні вони задовільняють таблиці Келі. Розглянемо на прикладі системи  $D_k(W, D, 4)$ :

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \\ e_2^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e_1, e_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \\ e_4^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, e_2e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_4. \end{aligned}$$

Аналогічно перевіряємо виконання інших рівностей.

Як бачимо, в такому представленні базисні елементи також задовільняють таблиці Келі. Отже, матричне представлення комутативного класу ГЧС четвертої вимірності має вигляд (2.81).

### 2.5.3. Моделювання матричного представлення комутативних автоподвоюваних систем

На основі виконання властивості мультиплікативності норми в таких класах ГЧС, можна вважати матрицю норми матричним представлення досліджуваних систем.

Для комутативного класу систем  $Q_4^k$  матриця норми, і відповідно матричне представлення, має вигляд [2]:

$$M_{Q_4^k}(w) = \begin{pmatrix} a_1 & pa_2 & pa_3 & p^2a_4 \\ a_2 & a_1 + qa_2 & pa_4 & pa_3 + pqa_4 \\ a_3 & pa_4 & a_1 + qa_3 & pa_2 + pqa_4 \\ a_4 & a_3 + qa_4 & a_2 + qa_4 & a_1 + qa_2 + qa_3 + q^2a_4 \end{pmatrix}. \quad (2.82)$$

Для перевірки істинності даного матричного представлення, побудуємо матричне представлення базисних елементів та перевіримо, чи в такому представленні вони задовільняють таблиці Келі (2.47).

Для цього представимо базисні елементи у вигляді (2.64). Отримаємо:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 \\ 1 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 & q \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 1 & 0 & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p^2 \\ 0 & 0 & p & pq \\ 0 & p & 0 & pq \\ 1 & q & q & q^2 \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Перевіримо, чи в такому представленні вони задовільняють таблиці Келі

$$e_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 \\ 1 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 \\ 1 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & pq & 0 & 0 \\ q & q^2 + p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & pq \\ 0 & 0 & q & q^2 + p \end{pmatrix}, \quad (2.84)$$

$$pe_1 + qe_2 = p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 \\ 1 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & pq & 0 & 0 \\ q & q^2 + p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & pq \\ 0 & 0 & q & q^2 + p \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

Праві частини рівностей (2.84) та (2.85) співпадають, отже  $e_2^2 = pe_1 + qe_3$ , що відповідає таблиці Келі (2.47).

Перевіримо виконання решти комірок із (2.47):

$$e_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 1 & 0 & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 1 & 0 & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 & pq & 0 \\ 0 & p & 0 & pq \\ q & 0 & p+q^2 & 0 \\ 0 & q & 0 & p+q^2 \end{pmatrix} = pe_1 + qe_3$$

$$e_4^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p^2 \\ 0 & 0 & p & pq \\ 0 & p & 0 & pq \\ 1 & q & q & q^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p^2 \\ 0 & 0 & p & pq \\ 0 & p & 0 & pq \\ 1 & q & q & q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 & qp^2 & qp^2 & p^2q^2 \\ qp^2 + q^2p & q^2p & qp^2 + pq^2 & qp^2 + pq^2 \\ qp^2 & q^2p & p^2 + q^2p & qp^2 + pq^2 \\ q^2 & pq + q^3 & pq + q^3 & p^2 + 2q^2p + q^4 \end{pmatrix} = p^2e_1 + pqe_2 + pqe_3 + q^2e_4,$$

$$e_2e_3 = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 \\ 1 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 1 & 0 & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p^2 \\ 0 & 0 & p & pq \\ 0 & p & 0 & pq \\ 1 & q & q & q^2 \end{pmatrix} = e_4,$$

$$e_2e_4 = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 \\ 1 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p^2 \\ 0 & 0 & p & pq \\ 0 & p & 0 & pq \\ 1 & q & q & q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p^2 & qp^2 \\ 0 & 0 & pq & p^2 + q^2p \\ p & pq & pq & q^2p \\ q & q^2 + p & q^2 & pq + q^3 \end{pmatrix} = pe_3 + qe_4,$$

$$e_3e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 1 & 0 & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 1 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p^2 \\ 0 & 0 & p & pq \\ 0 & p & 0 & pq \\ 1 & q & q & q^2 \end{pmatrix} = e_4,$$

і так далі.

Отже, матричне представлення комутативного класу неканонічних гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності  $Q_4^k$  має вигляд (2.82). Для знаходження матричного представлення кожної ГЧС цього класу, достатньо підставити конкретні значення  $p$  та  $q$ .

#### 2.5.4. Матричне представлення некомутативних автоподвоюваних систем

Щодо матричного представлення ГЧС некомутативного класу неканонічних систем четвертої вимірності  $Q_4^n$ , можна зробити наступний

висновок: оскільки даний клас систем є неасоціативним при  $q \neq 0$  (як було доведено вище (2.51)), то неможливо встановити ізоморфізм між такими системами та матрицями, в силу того, що кільце останніх являється асоціативним.

В окремих випадках, наприклад при  $q=0$ , системи  $Q_4^n$  класу можуть бути асоціативними, то їх матричне представлення шукається аналогічно матричному представленню систем  $Q_4^k$  класу (підпункт 2.5.3.).

## Висновки до розділу 2

В розділі побудовано класи некомутативних та комутативних гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності шляхом застосування процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда. Використання систем із побудованих класів ГЧС при вирішенні задач цифрової обробки сигналів дозволяє зменшити об'єми обчислень.

Представлено таблиці множення базисних елементів нових класів ГЧС у загальному вигляді, що дає можливість виділити алгебраїчні властивості класів ГЧС, які можна застосувати при вирішенні задач цифрової обробки сигналів.

Для спеціалізованих класів ГЧС побудовано узагальнені представлення основних обчислювальних характеристик. Показано, що шляхом підстановки відповідних значень параметрів в узагальнені закони виконання основних характеристик у класах ГЧС четвертої вимірності можна виділити системи, які являються найбільш прийнятними при моделюванні задач цифрової обробки сигналів.

В спеціалізованих класах ГЧС синтезовано матричні представлення. Таким чином, всі дії з гіперкомплексними числами зводяться до дій над матрицями, для яких розроблено різноманітне математичне забезпечення, що значно зменшує об'єм обчислювальних операцій та розширює можливості використання ГЧС при математичному моделюванні.



### РОЗДІЛ 3

## РОЗВИТОК МЕТОДУ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ГЧС

### 3.1. Моделювання представлень експоненціальної та логарифмічної функцій

Для застосування систем досліджуваних класів потрібно створити математичні моделі представлень різних нелінійностей в цих системах. В першу чергу це такі функції як експоненціальна, та обернена до неї – логарифмічна.

Саме тому, в цьому підрозділі буде виконано моделювання побудови представлення таких функцій за алгоритмом, описаним в підрозділі 1.4, для побудованих в другому розділі класів ГЧС.

#### 3.1.1. Побудова експоненти та логарифма в $D_n$ класі ГЧС

Для некомутативного класу, або узагальнених кватерніонів, у відповідності із (2.7) векторно-матрична система рівнянь (1.33) матиме вигляд [27, 31]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = m_1 x_1 - \alpha m_2 x_2 - \beta m_3 x_3 - \alpha \beta m_4 x_4 \\ \dot{x}_2 = m_2 x_1 + m_1 x_2 - \beta m_4 x_3 + \beta m_3 x_4 \\ \dot{x}_3 = m_3 x_1 + \alpha m_4 x_2 + m_1 x_3 - \alpha m_2 x_4 \\ \dot{x}_4 = m_4 x_1 - m_3 x_2 + m_2 x_3 + m_1 x_4 \end{cases}, \quad (3.1)$$

а рівняння (1.30) перетворюється в рівняння відносно параметра  $\lambda$ .

$$\begin{vmatrix} m_1 - \lambda & -\alpha m_2 & -\beta m_3 & -\alpha \beta m_4 \\ m_2 & m_1 - \lambda & -\beta m_4 & \beta m_3 \\ m_3 & \alpha m_4 & m_1 - \lambda & -\alpha m_2 \\ m_4 & -m_3 & m_2 & m_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.2)$$

Якщо ввести позначення:

$$\begin{vmatrix} m_1 - \lambda & -\alpha m_2 \\ m_2 & m_1 - \lambda \end{vmatrix} = D_1, \quad \begin{vmatrix} m_3 & \alpha m_4 \\ m_4 & -m_3 \end{vmatrix} = D_2, \quad (3.3)$$

то із (3.2) за теоремою Лапласа маємо:

$$D_1^2 + \beta D_2^2 = 0. \quad (3.4)$$

Розв'язками рівняння (3.4), враховуючи значення визначників (3.3), будуть дві пари двократних коренів:

$$\lambda_{1,2} = m_1 + \sqrt{\bar{m}}, \quad \lambda_{3,4} = -m_1 + \sqrt{\bar{m}}, \quad (3.5)$$

$$\text{де } \bar{m} = -(\alpha m_2^2 + \beta m_3^2 + \alpha \beta m_4^2). \quad (3.6)$$

Оскільки знак (3.6) невідомий, то розв'язок рівняння (1.32) потрібно шукати у вигляді:

$$x_i = (C_{i1} + tC_{i2})e^{(m_1 + \sqrt{\bar{m}})t} + (C_{i3} + tC_{i4})e^{(-m_1 + \sqrt{\bar{m}})t}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.7)$$

Із 16 довільних сталих  $C_{ik}$  незалежні тільки 4. Їх можна знайти, використовуючи початкову умову (1.26):

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0 \quad (3.8)$$

З врахуванням цього, розв'язки рівняння (1.29) матимуть вигляд:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(e^{(m_1 + \sqrt{\bar{m}})t} + e^{(m_1 - \sqrt{\bar{m}})t}) \quad (3.9)$$

$$x_i(t) = \frac{m_i}{2\sqrt{\bar{m}}}(e^{(m_1 + \sqrt{\bar{m}})t} - e^{(m_1 - \sqrt{\bar{m}})t}), \quad i = 2, 3, 4 \quad (3.10)$$

Якщо  $m_i t$  позначити як  $m_i$ , то у відповідності з (1.31) отримаємо остаточний вираз для представлення експоненти для узагальнених кватерніонів:

$$\text{Exp}(M) = \frac{1}{2}e^{m_1} \left[ (e^{\sqrt{\bar{m}}} + e^{-\sqrt{\bar{m}}})e_1 + \frac{1}{\sqrt{\bar{m}}}(e^{\sqrt{\bar{m}}} - e^{-\sqrt{\bar{m}}})(m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4) \right]. \quad (3.11)$$

Можна показати, що ця формула при підстановці відповідних значень параметрів  $\alpha$  і  $\beta$  дає представлення експоненти в конкретній гіперкомплексній числовій системі. Так, наприклад, як показано в [67], для кватерніонів маємо:

$$\bar{m} = -(m_2^2 + m_3^2 + m_4^2), \quad \sqrt{\bar{m}} = i\sqrt{m_2^2 + m_3^2 + m_4^2} = i\sqrt{|\bar{m}|}$$

і з допомогою формули Ейлера отримаємо представлення експоненти кватерніона [62]

$$\text{Exp}(M) = e^{m_1} \left( \cos \sqrt{|\bar{m}|} e_1 + \frac{\sin \sqrt{|\bar{m}|}}{\sqrt{|\bar{m}|}} (m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4) \right). \quad (3.12)$$

Окремо розглянемо випадок, коли

$$\bar{m} = 0, \quad (3.13)$$

Тоді загальний розв'язок характеристичного рівняння матиме інший вигляд ніж (3.7), а саме

$$x_i = (C_{i1} + tC_{i2} + t^2C_{i3} + t^3C_{i4})e^{m_i t}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.14)$$

Знайшовши довільні сталі за відомим алгоритмом, розв'язки рівняння (1.32) матимуть вигляд:

$$x_1(t) = e^{m_1} \quad (3.15)$$

$$x_i(t) = m_i e^{m_i}, \quad i = 2, 3, 4 \quad (3.16)$$

Якщо  $m_i t$  позначити як  $m_i$ , то у відповідності з (3.11) отримаємо остаточний вираз для представлення експоненти:

$$\text{Exp}(M) = e^{m_1} (e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4) \quad (3.17)$$

Варто зазначити, що для представлення (3.11) не виконується основна характеристична властивість експоненти: експонента суми аргументів дорівнює добутку експонент окремих аргументів, тобто:

$$\text{Exp}(M_1 + M_2) \neq \text{Exp}(M_1) \cdot \text{Exp}(M_2).$$

Цей факт, який можна перевірити безпосередньо з допомогою (3.11), пояснюється некомутативністю множення узагальнених кватерніонів.

Однак зауваженням є те, що вигляд представлення (3.11) інваріантний відносно комутації множників у визначному рівнянні (1.29). це пояснюється, як показано в [62], тим, що розв'язок рівняння (1.29) можна представити у вигляді суми степеневого ряду  $X(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(Mt)^s}{s!}$ , яка внаслідок асоціативності множення узагальнених кватерніонів має єдине значення.

Маючи представлення експоненціальної функції, можливо побудувати представлення логарифмічної функції, оскільки остання є оберненою до експоненціальної.

Співвідношення (1.33) для систем некомутативного класу у відповідності з (3.11) матиме вигляд:

$$\operatorname{Ln}\left\{\frac{1}{2}e^{m_1}\left[e^{\sqrt{\bar{m}}} + e^{-\sqrt{\bar{m}}}\right]e_1 + \frac{1}{\sqrt{\bar{m}}}\left(e^{\sqrt{\bar{m}}} - e^{-\sqrt{\bar{m}}}\right)(m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4)\right\} = M. \quad (3.18)$$

Але для представлення логарифмічної функції необхідно, щоб зліва під знаком логарифма було гіперкомплексне число, а справа – гіперкомплексна функція:

$$\operatorname{Ln}\sum_{k=1}^4 x_k e_k = \sum_{k=1}^4 f_k(x_1, x_2, x_3, x_4) e_k. \quad (3.19)$$

Для визначення вигляду функцій  $f_k(x_1, x_2, x_3, x_4)$  необхідно розв'язати відносно  $m_1, m_2, m_3, m_4$  систему з чотирьох рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{e^{m_1+\sqrt{\bar{m}}} + e^{m_1-\sqrt{\bar{m}}}}{2} = x_1 \\ \frac{m_k}{\sqrt{\bar{m}}} \cdot \frac{e^{m_1+\sqrt{\bar{m}}} - e^{m_1-\sqrt{\bar{m}}}}{2} = x_k, \quad k = 2,3,4 \end{cases}. \quad (3.20)$$

Система (3.20) дуже складна за структурою, оскільки вона містить ірраціональності від невідомих, до того ж знаки підкореневих виразів невідомі, а також експоненціальні функції, в показниках яких стоять ці ірраціональності. Тому в загальному вигляді її важко розв'язати. Однак такий вигляд значно спрощується при фіксації знака під коренем ірраціональності. Це обумовлено тим, що за формулою Ейлера показникові функції можна звести або до тригонометричних функцій, або до гіперболічних. Тому доцільно розглянути два випадки:  $\bar{m} < 0$  і  $\bar{m} > 0$ .

$$1) \bar{m} = -(\alpha m_2^2 + \beta m_3^2 + \alpha\beta m_4^2) < 0. \quad (3.21)$$

В цьому випадку, використання формули Ейлера, а також перетворення  $\sqrt{\bar{m}} = i\sqrt{-\bar{m}}$  переводить систему (3.20) до вигляду:

$$\begin{cases} e^{m_1} \cos \sqrt{-\bar{m}} = x_1 \\ e^{m_1} \frac{m_k}{\sqrt{-\bar{m}}} \cdot \sin \sqrt{-\bar{m}} = x_k, \quad k = 2,3,4 \end{cases}. \quad (3.22)$$

Домножаючи останні три рівняння на  $\alpha$ ,  $\beta$  і  $\alpha\beta$ , відповідно, підносячи всі рівняння до квадрату і додаючи їх, отримаємо:

$$e^{2m_1} = x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2 + \alpha\beta x_4^2 > 0, \quad (3.23)$$

звідки:

$$m_1 = \frac{1}{2} \ln(x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2 + \alpha \beta x_4^2). \quad (3.24)$$

Введемо позначення

$$x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2 + \alpha \beta x_4^2 = \bar{x}. \quad (3.25)$$

Тоді із першого рівняння системи (3.22) отримаємо:

$$\cos \sqrt{-\bar{m}} = \frac{x_1}{\sqrt{\bar{x}}}, \quad (3.26)$$

$$\sqrt{-\bar{m}} = \text{Arc cos } \frac{x_1}{\sqrt{\bar{x}}}, \quad (3.27)$$

$$\sin \sqrt{-\bar{m}} = \sqrt{1 - \cos^2 \sqrt{-\bar{m}}} = \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{\sqrt{\bar{x}}}\right)^2} = \frac{\sqrt{\bar{x} - x_1^2}}{\sqrt{\bar{x}}}. \quad (3.28)$$

Підстановка (3.23), (3.27) та (3.28) в останні три рівняння системи (3.22) дає:

$$m_k = \frac{x_i}{\sqrt{\bar{x} - x_1^2}} \text{Arc cos } \frac{x_1}{\sqrt{\bar{x}}}, \quad k = 2, 3, 4. \quad (3.29)$$

Переходячи в (3.29) від  $\text{Arc cos}$  до головних значень  $\text{arctg}$  і підставляючи в (3.18) отримаємо остаточну формулу для логарифмічної функції в цьому випадку:

$$\text{Ln}\left(\sum_{k=1}^4 x_k e_k\right) = \ln \sqrt{\bar{x}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{\bar{x} - x_1^2}} \text{arctg} \frac{\sqrt{\bar{x} - x_1^2}}{x_1} \left(\sum_{k=2}^4 x_k e_k + \pi \sum_{k=2}^4 n_k e_k\right), \quad n_k \in \mathbb{Z} \quad (3.30)$$

$$2) \bar{m} = -(\alpha m_2^2 + \beta m_3^2 + \alpha \beta m_4^2) > 0. \quad (3.31)$$

В цьому випадку, використання формули Ейлера приводить систему (3.20) до наступного вигляду:

$$\begin{cases} e^{m_1} \text{ch} \sqrt{-\bar{m}} = x_1 \\ e^{m_1} \frac{m_k}{\sqrt{-\bar{m}}} \cdot \text{sh} \sqrt{-\bar{m}} = x_k, \quad k = 2, 3, 4 \end{cases} \quad (3.32)$$

Домножаючи останні три рівняння на  $\alpha$ ,  $\beta$  і  $\alpha\beta$ , відповідно, підносячи всі рівняння до квадрату і додаючи їх, отримаємо:

$$e^{2m_1} = x_1^2 - \alpha x_2^2 - \beta x_3^2 - \alpha \beta x_4^2 > 0, \quad (3.33)$$

звідки:

$$m_1 = \frac{1}{2} \ln(x_1^2 - \alpha x_2^2 - \beta x_3^2 - \alpha \beta x_4^2). \quad (3.34)$$

Введемо позначення

$$x_1^2 - \alpha x_2^2 - \beta x_3^2 - \alpha \beta x_4^2 = \bar{x}. \quad (3.35)$$

Тоді з першого рівняння системи (3.32) отримаємо:

$$ch \sqrt{-\bar{m}} = \frac{x_1}{\sqrt{\bar{x}}}, \quad (3.36)$$

$$\sqrt{-\bar{m}} = arch \frac{x_1}{\sqrt{\bar{x}}}, \quad (3.37)$$

$$\sin \sqrt{-\bar{m}} = \sqrt{ch^2 \sqrt{\bar{m}} - 1} = \sqrt{\left(\frac{x_1}{\sqrt{\bar{x}}}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{x_1^2 - \bar{x}}}{\sqrt{\bar{x}}}. \quad (3.38)$$

Підстановка (3.33), (3.37) та (3.38) в останні три рівняння системи (3.32) призводить до:

$$m_k = \frac{x_k}{\sqrt{x_1^2 - \bar{x}}} arch \frac{x_1}{\sqrt{\bar{x}}}, \quad k = 2, 3, 4. \quad (3.39)$$

Переходячи в (3.39) від *arch* до головних значень *arth* і підставляючи в (3.18) отримаємо остаточну формулу для логарифмічної функції для другого випадку:

$$Ln\left(\sum_{k=1}^4 x_k e_k\right) = \ln \sqrt{\bar{x}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{x_1^2 - \bar{x}}} arth \frac{\sqrt{x_1^2 - \bar{x}}}{x_1} \sum_{k=2}^4 x_k e_k. \quad (3.40)$$

$$3) \bar{m} = -(\alpha m_2^2 + \beta m_3^2 + \alpha \beta m_4^2) = 0$$

$$\begin{cases} e^{m_1} = x_1 \\ m_k e^{m_1} = x_k, \quad k = 2, 3, 4 \end{cases} \quad (3.41)$$

Розв'язки системи (3.41) мають вигляд

$$\begin{aligned} m_1 &= \ln \sqrt{\bar{x}} \\ m_k &= x_k \frac{1}{\sqrt{\bar{x} - x_1^2}}, \quad k = 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Тоді остаточне представлення логарифмічної функції для третього випадку матиме вигляд:

$$Ln\left(\sum_{k=1}^4 x_k e_k\right) = \ln \sqrt{\bar{x}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{\bar{x} - x_1^2}} \left(\sum_{k=2}^4 x_k e_k\right) \quad (3.42)$$

Отримані представлення експоненціальної та логарифмічної функцій в класі некомутативних ГЧС (узагальнених кватерніонів) дають можливість отримати представлення для конкретної системи. Для цього потрібно підставити конкретні значення  $\alpha$  і  $\beta$ . Результати виконання такого алгоритму наведено в додатку Г.

### 3.1.2. Представлення експоненти та логарифма в $D_k$ класі ГЧС

Побудуємо представлення експоненціальної та логарифмічної нелінійностей в комутативному класі ГЧС. Для цього, у відповідності з (2.18), отримаємо векторно-матричну систему рівнянь характеристичне рівняння якої матиме вигляд:

$$\begin{vmatrix} m_1 - \lambda & \alpha m_2 & \beta m_3 & \alpha \beta m_4 \\ m_2 & m_1 - \lambda & \beta m_4 & \beta m_3 \\ m_3 & \alpha m_4 & m_1 - \lambda & \alpha m_2 \\ m_4 & m_3 & m_2 & m_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.43)$$

Рівняння (3.43) має такі корені:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= m_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} m_4 + \sqrt{\alpha} m_2 + \sqrt{\beta} m_3, & \lambda_2 &= m_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} m_4 - \sqrt{\alpha} m_2 - \sqrt{\beta} m_3, \\ \lambda_3 &= m_1 - \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} m_4 + \sqrt{\alpha} m_2 - \sqrt{\beta} m_3, & \lambda_4 &= m_1 - \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} m_4 - \sqrt{\alpha} m_2 + \sqrt{\beta} m_3. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Можна побачити, що коли параметри  $\alpha$  і  $\beta$  різні то і характеристичні корені теж різні, якщо ж один з параметрів рівний нулю, то маємо два двократні корені, і нарешті при  $\alpha = 0$  і  $\beta = 0$  рівняння (3.43) матиме один корінь кратності чотири. Відповідно до кількості характеристичних коренів розглянемо три окремі випадки:

1) Всі чотири корені характеристичного рівняння різні – (3.44).

Загальний розв'язок рівняння (1.32) потрібно шукати у вигляді:

$$x_i = C_{i1} e^{\lambda_1 t} + C_{i2} e^{\lambda_2 t} + C_{i3} e^{\lambda_3 t} + C_{i4} e^{\lambda_4 t}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.45)$$

Із 16 довільних сталих  $C_{ik}$  незалежні тільки 4, а решта через них виражаються.

Значення незалежних сталих можна знайти, використовуючи початкову умову (1.26):

$$C_{1,4} = \frac{1}{4\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}, C_{2,4} = \frac{1}{4\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}, C_{3,4} = -\frac{1}{4\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}, C_{4,4} = -\frac{1}{4\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}. \quad (3.46)$$

$C_{ik}$	1	2	3	4
1	$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}C_{1,4}$	$\sqrt{\beta}C_{1,4}$	$\sqrt{\alpha}C_{1,4}$	$C_{1,4}$
2	$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}C_{2,4}$	$-\sqrt{\beta}C_{1,2}$	$-\sqrt{\alpha}C_{2,4}$	$C_{2,4}$
3	$-\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}C_{3,4}$	$-\sqrt{\beta}C_{3,4}$	$\sqrt{\alpha}C_{3,4}$	$C_{3,4}$
4	$-\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}C_{4,4}$	$\sqrt{\beta}C_{4,4}$	$-\sqrt{\alpha}C_{4,4}$	$C_{4,4}$

Обчисливши значення залежних сталих, отримаємо представлення експоненціальної функції для першого випадку:

$$\begin{aligned} \text{Exp}(M) = & \frac{1}{4} \left( e^{m_1 + \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4 + \sqrt{\alpha}m_2 + \sqrt{\beta}m_3} + e^{m_1 + \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4 - \sqrt{\alpha}m_2 - \sqrt{\beta}m_3} + e^{m_1 - \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4 + \sqrt{\alpha}m_2 - \sqrt{\beta}m_3} + e^{m_1 - \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4 - \sqrt{\alpha}m_2 + \sqrt{\beta}m_3} \right) e_1 + \\ & + \frac{1}{4\sqrt{\alpha}} \left( e^{m_1 + \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4 + \sqrt{\alpha}m_2 + \sqrt{\beta}m_3} - e^{m_1 + \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4 - \sqrt{\alpha}m_2 - \sqrt{\beta}m_3} + e^{m_1 - \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4 + \sqrt{\alpha}m_2 - \sqrt{\beta}m_3} - e^{m_1 - \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4 - \sqrt{\alpha}m_2 + \sqrt{\beta}m_3} \right) e_2 + \\ & + \frac{1}{4\sqrt{\beta}} \left( e^{m_1 + \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4 + \sqrt{\alpha}m_2 + \sqrt{\beta}m_3} - e^{m_1 + \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4 - \sqrt{\alpha}m_2 - \sqrt{\beta}m_3} - e^{m_1 - \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4 + \sqrt{\alpha}m_2 - \sqrt{\beta}m_3} + e^{m_1 - \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4 - \sqrt{\alpha}m_2 + \sqrt{\beta}m_3} \right) e_3 + \\ & + \frac{1}{4\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} \left( e^{m_1 + \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4 + \sqrt{\alpha}m_2 + \sqrt{\beta}m_3} + e^{m_1 + \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4 - \sqrt{\alpha}m_2 - \sqrt{\beta}m_3} - e^{m_1 - \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4 + \sqrt{\alpha}m_2 - \sqrt{\beta}m_3} - e^{m_1 - \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}m_4 - \sqrt{\alpha}m_2 + \sqrt{\beta}m_3} \right) e_4 \end{aligned} \quad (3.47)$$

1) Два двократні корені характеристичного рівняння (при  $\alpha = 0$  або  $\beta = 0$ ):

$$\lambda_{1,2} = m_1 + \sqrt{\alpha}m_2, \lambda_{3,4} = m_1 - \sqrt{\alpha}m_2, \text{ або } \lambda_{1,2} = m_1 + \sqrt{\beta}m_3, \lambda_{3,4} = m_1 - \sqrt{\beta}m_3,$$

У цьому випадку загальний розв'язок рівняння (1.29) матиме вигляд:

$$x_i = (C_{i1} + tC_{i2})e^{\lambda_1 t} + (C_{i3} + tC_{i4})e^{\lambda_2 t}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.48)$$

Залежність між довільними сталими має наступний вигляд:

$C_{ik}$	1	2	3	4
1	$\sqrt{\alpha}C_{1,2}$	$C_{1,2}$	$\sqrt{\alpha}C_{1,4}$	$C_{1,4}$
2	0	0	$\sqrt{\alpha}(m_4\sqrt{\alpha} + m_3)C_{1,2}$	$(m_4\sqrt{\alpha} + m_3)C_{1,2}$
3	$-\sqrt{\alpha}C_{3,2}$	$C_{3,2}$	$-\sqrt{\alpha}C_{3,4}$	$C_{3,4}$
4	0	0	$\sqrt{\alpha}(m_4\sqrt{\alpha} - m_3)C_{3,2}$	$-(m_4\sqrt{\alpha} - m_3)C_{3,2}$

Значення незалежних сталих можна знайти, використовуючи початкову умову (1.26):

$$C_{1,2} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, C_{1,4} = 0, C_{3,2} = -\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, C_{3,4} = 0. \quad (3.49)$$

При таких значеннях залежних сталих, та після знаходження решти сталих, отримаємо наступне представлення експоненціальної функції для другого випадку:



$$\begin{aligned}
 \text{Exp}(M) = & \frac{1}{2} \left( e^{m_1 + \sqrt{\alpha} m_2} + e^{m_1 - \sqrt{\alpha} m_2} \right) e_1 + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \left( e^{m_1 + \sqrt{\alpha} m_2} - e^{m_1 - \sqrt{\alpha} m_2} \right) e_2 + \\
 & + \frac{1}{2} \left( (\sqrt{\alpha} m_4 + m_3) e^{m_1 + \sqrt{\alpha} m_2} + (m_3 - \sqrt{\alpha} m_4) e^{m_1 - \sqrt{\alpha} m_2} \right) e_3 + \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \left( (\sqrt{\alpha} m_4 + m_3) e^{m_1 + \sqrt{\alpha} m_2} + (m_3 - \sqrt{\alpha} m_4) e^{m_1 - \sqrt{\alpha} m_2} \right) e_4
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Один корінь кратності чотири (при  $\alpha = 0$  і  $\beta = 0$ ):  $\lambda_{1,2,3,4} = m_1$ .

У цьому випадку загальний розв'язок рівняння (1.29) матиме вигляд:

$$x_i = (C_{i1} + tC_{i2} + t^2C_{i3} + t^3C_{i4})e^{m_1 t}, \quad i = 1, \dots, 4 \tag{3.51}$$

Залежність між довільними сталими має наступний вигляд:

$C_{ik}$	1	2	3	4
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$	$C_{1,4}$
2	0	$m_2 C_{1,1}$	$m_3 C_{1,1}$	$m_2 C_{1,3} + m_3 C_{1,2} + m_4 C_{1,1}$
3	0	0	0	$m_2 m_3 C_{1,1}$
4	0	0	0	0

Використовуючи початкову умову (1.26), отримаємо такі значення незалежних сталих:

$$C_{1,1} = 1, \quad C_{1,2} = 0, \quad C_{1,3} = 0, \quad C_{1,4} = 0. \tag{3.52}$$

Отримаємо наступне представлення експоненціальної функції для третього випадку:

$$\text{Exp}(M) = e^{m_1} (e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 + (m_4 + m_2 m_3) e_4) \tag{3.53}$$

Варто зазначити, що для побудови представлень таких нелінійностей потрібно виконувати складні математичні розрахунки. Саме тому, було використали метод автоматизованих розрахунків з допомогою середовища символічних обчислень Maple. Таким чином вдалося значно легше виконати поставлене завдання та скоротити час розрахункових операцій. В Додатку 1 наведено деякі процедури та результати їх виконання, які необхідні для побудови представлення експоненти при умові (3.44). Аналогічним чином виконано побудову представлення експоненціальної функції і для інших випадків.

Для представлення логарифмічної функції в комутативному класі, будемо також розглядати три випадки.

1)  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$

У цьому випадку система для визначення вигляду функцій  $f_k(x_1, x_2, x_3, x_4)$  в

(3.19) матиме вигляд:

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \left( e^{m_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} m_4 + \sqrt{\alpha} m_2 + \sqrt{\beta} m_3} + e^{m_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} m_4 - \sqrt{\alpha} m_2 - \sqrt{\beta} m_3} + e^{m_1 - \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} m_4 + \sqrt{\alpha} m_2 - \sqrt{\beta} m_3} + e^{m_1 - \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} m_4 - \sqrt{\alpha} m_2 + \sqrt{\beta} m_3} \right) = x_1 \\ \frac{1}{4\sqrt{\alpha}} \left( e^{m_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} m_4 + \sqrt{\alpha} m_2 + \sqrt{\beta} m_3} - e^{m_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} m_4 - \sqrt{\alpha} m_2 - \sqrt{\beta} m_3} + e^{m_1 - \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} m_4 + \sqrt{\alpha} m_2 - \sqrt{\beta} m_3} - e^{m_1 - \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} m_4 - \sqrt{\alpha} m_2 + \sqrt{\beta} m_3} \right) = x_2 \\ \frac{1}{4\sqrt{\beta}} \left( e^{m_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} m_4 + \sqrt{\alpha} m_2 + \sqrt{\beta} m_3} - e^{m_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} m_4 - \sqrt{\alpha} m_2 - \sqrt{\beta} m_3} - e^{m_1 - \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} m_4 + \sqrt{\alpha} m_2 - \sqrt{\beta} m_3} + e^{m_1 - \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} m_4 - \sqrt{\alpha} m_2 + \sqrt{\beta} m_3} \right) = x_3 \\ \frac{1}{4\sqrt{\alpha} \sqrt{\beta}} \left( e^{m_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} m_4 + \sqrt{\alpha} m_2 + \sqrt{\beta} m_3} + e^{m_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} m_4 - \sqrt{\alpha} m_2 - \sqrt{\beta} m_3} - e^{m_1 - \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} m_4 + \sqrt{\alpha} m_2 - \sqrt{\beta} m_3} - e^{m_1 - \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} m_4 - \sqrt{\alpha} m_2 + \sqrt{\beta} m_3} \right) = x_4 \end{cases} \quad (3.54)$$

Розв'язавши систему за допомогою Maple, маємо такий результат:

$$\begin{cases} m_1 = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{(x_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} x_4 + \sqrt{\alpha} x_2 + \sqrt{\beta} x_3) \left( -x_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} x_4 + \sqrt{\alpha} x_2 - \sqrt{\beta} x_3 \right)}{(x_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} x_4 - \sqrt{\alpha} x_2 - \sqrt{\beta} x_3) \left( -x_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} x_4 - \sqrt{\alpha} x_2 + \sqrt{\beta} x_3 \right)} \right) \\ m_2 = \frac{1}{4\sqrt{\alpha}} \ln \left( \frac{(x_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} x_4 + \sqrt{\alpha} x_2 + \sqrt{\beta} x_3) \left( -x_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} x_4 - \sqrt{\alpha} x_2 + \sqrt{\beta} x_3 \right)}{(-x_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} x_4 + \sqrt{\alpha} x_2 - \sqrt{\beta} x_3) \left( x_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} x_4 - \sqrt{\alpha} x_2 - \sqrt{\beta} x_3 \right)} \right) \\ m_3 = \frac{1}{4\sqrt{\beta}} \ln \left( \frac{(x_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} x_4 + \sqrt{\alpha} x_2 + \sqrt{\beta} x_3) \left( -x_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} x_4 + \sqrt{\alpha} x_2 - \sqrt{\beta} x_3 \right)}{(-x_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} x_4 - \sqrt{\alpha} x_2 + \sqrt{\beta} x_3) \left( x_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} x_4 - \sqrt{\alpha} x_2 - \sqrt{\beta} x_3 \right)} \right) \\ m_4 = \frac{1}{4\sqrt{\alpha} \sqrt{\beta}} \ln \left( \frac{(-x_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} x_4 - \sqrt{\alpha} x_2 + \sqrt{\beta} x_3) \left( -x_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} x_4 + \sqrt{\alpha} x_2 - \sqrt{\beta} x_3 \right)}{(x_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} x_4 + \sqrt{\alpha} x_2 + \sqrt{\beta} x_3) \left( x_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} x_4 - \sqrt{\alpha} x_2 - \sqrt{\beta} x_3 \right)} \right) \end{cases} \quad (3.55)$$

Для побудови представлення логарифмічної функції в конкретній ГЧС достатньо підставити відповідні значення  $\alpha$  та  $\beta$  і виконати необхідні перетворення.

Наприклад, для системи квадриплексних чисел система розв'язків (3.55) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{8} \ln \left( \frac{(x_1^2 - 2x_1x_4 + x_4^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2)^2 (x_1^2 + 2x_1x_4 + x_4^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2)^2}{(x_1^2 - 2x_1x_4 + x_4^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2)^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{4} I(\operatorname{arctg}(x_2 + x_3, x_1 - x_4) + \operatorname{arctg}(x_2 - x_3, -x_1 - x_4) + \operatorname{arctg}(-x_2 - x_3, x_1 - x_4) + \operatorname{arctg}(-x_2 + x_3, -x_1 - x_4)) \\ m_2 &= \frac{1}{4} (\operatorname{arctg}(x_2 + x_3, x_1 - x_4) - \operatorname{arctg}(x_2 - x_3, -x_1 - x_4) - \operatorname{arctg}(-x_2 - x_3, x_1 - x_4) + \operatorname{arctg}(-x_2 + x_3, -x_1 - x_4)) \\ m_3 &= \frac{1}{4} (\operatorname{arctg}(x_2 + x_3, x_1 - x_4) + \operatorname{arctg}(x_2 - x_3, -x_1 - x_4) - \operatorname{arctg}(-x_2 - x_3, x_1 - x_4) - \operatorname{arctg}(-x_2 + x_3, -x_1 - x_4)) \\ m_4 &= \frac{1}{8} \ln \left( \frac{(x_1^2 + 2x_1x_4 + x_4^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2)^2}{(x_1^2 - 2x_1x_4 + x_4^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2)^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{4} I(-\operatorname{arctg}(x_2 + x_3, x_1 - x_4) + \operatorname{arctg}(x_2 - x_3, -x_1 - x_4) - \operatorname{arctg}(-x_2 - x_3, x_1 - x_4) + \operatorname{arctg}(-x_2 + x_3, -x_1 - x_4)) \end{aligned}$$

Як бачимо, перший та четвертий компоненти комплексні:  $m_1, m_4 \in \mathbb{C}$ . Це означає, що значення логарифмічної функції від гіперкомплексних чисел із

системи  $K$  належать до подвоєнь системи  $K$  системою комплексних чисел  $C$ , тобто, якщо  $X \in K$ , то  $Ln(X) \in D_k(K, C, 8)$ . Це подібно до того, як в загальному випадку, добування кореня з дійсного числа призводить до комплексного числа.

2)  $\beta = 0$

У цьому випадку система (3.54) прийме інший вигляд, а саме:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(e^{m_1+\sqrt{\alpha}m_2} + e^{m_1-\sqrt{\alpha}m_2}) = x_1 \\ \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(e^{m_1+\sqrt{\alpha}m_2} - e^{m_1-\sqrt{\alpha}m_2}) = x_2 \\ \frac{1}{2}((\sqrt{\alpha}m_4 + m_3)e^{m_1+\sqrt{\alpha}m_2} + (m_3 - \sqrt{\alpha}m_4)e^{m_1-\sqrt{\alpha}m_2}) = x_3 \\ \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}((\sqrt{\alpha}m_4 + m_3)e^{m_1+\sqrt{\alpha}m_2} + (m_3 - \sqrt{\alpha}m_4)e^{m_1-\sqrt{\alpha}m_2}) = x_4 \end{cases} \quad (3.56)$$

Розв'язками якої є

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = \ln \left( (x_1 - \sqrt{\alpha}x_2) \sqrt{-\frac{x_1 - \sqrt{\alpha}x_2}{x_1 - \sqrt{\alpha}x_2}} \right) \\ m_2 = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \ln \left( -\frac{x_1 - \sqrt{\alpha}x_2}{x_1 - \sqrt{\alpha}x_2} \right) \\ m_3 = \frac{-x_3x_1 + \alpha x_2x_4}{\alpha x_2^2 - x_1^2} \\ m_4 = -\frac{-x_3x_2 + x_1x_4}{\alpha x_2^2 - x_1^2} \end{array} \right. \quad \text{та} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 = \ln \left( -(x_1 - \sqrt{\alpha}x_2) \sqrt{-\frac{x_1 - \sqrt{\alpha}x_2}{x_1 - \sqrt{\alpha}x_2}} \right) \\ m_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln \left( -\sqrt{-\frac{x_1 - \sqrt{\alpha}x_2}{x_1 - \sqrt{\alpha}x_2}} \right) \\ m_3 = \frac{-x_3x_1 + \alpha x_2x_4}{\alpha x_2^2 - x_1^2} \\ m_4 = -\frac{-x_3x_2 + x_1x_4}{\alpha x_2^2 - x_1^2} \end{array} \right. \quad (3.57)$$

3)  $\alpha = 0, \beta = 0$

Система, з якої визначатимемо  $f_k(x_1, x_2, x_3, x_4)$  та її розв'язок, відповідно,

матимуть вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{m_1} = x_1 \\ m_2 e^{m_1} = x_2 \\ m_3 e^{m_1} = x_3 \\ (m_4 + m_3 m_2) e^{m_1} = x_4 \end{array} \right. \quad \text{та} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 = \ln(x_1) \\ m_2 = \frac{x_2}{x_1} \\ m_3 = \frac{x_3}{x_1} \\ m_4 = \frac{-x_2x_3 + x_1x_4}{x_1^2} \end{array} \right.$$

Тобто, для системи  $D_k(D, D, 4)$  логарифмічна функція має наступне представлення

$$\text{Ln}(X) = \ln(x_1)e_1 + \frac{x_2}{x_1}e_2 + \frac{x_3}{x_1}e_3 + \frac{-x_2x_3 + x_1x_4}{x_1^2}e_4 \quad (3.58)$$

З отриманих результатів можна побачити, що лише в  $K$  та  $D_k(C, W, 4)$ , значення логарифмічних функцій лежать в областях подвоєнь відповідних ГЧС системою комплексних чисел.

В таблиці 3.1 для порівняння наведено час обчислення експоненти за допомогою формул представлення  $t_\phi$  та з допомогою обчислення суми ряду  $t_p$  для різних ГЧС.

Таблиця 3.1

### Порівняння часу обчислення експоненти для різних ГЧС

ГЧС			Час обчислення		$\frac{t_p}{t_\phi}$
№	Ім'я	Вимірність	за представленням, $t_\phi, c$	за допомогою суми ряду, $t_p, c$	
1	$C$	2	$7,1 \cdot 10^{-5}$	$6,0 \cdot 10^{-3}$	84
2	$D$	2	$3,3 \cdot 10^{-5}$	$4,0 \cdot 10^{-3}$	121
3	$W$	2	$7,1 \cdot 10^{-5}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$	70
4	$\Gamma_{31}$	3	$3,8 \cdot 10^{-5}$	$8,0 \cdot 10^{-3}$	210
5	$\Gamma_{32}$	3	$5,5 \cdot 10^{-5}$	$10,0 \cdot 10^{-3}$	181
6	$\Gamma_{33}$	3	$21,5 \cdot 10^{-5}$	$14,0 \cdot 10^{-3}$	65
7	$\Gamma_{41}$	4	$16,5 \cdot 10^{-5}$	$24,0 \cdot 10^{-3}$	84
8	$\Gamma_{42}$	4	$4,0 \cdot 10^{-5}$	$15,0 \cdot 10^{-3}$	145
9	$\Gamma_{43}$	4	$6,1 \cdot 10^{-5}$	$18,0 \cdot 10^{-3}$	300
10	$\Gamma_{44}$	4	$7,0 \cdot 10^{-5}$	$16,0 \cdot 10^{-3}$	228
11	$\Gamma_{45}$	4	$7,9 \cdot 10^{-5}$	$19,0 \cdot 10^{-3}$	240
12	$K$	4	$36,0 \cdot 10^{-5}$	$18,5 \cdot 10^{-3}$	51

З таблиці можна побачити, що час обчислення експоненти від гіперкомплексного аргументу при використанні формул представлення за допомогою методу асоційованої системи лінійних диференціальних рівнянь скорочується в 51-300 разів в порівнянні з використанням степеневих рядів.

### 3.1.3. Експоненціальна функція в комутативній автоподвоюваній системі $Q_4^k$

Розглянемо процес побудови представлення експоненціальних функцій в гіперкомплексних числових системах  $Q_4^k$  і  $Q_4^n$  [2].

Характеристичне рівняння асоційованої системи диференціальних рівнянь в  $Q_4^k$  має вигляд:

$$\begin{vmatrix} m_1 - \lambda & pm_2 & pm_3 & p^2m_4 \\ m_2 & m_1 + qm_2 - \lambda & pm_4 & pm_3 + pqm_4 \\ m_3 & pm_4 & m_1 + qm_3 - \lambda & pm_2 + pqm_4 \\ m_4 & m_3 + qm_4 & m_2 + qm_4 & m_1 + qm_2 + qm_3 + q^2m_4 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (3.59)$$

Оскільки ліва частина (3.59) – громіздкий поліном, який містить 100 членів, то не будемо записувати його в явному вигляді, а одразу запишемо його корені, які вдалося отримати з допомогою системи аналітичних обчислень Maple:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= m_1 + m_2 \left( \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4p} \right) + m_3 \left( \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4p} \right) - pm_4 \\ \lambda_2 &= m_1 + m_2 \left( \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4p} \right) + m_3 \left( \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4p} \right) - pm_4 \\ \lambda_3 &= m_1 + m_2 \left( \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4p} \right) + m_3 \left( \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4p} \right) + m_4 \left( p + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4p} \right) \\ \lambda_4 &= m_1 + m_2 \left( \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4p} \right) + m_3 \left( \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4p} \right) + m_4 \left( p + \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4p} \right). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Можна побачити, що при  $\Delta = q^2 + 4p \neq 0$  система диференціальних рівнянь має 4 різні корені. При  $\Delta > 0$  всі корені будуть дійсними, а при  $\Delta < 0$  – комплексними, до того ж вони попарно спряжені. В цьому випадку, по теорії диференціальних рівнянь, розв'язки потрібно шукати у вигляді  $x(t) = C_1 ch \omega t + C_2 sh \omega t$ ,  $C_1, C_2 \in R$ , якщо корені дійсні, або  $x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ ,  $C_1, C_2 \in R$ , якщо корені комплексні.

Але ми будемо шукати розв'язки для спряжених коренів у вигляді

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{\bar{\lambda} t},$$

де  $C_1, C_2 \in Q_3$ , тобто являються гіперкомплексними константами із розглядуваної ГЧС. Таким чином вдається дещо спростити досить громіздкі символічні

обчислення і перетворення. Також, за експонентою в такому представленні можна робити висновки про ізоморфізм різних ГЧС [66, 88], та за допомогою формули Ейлера перейти до традиційної форми експоненти [89, 90].

У випадку, коли  $\Delta = q^2 + 4p = 0$ , всі чотири корені співпадають:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = m_1 + \frac{1}{2}qm_2 + \frac{1}{2}qm_3 + \frac{1}{4}q^2m_4$$

І розв'язок шукається в формі.

Розглянемо окремо два випадки:

1)  $\Delta = q^2 + 4p \neq 0$ .

В цьому випадку частинні розв'язки мають вигляд:

$$x_{ij}(t) = C_{i,j}e^{\lambda t}, \quad C_{i,j} \in R, \quad i, j = 1, \dots, 4. \quad (3.61)$$

Підставивши (3.61) в асоційовану систему та виконавши перетворення, отримаємо систему з 16 рівнянь відносно 16 невідомих  $C_{i,j}$ , розв'язавши яку отримаємо значення довільних сталих, серед яких незалежними є константи  $C_{1,3}, C_{2,3}, C_{3,3}, C_{4,3}$ , для їх визначення підставимо отримані значення констант в (3.61). Оскільки, компоненти загального розв'язку можна виразити наступним чином:

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^4 x_{ij}(t), \quad (3.62)$$

та при умові  $t = 0$  експонента приймає одиничне значення, тобто:

$$x_1(0) = 1; x_2(0) = 0; x_3(0) = 0; x_4(0) = 0, \quad (3.63)$$

отримаємо систему лінійних рівнянь відносно змінних  $C_{1,3}, C_{2,3}, C_{3,3}, C_{4,3}$ :

$$\begin{cases} C_{1,3}(q + \sqrt{\Delta}) + C_{2,3}(q - \sqrt{\Delta}) + C_{3,3}(q - \sqrt{\Delta}) + C_{4,3}(q + \sqrt{\Delta}) = -1 \\ C_{1,3}(q^2 + 2p + \sqrt{\Delta}) + C_{2,3}(q^2 + 2p - \sqrt{\Delta}) - 2C_{3,3} - 2C_{4,3} = 0 \\ C_{1,3} + C_{2,3} + C_{3,3} + C_{4,3} = 0 \\ C_{1,3}(q + \sqrt{\Delta}) + C_{2,3}(q - \sqrt{\Delta}) + C_{3,3}(q - \sqrt{\Delta}) + C_{4,3}(q + \sqrt{\Delta}) = 0 \end{cases}.$$

Така система має наступні розв'язки:

$$C_{1,3} = \frac{q - \Delta}{2\Delta^2}; \quad C_{2,3} = \frac{q + \Delta}{2\Delta^2}; \quad C_{3,3} = -\frac{q - \Delta}{2\Delta^2}; \quad C_{4,3} = -\frac{q + \Delta}{2\Delta^2}. \quad (3.64)$$

Із (3.64) видно, що умова  $\Delta = q^2 + 4p \neq 0$  виключає ділення на нуль.

Підставивши (3.64) в (3.62) та поклавши  $t=1$ , отримаємо представлення експоненти в комутативній ГЧС  $Q_4^k$ :

$$\begin{aligned}
& \text{Exp}(m_1 e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4) = \\
& = \frac{1}{4\Delta} (4pe_1 - \frac{1}{p}(q - \sqrt{\Delta})(q^2 + q\sqrt{\Delta} + 2p)e_2 + 2(q - \sqrt{\Delta})e_3 - 4e_4)e^{\lambda_1} + \\
& + (4pe_1 - \frac{1}{p}(q + \sqrt{\Delta})(q^2 - q\sqrt{\Delta} + 2p)e_2 + 2(q + \sqrt{\Delta})e_3 - 4e_4)e^{\lambda_2} + \\
& + ((q - \sqrt{\Delta})^2 e_1 - 2(q + \sqrt{\Delta})e_2 - 2(q - \sqrt{\Delta})e_3 + 4e_4)e^{\lambda_3} + \\
& + ((q + \sqrt{\Delta})^2 e_1 - 2(q - \sqrt{\Delta})e_2 - 2(q + \sqrt{\Delta})e_3 + 4e_4)e^{\lambda_4}
\end{aligned} \tag{3.65}$$

де корені  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ , які визначаються з (3.60), є функціями компонент гіперкомплексного числа  $M = m_1 e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4$ , від якого і будується експонента.

$$) \Delta = q^2 + 4p = 0.$$

Як уже було зазначено вище, в цьому випадку асоційована система (3.59) має один характеристичний корінь четвертої кратності:

$$\lambda = m_1 + \frac{1}{2}qm_2 + \frac{1}{2}qm_3 + \frac{1}{4}q^2m_4,$$

тому розв'язки матимуть вигляд:  $x_i(t) = (C_{i,1} + C_{i,2}t + C_{i,3}t^2 + C_{i,4}t^3)e^{\lambda t}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

Остаточне представлення експоненти матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
& \text{Exp}(m_1 e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4) = \\
& = e^{\lambda} \left( (1 - \frac{1}{2}(qm_2 + qm_3 + \frac{1}{2}q^2m_4) + \frac{1}{4}(q^2m_2m_3 + \frac{1}{2}q^3m_2m_4 + \frac{1}{2}q^3m_3m_4 + \frac{1}{4}q^4m_4^2))e_1 + \right. \\
& + (m_2 - \frac{1}{2}(qm_2m_3 + \frac{1}{2}q^2m_2m_4 + \frac{1}{2}q^2m_3m_4 + \frac{1}{4}q^3m_4^2))e_2 + (m_3 - \frac{1}{2}(qm_2m_3 + \frac{1}{2}q^2m_2m_4 + \\
& + \frac{1}{2}q^2m_3m_4 + \frac{1}{4}q^3m_4^2))e_3 + (m_4 + m_2m_3 + \frac{1}{2}qm_2m_4 + \frac{1}{2}qm_3m_4 + \frac{1}{4}q^2m_4^2)e_4 \left. \right)
\end{aligned} \tag{3.66}$$

### 3.1.4. Особливості побудови експоненти в некомутативній ГЧС $Q_4^n$

При умові  $\Delta = q^2 + 4p = 0$  асоційована система диференціальних рівнянь в  $Q_4^n$  має два двократні корені:

$$\lambda_{1,2} = m_1 + \frac{1}{2}qm_2 - \frac{1}{4}q^2m_4 \pm \frac{1}{4}q\sqrt{2(q^2m_4 - 2qm_2m_4 + 2m_3^2 - 4m_2m_3 + 2qm_3m_4)},$$

а при  $\Delta = q^2 + 4p \neq 0$  характеристичне рівняння має чотири різні корені, але через громіздкість їх не доцільно наводити.

Оскільки представлення експоненціальної функції в ГЧС  $Q_4^n$  має настільки громіздкий вигляд, що ним користуватися не має сенсу. Тому доцільно

представити розв'язки рівняння (3.69) в іншому вигляді, а саме шляхом розкладання в ряд. Таке представлення має обмежену точність, але дозволяє проводити обрахунки значно ефективніше, ніж з використанням представлення експоненти степеневим рядом  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!}$ .

Нижче наведено перші чотири члени розкладання експоненти в ряд, отриманих з допомогою системи символьних обчислень Maple.

$$\begin{aligned}
 & \text{Exp}(m_1 e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4) = \\
 & = (1 + m_1 t + (\frac{1}{2} m_1^2 + \frac{1}{2} p m_2^2 + \frac{1}{2} p m_3^2 - \frac{1}{2} p m_4^2) t^2 + (-\frac{1}{2} p^2 m_1 m_4^2 + \frac{1}{6} p^2 q^2 m_4^3 + \frac{1}{6} m_1^3 + \\
 & + \frac{1}{2} p m_1 m_2^2 + \frac{1}{2} p m_1 m_3^2 + \frac{1}{6} p q m_2^3 - \frac{1}{6} p^2 q m_2 m_4^2 + \frac{1}{6} p q m_3^3 - \frac{1}{6} p^2 q m_3 m_4^2) t^3) e_1 + \\
 & + (m_2 t + (m_1 m_2 + \frac{1}{2} q m_2^2 - \frac{1}{2} p q m_4^2) t^2 + (\frac{1}{2} m_1^2 m_2 + \frac{1}{6} p m_2^3 + \frac{1}{6} p m_2 m_3^2 - \frac{1}{6} p^2 m_2 m_4^2 + \frac{1}{2} q m_1 m_2^2 + \\
 & + \frac{1}{6} q^2 m_2^3 - \frac{1}{6} p q^2 m_2 m_4^2 + \frac{1}{6} p q^2 m_3 m_4^2 - \frac{1}{2} p q m_1 m_4^2 + \frac{1}{6} p q m_3^2 m_4 - \frac{1}{6} p^2 q m_4^3 + \frac{1}{6} p q^3 m_4^3) t^3) e_2 + \\
 & + (m_3 t + (m_1 m_3 + \frac{1}{2} q m_3^2 - \frac{1}{2} p q m_4^2) t^2 + (\frac{1}{2} m_1^2 m_3 + \frac{1}{6} p m_2^2 m_3 + \frac{1}{6} p m_3^3 - \frac{1}{6} p^2 m_3 m_4^2 + \frac{1}{2} q m_1 m_3^2 + \\
 & + \frac{1}{6} q^2 m_3^3 - \frac{1}{6} p q^2 m_3 m_4^2 - \frac{1}{2} p q m_1 m_4^2 - \frac{1}{6} p q m_2^2 m_4 + \frac{1}{6} p^2 q m_4^3 - \frac{1}{6} p q^2 m_2 m_4^2 + \frac{1}{6} p q^3 m_4^3) t^3) e_3 + \\
 & + (m_4 t + (m_1 m_4 - \frac{1}{2} q^2 m_4^2) t^2 + (\frac{1}{2} m_1^2 m_4 - \frac{1}{2} q^2 m_1 m_4^2 + \frac{1}{6} q m_2 m_3^2 - \frac{1}{6} p q m_2 m_4^2 + \frac{1}{6} p m_2^2 m_4 + \\
 & + \frac{1}{6} p m_3^2 m_4 - \frac{1}{6} p^2 m_4^3 - \frac{1}{6} q^3 m_2 m_4^2 - \frac{1}{6} q^2 m_2^2 m_4 - \frac{1}{6} q m_2^2 m_3 + \frac{1}{6} p q m_3 m_4^2 + \frac{1}{6} q^2 m_3^3 m_4 + \\
 & + \frac{1}{6} q^3 m_3 m_4^2 + \frac{1}{6} q^4 m_4^3) t^3) e_4
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Наприклад, для гіперкомплексного числа з  $Q_4^n$  класу, яке має вигляд

$$A = 0.1e_1 + 0.2e_2 + 0.3e_3 + 0.4e_4, \tag{3.68}$$

та при наступних значеннях параметрів:  $p = 1$ ,  $q = 1$ ,

вираз (3.67) матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
 \text{Exp}(A) = & (1 + 0.1t - 0.0100000000t^2 + 0.001833333340t^3) e_1 + \\
 & + (0.2t - 0.0400000000t^2 + 0.00400000000t^3) e_2 + \\
 & + (0.3t - 0.0050000000t^2 + 0.006333333340t^3) e_3 + \\
 & + (0.4t - 0.0400000000t^2 + 0.01233333334t^3) e_4
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

На рисунку 3.1 зображено графіки амплітуд компонент експоненціальної функції, яка має представлення (3.69).



Для обчислення похибки такого представлення, побудуємо представлення компонент експоненти шляхом рекурентного множення гіперкомплексних чисел. Обмежимося чотирма членами степеневого ряду. Варто відмітити, що множення виконано за допомогою процедур символічної математики Maple. Отримаємо наступний результат:

$$\begin{aligned}
& \text{Exp}(m_1 e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4) = \\
& = \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} m_1^3 + p m_1 m_2^2 + p m_1 m_3^2 - p^2 m_1 m_4^2 + \frac{1}{3} p q m_2^3 - \frac{1}{3} p^2 q m_2 m_4^2 + \frac{1}{3} p q m_3^3 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{3} p^2 q m_3 m_4^2 + \frac{1}{3} p^2 q^2 m_4^3 \right) t^3 + \frac{1}{2} (m_1^2 + p m_2^2 + p m_3^2 - p m_4^2) t^2 + m_1 t + 1 \right) e_1 + \\
& + \left( \frac{1}{6} (3 m_1^2 m_2 + m_2^3 p + p m_2 m_3^2 - p^2 m_2 m_4^2 + 3 q m_1 m_2^2 - 3 p q m_1 m_4^2 + q^2 m_2^3 - \right. \\
& \left. - p q^2 m_2 m_4^2 - p q m_3^2 m_4 + p^2 q m_4^3 - p q^2 m_3 m_4^2 + p q^3 m_4^3) t^3 + \right. \\
& \left. + (m_1 m_2 + \frac{1}{2} q m_2^2 - \frac{1}{2} p q m_4^2) t^2 + m_2 t \right) e_2 + \\
& + \left( \frac{1}{6} (3 m_1^2 m_3 + p m_2^2 m_3 + p m_3^3 - p^2 m_3 m_4^2 + p q m_2^2 m_4 - p^2 q m_4^3 + 3 q m_1 m_3^2 - \right. \\
& \left. - 3 p q m_1 m_4^2 + q^2 m_3^3 - p q^2 m_3 m_4^2 + p q^2 m_2 m_4^2 + p q^3 m_4^3) t^3 + \right. \\
& \left. + (m_1 m_3 + \frac{1}{2} q m_3^2 - \frac{1}{2} p q m_4^2) t^2 + m_3 t \right) e_3 + \\
& + \left( \frac{1}{6} (-p q m_3 m_4^2 + p q m_2 m_4^2 + 3 m_1^2 m_4 - p^2 m_4^3 + q^4 m_4^3 + p m_2^2 m_4 + p m_3^2 m_4 + \right. \\
& \left. + q m_2^2 m_3 + q^2 m_2^2 m_4 - q m_2 m_3^2 - q^2 m_3^3 m_4 - 3 q^2 m_1 m_4^2 + q^3 m_2 m_4^2 - q^3 m_3 m_4^2) t^3 + \right. \\
& \left. + (m_1 m_4 - \frac{1}{2} q^2 m_4^2) t^2 + m_4 t \right) e_4
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Тепер обчислимо похибку по кожній компоненті, за виразами (3.67) та (3.70), отримаємо наступний результат (тут індекс означає номер компоненти):

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= 0 \\
\Delta_2 &= \frac{1}{3} \left| (-p q^2 m_3 m_4^2 + p^2 q m_4^3 - p q m_3^2 m_4) t^3 \right| \\
\Delta_3 &= \frac{1}{3} \left| (-p q^2 m_2 m_4^2 + p^2 q m_4^3 - p q m_2^2 m_4) t^3 \right| \\
\Delta_4 &= \frac{1}{3} \left| (-m_3 + m_2) (q^2 m_4^2 + m_2 m_4 q + m_3 m_4 q + m_2 m_3 + p m_4^2) q t^3 \right|
\end{aligned}$$

Графічно похибки обчислень по кожній компоненті зображено на рис. 3.2.

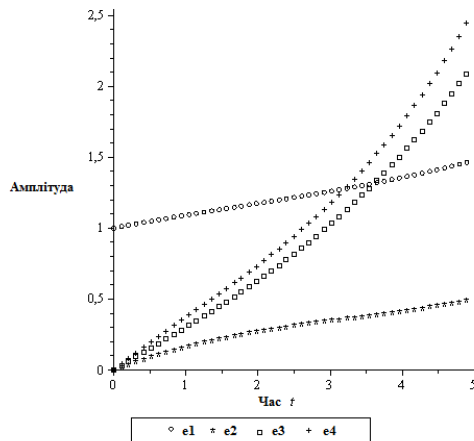


Рис. 3.1. - Графіки амплітуд компонент експоненти

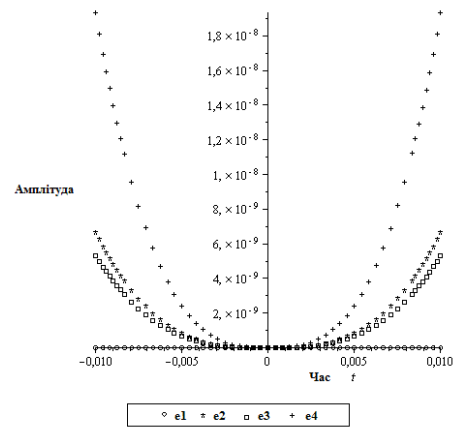


Рис. 3.2.- Графіки похибки обчислення компонент експоненти

З рис. 3.2 можна побачити, що з усіх компонент експоненти найбільш вразливою до зміни параметрів є четверта. Цей факт потрібно враховувати при плануванні та проведенні експериментів з моделями різних явищ та, безпосередньо, під час самого процесу моделювання.

### 3.2. Розробка представлень тригонометричних та гіперболічних нелінійностей

Розроблений в роботах [62, 67] метод асоційованої системи диференціальних рівнянь дозволяє отримати представлення нелінійностей, як в комутативних, так і некомутативних гіперкомплексних числових системах. Гіперболічні та тригонометричні функції не є виключенням, тому побудуємо представлення цих функцій для досліджуваних некомутативного, комутативного та неканонічних автоподвоюваних класів ГЧС.

#### 3.2.1. Представлення гіперболічних функцій в некомутативному класі ГЧС

Якщо в рівняння (1.32) із знаком «+» підставити узагальнений кватерніон (2.3), виконати множення, у відповідності з (2.4), і прирівняти коефіцієнти при

однакових базисних елементах, то отримаємо наступну систему із чотирьох лінійних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} &= (a_1^2 - \alpha a_2^2 - \beta a_3^2 - \alpha \beta a_4^2) x_1(t) - 2\alpha a_1 a_2 x_2(t) - 2\beta a_1 a_3 x_3(t) - 2\alpha \beta a_1 a_4 x_4(t) \\ \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} &= 2a_1 a_2 x_1(t) + (a_1^2 - \alpha a_2^2 - \beta a_3^2 - \alpha \beta a_4^2) x_2(t) - 2\beta a_1 a_4 x_3(t) + 2\beta a_1 a_3 x_4(t) \\ \frac{d^2 x_3(t)}{dt^2} &= 2a_1 a_3 x_1(t) + 2\alpha a_1 a_4 x_2(t) + (a_1^2 - \alpha a_2^2 - \beta a_3^2 - \alpha \beta a_4^2) x_3(t) - 2\alpha a_1 a_2 x_4(t) \\ \frac{d^2 x_4(t)}{dt^2} &= 2a_1 a_4 x_1(t) - 2a_1 a_3 x_2(t) + 2a_1 a_2 x_3(t) + (a_1^2 - \alpha a_2^2 - \beta a_3^2 - \alpha \beta a_4^2) x_4(t)\end{aligned}\tag{3.71}$$

Характеристичне рівняння правої частини має чотири двократні корені:

$$\lambda_1 = a_1 + i \cdot \sqrt{\Delta}; \quad \lambda_2 = a_1 - i \cdot \sqrt{\Delta}; \quad \lambda_3 = -a_1 + i \cdot \sqrt{\Delta}; \quad \lambda_4 = -a_1 - i \cdot \sqrt{\Delta}, \quad i^2 = -1.\tag{3.72}$$

$$\text{де } \Delta = \alpha a_2^2 + \beta a_3^2 + \alpha \beta a_4^2\tag{3.73}$$

Загальний розв'язок  $X(t)$  системи (3.71) складається з чотирьох компонент  $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$ , кожна з яких має чотири частинні розв'язки у вигляді:

$$x_k(t) = \sum_{s=1}^4 x_{ks}(t) = \sum_{s=1}^4 (C_{k,2s-1} + C_{k,2s} t) e^{\lambda_s t}\tag{3.74}$$

Таким чином, маємо 32 довільних сталих, з яких 8 – незалежні, а решта 24 через них виражаються, або можуть бути нульовими. Для знаходження значень 8 незалежних сталих скористаємося двома початковими значеннями. Для їх побудови врахуємо, що гіперболічний синус може бути представлений степеневим рядом

$$\text{Sh}(At) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^{2i+1}}{(2i+1)!}\tag{3.75}$$

Застосувавши до (3.71) звичайної процедури розв'язання диференціальних рівнянь, отримаємо наступні значення довільних сталих:

$$1) C_{k,2s} = 0, \quad k, s = 1, \dots, 4; \quad 2) C_{11} = C_{13} = 1; \quad C_{15} = C_{17} = -1.$$

$$3) C_{k1} = C_{k7} = \frac{a_k}{2\sqrt{|\Delta|}}; \quad C_{k3} = C_{k5} = -\frac{a_k}{2\sqrt{|\Delta|}}; \quad k = 2, 3, 4.$$

Підставивши значення довільних сталих в (3.74) і виконавши перетворення для спрощення виразів, отримаємо наступне представлення гіперболічного синуса для некомутативних систем, поклавши  $a_{it} \approx a_i$  [91]:

$$Sh(A) = \frac{1}{2} sha_1 \left[ (e^{i\sqrt{|\Delta|}} + e^{-i\sqrt{|\Delta|}})e_1 + \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} (e^{i\sqrt{|\Delta|}} - e^{-i\sqrt{|\Delta|}})(a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4) \right] \quad (3.76)$$

На рис. 3.3 представлені графіки залежності від часу амплітуд компонент гіперболічного синуса узагальненого кватерніона з параметрами  $\alpha = 0.1$  та  $\beta = 1$ , який має вигляд:  $A = 0.1 \sin(\pi t - \frac{\pi}{5}) \cdot e_1 + \sin(2\pi t - \frac{\pi}{6}) \cdot e_2 + \sin 2\pi t \cdot e_3 + \sin(2\pi t + \frac{\pi}{6}) \cdot e_4$

Для побудови представлення гіперболічного косинуса варто врахувати, що визначне рівняння таке саме, як і для гіперболічного синуса, тому характеристичні корені матимуть вигляд (3.72), а частинні розв'язки, також, матимуть вигляд (3.74). Для визначення початкових умов скористаємося степернем рядом для гіперболічного косинуса

$$Ch(At) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^{2i}}{(2i)!} . \quad (3.77)$$

Підставивши значення довільних сталих в (3.74) і виконавши перетворення для спрощення виразів, отримаємо наступне представлення гіперболічного косинуса для некомутативних систем:

$$Ch(A) = \frac{1}{2} cha_1 \left[ (e^{i\sqrt{|\Delta|}} + e^{-i\sqrt{|\Delta|}})e_1 + \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} (e^{i\sqrt{|\Delta|}} - e^{-i\sqrt{|\Delta|}})(a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4) \right] . \quad (3.78)$$

На рис. 3.4 представлені графіки залежності від часу амплітуд компонент гіперболічного косинуса узагальненого кватерніона у вигляді:

$$A = 0.1 \sin(\pi t - \frac{\pi}{5}) \cdot e_1 + \sin(2\pi t - \frac{\pi}{6}) \cdot e_2 + \sin 2\pi t \cdot e_3 + \sin(2\pi t + \frac{\pi}{6}) \cdot e_4$$

Окремо розглянемо випадок, коли

$$\Delta = (\alpha a_2^2 + \beta a_3^2 + \alpha \beta a_4^2) = 0, \quad (3.79)$$

тобто характеристичне рівняння правої частини (3.71) має два корені четвертої кратності:  $\lambda_1 = a_1$ ;  $\lambda_2 = -a_1$ .

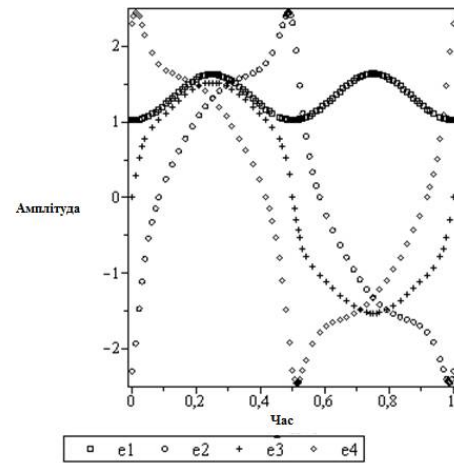
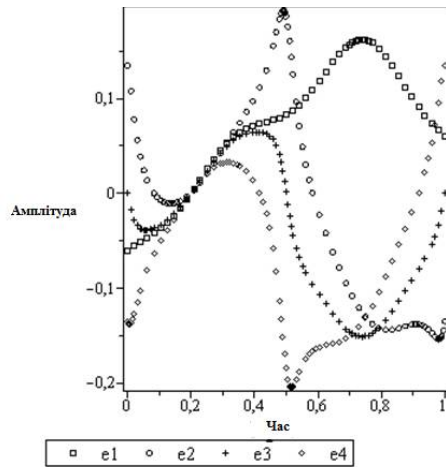


Рис. 3.3. - Графіки амплітуд компонент гіперболічного синуса узагальненого кватерніона

Рис. 3.4. - Графіки амплітуд компонент гіперболічного косинуса узагальненого кватерніона

Тоді компоненти загального розв'язку системи (3.71) матимуть вигляд:

$$x_k(t) = \sum_{s=1}^2 x_{ks}(t) = \sum_{s=1}^2 (C_{k,4s-3} + C_{k,4s-2}t + C_{k,4s-1}t^2 + C_{k,4s}t^3)e^{\lambda_s t} \quad (3.80)$$

Скориставшись початковими умовами (3.76), отримаємо значення довільних сталих, при яких, представлення гіперболічного синуса матиме вигляд:

$$Sh(A) = sh(a_1) + (a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4) \cdot ch(a_1) \quad (3.81)$$

Представлення гіперболічного косинуса при умові (3.79) відрізняється лише початковими умовами, тому компоненти загального розв'язку матимуть вигляд (3.80), а представлення гіперболічного косинуса матиме вигляд:

$$Ch(A) = ch(a_1) + (a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4) \cdot sh(a_1) \quad (3.82)$$

### 3.2.2. Побудова представлення тригонометричних функцій в некомутативному класі ГЧС $D_n$

Представлення тригонометричних функцій від узагальненого кватерніона можна побудувати, з допомогою рівняння (1.32) із знаком «-». Тому асоціативна система диференціальних рівнянь відрізняється від (3.71):

Характеристичне рівняння має чотири двократних корені:

$$\lambda_1 = \sqrt{\Delta} + i \cdot a_1; \lambda_2 = -\sqrt{\Delta} - i \cdot a_1; \lambda_3 = \sqrt{\Delta} - i \cdot a_1; \lambda_4 = -\sqrt{\Delta} + i \cdot a_1, i^2 = -1.$$

Для визначення початкових умов скористаємося степеневим рядом для тригонометричного синуса:

$$\text{Sin}(At) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(At)^{2i+1}}{(2i+1)!} \quad (3.83)$$

1)  $\text{Sin}(0) = 0$  ;

2) при  $t = 1$   $\text{Sin}(a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) = \frac{a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4}{\sqrt{|\Delta|}} \text{sh}(\sqrt{|\Delta|})$ .

Застосувавши до (3.83) звичайної процедури розв'язання диференціальних рівнянь, отримаємо значення довільних сталих, при підстановці яких в асоційовану систему, позначивши  $a_k t \approx a_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , отримаємо наступне представлення тригонометричного синуса для некомутативних систем:

$$\text{Sin}(A) = \frac{1}{2} \left[ \sin(a_1) (e^{\sqrt{|\Delta|}} + e^{-\sqrt{|\Delta|}}) e_1 + \frac{\cos(a_1)}{\sqrt{|\Delta|}} (e^{\sqrt{|\Delta|}} - e^{-\sqrt{|\Delta|}}) (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \right]. \quad (3.84)$$

На рис. 3.5 представлені графіки залежності від часу амплітуд компонент тригонометричного синуса узагальненого кватерніона, який має вигляд:

$$A = 0.1 \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{5}\right) \cdot e_1 + \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \cdot e_2 + \sin 2\pi t \cdot e_3 + \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \cdot e_4$$

Побудова представлення тригонометричного косинуса від узагальненого кватерніона відрізняється від побудови представлення синуса тільки початковими умовами. Знайшовши значення довільних сталих за аналогічним алгоритмом, отримаємо наступне представлення тригонометричного косинуса для некомутативних систем:

$$\text{Cos}(A) = \frac{1}{2} \left[ \cos(a_1) (e^{\sqrt{|\Delta|}} + e^{-\sqrt{|\Delta|}}) e_1 + \frac{\sin(a_1)}{\sqrt{|\Delta|}} (e^{\sqrt{|\Delta|}} - e^{-\sqrt{|\Delta|}}) (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \right]. \quad (3.85)$$

На рис. 3.6 представлені графіки залежності від часу амплітуд компонент тригонометричного косинуса узагальненого кватерніона, який має вигляд:

$$A = 0.1 \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{5}\right) \cdot e_1 + \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \cdot e_2 + \sin 2\pi t \cdot e_3 + \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \cdot e_4$$

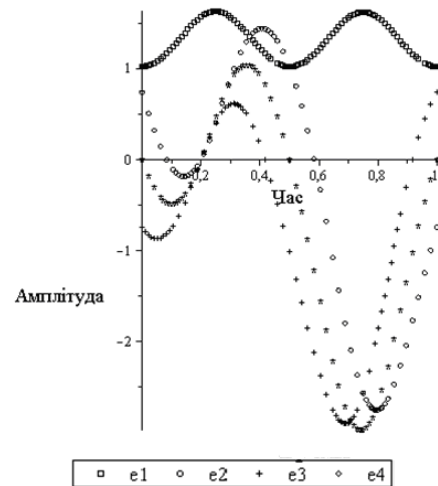
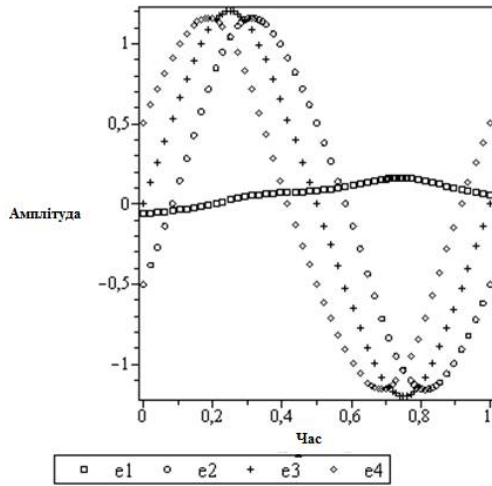


Рис. 3.5. - Графіки амплітуд компонент тригонометричного синуса      Рис. 3.6. - Графіки амплітуд компонент тригонометричного косинуса

Аналогічно, як і для представлення гіперболічних функцій, розглянемо окремо представлення тригонометричних функцій при умові (3.79).

Характеристичне рівняння має два комплексноспряжені корені четвертої кратності:  $\lambda_1 = i \cdot a_1$ ;  $\lambda_2 = -i \cdot a_1$ ;  $i^2 = -1$ .

Скориставшись початковими умовами для тригонометричного синуса (3.83), отримаємо наступні значення довільних сталих:  $C_{1,1} = -\frac{1}{2} I$ ;  $C_{5,1} = \frac{1}{2} I$ ;

$C_{k,s} = \frac{m_k}{2}$ ,  $k = 2,3,4$ ,  $s = 2,6$ ; решта довільних сталих рівна нулю.

При таких значеннях довільних сталих, представлення тригонометричного синуса матиме вигляд:

$$\text{Sin}(A) = \sin(a_1) + (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \cdot \cos(a_1) \tag{3.86}$$

Побудова представлення тригонометричного косинуса відрізняється від побудови представлення синуса тільки початковими умовами.

Застосувавши до (3.84) звичайної процедури розв'язання диференціальних рівнянь, отримаємо наступні значення довільних сталих:

$$C_{1,1} = C_{5,1} = \frac{1}{2}; \quad C_{k,2} = \frac{m_k}{2} I, \quad C_{k,6} = -\frac{m_k}{2} I, \quad k = 2,3,4; \quad \text{решта довільних сталих рівна нулю.}$$

нулю.

Таким чином представлення тригонометричного косинуса матиме вигляд:

$$\text{Cos}(A) = \cos(a_1) - (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \cdot \sin(a_1) \tag{3.87}$$

В комутативному класі систем четвертої вимірності  $D_k$  представлення гіперболічних та тригонометричних функцій будуються за такими ж алгоритмами, як і для некомутативних систем.

### 3.2.3. Моделювання представлення гіперболічних функцій в комутативному класі ГЧС $D_k$

Аналогічно, як при побудові представлення експоненціальної і логарифмічної функцій, будемо розглядати по три випадки як для гіперболічних так і для тригонометричних функцій. Також, складні розрахункові операції було набагато швидше виконано за допомогою системи символічних обчислень Maple.

Асоційована система лінійних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} &= (a_1^2 + \alpha a_2^2 + \beta a_3^2 + \alpha \beta a_4^2)x_1(t) + 2\alpha(a_1 a_2 + \beta a_3 a_4)x_2(t) + \\
 &\quad + 2\beta(a_1 a_3 + \alpha a_2 a_4)x_3(t) + 2\alpha\beta(a_1 a_4 + a_2 a_3)x_4(t) \\
 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} &= 2(a_1 a_2 + \beta a_3 a_4)x_1(t) + (a_1^2 + \alpha a_2^2 + \beta a_3^2 + \alpha \beta a_4^2)x_2(t) + \\
 &\quad + 2\beta(a_1 a_4 + a_2 a_3)x_3(t) + 2\beta(a_1 a_3 + \alpha a_2 a_4)x_4(t) \\
 \frac{d^2 x_3(t)}{dt^2} &= 2(a_1 a_3 + \alpha a_2 a_4)x_1(t) + 2\alpha(a_1 a_4 + a_2 a_3)x_2(t) + \\
 &\quad + (a_1^2 + \alpha a_2^2 + \beta a_3^2 + \alpha \beta a_4^2)x_3(t) + 2\alpha(a_1 a_2 + \beta a_3 a_4)x_4(t) \\
 \frac{d^2 x_4(t)}{dt^2} &= 2(a_1 a_4 + a_2 a_3)x_1(t) + 2(a_1 a_3 + \alpha a_2 a_4)x_2(t) + \\
 &\quad + 2(a_1 a_2 + \beta a_3 a_4)x_3(t) + (a_1^2 + \alpha a_2^2 + \beta a_3^2 + \alpha \beta a_4^2)x_4(t)
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

1) Характеристичне рівняння правої частини (3.88) має вісім різних коренів ( $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ ):

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= a_1 + \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}a_4 + \sqrt{\alpha}a_2 + \sqrt{\beta}a_3, \quad \lambda_2 = a_1 + \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}a_4 - \sqrt{\alpha}a_2 - \sqrt{\beta}a_3, \\
 \lambda_3 &= a_1 - \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}a_4 + \sqrt{\alpha}a_2 - \sqrt{\beta}a_3, \quad \lambda_4 = a_1 - \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}a_4 - \sqrt{\alpha}a_2 + \sqrt{\beta}a_3, \\
 \lambda_5 &= -a_1 + \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}a_4 + \sqrt{\alpha}a_2 - \sqrt{\beta}a_3, \quad \lambda_6 = -a_1 + \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}a_4 - \sqrt{\alpha}a_2 + \sqrt{\beta}a_3, \\
 \lambda_7 &= -a_1 - \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}a_4 + \sqrt{\alpha}a_2 + \sqrt{\beta}a_3, \quad \lambda_8 = -a_1 - \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}a_4 - \sqrt{\alpha}a_2 - \sqrt{\beta}a_3.
 \end{aligned} \tag{3.89}$$



Загальний розв'язок  $X(t)$  системи (3.88) складається з чотирьох компонент  $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$ , кожна з яких має чотири частинні розв'язки:

$$x_k(t) = \sum_{s=1}^8 x_{ks}(t) = \sum_{s=1}^8 C_{k,s} e^{\lambda_s t} \quad (3.90)$$

Підставивши (3.90) в систему (3.88), отримаємо 8 незалежних сталих із 32, а решта 24 залежні. Значення 8 незалежних сталих із 32 довільних можна знайти, скориставшись двома початковими значеннями гіперболічного синуса. Скориставшись першою початковою умовою  $Sh(0) = 0$ , зменшимо кількість незалежних сталих, тобто:

$$\begin{aligned} C_{1,4} = -C_{8,4}, \quad C_{2,4} = -C_{7,4}, \quad C_{3,4} = -C_{6,4}, \quad C_{4,4} = -C_{5,4}, \\ C_{5,4} = C_{5,4}, \quad C_{6,4} = C_{6,4}, \quad C_{7,4} = C_{7,4}, \quad C_{8,4} = C_{8,4}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Остаточне значення незалежних сталих знаходимо скориставшись другою початковою умовою при  $t = 1$ ,  $Sh(m_1 e_1) = sh(m_1)$ :

$$C_{5,4} = \frac{1}{8\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}, \quad C_{6,4} = \frac{1}{8\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}, \quad C_{7,4} = -\frac{1}{8\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}, \quad C_{8,4} = -\frac{1}{8\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}. \quad (3.92)$$

Підставивши значення довільних сталих в (3.90) і виконавши перетворення для спрощення виразів, отримаємо наступне представлення гіперболічного синуса для комутативних систем у першому випадку, поклавши  $m_k t \approx m_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ :

$$\begin{aligned} Sh(A) = & \frac{1}{8} (e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} + e^{\lambda_3} + e^{\lambda_4} - e^{\lambda_5} - e^{\lambda_6} - e^{\lambda_7} - e^{\lambda_8}) e_1 + \\ & + \frac{1}{8\sqrt{\alpha}} (e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2} + e^{\lambda_3} - e^{\lambda_4} + e^{\lambda_5} - e^{\lambda_6} + e^{\lambda_7} - e^{\lambda_8}) e_2 + \\ & + \frac{1}{8\sqrt{\beta}} (e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2} - e^{\lambda_3} + e^{\lambda_4} - e^{\lambda_5} + e^{\lambda_6} + e^{\lambda_7} - e^{\lambda_8}) e_3 + \\ & + \frac{1}{8\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} (e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} - e^{\lambda_3} - e^{\lambda_4} + e^{\lambda_5} + e^{\lambda_6} - e^{\lambda_7} - e^{\lambda_8}) e_4 \end{aligned} \quad (3.93)$$

Представлення гіперболічного синуса (3.93), а також інші представлення гіперболічних та тригонометричних функцій, можна більше спростити лише для конкретної ГЧС, для цього достатньо підставити значення  $\alpha$  і  $\beta$  та виконати перетворення.

Для побудови представлення гіперболічного косинуса варто врахувати, що визначне рівняння таке саме, як і для гіперболічного синуса, тому характеристичні корені матимуть вигляд (3.89), а частинні розв'язки, також, матимуть вигляд (3.90). Тобто відмінність полягатиме тільки в початкових умовах, для визначення яких скористаємося степернем рядом для гіперболічного косинуса (3.77).

Скориставшись початковими значеннями гіперболічного косинуса, отримаємо значення незалежних сталих, підставивши які в (3.90), і виконавши перетворення для спрощення виразів, отримаємо наступне представлення гіперболічного косинуса:

$$\begin{aligned}
 Ch(A) = & \frac{1}{8}(e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} + e^{\lambda_3} + e^{\lambda_4} - e^{\lambda_5} - e^{\lambda_6} - e^{\lambda_7} - e^{\lambda_8})\mathbf{e}_1 + \\
 & + \frac{1}{8\sqrt{\alpha}}(e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2} + e^{\lambda_3} - e^{\lambda_4} - e^{\lambda_5} + e^{\lambda_6} - e^{\lambda_7} + e^{\lambda_8})\mathbf{e}_2 + \\
 & + \frac{1}{8\sqrt{\beta}}(e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2} - e^{\lambda_3} + e^{\lambda_4} + e^{\lambda_5} - e^{\lambda_6} - e^{\lambda_7} + e^{\lambda_8})\mathbf{e}_3 + \\
 & + \frac{1}{8\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}(e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} - e^{\lambda_3} - e^{\lambda_4} - e^{\lambda_5} - e^{\lambda_6} + e^{\lambda_7} + e^{\lambda_8})\mathbf{e}_4
 \end{aligned} \tag{3.94}$$

2) Характеристичне рівняння (3.88) має чотири двократні корені ( $\alpha = 0$  або  $\beta = 0$ ):

$$\lambda_{1,2} = a_1 + \sqrt{\alpha}a_2, \lambda_{3,4} = a_1 - \sqrt{\alpha}a_2, \lambda_{5,6} = -a_1 + \sqrt{\alpha}a_2, \lambda_{7,8} = -a_1 - \sqrt{\alpha}a_2. \tag{3.95}$$

Відповідно до коренів характеристичного рівняння, частинні розв'язки шукатимемо у вигляді:

$$x_k(t) = \sum_{s=1}^4 x_{ks}(t) = \sum_{s=1}^4 (C_{k,2s-1} + C_{k,2s}t)e^{\lambda_s t} \tag{3.96}$$

Знайшовши значення довільних сталих та скориставшись початковими умовами отримаємо наступні представлення гіперболічних синуса та косинуса для другого випадку, позначивши  $m_k t \approx m_k$ ,  $k = 1,2,3,4$ :

$$\begin{aligned}
Sh(A) = & \frac{1}{4}(-e^{\lambda_1} - e^{\lambda_3} + e^{\lambda_5} + e^{\lambda_7})e_1 + \frac{1}{4\sqrt{\alpha}}(e^{\lambda_1} - e^{\lambda_3} + e^{\lambda_5} - e^{\lambda_7})e_2 + \\
& + \frac{1}{4}((- \sqrt{\alpha}m_4 + m_3)(e^{\lambda_1} + e^{\lambda_7}) + (\sqrt{\alpha}m_4 + m_3)(e^{\lambda_3} + e^{\lambda_5}))e_3 + \\
& + \frac{1}{8\sqrt{\alpha}}((\sqrt{\alpha}m_4 - m_3)(e^{\lambda_1} + e^{\lambda_7}) + (\sqrt{\alpha}m_4 + m_3)(e^{\lambda_3} + e^{\lambda_5}))e_4
\end{aligned} \tag{3.97}$$

$$\begin{aligned}
Ch(A) = & \frac{1}{4}(e^{\lambda_1} + e^{\lambda_3} + e^{\lambda_5} + e^{\lambda_7})e_1 + \frac{1}{4\sqrt{\alpha}}(-e^{\lambda_1} + e^{\lambda_3} + e^{\lambda_5} - e^{\lambda_7})e_2 + \\
& + \frac{1}{4}((\sqrt{\alpha}m_4 - m_3)(e^{\lambda_1} - e^{\lambda_7}) + (\sqrt{\alpha}m_4 + m_3)(-e^{\lambda_3} + e^{\lambda_5}))e_3 + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{\alpha}}((\sqrt{\alpha}m_4 - m_3)(-e^{\lambda_1} + e^{\lambda_7}) + (\sqrt{\alpha}m_4 + m_3)(-e^{\lambda_3} + e^{\lambda_5}))e_4
\end{aligned} \tag{3.98}$$

3) Характеристичне рівняння (3.88) має два корені кратності чотири ( $\alpha = 0$  і  $\beta = 0$ ):

$$\lambda_{1,2,3,4} = a_1, \quad \lambda_{5,6,7,8} = -a_1. \tag{3.99}$$

Частинні розв'язки матимуть вигляд:

$$x_k(t) = \sum_{s=1}^2 x_{ks}(t) = \sum_{s=1}^2 (C_{k,4s-3} + C_{k,4s-2}t + C_{k,4s-1}t^2 + C_{k,4s}t^3)e^{\lambda_s t} \tag{3.100}$$

Виконавши аналогічні перетворення для знаходження довільних сталих та використання початкових умов, позначивши  $m_k t \approx m_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , отримаємо наступні представлення гіперболічних синуса та косинуса:

$$\begin{aligned}
Sh(A) = & sh(m_1)e_1 + (m_2)ch(m_1)e_2 + (m_3)ch(m_1)e_3 + \\
& + ((m_4)ch(m_1) + (m_2m_3)sh(m_1))e_4
\end{aligned} \tag{3.101}$$

$$\begin{aligned}
Ch(A) = & ch(m_1)e_1 + (m_2)sh(m_1)e_2 + (m_3)sh(m_1)e_3 + \\
& + ((m_4)sh(m_1) + (m_2m_3)ch(m_1))e_4
\end{aligned} \tag{3.102}$$

### 3.2.4. Представлення тригонометричних функцій в комутативному класі ГЧС $\mathcal{D}_k$

Якщо в рівняння (1.32) із знаком «-» виконати множення, у відповідності з (2.18), і прирівняти коефіцієнти при однакових базисних елементах, то отримаємо систему із чотирьох лінійних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами, яка має вигляд:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} &= -(a_1^2 + \alpha a_2^2 + \beta a_3^2 + \alpha \beta a_4^2)x_1(t) - 2\alpha(a_1 a_2 + \beta a_3 a_4)x_2(t) - \\
&\quad - 2\beta(a_1 a_3 + \alpha a_2 a_4)x_3(t) - 2\alpha\beta(a_1 a_4 + a_2 a_3)x_4(t) \\
\frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} &= -2(a_1 a_2 + \beta a_3 a_4)x_1(t) - (a_1^2 + \alpha a_2^2 + \beta a_3^2 + \alpha \beta a_4^2)x_2(t) - \\
&\quad - 2\beta(a_1 a_4 + a_2 a_3)x_3(t) - 2\beta(a_1 a_3 + \alpha a_2 a_4)x_4(t) \\
\frac{d^2 x_3(t)}{dt^2} &= -2(a_1 a_3 + \alpha a_2 a_4)x_1(t) - 2\alpha(a_1 a_4 + a_2 a_3)x_2(t) - \\
&\quad - (a_1^2 + \alpha a_2^2 + \beta a_3^2 + \alpha \beta a_4^2)x_3(t) - 2\alpha(a_1 a_2 + \beta a_3 a_4)x_4(t) \\
\frac{d^2 x_4(t)}{dt^2} &= -2(a_1 a_4 + a_2 a_3)x_1(t) - 2(a_1 a_3 + \alpha a_2 a_4)x_2(t) - \\
&\quad - 2(a_1 a_2 + \beta a_3 a_4)x_3(t) - (a_1^2 + \alpha a_2^2 + \beta a_3^2 + \alpha \beta a_4^2)x_4(t)
\end{aligned} \tag{3.103}$$

1) Характеристичне рівняння правої частини (3.103) має чотири комплексно-спряжені корені ( $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ ):

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \pm I \cdot (a_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} a_4 + \sqrt{\alpha} a_2 + \sqrt{\beta} a_3) = \pm I \cdot \delta_1, \\
\lambda_2 &= \pm I \cdot (a_1 + \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} a_4 - \sqrt{\alpha} a_2 - \sqrt{\beta} a_3) = \pm I \cdot \delta_2, \\
\lambda_3 &= \pm I \cdot (a_1 - \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} a_4 + \sqrt{\alpha} a_2 - \sqrt{\beta} a_3) = \pm I \cdot \delta_3, \\
\lambda_4 &= \pm I \cdot (a_1 - \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} a_4 - \sqrt{\alpha} a_2 + \sqrt{\beta} a_3) = \pm I \cdot \delta_4.
\end{aligned} \tag{3.104}$$

Загальний розв'язок  $X(t)$  системи (3.103) складається з чотирьох компонент  $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$ , кожна з яких має чотири частинні розв'язки:

$$x_k(t) = \sum_{s=1}^4 x_{ks}(t) = \sum_{s=1}^4 (C_{k,2s-1} \sin(\delta_s t) + C_{k,2s} \cos(\delta_s t)) \tag{3.105}$$

Підставивши (3.105) в систему (3.103), отримаємо 8 незалежних сталих із 32, а решта 24 – залежні, які знаходимо з початкових умов.

Підставивши значення довільних сталих в (3.105) і виконавши перетворення для спрощення виразів позначивши  $m_k t \approx m_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , отримаємо наступне представлення тригонометричного синуса для комутативних систем у першому випадку:

$$\begin{aligned}
\text{Sin}(A) = & \frac{1}{4}(\sin(\delta_1) + \sin(\delta_2) + \sin(\delta_3) + \sin(\delta_4))e_1 + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{\alpha}}(\sin(\delta_1) - \sin(\delta_2) - \sin(\delta_3) + \sin(\delta_4))e_2 + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{\beta}}(\sin(\delta_1) - \sin(\delta_2) + \sin(\delta_3) - \sin(\delta_4))e_3 + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}(\sin(\delta_1) + \sin(\delta_2) - \sin(\delta_3) - \sin(\delta_4))e_4
\end{aligned} \tag{3.106}$$

Для побудови представлення тригонометричного косинуса варто врахувати, що визначне рівняння таке саме, як і для тригонометричного синуса, тому характеристичні корені матимуть вигляд (3.104), а частинні розв'язки, також, матимуть вигляд (3.105). Тому, тригонометричний косинус матиме наступне представлення :

$$\begin{aligned}
\text{Cos}(A) = & \frac{1}{4}(\cos(\delta_1) + \cos(\delta_2) + \cos(\delta_3) + \cos(\delta_4))e_1 + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{\alpha}}(\cos(\delta_1) - \cos(\delta_2) - \cos(\delta_3) + \cos(\delta_4))e_2 + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{\beta}}(\cos(\delta_1) - \cos(\delta_2) + \cos(\delta_3) - \cos(\delta_4))e_3 + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}(\cos(\delta_1) + \cos(\delta_2) - \cos(\delta_3) - \cos(\delta_4))e_4
\end{aligned} \tag{3.107}$$

2) Характеристичне рівняння (3.103) має чотири двократні:

$$\lambda_{1,2} = I(a_1 + \sqrt{\alpha}a_2), \lambda_{3,4} = -I(a_1 + \sqrt{\alpha}a_2), \lambda_{5,6} = I(-a_1 + \sqrt{\alpha}a_2), \lambda_{7,8} = -I(-a_1 + \sqrt{\alpha}a_2). \tag{3.108}$$

Відповідно до (3.108), частинні розв'язки шукатимемо у вигляді:

$$x_k(t) = \sum_{s=1}^4 x_{ks}(t) = \sum_{s=1}^4 (C_{k,2s-1} + C_{k,2s}t)e^{\lambda_s t} \tag{3.109}$$

Виконаємо необхідні обчислення для знаходження довільних сталих:

$$\begin{aligned}
\text{Sin}(A) = & \frac{1}{4}I\left(e^{I(\sqrt{\alpha}m_2 - m_1)} - e^{-I(\sqrt{\alpha}m_2 - m_1)} - e^{I(\sqrt{\alpha}m_2 + m_1)} + e^{-I(\sqrt{\alpha}m_2 + m_1)}\right)e_1 + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{\alpha}}I\left(-e^{I(\sqrt{\alpha}m_2 - m_1)} + e^{-I(\sqrt{\alpha}m_2 - m_1)} - e^{I(\sqrt{\alpha}m_2 + m_1)} + e^{-I(\sqrt{\alpha}m_2 + m_1)}\right)e_2 + \\
& + \frac{1}{4}\left(\left(-\sqrt{\alpha}m_4 + m_3\right)\left(e^{I(\sqrt{\alpha}m_2 - m_1)} + e^{-I(\sqrt{\alpha}m_2 - m_1)}\right) + \right. \\
& \left. + \left(\sqrt{\alpha}m_4 + m_3\right)\left(e^{I(\sqrt{\alpha}m_2 + m_1)} + e^{-I(\sqrt{\alpha}m_2 + m_1)}\right)\right)e_3 + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{\alpha}}\left(\left(\sqrt{\alpha}m_4 - m_3\right)\left(-e^{I(\sqrt{\alpha}m_2 - m_1)} - e^{-I(\sqrt{\alpha}m_2 - m_1)}\right) + \right. \\
& \left. + \left(\sqrt{\alpha}m_4 + m_3\right)\left(e^{I(\sqrt{\alpha}m_2 + m_1)} + e^{-I(\sqrt{\alpha}m_2 + m_1)}\right)\right)e_4
\end{aligned} \tag{3.110}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Cos}(A) = & \frac{1}{4} I \left( e^{I(\sqrt{\alpha}m_2 - m_1)} + e^{-I(\sqrt{\alpha}m_2 - m_1)} + e^{I(\sqrt{\alpha}m_2 + m_1)} + e^{-I(\sqrt{\alpha}m_2 + m_1)} \right) e_1 + \\
 & + \frac{1}{4\sqrt{\alpha}} I \left( -e^{I(\sqrt{\alpha}m_2 - m_1)} - e^{-I(\sqrt{\alpha}m_2 - m_1)} + e^{I(\sqrt{\alpha}m_2 + m_1)} + e^{-I(\sqrt{\alpha}m_2 + m_1)} \right) e_2 + \\
 & + \frac{1}{4} \left( \left( -\sqrt{\alpha}m_4 + m_3 \right) \left( -e^{I(\sqrt{\alpha}m_2 - m_1)} + e^{-I(\sqrt{\alpha}m_2 - m_1)} \right) + \right. \\
 & \left. + \left( \sqrt{\alpha}m_4 + m_3 \right) \left( e^{I(\sqrt{\alpha}m_2 + m_1)} - e^{-I(\sqrt{\alpha}m_2 + m_1)} \right) \right) e_3 + \\
 & + \frac{1}{4\sqrt{\alpha}} \left( \left( \sqrt{\alpha}m_4 - m_3 \right) \left( e^{I(\sqrt{\alpha}m_2 - m_1)} - e^{-I(\sqrt{\alpha}m_2 - m_1)} \right) + \right. \\
 & \left. + \left( \sqrt{\alpha}m_4 + m_3 \right) \left( e^{I(\sqrt{\alpha}m_2 + m_1)} - e^{-I(\sqrt{\alpha}m_2 + m_1)} \right) \right) e_4
 \end{aligned} \tag{3.111}$$

3) Два корені кратності чотири ( $\alpha = 0$  і  $\beta = 0$ ):

$$\lambda_{1,2,3,4} = Ia_1, \quad \lambda_{5,6,7,8} = -Ia_1. \tag{3.112}$$

Частинні розв'язки матимуть вигляд:

$$x_k(t) = \sum_{s=1}^2 x_{ks}(t) = \sum_{s=1}^2 (C_{k,4s-3} + C_{k,4s-2}t + C_{k,4s-1}t^2 + C_{k,4s}t^3) e^{\lambda_s t} \tag{3.113}$$

Знайшовши значення довільних сталих та підставивши їх в (3.122) при  $m_k t \approx m_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , отримаємо наступне представлення тригонометричного синуса,

$$\begin{aligned}
 \text{Sin}(A) = & \sin(m_1) e_1 + m_2 \cos(m_1) e_2 + m_3 \cos(m_1) e_3 + \\
 & + (m_4 \cos(m_1) - m_2 m_3 \sin(m_1)) e_4
 \end{aligned} \tag{3.114}$$

та косинуса:

$$\begin{aligned}
 \text{Cos}(A) = & \cos(m_1) e_1 - m_2 \sin(m_1) e_2 - m_3 \sin(m_1) e_3 - \\
 & - (m_4 \sin(m_1) + m_2 m_3 \cos(m_1)) e_4
 \end{aligned} \tag{3.115}$$

Таблиця 3.2

**Порівняння часу обчислення тригонометричних та гіперболічних нелінійностей для різних ГЧС**

ГЧС			Час обчислення		$\frac{t_p}{t_\phi}$
№	Ім'я	Вимірність	за представленням, $t_\phi, c$	за допомогою суми ряду, $t_p, c$	
1	$C$	2	$8,1 \cdot 10^{-5}$	$4,0 \cdot 10^{-3}$	50
2	$D$	2	$4,7 \cdot 10^{-5}$	$3,0 \cdot 10^{-3}$	64
3	$W$	2	$4,8 \cdot 10^{-5}$	$3,0 \cdot 10^{-3}$	62
4	$\Gamma_{31}$	3	$6,6 \cdot 10^{-5}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$	76
5	$\Gamma_{32}$	3	$10,0 \cdot 10^{-5}$	$6,0 \cdot 10^{-3}$	60
6	$\Gamma_{33}$	3	$40,9 \cdot 10^{-5}$	$10,1 \cdot 10^{-3}$	25

7	$\Gamma_{41}$	4	$24,0 \cdot 10^{-5}$	$10,1 \cdot 10^{-3}$	42
8	$\Gamma_{42}$	4	$9,4 \cdot 10^{-5}$	$9,1 \cdot 10^{-3}$	97
9	$\Gamma_{43}$	4	$12,4 \cdot 10^{-5}$	$11,1 \cdot 10^{-3}$	90
10	$\Gamma_{44}$	4	$9,5 \cdot 10^{-5}$	$7,5 \cdot 10^{-3}$	79
11	$\Gamma_{45}$	4	$12,5 \cdot 10^{-5}$	$10,2 \cdot 10^{-3}$	82
12	$K$	4	$35,0 \cdot 10^{-5}$	$13,7 \cdot 10^{-3}$	39

В таблиці 3.2 наведено порівняння часу обчислення тригонометричних та гіперболічних функцій, по аналогії з таблицею 3.1. З таблиці можна побачити, що ефективність обчислення тригонометричних та гіперболічних функцій за допомогою представлень методом асоційованої системи лінійних диференціальних рівнянь збільшено в 25 – 97 разів.

### Висновки до розділу 3

В розділі розвинено метод асоційованої системи лінійних диференціальних рівнянь для побудови представлень експоненціальної, тригонометричних та гіперболічних функцій в нових класах ГЧС.

Застосування цього методу дало можливість зменшити середній час обчислення експоненти, в порівнянні з прямими методами, до 300 разів, а тригонометричних та гіперболічних функцій – до 100 разів, в залежності від вимірності ГЧС та її властивостей. Порівняння проводилося в системі символічної математики Maple на одній і тій же ЕОМ.

Побудовано представлення експоненціальної функції у загальному вигляді в комутативній автоподвоюваній системі методом асоційованої системи лінійних диференціальних рівнянь, а в некомутативному класі методом розкладання в ряд і оцінено похибки обчислень, що полегшує процес математичного моделювання на етапі проектування.

## РОЗДІЛ 4

### РОЗРОБКА ПРОГРАМНОГО КОМПЛЕКСУ ГІПЕРКОМПЛЕКСНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

#### 4.1. Основні принципи побудови програмного комплексу гіперкомплексних обчислень

Як уже було зазначено в попередніх розділах, при математичному моделюванні різних об'єктів і процесів доцільно представляти дані гіперкомплексними числами. До того ж, останнім часом, теорія та практика гіперкомплексних чисел ефективно застосовується не лише в прикладних науках, а й у гуманітарних.

При дослідженні складних математичних моделей доводиться мати справу з громіздкими аналітичними перетвореннями та складними математичними обчисленнями. Значно спростити такі перетворення та скоротити час розрахункових операцій можливо завдяки інформаційним технологіям, представлених інтегрованою системою символічної математики. Така система повинна включати в себе метод представлення даних спеціальної нечислової структури, мову опрацювання таких даних та бібліотеку функцій для виконання необхідних операцій.

Система комп'ютерної математики Maple повністю задовіляє таким умовам, оскільки містить сотні базових функцій та алгоритмів символічних перетворень, бібліотеку операторів, команд та функцій [92, 93]. Також, окрім основних математичних пакетів містяться ще й пакети підпрограм для вирішення задач лінійної і тензорної алгебри, теорії чисел, теорії ймовірності й математичної статистики, інтегральних перетворень, числової апроксимації та лінійної оптимізації [94].

Цей перелік можна продовжувати далі та доповнювати, зокрема, розроблено програмний комплекс гіперкомплексних обчислень (ПК). ПК має свій ідентифікатор, його можна визивати, приєднувати до програми і



транспортувати на інші комп'ютери. Із процедур ПК можна формувати програми обчислень, використовуючи засоби алгоритмічної мови Maple [38, 39].

ПК може бути інстальований на будь-якому комп'ютері з операційною системою Windows і системою комп'ютерних обчислень Maple не нижче 5-ї версії. Цей комплекс відкритий для поповнення новими процедурами і редагування існуючих процедур кожним користувачем, який володіє Maple.

Такий пакет процедур дозволяє ефективно будувати математичні моделі різних рівнів складності з використанням гіперкомплексного представлення даних [95].

На рисунку 4.1 показано структуру програмного засобу:

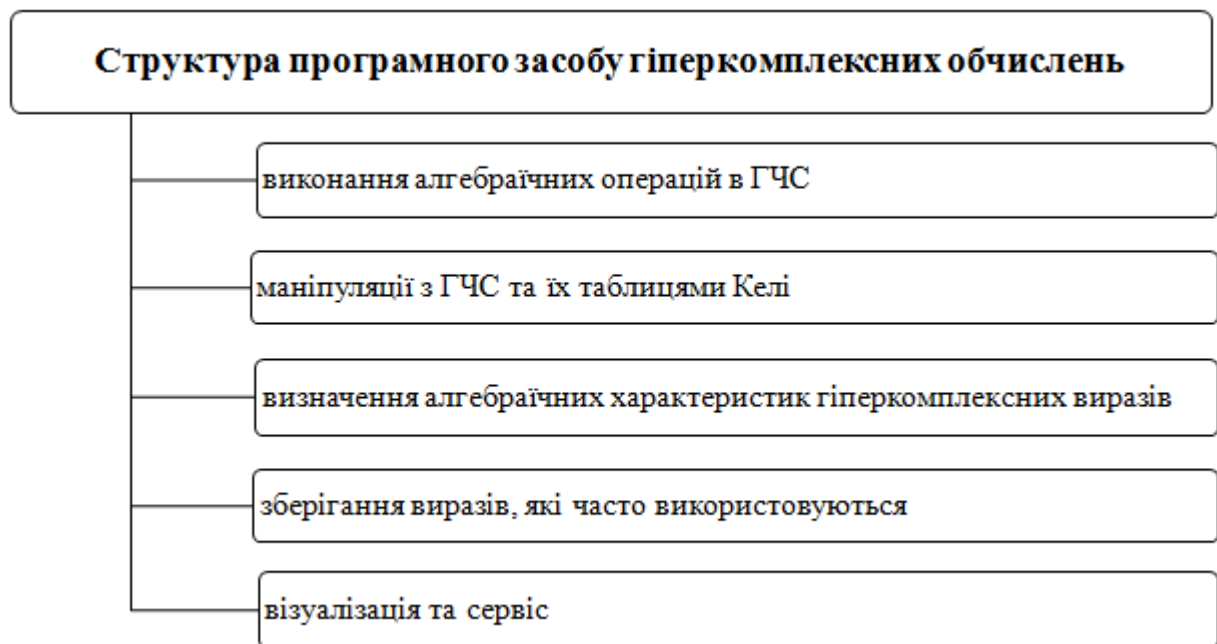


Рис. 4.1. - Структура програмного засобу гіперкомплексних обчислень

До підсистеми виконання алгебраїчних операцій в ГЧС входять процедури додавання *inAdd* та *Add* двох гіперкомплексних чисел у списковій і натуральній формах; віднімання *Subtr*; множення двох гіперкомплексних чисел у списковій і натуральній формах *inMulti*, *natMulti* [96].

Підсистема маніпуляції з ГЧС і таблицями Келі складається з процедур перетворення таблиці Келі із натурального вигляду в списковий (список структурних констант) *inConvertHNS*, визначення ідентифікатора базиса ГЧС за

даним гіперкомплексним числом в натуральному вигляді *nameBas*, переіменування ідентифікатора базиса в гіперкомплексному числі *renamA*, візуалізація списку ГЧС в таблицю Келі з даним базисом *VizHNS*, хранилище таблиць Келі *LibHNS*, процедура пошуку ГЧС в хранилищі за іменем *SearchHNS*, перегляд всіх ГЧС в натуральному вигляді *VizLibHNS*, поповнення хранилища ГЧС *AddHNS*, транспозиції рядків і стовпчиків таблиці Келі ГЧС *Trans*, генерації ізоморфної ГЧС шляхом лінійного перетворення базиса *GenIzo*, побудови прямої суми двох *DirSum2* і більше *DirSumN* ГЧС та ін.

Підсистема визначення алгебраїчних характеристик включає в себе наступні процедур: визначення псевдонорми гіперкомплексного числа в списковій формі - *Norma*, процедури визначення одиничного *Unit* та спряженого *Conjug* елементів, ділення - *Divis*, генерація гіперкомплексного числа *HNSnumber*.

Підсистема зберігання виразів, які часто використовуються містить процедури виконання різних операцій і обчислень для фіксованих ГЧС. Така система може поповнюватися і зберігатися окремим користувачем.

Підсистема візуалізації і сервісу складається з процедур візуалізації гіперкомплексного числа із спискової форми в натуральну *VizInA*, перетворення гіперкомплексного числа із натуральної форми в спискову *ConvertA*, поповнення списку на один елемент *Refill*, генерації списку-шаблону для внутрішнього представлення ГЧС *ListHNS*, видалення ГЧС із хранилища *RefillHNS*.

В наступній таблиці наведено всі процедури комплексу та позначено їх взаємозв'язки між собою. В кожному рядочку позначено, які з процедур комплексу використовуються в даній процедурі. Якщо аналізувати таблицю по стовпцях, можна побачити в скількох процедурах застосовується кожна процедура.

Проаналізувавши дану таблицю можна побачити, що розроблений програмний засіб не є набором процедур, а це структурно організований

комплекс, який являє собою спеціалізовану бібліотеку процедур, яка не має аналогів ні в Україні, ні в світі.

Таблиця 4.1

**Список процедур комплексу та їх взаємозв'язки**

№	Процедура	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
1	VizInA																																	
2	ConvertA																																	
3	Refill																																	
4	ListHNS																																	
5	inConvertHNS		x		x																													
6	nameBas																																	
7	renamA	x	x																															
8	VizHNS	x																																
9	LibHNS()																																	
10	SearchHNS																																	
11	RefillHNS																																	
12	VizLibHS	x							x																									
13	inAdd																																	
14	Add(A,B,dimHNS)	x	x																															
15	Subtr(A,B,dimHNS)	x	x																															
16	inMulti(A,B,HNS)									x	x																							
17	natMulti(A,B,HNS,nBas)	x	x							x	x																							
18	Norma(A,nameHNS)									x	x																							
19	Unit	x								x	x										x													
20	Conjug	x								x	x										x													
21	Divis		x							x	x										x													
22	Trans(M,1)																																	
23	AddHNS		x	x	x	x	x				x																							
24	GenIzo	x									x	x																						
25	DirSum2					x					x	x																						
26	DirSumN	x				x					x	x	x																					
27	HNSnumber	x																																
28	Rad2		x	x							x	x																						
29	SqrtEq		x	x							x	x																						
30	MultiDim								x	x	x	x																						
31	SysIzo										x	x																						
32	inDet										x	x																						

Всі ці процедури описані деталініше в додатку Ж.

Необхідно зазначити, що при гіперкомплексному представленні даних в математичному моделюванні можуть виникнути труднощі в зв'язку з багатовимірністю гіперкомплексних чисел. Саме тому значну увагу при розробці ПК було приділено способам і структурам представлення даних. Як відомо, загальний вигляд гіперкомплексного числа  $A$  такий:

$$A = a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_n e_n, \tag{4.1}$$

де:  $n$  - вимірність гіперкомплексного числа,

$a_i$  - алгебраїчні вирази,

$e_i$  - елементи базиса ГЧС («уявні одиниці»).

Таку форму гіперкомплексного числа називають натуральною. Як показує досвід, оперування з гіперкомплексними числами в натуральній формі досить незручне. Це пов'язано з тим, що різні операції виконуються з коефіцієнтами при базисних елементах, які потрібно виділяти та ідентифікувати. В системі Maple існують засоби, які дозволяють позбавитися від цих та інших незручностей, пов'язаних з використанням натуральної форми

гіперкомплексного числа. Справа в тому, що в натуральній формі представлення гіперкомплексного числа важливі лише коефіцієнти при елементах базису та їх порядковий номер, - тобто гіперкомплексне число можна представити у вигляді вектора. Однак векторно-матрична форма тут не підходить через те, що компоненти матриці і вектора повинні бути однотипними. В той же час в системі Maple є така форма представлення даних як список – *list* – впорядкований набір різнотипних даних.

Для оперування з даними в списковій формі в Maple існує безліч команд, які дозволяють задавати список, визначати довжину списку, додавати два списку однакової довжини, визначати член списку по його порядковому номеру, домножати всі члени списку на будь-який вираз та ін.

Представлення гіперкомплексного числа (4.1) у списковому вигляді, або його ще називають внутрішньою формою, має вигляд:

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n] \quad (4.2)$$

Таким чином, більшість процедур бібліотеки в якості вхідних параметрів використовують гіперкомплексні числа в списковій формі, або ж, в протилежному випадку, відбувається переведення із натуральної форми в спискову за допомогою відповідної процедури. Однак при такому виборі представлення даних потрібно мати процедури для взаємно-оберненого перетворення натуральної і внутрішньої форми представлення гіперкомплексних даних. В зв'язку з цим в багатьох процедурах ПК передбачено вихід у формі списку із двох елементів: перший елемент – результат в списковій формі, другий – в натуральній.

Також виявилось доцільним надавати спискову форму і більш складним гіперкомплексним структурам. Таблиця Келі множення базисних елементів представляється трирівневою списковою структурою: верхній рівень складається із списку рядків таблиці, другий вкладений рівень список комірок таблиці, третій, найнижчий рівень, - список структурних констант однієї комірки.

Наприклад, як показано в другому розділі (2.4), таблиці Келі для узагальнених кватерніонів в натуральній формі має вигляд:

$H_{\alpha\beta}$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_2$	$e_2$	$-\alpha e_1$	$e_4$	$-\alpha e_3$
$e_3$	$e_3$	$-e_4$	$-\beta e_1$	$\beta e_2$
$e_4$	$e_4$	$\alpha e_3$	$-\beta e_2$	$-\alpha \beta e_1$

а в списковій формі:

[[[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]],[[0,1,0,0],[-α,0,0,0],[0,0,0,1],[0,0,-α,0]],  
[[0,0,1,0],[0,0,0,-1],[-β,0,0,0],[0,β,0,0]],[[0,0,0,1],[0,0,α,0],[0,-β,0,0],[-αβ,0,0,0]]]

Така структура і склад комплексу гіперкомплексних символічних обчислень в середовищі Maple, як буде показано далі, дозволяє значно спростити процеси створення програмно-технічного забезпечення для математичного моделювання різних науково-технічних задач [97, 98].

## 4.2. Структура процедур програмного комплексу

Алгоритм створення бібліотеки процедур для обробки даних в гіперкомплексному поданні складається з наступних кроків.

Перш за все потрібно визначити ім'я бібліотеки, наприклад *HyperLib*, і створити для неї на диску каталог (папку) з заданим іменем. Оскільки процедури в Maple асоціюються з таблицями, то спочатку створюємо порожню таблицю для майбутніх процедур:

```
> HyperLib := table()
```

```
HyperLib := table([ ])
```

На наступному кроці потрібно ввести процедури, які входять до бібліотеки. Ім'я процедури складається з імені бібліотеки та імені процедури, яке записане в квадратних дужках. В додатку Д наведено опис та лістинги процесур, які входять до ПК.

Наведемо приклад.

1) Процедура перетворення натуральної форми гіперкомплексного числа в спискову **HyperLib[ConvertA](A, DimHNS)** з допомогою підстановок списку символів Кронекера.

Дана задача полягає в тому, щоб число  $A$  в формі (4.1) перевести у форму (4.2). На перший погляд це зробити дуже просто: зробити підстановки  $e_i = 1$ ,  $i = 1..n$  з допомогою команди *subs*, після чого отриманий вираз  $A = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  з допомогою команди *convert(A, list)* перетворити в (4.2). Однак, якщо в числі  $A$  один чи більше коефіцієнтів  $a_i$  рівні нулю, тобто гіперкомплексне число  $A$  неповне, то отримаємо список, довжина якого менша  $n$ , що приведе в подальшому до неправильних результатів.

Ідея алгоритму, який працює правильно як з повними гіперкомплексними числами, так і з неповними, полягає в наступному. Спочатку генерується список довжиною  $n$  - заготовка результату:

$$inA = [0, 0, \dots, 0]. \quad (4.3)$$

Потім генерується список такої ж довжини, який складається із рівностей  $e_i = 0$ :

$$sp = [e_1 = 0, \dots, e_i = 0, \dots, e_n = 0],$$

для кожного із значень індексів будується список таких рівностей:

$$sp1 = [e_1 = 0, \dots, e_i = 1, \dots, e_n = 0] \quad (4.4)$$

і виконується підстановка в початкове число списку (4.4). Якщо в числі  $A$  деяка компонента  $a_i = 0$ , то вона такою ввійде в список (4.3). Таким чином, ця підстановка виділяє коефіцієнт  $a_i$ , який присвоюється  $i$ -му елементу списку (4.3).

Нижче наведено повний текст програми. Формальними процедури являються:  $A$  – гіперкомплексне число в натуральній формі та **DimHNS** – вимірність ГЧС, в якій задано число  $A$ .

```
HyperLibConvertA := proc(A, DimHNS)
  local inA, sp, i, sp1, e, A1;
  if A = 0 then
    A1:=0 else
    A1:=subs(HyperLib[nameBas](A)=e, A);
```

```

end if
   $inA := [seq(0, i=1..DimHNS)];$ 
   $sp := [seq(e[i]=0, i=1..DimHNS)];$ 
  for  $i$  to  $DimHNS$  do
     $sp1 := sp;$ 
     $sp1[i] := e[i]=1;$ 
     $inA[i] := subs(sp1, A1)$ 
  end do;
  RETURN( $inA$ )
end proc

```

Результат виконання цієї процедури має наступний вигляд:

$$> A := a_1 e_1 + a_2 e_2 + (a_3 - 5) e_3 + 3 e_5$$

$$A := a_1 e_1 + a_2 e_2 + (a_3 - 5) e_3 + 3 e_5$$

$$> inA := HyperLib[ConvertA](A, 5)$$

$$inA := [a_1, a_2, a_3 - 5, 0, 3]$$

2) **HyperLib[inMulti](A, B, HNS)** – процедура множення двох гіперкомплексних чисел в списковій формі.

Вхідними параметрами являються гіперкомплексні множники  $A$  та  $B$ , ще одним, третім параметром є  $HNS$  - ім'я ГЧС, якій належать множники а яким визначається таблиця Келі з допомогою процедури **HyperLib[LibHNS]**.

Процедура реалізує узагальнену формулу множення гіперкомплексних чисел:  $A \cdot B = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_i b_j \gamma_{ij}^k$ , де  $n$  - вимірність ГЧС,  $\gamma_{ij}^n$  - структурні константи законів композиції ГЧС.

В процесі визивається хранилище таблиць Келі ГЧС (процедура **LibHNS()**), в якій шукається інформація про задану ГЧС **SearchHNS(HNS, Lib)**, в якій міститься тривірневий список структурних констант ГЧС, далі виконується узагальнена формула множення структурних констант, наведена вище.

Повний текст програми наведено нижче:

```

HyperLibinMulti := proc ( $A, B, HNS$ )
  local  $X, k, i, j, Lib, HNS1;$ 
   $Lib := HyperLib[LibHNS]();$ 
   $HNS1 := HyperLib[SearchHNS](HNS, Lib);$ 
   $X := [seq(0, i=1..nops(HNS1[1]))];$ 

```

```

for  $k$  from 1 to  $nops(HNSI[1])$  do
   $X[k] := 0$ ;
for  $i$  from 1 to  $nops(HNSI[1])$  do
for  $j$  from 1 to  $nops(HNSI[1])$  do
   $X[k] := X[k] + A[i] * B[j] * HNSI[i, j, k]$ ;
end do end do end do;
RETURN( $X$ )
end proc

```

В результаті виконання цієї процедури ми отримаємо гіперкомплексне число в списковій формі.

Наведемо приклад виклику і роботи цієї процедури. Згенеруємо два гіперкомплексних числа четвертої вимірності:

$> A := HNSnumber(4, a, e)[1]; B := HNSnumber(4, a, e)[1];$

$$A := [a_1, a_2, a_3, a_4]; B := [b_1, b_2, b_3, b_4];$$

Побудуємо їх добуток в ГЧС  $Q_4^n$  - некомутативному автоподвоєнні узагальненої системи комплексних чисел, таблиця Келі якої має вигляд:

$Q_4^n$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$
$E_1$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$
$E_2$	$E_2$	$pE_1 + qE_2$	$E_4$	$pE_3 + qE_4$
$E_3$	$E_3$	$-E_4$	$pE_1 + qE_3$	$-pE_2 - qE_4$
$E_4$	$E_4$	$-pE_3 - qE_4$	$pE_2 + qE_4$	$-p^2E_1 - pqE_2 - pqE_3 - q^2E_4$

Викликаємо процедуру:

$> C := inMulti(A, B, Q_4^n)$

В результаті отримаємо список із чотирьох компонент результату:

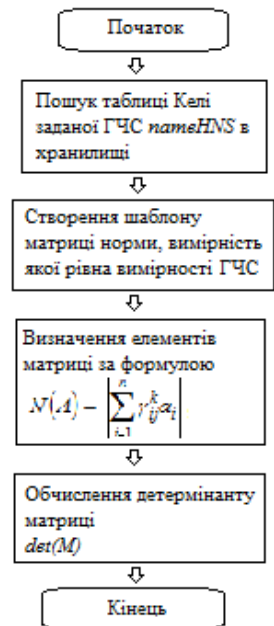
$$\begin{aligned}
 & [a_1 b_1 + a_2 b_2 p + a_3 b_3 p - a_4 b_4 p^2, a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2 q \\
 & + a_3 b_4 p - a_4 b_3 p - a_4 b_4 p q, a_1 b_3 - a_2 b_4 p + a_3 b_1 \\
 & + a_3 b_3 q + a_4 b_2 p - a_4 b_4 p q, a_1 b_4 - a_2 b_3 - a_2 b_4 q \\
 & + a_3 b_2 + a_3 b_4 q + a_4 b_1 + a_4 b_2 q - a_4 b_3 q - a_4 b_4 q^2]
 \end{aligned}$$

3) *HyperLib[Norma](A, nameHNS)* – процедура визначення псевдонорми гіперкомплексного числа.

В якості вхідних параметрів тут виступають:  $A$  - гіперкомплексне число в списковій формі та *nameHNS* - ім'я ГЧС.



Алгоритм виконання цієї процедури полягає в наступній послідовності дій. Перш за все, за таблицею Келі ГЧС визначається її вимірність, потім знаходиться матриця норми, компонентами якої є лінійні комбінації структурних констант та коефіцієнтів гіперкомплексного числа. На останньому кроці обчислюється детермінант матриці за допомогою стандартної процедури Maple, та результат виводиться на екран. На рис. 4.2 наведено блок схему виконання процедури *HyperLib[Norma]*.



```

HyperLibNorma := proc (A, nameHNS)
  local M, j, k, i, N, lib, HNS;
  lib:=HyperLib[LibHNS]();
  HNS := HyperLib[SearchHNS](nameHNS,lib);
  M:=Matrix(nops(HNS));
  for j from 1 to nops(HNS) do
    for k from 1 to nops(HNS) do
      for i from 1 to nops(HNS) do
        M[j,k]:=M[j,k]+HNS[i,j,k]*A[i]
      end do end do end do; RETURN(det(M))
    end proc
  
```

Рис.4.2.- Блок-схема процедури обчислення псевдонорми

Наприклад, для довільного кватерніона норма, обчислена за допомогою процедури *HyperLib[Norma]* матиме вигляд:

> A:= [a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, a<sub>3</sub>, a<sub>4</sub>]

$$A := [a_1, a_2, a_3, a_4]$$

> M:=HyperLib[Norma](A, H)

$$M := a_1^4 + 2 a_1^2 a_2^2 + 2 a_4^2 a_1^2 + 2 a_3^2 a_1^2 + a_2^4 + 2 a_4^2 a_2^2 + 2 a_3^2 a_2^2 + a_3^4 + 2 a_3^2 a_4^2 + a_4^4$$

Отриманий результат можна спростити за допомогою стандартної команди Maple, а саме:

> M1:=factor(M)

$$M1 := (a_1^2 + a_2^2 + a_4^2 + a_3^2)^2$$

Врезультаті отримали відоме представлення норми кватерніона.

### 4.3. Зберігання та редагування процедур ПК

Після створення таблиці процедур, та заповнення їх необхідними процедурами, наступним кроком є збереження її в файл.

Розмістимо створену бібліотеку на диску «D» під іменем «*HyperLib*».

Команда збереження бібліотеки на диск матиме наступний вигляд:

```
> save(HyperLib, "D:// HyperLib.m");
```

Після цього бібліотека збережена на диск, та можна нею користуватися.

Для того, щоб прочитати створену бібліотеку потрібно виконати наступну команду:

```
> restart;
```

```
> read("D:// HyperLib.m");
```

```
> with(HyperLib)
```

Після цього на екрані з'явиться список процедур в алфавітному порядку, які входять до бібліотеки:

```
[Ad, AddHNS, Conjug, ConvertA, DirSum2, DirSumN, Divis, GenIzo, HNSnumber, LibHNS, ListHNS, Norma, Refill, RefillHNS, SearchHNS, Subtr, Trans, Unit, VizHNS, VizInA, VizLibHNS, inAdd, inConvertHNS, inMulti, nameBas, natMulti, renamA ]
```

Створена бібліотека процедур підлягає редагуванню, тобто до неї можна додавати нові процедури, видаляти будь-яку з процедур та навіть редагувати тіло процедури. Нижче наведено приклади виконання таких команд:

1) додавання нової процедури до бібліотеки:

```
HyperLibNewProc:=proc ()
```

```
    print("Нова процедура NewProc")
```

```
end proc
```

На наступному кроці зберігаємо процедуру в бібліотеку:

```
> save(HyperLib, "D:// HyperLib.m");
```

Щоб переконатися, що процедура додана в бібліотеку, виведемо список процедур:

```
> with(HyperLib);
```

[*Ad, AddHNS, Conjug, ConvertA, DirSum2, DirSumN, Divis, GenIzo, HNSnumber, LibHNS, ListHNS, NewProc, Norma, Refill, RefillHNS, SearchHNS, Subtr, Trans, Unit, VizHNS, VizInA, VizLibHNS, inAdd, inConvertHNS, inMulti, nameBas, natMulti, renamA* ]

> *HyperLib*[*NewProc*]()

## "Нова процедура *NewProc*"

2) редагування тіла процедури;

Для того, щоб редагувати будь-яку процедуру, яка належить до бібліотеки, потрібно викликати бібліотеку, ввести текст відредагованої процедури та зберегти бібліотеку:

```
HyperLibNewProc:=proc ()
    print("Редагування процедури NewProc")
end proc
```

На наступному кроці зберігаємо процедуру в бібліотеку:

> **save**(*HyperLib*, "D://*HyperLib.m*");

Для того, щоб побачити відредаговану процедуру, викликаємо її:

> *HyperLib*[*NewProc*]()

## "Редагування процедури *NewProc*"

3) видалення процедури з бібліотеки;

Для цього потрібно виконати наступну послідовність команд. Спочатку викликаємо бібліотеку, потім виконуємо наступну команду:

```
HyperLibNewProc:= HyperLibNewProc
```

> **save**(*HyperLib*, "D://*HyperLib.m*");

Для того, щоб переконатися, що процедура видалена з бібліотеки, потрібно лише викликати список процедур бібліотеки:

> *with*(*HyperLib*);

[*Ad, AddHNS, Conjug, ConvertA, DirSum2, DirSumN, Divis, GenIzo, HNSnumber, LibHNS, ListHNS, Norma, Refill, RefillHNS, SearchHNS, Subtr, Trans, Unit, VizHNS, VizInA, VizLibHNS, inAdd, inConvertHNS, inMulti, nameBas, natMulti, renamA* ]

#### 4.4. Використання ПК для вирішення практичних задач

В цьому підрозділі буде показано як розроблені інформаційні технології обробки гіперкомплексних даних використовуються для вирішення практичних задач, таких як виконати ділення двох гіперкомплексних чисел, поворот вектора в тривимірному просторі.

Варто наголосити на тому, що ці задачі вже успішно вирішуються за допомогою представлення даних гіперкомплексними числами. Наприклад, алгоритм виконання операції ділення детально описано в роботах [7, 81, 99, 100]. В роботах як вітчизняних [43, 101], так і зарубіжних [102 - 104] науковців показано, що кватерніонна модель повороту вектора має значно простіший вигляд порівняно з іншими моделями.

Наше завдання полягає в тому, щоб показати, як ці задачі можна виконати за допомогою програмного комплексу гіперкомплексних обчислень, створеному в середовищі комп'ютерної алгебри Maple. Застосування такого пакету процедур дозволить отримати результат значно швидше та без виконання значної кількості арифметичних операцій.

В основі процедур бібліотеки лежать розглянуті в попередніх розділах алгоритми виконання різних операцій з гіперкомплексними числами. Поклавши їх в основу процедур бібліотеки, вдалося отримати нову технологію, яка стане в пригоді спеціалістам різних галузей, які мають справу з гіперкомплексними числами.

##### 4.4.1. Моделювання алгоритму ділення двох гіперкомплексних чисел

В роботі [62] показано, що в гіперкомплексних числових системах дія ділення визначається як множення діленого на число, обернене до дільника:

$$\frac{A}{B} = AB^{-1}, \quad (4.5)$$

в свою чергу, обернений елемент визначається наступним чином:

$$B^{-1} = \frac{\bar{B}}{N(B)}, \quad (4.6)$$

де  $\bar{B}$  - елемент, спряжений до дільника, а  $N(B)$  - псевдонорма дільника.

Таким чином, отримаємо остаточну формулу ділення двох гіперкомплексних чисел:

$$\frac{A}{B} = \frac{A\bar{B}}{N(B)}, \quad (4.7)$$

Розв'язання цієї задачі зводиться до підстановки значень в праву частину рівності (4.7). Для цього потрібно обчислити псевдонорму дільника. Далі, якщо псевдонорма відмінна від нуля знайдемо спряжений елемент  $\bar{B}$ . У випадку рівності псевдонорми нулю, немає сенсу продовжувати розв'язувати задачу, адже, за означенням, псевдонорма дільника нуля рівна нулю, а на дільники нуля ділити не можна.

Раніше, тобто на етапі розвитку теорії ГЧС, що передувало створенню програмного засобу обробки гіперкомплексних даних, алгоритм розв'язання цієї задачі,

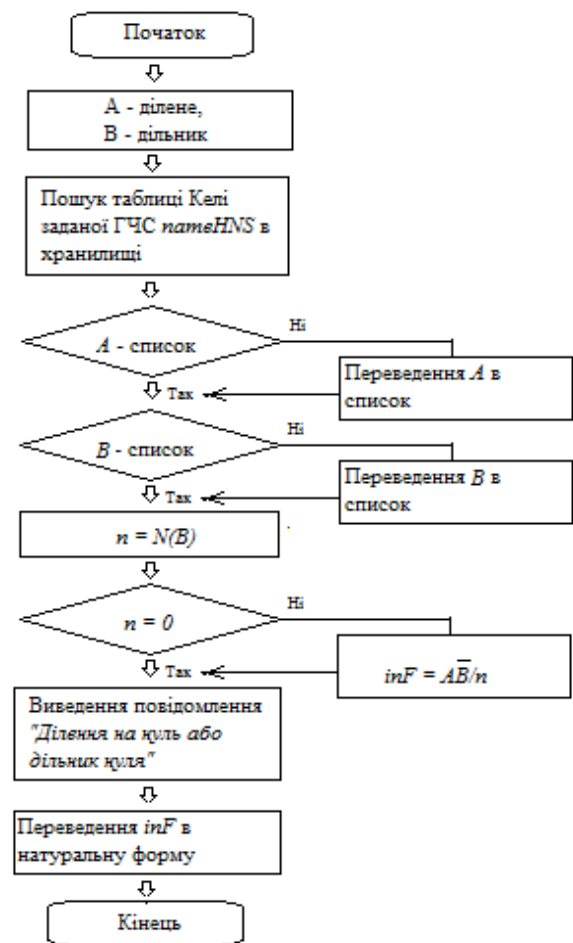


Рис. 4.3.- Блок-схема процедури ділення

наприклад в системі квадриплексних чисел  $K$ , полягає в наступному (рис. 4.3). Для початку обчислимо норму числа  $B$ , яку позначимо  $NorB$ . Далі представимо спряжений елемент  $ConjB$  до  $B$  при відповідних значеннях параметрів  $\alpha$  та  $\beta$ . На наступному кроці обчислюємо чисельник правої частини рівності (2.7), використовуючи при цьому формулу множення двох квадриплексних чисел,

які, також, наведені у розділі 2. На останньому кроці виконуємо ділення чисельника на знаменник – норму дільника. Оскільки середовище символічних обчислень Maple має більш розширений інструментарій для обробки спискових даних, то доцільно дані і проміжні результати переводити в спискову форму:

```

Div:=proc(A, B )
local A1, B1, NorB, ConjB, ConjB1,
Chisel, Chisel1, Chastka
A1:=convert(A,list);
A:=subs(e1=1,e2=1,e3=1,e4=1,A1);
B1:=convert(B,list);
B:=subs(e1=1,e2=1,e3=1,e4=1,B1);
NorB := (B12 + B22 + B32 + B42)2 - (2·B1·B4 - 2·B2·B3)2;
if NorB<>0 then
ConjB := (B1·(B12 + B22 + B32 - B42) + 2·B2·B3·B4)·e1 +
+(B2·(-B12 - B22 + B32 - B42) - 2·B1·B3·B4)·e2 +
+(B3·(-B12 + B22 - B32 - B42) - 2·B1·B2·B4)·e3 +
+(B4·(-B12 + B22 + B32 + B42) + 2·B1·B2·B3)·e4;
ConjB1:=convert(ConjB,list); ConjB:=subs(e1=1,e2=1,e3=1,e4=1,ConjB1);
Chisel:=(A1·ConjB1 - A2·ConjB2 - A3·ConjB3 + A4·ConjB4)·e1 +
+(A1·ConjB2 + A2·ConjB1 - A3·ConjB4 - A4·ConjB3)·e2 +
+(A1·ConjB3 + A3·ConjB1 - A2·ConjB4 - A4·ConjB2)·e3 +
+(A1·ConjB4 + A4·ConjB1 + A2·ConjB3 + A3·ConjB2)·e4
Chisel1:=convert(Chisel,list); Chisel:=subs(e1=1,e2=1,e3=1,e4=1,Chisel1);
Chastka:= $\frac{Chisel_1}{NorB} \cdot e_1 + \frac{Chisel_2}{NorB} \cdot e_2 + \frac{Chisel_3}{NorB} \cdot e_3 + \frac{Chisel_4}{NorB} \cdot e_4$  end if;
RETURN(Chastka)
end proc

```

Як бачимо, основний об'єм цієї програми займають операції знаходження норми гіперкомплексного числа, спряженого елемента, переведення гіперкомплексного числа із натуральної форми в спискову, множення двох гіперкомплексних чисел. Так як в ПК є процедури для виконання таких операцій, то ця програма значно спрощується, і має наступний вигляд:

```

Div1:=proc(A, B )
local B1, NormaB, ConjB, Chiselnyk, Chis, F, Chastka
B1:= ConvertA (B, K);

```

```

NormaB:= Norma(B1, K);
ConjB:= Conjug(B, K, e);
Chiselnyk:=natMulti(A, ConjB2, K, e)
Chis:=ConvertA(Chiselnyk, 4)
F:= Chis/NormaB
Chastka:=VizInA(F, e)
RETURN(Chastka)
end proc

```

Звичайно, результати обчислень за двома програмами будуть однаковими. Наприклад, завдання полягає в тому, щоб знайти частку від ділення гіперкомплексного числа  $A = 2e_1 + 3e_2 - 3e_3 + 5e_4$  на число  $B = 7e_1 - 3e_2 + 5e_3 - e_4$  в системі квадриплексних чисел  $K$ .

Результат матиме наступний вигляд:

$$Chastka := -\frac{351}{1700} e_1 + \frac{857}{1700} e_2 - \frac{707}{1700} e_3 + \frac{249}{1700} e_4$$

Як бачимо, за допомогою ПК нам вдалося уникнути введення громіздких формул, що значно пришвидшує отримання результату.

ПК містить в собі процедуру ділення двох гіперкомплексних чисел *Divis*, що дозволяє розв'язати поставлену задачу шляхом введення значень діленого, дільника та імені ГЧС, в якій виконується ділення. Тіло цієї процедури відображає в собі всі кроки виконання алгоритму ділення, описані вище.

У цьому випадку, процедура ділення двох гіперкомплексних чисел *Divis* дасть наступний результат:

> *DivAB*:=*Divis*(A, B, K)

$$DivAB := \left[ \left[ -\frac{351}{1700}, \frac{857}{1700}, -\frac{707}{1700}, \frac{249}{1700} \right], -\frac{351}{1700} e_1 + \frac{857}{1700} e_2 - \frac{707}{1700} e_3 + \frac{249}{1700} e_4 \right]$$

Тобто, ми одразу отримали представлення частки і в списковій і в натуральній формі. До того ж, результати співпадають.

Таким чином, можна побачити, що між процедурами бібліотеки існує тісний зв'язок, тобто, більш складні процедури містять в своєму алгоритмі кроки, які вирішуються з допомогою інших процедур бібліотеки.

Розв'яжемо ще одну задачу:

Знайти частку від ділення гіперкомплексного числа  $A = 4e_1 - 2e_2 - 3e_3 + 2e_4$  на число  $B = 3e_1 + 3e_4$  в системі антикватерніонів  $AH$ .

Покажемо, який результат виведе процедура *Divis* в цьому випадку:

>  $DivAB := Divis(A, B, AH)$

"Деление на нуль или делитель нуля"

$DivAB := [ [0, 0, 0, 0], 0 ]$

Як бачимо, результатом є повідомлення про ділення на нуль.

#### 4.4.2. Задача повороту вектора в тривимірному просторі

Існує ряд кінематичних параметрів, які використовуються для опису руху твердого тіла в просторі: направляючі косинуси, кути Ейлера і Крилова, параметри Родріга-Гамільтона [101].

Довільне кутове положення однієї системи відліку  $P$  відносно іншої системи  $S$  завжди можна подати як єдиний поворот початкової системи  $S$  на певний кут (кут Ейлера) навколо певно орієнтованої осі (вісь Ейлера). Як показано в роботах [43, 103], модель повороту буде мати достатньо громіздкий вигляд:

$$\begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \\ r_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta + (1 - \cos\theta)u_1^2 & (1 - \cos\theta)u_1u_2 - (\sin\theta)u_3 & (1 - \cos\theta)u_1u_3 + (\sin\theta)u_2 \\ (1 - \cos\theta)u_1u_2 + (\sin\theta)u_3 & \cos\theta + (1 - \cos\theta)u_2^2 & (1 - \cos\theta)u_2u_3 - (\sin\theta)u_1 \\ (1 - \cos\theta)u_1u_3 - (\sin\theta)u_2 & (1 - \cos\theta)u_2u_3 + (\sin\theta)u_1 & \cos\theta + (1 - \cos\theta)u_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Проблему виродження та математичну складність рівнянь можна частково вирішити, перейшовши до опису повороту у просторі кватерніонами повороту. Алгебра кватерніонів дає можливість подати поворот у простій і зручній формі.

В роботах [43, 104, 105] показано, що якщо ввести кватерніон повороту

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + u \sin \frac{\theta}{2}, \quad (4.9)$$

то оператор повороту вектора  $r$  навколо осі з одиничним ортом  $u$  на кут  $\theta$  має дуже простий вигляд:

$$r' = qrq^{-1}, \quad (4.10)$$



де  $q^{-1} = \cos \frac{\theta}{2} - u \sin \frac{\theta}{2}$  - спряжений кватерніон.

Таким чином, поворот відбувається за часовою стрілкою, якщо розглядати поворот по напрямку вектора  $u$ .

У виразі (4.10) кватерніон  $q$  повинен бути нормований, тобто його норма повинна бути рівною одиниці. Якщо кватерніон повороту має вигляд  $Q = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$ , то нормований кватерніон має наступний вигляд:

$$q = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}} e_1 + \frac{a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}} \quad (4.11)$$

Елементи виразу (4.11) мають наступний геометричний зміст:

$\theta = 2 \arccos \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}$  - кут повороту навколо осі, направляючі косинуси якої рівні:

$$\cos \theta_i = \frac{a_i}{\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}, i = 2, 3, 4. \quad (4.12)$$

Модель повороту (4.10) дозволяє сумувати повороти: якщо потрібно виконати поворот на кватерніон  $q$ , а потім на інший кватерніон  $p$ , то достатньо виконати:

$$r' = pqrq^{-1}p^{-1}. \quad (4.13)$$

Тут порядок має значення, тобто спочатку виконується  $q$ , а потім  $p$ . Таких поворотів можна виконувати скільки завгодно. Таким чином, можна побачити наскільки спрощується модель повороту в порівнянні з застосуванням інших моделей [64].

Розглянемо задачу визначення координат точки, отриманої внаслідок послідовного виконання поворотів вектора навколо двох осей: спочатку навколо осі, яка визначається кватерніоном  $q$ , а потім – навколо осі, яка визначається кватерніоном  $p$ .

Такий складний поворот визначається формулою (4.13), де всі множення кватерніонні.

Таким чином, програма повинна містити нормування кватерніонів, визначення обернених кватерніонів, кватерніонні множення і спрощення отриманого результату.

Якщо задані початкові нормовані за (4.12) кватерніони  $q, p$  і  $r$  в списковому вигляді, а також обернені кватерніони  $q^{-1} = Cq$ ,  $p^{-1} = Cp$ , то один із можливих варіантів програми у вигляді процедури без використання засобів ПК має наступний вигляд:

```

Pov:=proc( $r, q, p, Cq, Cp$ )
  local  $AB, M1, M2, M3, M4, i, M, r1$ ;
   $AB := [(a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4), (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3),$ 
     $(a_1b_3 + a_3b_1 - a_2b_4 + a_4b_2), (a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2)]$ ;
   $M1 := subs(a_1 = q_1, a_2 = q_2, a_3 = q_3, a_4 = q_4,$ 
     $b_1 = p_1, b_2 = p_2, b_3 = p_3, b_4 = p_4, AB)$ ;
   $M2 := subs(a_1 = M1_1, a_2 = M1_2, a_3 = M1_3, a_4 = M1_4,$ 
     $b_1 = r_1, b_2 = r_2, b_3 = r_3, b_4 = r_4, AB)$ ;
   $M3 := subs(a_1 = M2_1, a_2 = M2_2, a_3 = M2_3, a_4 = M2_4,$ 
     $b_1 = Cq_1, b_2 = Cq_2, b_3 = Cq_3, b_4 = Cq_4, AB)$ ;
   $M4 := subs(a_1 = M3_1, a_2 = M3_2, a_3 = M3_3, a_4 = M3_4,$ 
     $b_1 = Cp_1, b_2 = Cp_2, b_3 = Cp_3, b_4 = Cp_4, AB)$ ;
  for  $i$  from 1 to 4 do  $M[i] := factor(M4[i])$  end do;
   $r1 := [M[1], M[2], M[3], M[4]]$ ;
  RETURN( $r1$ ) end proc

```

Як бачимо, основний об'єм цієї програми займають обчислення добутоків кватерніонів, які виконані у вигляді підстановок у загальну формулу множення кватерніонів. Так як в ПК є процедури множення двох гіперкомплексних чисел, то програма значно спрощується. Отже, програма виконання повороту з допомогою засобів ПК має вигляд:

```

Pov:=proc( $r, q, p, Cq, Cp$ )
  for  $i$  from 1 to 4 do
     $r1[i] := factor(inMulti(inMulti(inMulti(inMulti(p, q, H), r, H),$ 
       $Cq[1], H), Cp[1], H)[i])$ ;
  end do;
  RETURN( $r1$ )
end proc

```

Звичайно, результати обчислень за обома програмами будуть однакові. Так, якщо розв'язується задача повороту точки з координатами [1,2,3] спочатку

на кут  $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$  навколо осі, що визначається ортою  $[0,0,1]$ , тобто осі  $Oz$ , а потім на кут  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$  навколо осі, що визначається ортою  $[0,1,0]$ , тобто осі  $Oy$ , то кінцеве положення точки визначається векторним кватерніоном  $r' = 3e_2 + (\sqrt{3} + 0.5)e_3 + (\sqrt{3} - 0.5)e_4$ .

#### Висновки до розділу 4

Робота з гіперкомплексними даними, як в числовому, так і в символному виглядах, ускладнюється громіздкістю отриманих виразів. Особливо при використанні ГЧС великих вимірностей. Так, наприклад, при множенні двох кватерніонів отримуємо вираз, який складається з 16 доданків. Звичайно, при «ручному» множенні ймовірність помилок дуже велика.

Для автоматизації виконання таких обчислень в розділі розроблено програмний комплекс гіперкомплексних обчислень, який не має аналогів ні в Україні, ні в світі. За допомогою процедур цього комплексу побудовано закони виконання основних алгебраїчних та функціональних операцій в класах побудованих ГЧС четвертої вимірності.

Показано, що засобами гіперкомплексних обчислень можна зменшити об'єм програм для вирішення конкретної задачі. Наприклад, при виконанні алгоритму ділення двох гіперкомплексних чисел із застосуванням процедур комплексу об'єм програми зменшується в 2 рази, а при математичному моделюванні повороту в тривимірному просторі – в 3 рази.

За результатами проведених досліджень можна побачити, що програмний комплекс охоплює велику область обчислень, пов'язаних з моделюванням процесів, які описуються гіперкомплексними числами, а також в області наукових досліджень. Тому він може стати невід'ємним компонентом математичного моделювання при гіперкомплексному представленні та обробці даних.

## РОЗДІЛ 5

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ ЗАСОБАМИ ГІПЕРКОМПЛЕКСНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

#### 5.1. Метод зменшення кількості операцій множення гіперкомплексних чисел для задач цифрової обробки сигналів

Для зменшення кількості дійсних множень можна скористатися ізоморфними ГЧС. Відповідно до теореми Вейерштраса-Дедекінда [106], комутативна напівпроста алгебра ізоморфна прямому добутку полів. Це означає, що для будь-якої канонічної ГЧС [107] існує ізоморфна їй ГЧС, на діагоналі таблиці множення якої знаходяться або клітини таблиць множення поля комплексних чисел, або будь-який базисний елемент, а інші елементи таблиці множення - нулі.

Розглянемо приклад: подвійна  $W(e,2)$  і ортоподвійна  $W_1(f,2)$  ГЧС.

Таблиці множення подвійних і ортоподвійних чисел мають вигляд:

$$\begin{aligned} W : e_1 \cdot e_1 = e_2, e_2 \cdot e_2 = e_1; e_1 \cdot e_2 = e_2, \\ W_1 : e_1 \cdot e_1 = e_1; e_2 \cdot e_2 = e_2; e_1 \cdot e_2 = 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

Слід зазначити, що тут і далі використовуються тільки комутативні ГЧС, то базисні елементи можна комутувати.

Для множення двох чисел в системі  $W(e,2)$  необхідно виконати 4 дійсних множення і 2 додавання, тоді як при переході до ізоморфної системи  $R \oplus R = W_1(f,2)$  - всього 2 множення.

Дійсно, добуток двох гіперкомплексних чисел в ГЧС  $W(e,2)$  має вигляд:

$$(a_1 e_1 + a_2 e_2)(b_1 e_1 + b_2 e_2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2) e_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) e_2, \quad (5.2)$$

а в ГЧС  $R \oplus R = W_1(f,2)$ :

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2)(d_1 f_1 + d_2 f_2) = c_1 d_1 f_1 + c_2 d_2 f_2, \quad (5.3)$$

Оператор ізоморфізму цих систем має вигляд [62, 64]:

$$L: \begin{cases} e_1 = f_1 + f_2 \\ e_2 = f_1 - f_2 \end{cases}, \quad (5.4)$$

Таким чином, використовуючи вищенаведені відомості, можна намітити наступний шлях зменшення кількості множень при обчисленні виразу (5.2). Співмножники в лівій частині (5.2) перевести з  $W(e,2)$  в  $R \oplus R = W_1(f,2)$ , використовуючи (5.4). Потім перемножити їх за формулою (5.3), і за допомогою перетворення, зворотного до  $L$ :

$$L^{-1}: \begin{cases} f_1 = (e_1 + e_2)/2 \\ f_2 = (e_1 - e_2)/2 \end{cases}, \quad (5.5)$$

перевести добуток назад в ГЧС  $W(e,2)$ . За визначенням ізоморфізму ГЧС воно дорівнюватиме правій частині (5.2). Таким чином, на обчислення (5.2) потрібно тільки 2 множення замість 4. Між іншим, компоненти правої частини (5.2) є компоненти кругової згортки  $2 \times 2$ .

З (5.4) і (5.5) видно, що «ціна» переходу з  $W(e,2)$  в  $R \oplus R = W_1(f,2)$  і назад - 6 додавань і 2 ділення на 2. Однак, так як згортка виконується з одним і тим же ядром, перехід для якого виконується один раз, то додавань потрібно 4. Крім того, ділення на 2 - це коротка операція по зсуву регістра і її можна не враховувати. Навіть, як буде показано далі, ці ділення також можна виконати один раз при перетворенні ядра. Значить при зменшенні кількості множень на 2 необхідно виконати додатково 4 додавання, що дає відчутну економію обчислювального ресурсу.

На основі ГЧС  $W(e,2)$  і  $W_1(f,2)$  з застосуванням сформульованих вище принципів можна побудувати ізоморфні пари ГЧС вимірності 4. Побудова ізоморфних пар відбувається наступним чином. Нехай

$$\Gamma_1(e,2) = W(e,2) \simeq W_1(f,2) = \Gamma_3(f,2) \quad \text{та} \quad \Gamma_2(g,2) = W(g,2) \simeq W_1(h,2) = \Gamma_4(h,2)$$

Між ГЧС  $\Gamma_1(e,2)$  і  $\Gamma_3(f,2)$  існують ізоморфні перетворення, які мають вигляд (5.4) і (5.5), Тоді між ГЧС  $\Gamma_2(g,2)$  і  $\Gamma_4(h,2)$  існують перетворення такого вигляду:

$$L_2 : \begin{cases} g_1 = h_1 + h_2 \\ g_2 = h_1 - h_2 \end{cases}, L_2^{-1} : \begin{cases} h_1 = (g_1 + g_2)/2 \\ h_2 = (g_1 - g_2)/2 \end{cases} \quad (5.6)$$

Застосуємо процедуру множення вимірності до систем  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  ( $\Gamma_3$  і  $\Gamma_4$  відповідно):

$$\Gamma_5(eg, 4) = D(\Gamma_1(e, 2), \Gamma_2(g, 2)), \Gamma_6(fh, 4) = D(\Gamma_3(f, 2), \Gamma_4(h, 2))$$

Тобто ГЧС  $\Gamma_5$  і  $\Gamma_6$  вже мають вимірність 4. Побудуємо таблиці множення ГЧС  $\Gamma_5$  і  $\Gamma_6$ . З огляду на комутативність елементів базису:

$$e_i g_j \cdot e_r g_s = e_i e_r \cdot g_j g_s = e_m g_n, f_i h_j \cdot f_r h_s = f_i f_r \cdot h_j h_s = f_m h_n, i, j, r, s, = 1, 2.$$

Якщо складові базисні елементи базисів перейменувати за правилом:

$$e_m g_n = e_{2(m-1)+n}, \quad (5.7)$$

і назвати отримані ГЧС  $\Gamma_5$  і  $\Gamma_6$  відповідно  $W^{(2)}$  і  $W_1^{(2)}$ , то вийдуть такі таблиці множення:

$$W^{(2)} : e_1 \cdot e_i = e_i, e_i \cdot e_i = e_1, e_i \cdot e_{5-i} = e_4, i = 1, \dots, 4; e_2 \cdot e_4 = e_3, e_3 \cdot e_4 = e_2, \quad (5.8)$$

$$W_1^{(2)} : e_i \cdot e_i = e_i, i = 1, \dots, 4; e_i \cdot e_j = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, 4$$

При цьому система  $W^{(2)}$  - сильнозаповнена, а система  $W_1^{(2)}$  - слабозаповнена.

Лінійне перетворення  $L_{56}$ , що зв'язує базиси  $\{eg\}$  і  $\{fh\}$  (оператор ізоморфізму) буде:

$$L_{56} = L \cdot L_2,$$

а обернене перетворення

$$L_{56}^{-1} = L_{65} = L^{-1} \cdot L_2^{-1}.$$

Виконавши множення лінійних операторів і застосувавши перенумерацію елементів базисів за правилом (5.6), отримаємо наступний явний вигляд оператора ізоморфізму систем  $W^{(2)}$  і  $W_1^{(2)}$ , а також зворотного йому:

$$\begin{aligned} e_1 &= f_1 + f_2 + f_3 + f_4 & f_1 &= (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)/4 \\ e_2 &= f_1 - f_2 + f_3 - f_4 & f_2 &= (e_1 - e_2 + e_3 - e_4)/4 \\ e_3 &= f_1 + f_2 - f_3 - f_4 & f_3 &= (e_1 + e_2 - e_3 - e_4)/4 \\ e_4 &= f_1 - f_2 - f_3 + f_4 & f_4 &= (e_1 - e_2 - e_3 + e_4)/4 \end{aligned} \quad (5.9)$$

У виразах (5.9) для спрощення ідентифікаторів базисних елементів систем  $W^{(2)}$  і  $W_I^{(2)}$  привласнені значення  $e$  і  $f$  відповідно.

Таким чином, множення гіперкомплексних чисел вимірності 4 в системі  $W_I^{(2)}$  можна спростити, перейшовши за допомогою лівого виразу (5.9) в систему  $W_I^{(2)}$ , виконати там множення по правій таблиці множення (5.8), і зробити зворотний перехід по правому виразу (5.9) в ГЧС  $W_I^{(2)}$ . При цьому замість 16 дійсних множень і 12 додавань потрібно виконати 4 множення і 24 додавання і 4 коротких операції зсуву регістрів.

### 5.1.1. Побудова ізоморфних пар ГЧС на основі систем квадриплексних і бікомплексних чисел

При синтезі структур реверсивних цифрових фільтрів з використанням ГЧС [107 – 110] необхідно застосовувати такі ГЧС, які побудовані на основі системи комплексних чисел  $C$ . Однією з таких систем є система квадриплексних чисел  $K$ . Ця система отримується комутативним автоподвоєнням системи комплексних чисел. ГЧС  $K$  ізоморфна системі бікомплексних чисел  $C \oplus C$ , що є прямою сумою двох систем комплексних чисел  $C$ . Таблиці множення цих ГЧС четвертої вимірності [62, 63, 111] наведені нижче. Ізоморфізм цих ГЧС встановлюється фактом наявності нетривіальних розв'язків системи рівнянь ізоморфізму.

$$K: e_1 \cdot e_i = e_i; e_i \cdot e_{5-i} = e_4, i=1, \dots, 4; e_2 \cdot e_2 = e_3 \cdot e_3 = -e_1; e_4 \cdot e_4 = e_1; e_2 \cdot e_4 = -e_3; e_3 \cdot e_4 = -e_2, (5.10)$$

$$C \oplus C: f_1 \cdot f_1 = f_1; f_2 \cdot f_2 = -f_1; f_1 \cdot f_2 = f_2; f_3 \cdot f_3 = f_3; f_4 \cdot f_4 = -f_3; f_3 \cdot f_4 = f_4; \text{ решта нулі.}$$

Прямий і зворотний оператори ізоморфізму між цими ГЧС мають вигляд:

$$L: \begin{cases} e_1 = f_1 + f_3 \\ e_2 = -f_2 + f_4 \\ e_3 = -f_2 - f_4 \\ e_4 = -f_1 + f_3 \end{cases}, L^{-1}: \begin{cases} f_1 = (e_1 - e_4)/2 \\ f_2 = (-e_2 - e_3)/2 \\ f_3 = (e_1 + e_4)/2 \\ f_4 = (e_2 - e_3)/2 \end{cases} \quad (5.11)$$

Таким чином, якщо при множенні гіперкомплексних чисел в системі  $K$  необхідно виконати 16 дійсних множень і 12 додавань, то при переході в ГЧС

$C \oplus C$  і використанні алгоритму множення комплексних чисел необхідно виконати 6 дійсних множень, 18 додавань і 4 коротких операцій ділення на 2.

Проведені дослідження показали, що виконання нелінійних операцій над гіперкомплексні числа за допомогою переходу від сильнозаповненої ГЧС до ізоморфної слабозаповненої ГЧС, виконання операцій в ній, і зворотного переходу значно знижує кількість необхідних дійсних операцій і, особливо, множення. Так при використанні гіперкомплексних чисел вимірності  $2^n$  кількість множень знижується в  $n$  разів, а в інших випадках більш, ніж в  $n/2$  разів. Це говорить про доцільність застосування даних алгоритмів при вирішенні задач обробки цифрових сигналів.

## 5.2. Принципи застосування методів ГЧС до обчислення згортки

Лінійна згортка дискретних сигналів є найбільш загальною обчислювальною задачею в області цифрової обробки сигналів. Радіолокаційні системи, системи звукової локації, обробка сейсмічної інформації, неруйнівний контроль і комп'ютерна томографія, обробка зображень - цей навіть дуже далекий від повноти перелік областей використання лінійної згортки дискретних сигналів дає уявлення про важливість даного завдання.

Так як складність обчислення лінійної згортки масивів довжиною  $n$  є  $O(n^2)$  і швидко збільшується з ростом  $n$ , то використовуються методи «швидких» обчислень.

З найбільш поширених слід згадати наступні методи.

1. Згортка з використанням швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) зі складністю  $O(n \log n)$ . В основі ШПФ [112, 113] лежить декомпозиція вихідної задачі великої вимірності в велику кількість задач малої вимірності. Тому дуже важливим є розробка таких методів вирішення задач малої вимірності, які використовують, можливо, меншу кількість дійсних операцій.

2. Перехід до кільця поліномів [112]. Такий перехід доцільний тим, що кільця поліномів добре досліджені, і операції в них, особливо множення,



виконуються значно ефективніше, ніж безпосередні обчислення. Самі ж переходи вимагають мінімальної витрати обчислювальних ресурсів.

Відповідно до теореми Винограда для лінійної згортки [113] нижня межа кількості дійсних множень дорівнює  $2n-1$ , що може бути орієнтиром при оцінці якості алгоритму. Однак, як зазначається в роботі [113] «У багатьох випадках в якості міри складності обчислень береться кількість арифметичних операцій в алгоритмі. Хоча й існує груба відповідність між загальною і арифметичною складністю алгоритму, все ж практична цінність обчислювального методу залежить від багатьох факторів. Ефективність алгоритму визначається не тільки числом операцій, але і такими параметрами, як число переміщень даних, вартість допоміжних операцій, загальна структурна складність, різні можливості, що представляються використовуваною обчислювальною системою, мистецтво програміста. Тому впорядкування алгоритмів по їх дійсній ефективності, вираженої часом виконання, є дуже важкою справою, так що порівняння, засновані лише на числі арифметичних операцій, повинні бути «зважені» з урахуванням факторів, що виникають при конкретних реалізаціях цих алгоритмів».

Тому в даній роботі розглядається використання гіперкомплексних числових систем (ГЧС) для синтезу алгоритмів лінійної одновимірної згортки.

Як відомо, компоненти згортки дискретних сигналів, являють собою суми парних добутків компонент сигналу і ядра згортки. У той же час добуток двох гіперкомплексних чисел також є сумами парних добутків компонент цих чисел. Однак, однієї цієї аналогії недостатньо для побудови ефективних алгоритмів згортки з багатьох причин. Якщо сигнал та ядро мають довжину  $n$ , і вони представляються  $n$ -вимірним гіперкомплексні числа в деякій ГЧС, то:

1. Згортка має  $2n-1$  компонент, а добуток двох гіперкомплексних чисел має  $n$  компонентів.

2. У кожній компоненті добутку двох гіперкомплексних чисел по  $n$  доданків, а в компонентах згортки число доданків змінне – від  $1$  до  $n$ .

Крім того, слід врахувати, що при множенні двох гіперкомплексних чисел кількість дійсних множень  $N$  може в залежності від типу застосовуваної ГЧС змінюватися в межах:  $n \leq N \leq n^3$ , тоді як в згортці  $n^2$  парних добутоків.

### 5.2.1. Лінійна згортка з використанням ГЧС

Нехай необхідно виконати одновимірну лінійну згортку двох числових послідовностей довжиною  $2^n$ . Будемо розглядати ці числові послідовності як компоненти гіперкомплексних чисел, що належать деякій ГЧС  $\Gamma_l$  вимірності  $\dim \Gamma_l = 2^n$ . Добуток цих чисел буде містити парні добутки компонент числових послідовностей, які згортаються. Однак вони будуть комбінуватися в суми не в такому складі, як це потрібно для організації і компонент згортки. Крім того, кількість дійсних множень при множенні гіперкомплексних чисел в загальному випадку дорівнює  $2^{2^n}$ , це стільки ж, як і при прямому обчисленні згортки, тобто, немає ніякого виграшу [114, 115].

Таким чином, тут виникають дві проблеми: перша - це зниження кількості дійсних операцій при множенні гіперкомплексних чисел; друга - організація вибору парних добутоків компонент згортки. Вирішення цих двох проблем дозволяє синтезувати такі алгоритми згортки, які будуть за кількістю операцій ефективнішими ніж прямі алгоритми обчислення згортки.

Для вирішення першої проблеми можна перейти в таку ГЧС, ізоморфну вихідній, таблиця множення якої заповнена слабо. Такі пари ГЧС існують і описані в [62, 64]. Перехід між такими ГЧС вимагає тільки виконання операцій додавання дійсних чисел.

Вирішення другої проблеми залежить від конкретного виду використовуваних ГЧС і буде розглянуте нижче.

Так як одновимірна лінійна згортка виконується за формулою [112, 113, 116]

$$z_k = \sum_{m=-\infty}^k x_m y_{k-m}, \quad (5.12)$$

то звідси видно, що якщо розглядається лінійна згортка двох послідовностей довжиною по  $2^n$  елементів, то при прямому обчисленні її  $2^{n+1} - 1$  відліків необхідно виконати  $2^{2^n}$  дійсних множення. За допомогою гіперкомплексних числових систем можна зменшити цю кількість.

Для демонстрації принципу зниження кількості дійсних множень при множенні гіперкомплексних чисел розглянемо випадок  $n = 1$ , тобто обчислюється лінійна згортка двох числових послідовностей -  $\{x_0, x_1\}$  і  $\{y_0, y_1\}$ . Відповідно до (5.12) згортка матиме три відліка:

$$\begin{aligned} C(-1) &= x_1 y_1 \\ C(0) &= x_1 y_2 + x_2 y_1 \\ C(1) &= x_2 y_2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Як видно з (5.13), для виконання даної згортки необхідно виконати 4 дійсних множення.

Будемо розглядати елементи послідовностей  $\{x_1, x_2\}$  і  $\{y_2, y_1\}$  як компоненти гіперкомплексних чисел, що належать ГЧС  $W(e, 2)$  вимірності 2 з таблицею множення:

$w$	$e_1$	$e_2$
$e_1$	$e_1$	$e_2$
$e_2$	$e_2$	$e_1$

Нехай

$$X = x_0 e_0 + x_1 e_1 \quad (5.14)$$

$$Y = y_1 e_0 + y_0 e_1. \quad (5.15)$$

Друге число записане в інверсному вигляді.

Відповідно до таблиці множення ГЧС  $W$  [62, 64]:

$$XY = (x_0 y_1 + x_1 y_0) e_0 + (x_0 y_0 + x_1 y_1) e_1. \quad (5.16)$$

Права частина виразу (5.16) містить всі парні добутки, необхідні для формування згортки (5.13). Більше того, компонента при  $e_0$  повністю збігається з відліком  $z_0$ , а компонента при  $e_1$  дорівнює сумі інших відліків. Але кількість

дійсних множень також дорівнює 4, як і в (5.13). Таким чином, виникають дві проблеми: по-перше, зменшити кількість множень в (5.16); і, по-друге, розділити відліки  $z_{-1}$  і  $z_1$ . Для зменшення кількості множень доцільно перейти із системи  $W$  в систему  $W_1$  з таблицею множення:

$W_1$	$f_1$	$f_2$
$f_1$	$f_1$	$0$
$f_2$	$0$	$f_2$

Для переведення чисел  $X, Y \in W$  в числа  $X_1, Y_1 \in W_1$  необхідно скористатися оператором ізоморфізму цих систем [62, 64, 114]. Тоді

$$X_1 = (x_1 + x_2)f_1 + (x_1 - x_2)f_2 \quad (5.17)$$

$$Y_1 = (y_1 + y_2)f_1 + (y_2 - y_1)f_2. \quad (5.18)$$

Такий перехід вимагає додатково 4 додавання. Однак, з огляду на те, що зазвичай числова послідовність згортається з постійним ядром, перехід елементів якого в  $W_1$  зроблений заздалегідь, то можна вважати, що перехід із системи  $W$  в систему  $W_1$  вимагає тільки 2 додавання.

Множення чисел (5.17) і (5.18) відповідно до таблиці множення  $W_1$ :

$$X_1 Y_1 = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = (x_1 + x_2)(y_2 + y_1)f_1 + (x_1 - x_2)(y_2 - y_1)f_2 \quad (5.19)$$

вимагає 2 множення.

Зворотний перехід з  $W_1$  в систему  $W$  матиме вигляд:

$$XY = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} e_1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} e_2, \quad (5.20)$$

що також вимагає 2 додавання. Ділення на 2 - це коротка операція, що вимагає тільки зсуву регістра. Її можна виконати заздалегідь над ядром згортки. Тому її можна не враховувати.

Прирівнюючи праві частини (5.16) і (5.20), отримаємо:

$$x_1 y_2 + x_2 y_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \quad (5.21)$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}. \quad (5.22)$$

Якщо обчислити заздалегідь один із доданків в лівій частині (5.22), наприклад,  $x_1 y_1$ , то компоненти згортки (5.13) будуть обчислюватися за такими формулами:

$$\begin{aligned} C(-1) &= x_1 y_1 \\ C(0) &= (\alpha_1 + \alpha_2) / 2 \\ C(1) &= (\alpha_1 - \alpha_2) / 2 - x_1 y_1 \end{aligned} \quad (5.23)$$

що вимагає 3 множення і 5 додавань. При розрахунках по (5.13, 5.14) відповідно 4 множення і 1 додавання. При збільшенні вимірності  $N = 2^n$ , як буде показано далі, цей алгоритм можна застосовувати  $n-1$  разів. При цьому у всіх випадках значення  $x_1 y_1$  буде загальне, а кількість множень у всіх алгоритмах, крім одного, зменшиться в два рази. Отже, на обчислення одного парного добутку потрібно 0,75 операцій дійсних множень.

Розглянемо лінійну згортку двох числових послідовностей довжиною 4 -  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  і  $Y = \{y_4, y_3, y_2, y_1\}$  [114, 115]. Відповідно до (5.12) згортка матиме 7 відліків:

$$\begin{aligned} C(-3) &= x_1 y_1 \\ C(-2) &= x_1 y_2 + x_2 y_1 \\ C(-1) &= x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_3 y_1 \\ C(0) &= x_1 y_4 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_4 y_1 \\ C(1) &= \quad \quad x_2 y_3 + x_3 y_3 + x_4 y_2, \\ C(2) &= \quad \quad \quad x_3 y_4 + x_4 y_3, \\ C(3) &= \quad \quad \quad \quad x_4 y_4. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Для виконання даної згортки необхідно виконати 16 дійсних множень і 9 додавань. В цьому випадку ефективний алгоритм, в якому використовуються ізоморфізм  $W \simeq W_1$  і ізоморфізм автоподвоєнь цих систем  $W^{(2)} \simeq W_1^{(2)}$ . Їх таблиці множення мають вигляд [64, 114]:

$W^{(2)}$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_2$	$e_2$	$e_1$	$e_4$	$e_3$
$e_3$	$e_3$	$e_4$	$e_1$	$e_2$
$e_4$	$e_4$	$e_3$	$e_2$	$e_1$

$W_1^{(2)}$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
$f_1$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
$f_2$	$f_2$	$f_1$	$f_4$	$f_3$
$f_3$	$f_3$	$f_4$	$f_1$	$f_2$
$f_4$	$f_4$	$f_3$	$f_2$	$f_1$

$$X = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 \quad (5.14)$$

$$Y = y_0 e_0 + y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 + y_4 e_4 \quad (5.1)$$

Оскільки  $W^{(2)} \simeq W_1^{(2)}$ , між базисними елементами цих ГЧС існують такі співвідношення [108, 109]:

$$\begin{aligned} e_1 &= f_1 + f_2 + f_3 + f_4 & f_1 &= (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)/4 \\ e_2 &= f_1 - f_2 + f_3 - f_4 & f_2 &= (e_1 - e_2 + e_3 - e_4)/4 \\ e_3 &= f_1 + f_2 - f_3 - f_4 & f_3 &= (e_1 + e_2 - e_3 - e_4)/4 \\ e_4 &= f_1 - f_2 - f_3 + f_4 & f_4 &= (e_1 - e_2 - e_3 + e_4)/4 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Будемо розглядати елементи послідовностей  $X$  і  $Y$  як компоненти гіперкомплексних чисел ГЧС  $W^{(2)}(e,4)$  з такими ж ідентифікаторами:

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4, \quad (5.26)$$

$$Y = y_4 e_1 + y_3 e_2 + y_2 e_3 + y_1 e_4. \quad (5.27)$$

Тоді відповідно до таблиці множення ГЧС  $W^{(2)}(e,4)$ :

$$XY = \sum_{i=0}^3 \alpha_i e_i. \quad (5.28)$$

Де компоненти  $\alpha_i$  мають вигляд:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x_1 y_4 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_4 y_1 \\ \alpha_2 &= x_1 y_3 + x_2 y_4 + x_3 y_1 + x_4 y_2 \\ \alpha_3 &= x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_4 + x_4 y_3 \\ \alpha_4 &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 \end{aligned} \quad (5.29)$$

Для зменшення кількості множень доцільно перейти із системи  $W^{(2)}(e,4)$  в систему  $W_1^{(2)}(f,4)$  [114, 115]. Тоді для переведення гіперкомплексних чисел, що належать  $W^{(2)}(e,4)$ , в гіперкомплексні числа, що належать  $W_1^{(2)}(f,4)$ , необхідно скористатися оператором ізоморфізму між цими системами. Тоді

$$X_1 = \sum_{i=1}^4 \beta_i f_i = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) f_1 + (x_1 - x_2 + x_3 - x_4) f_2 + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) f_3 + (x_1 - x_2 - x_3 + x_4) f_4. \quad (5.30)$$

Та аналогічно  $Y_j$ :

$$Y_1 = \sum_{i=1}^4 \gamma_i f_i. \quad (5.31)$$

Такий перехід вимагає додатково 16 додавань. Однак, з огляду на те, що зазвичай числова послідовність згортається з постійним ядром, перехід елементів якого в  $W_1^{(2)}(f,4)$  зроблений заздалегідь, то можна вважати, що перехід із системи  $W^{(2)}(e,4)$  в систему  $W_1^{(2)}(f,4)$  вимагає тільки 8 додавань.

Множення  $X_j$  і  $Y_j$  відповідно до таблиці множення  $W_1^{(2)}(f,4)$  має вигляд:

$$X_1 Y_1 = \sum_{i=1}^4 \beta_i \gamma_i f_i \quad (5.32)$$

і вимагає всього лише 4 множення.

Зворотний перехід з  $W_1^{(2)}(f,4)$  в систему  $W^{(2)}(e,4)$  відповідно до [114, 115] вимагає 8 додавань. Ділення на 4 - це коротка операція, що вимагає тільки зсуву регістра. Тому її можна не враховувати.

$$\begin{aligned} XY = \sum_{i=1}^4 \alpha_i e_i = & \frac{1}{4}(\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 + \beta_4 \gamma_4) e_1 + \frac{1}{4}(\beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 - \beta_4 \gamma_4) e_2 + \\ & + \frac{1}{4}(\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 - \beta_3 \gamma_3 - \beta_4 \gamma_4) e_3 + \frac{1}{4}(\beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2 - \beta_3 \gamma_3 + \beta_4 \gamma_4) e_4 \end{aligned}$$

Далі доцільно спочатку зробити згортку послідовностей  $\{x_1, x_2\}$  і  $\{y_1, y_2\}$ . Для цього потрібно виконати 3 множення, і будуть отримані значення  $x_2 y_2$  і  $x_1 y_2 + x_2 y_1$ . При цьому отримане при перетворенні значення  $x_2 + x_1$  може бути використано в подальшому, скорочуючи кількість додавань. Далі виконується згортка послідовностей  $\{x_1, x_3\}$  і  $\{y_1, y_3\}$ . На це вже необхідно тільки 2 множення і будуть отримані значення  $x_3 y_3$  і  $x_1 y_3 + x_3 y_1$ , які використовуватимуться в подальшому.

Тоді обчислення відліків згортки із зазначенням кількості множень зведуться до наступних обчислень:

$$\begin{aligned}
C(-3) &= x_1 y_1 \\
C(-2) &= x_1 y_2 + x_2 y_1 \\
C(-1) &= x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_3 y_1 \\
C(0) &= \alpha_0 \\
C(1) &= \alpha_1 - (x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_3 y_1) \\
C(2) &= \alpha_2 - (x_1 y_2 + x_2 y_1) \\
C(3) &= \alpha_3 - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Як можна розрахувати, необхідно виконати 9 множень і 30 додавань (тут враховані також 5 множень і 10 додавань для згорток  $2 \times 2$ , а також 14 додавань, необхідних для переходу з  $W^{(2)}(e, 4)$  в систему  $W_1^{(2)}(f, 4)$  і назад).

### 5.3. Двомірна лінійна згортка

Компоненти двомірної лінійної згортки розраховуються за формулою [117]:

$$z(n_1, n_2) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} x(k_1, k_2) h(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \tag{5.34}$$

Тут і сигнал  $x(k_1, k_2)$  і ядро  $h(n_1, n_2)$  є двомірними масивами. Реальні дискретні сигнали мають скінченні розміри.

Існує велика кількість методів швидкого обчислення лінійної двомірної згортки. З деякими з них можна познайомитися в роботах [112 – 117] і багатьох інших. У даній роботі будуть розглянуті алгоритми виконання лінійної двомірної згортки, засновані на переході до гіперкомплексних просторів, принцип якого описаний в попередньому підрозділі.

#### 5.3.1. Структура алгоритму швидкої лінійної двомірної згортки масивів $2 \times 2$

Сигнал і ядро двомірної згортки представляються 2-вимірними матрицями  $2 \times 2$ . Двомірна згортка масивів  $2 \times 2$  обчислюється за формулою:

$$con_{kl} = \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 x_{nm} y_{n-k, m-l} \tag{5.35}$$



Нехай сигнал і ядро згортки мають вигляд:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline x_{11} & x_{12} \\ \hline x_{21} & x_{22} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline y_{11} & y_{12} \\ \hline y_{21} & y_{22} \\ \hline \end{array}$$

Тоді для коректного обчислення за формулою (5.35) матрицю сигналу потрібно окаймити з усіх боків рядками і стовпцями, заповненими нулями, як показано нижче:

$y_{00} = 0$	$y_{01} = 0$	$y_{02} = 0$	$y_{03} = 0$
$y_{10} = 0$	$y_{11}$	$y_{12}$	$y_{13} = 0$
$y_{20} = 0$	$y_{21}$	$y_{22}$	$y_{23} = 0$
$y_{30} = 0$	$y_{31} = 0$	$y_{32} = 0$	$y_{33} = 0$

Таким чином, компоненти згортки матимуть наступні значення:

$$\begin{aligned} z_{-1,-1} &:= x_{21}y_{12} \\ z_{-1,0} &:= x_{11}y_{12} + x_{21}y_{22} \\ z_{-1,1} &:= x_{11}y_{22} \\ z_{0,-1} &:= x_{21}y_{11} + x_{22}y_{12} \\ z_{0,0} &:= x_{11}y_{11} + x_{12}y_{12} + x_{21}y_{21} + x_{22}y_{22} \cdot \\ z_{0,1} &:= x_{11}y_{21} + x_{12}y_{22} \\ z_{1,-1} &:= x_{22}y_{11} \\ z_{1,0} &:= x_{12}y_{11} + x_{22}y_{21} \\ z_{1,1} &:= x_{12}y_{21} \end{aligned} \tag{5.36}$$

Нижче представлений алгоритм швидкої лінійної двомірної згортки масивів 2x2, оформлений у вигляді процедури *Conv22*, написаної в системі символічних обчислень Maple. Процедура *Conv22* входить в пакет гіперкомплексних обчислень, розробка і структура якого описані в [40, 41, 98]. У самій процедурі *Conv22* використовуються і інші процедури цього пакету.

Процедура *Conv22* має наступні формальні параметри:

1.  $A_j$  - ядро двомірної згортки у вигляді списку.
2.  $A_{jm}$  - модифіковане за допомогою процедури *Modi2* ядро двомірної лінійної згортки у вигляді списку.
3.  $B$  - двомірний сигнал 2x2 у вигляді матриці.

4.  $W4$  - таблиця Келі гіперкомплексної числової системи четвертої вимірності у вигляді списку.
5.  $W41$  - таблиця Келі орточетверної гіперкомплексної числової системи у вигляді списку.

На виході процедури компоненти згортки у вигляді списку довжиною 9 елементів.

Лістинг процедури *Conv22* наведений нижче

```

Conv22 := proc(Aj, Ajm, B, W4, W41)
  local Y1, i, j, Ys, C1, con, C2, B1, Bs;
  B1 := MatrList(B);
  Bs := W4W41(B1);
  C1 := inMulti(Bs[1], Ajm, W41);
  con := array( - 1 .. 1, - 1 .. 1);
  C2 := W4W41(C1)[1];
  for i to 4 do C2[i] := simplify(C2[i]) end do;
  con[ - 1, - 1] := Aj[3]*B[1, 2];
  con[ - 1, 0] := Aj[1]*Y[1, 2] + Aj[3]*Y[2, 2];
  con[ - 1, 1] := Aj[1]*Y[2, 2];
  con[0, - 1] := Aj[3]*Y[1, 1] + Aj[4]*Y[1, 2];
  con[0, 0] := C2[1];
  con[0, 1] := C2[3] - con[0, - 1];
  con[1, - 1] := Aj[4]*Y[1, 1];
  con[1, 0] := C2[2] - con[ - 1, 0];
  con[1, 1] := C2[4] - con[ - 1, - 1] - con[1, - 1] - con[
    - 1, 1];
  RETURN(con)
end proc

```

На початку процедури сигнал  $B$  з допомогою процедури *MatrList* перетворюється з матричної форми в спискову. При цьому мається на увазі, що це гіперкомплексне число четвертої вимірності. Далі це число за допомогою процедури *W4W41* перетворюється в орточетвертне гіперкомплексне число. У процедурі *inMulti* воно множиться на модифіковане ядро  $Ajm$  в орточетвертній ГЧС  $W41$ , для чого потрібно 4 дійсних множення.

Модифіковане ядро - це також орточетвертне гіперкомплексне число у вигляді списку, всі компоненти якого помножені на коефіцієнт модифікації, рівний в даному випадку  $\frac{1}{4}$ . Ця операція виконується поза процедурою *Conv22*, що знижує кількість обчислень в ній. Далі добуток переводиться за допомогою процедури *W4W41* в четвертну ГЧС  $W4$ . Тут використовується саме процедура

$W4W41$ , а не  $W41W4$  тому, що вони відрізняються тільки коефіцієнтом модифікації, який вже врахований в модифікованому ядрі згортки.

Після цього обчислюються компоненти згортки. Перші чотири компоненти обчислюються безпосередньо за компонентами сигналу і немодифікованого ядра. Для цього потрібно 6 множень. Компонента згортки  $con(0,0)$  збігається з першою компонентою добутку сигналу і ядра. Решта компонент обчислюються за допомогою 2-, 3- і 4-ої компонент добутку сигналу і ядра в четверній формі і вже обчислених компонент згортки. Тут операція множення не використовується.

Таким чином, як було зазначено вище, всього потрібно виконати 9 дійсних множень замість 16, якщо виконувати згортку безпосередньо за формулою (5.35).

Обчислення цієї ж згортки можна побудувати шляхом зведення двомірної згортки до 4 порядкових одновимірних згорток масивів сигналу і ядра. При цьому необхідно виконати  $4 \cdot 3 = 12$  дійсних операцій, що більше, ніж в попередньому варіанті.

### 5.3.2. Структура алгоритму швидкої лінійної двомірної згортки масивів 4x4

Структура цього алгоритму подібна до структури алгоритму згортки 2x2, проте є істотні відмінності, зумовлені більшою розмірністю масивів сигналу і ядра, на що буде звернено увагу далі. Сигнал  $x$  і  $y$  ядро двовимірної згортки представляються 2-вимірними матрицями 4x4. Двомірну згортку масивів 4x4 обчислюється за формулою:

$$con_{kl} = \sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^4 x_{nm} y_{n-k, m-l}, \quad k, l = -3, -2, \dots, 0, \dots, 3. \quad (5.37)$$

Нехай сигнал і ядро згортки мають вигляд:

$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$
$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{24}$
$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	$x_{34}$
$x_{41}$	$x_{42}$	$x_{43}$	$x_{44}$

$y_{11}$	$y_{12}$	$y_{13}$	$y_{14}$
$y_{21}$	$y_{22}$	$y_{23}$	$y_{24}$
$y_{31}$	$y_{32}$	$y_{33}$	$y_{34}$
$y_{41}$	$y_{42}$	$y_{43}$	$y_{44}$

Як і в попередньому підрозділі, для коректного обчислення за формулою (5.37), матрицю сигналу потрібно окаймити з усіх боків рядками і стовпцями, заповненими нулями, як показано нижче:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$y_{11}$	$y_{12}$	$y_{13}$	$y_{14}$	0	0	0
0	0	0	$y_{21}$	$y_{22}$	$y_{23}$	$y_{24}$	0	0	0
0	0	0	$y_{31}$	$y_{32}$	$y_{33}$	$y_{34}$	0	0	0
0	0	0	$y_{41}$	$y_{42}$	$y_{43}$	$y_{44}$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

При цьому отримаємо матрицю вимірності 10x10, а нумерація рядків і стовпців буде від -2 до 7. Компоненти згортки матимуть індекси від [-3, -3] до [3, 3], всього 49 компонентів. Вони міститимуть 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12 або 16 парних добутків компонент сигналу і ядра згортки. Вид цих компонент повністю тут наводити не буде через їхню громіздкість і велику кількість - 49. Наведемо окремі приклади:

$$z_{-3,-3} := y_{1,4}x_{4,1},$$

$$z_{0,0} := y_{1,1}x_{1,1} + y_{1,2}x_{1,2} + y_{1,3}x_{1,3} + y_{1,4}x_{1,4} + y_{2,1}x_{2,1} + y_{2,2}x_{2,2} + y_{2,3}x_{2,3} + y_{2,4}x_{2,4} + y_{3,1}x_{3,1} + y_{3,2}x_{3,2} + y_{3,3}x_{3,3} + y_{3,4}x_{3,4} + y_{4,1}x_{4,1} + y_{4,2}x_{4,2} + y_{4,3}x_{4,3} + y_{4,4}x_{4,4},$$

$$z_{2,0} := y_{1,3}x_{1,1} + y_{1,4}x_{1,2} + y_{2,3}x_{2,1} + y_{2,4}x_{2,2} + y_{3,3}x_{3,1} + y_{3,4}x_{3,2} + y_{4,3}x_{4,1} + y_{4,4}x_{4,2}.$$

і т.д.

Для побудови алгоритму необхідно синтезувати дві ізоморфні ГЧС 16-ї вимірності - сильно- і слабозаповнені.

Перша, сильнозаповнена, отримується шляхом автопомноження ГЧС  $W$  вимірності 4 застосуванням процедури  $MultiDim(W, W, e, 1, W16)$  з пакету гіперкомплексних обчислень. Назвемо її  $W16$ . Так як таблиця множення ГЧС  $W16$  дуже громіздка, то наведемо її схему:

$$W16 = \begin{array}{|c|c|} \hline G_1 & G_2 \\ \hline G_2 & G_1 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{де: } G_1 = \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ e_2 & e_1 & e_4 & e_3 & e_6 & e_5 & e_8 & e_7 \\ e_3 & e_4 & e_1 & e_2 & e_7 & e_8 & e_5 & e_6 \\ e_4 & e_3 & e_2 & e_1 & e_8 & e_7 & e_6 & e_5 \\ e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_6 & e_5 & e_8 & e_7 & e_2 & e_1 & e_4 & e_3 \\ e_7 & e_8 & e_5 & e_6 & e_3 & e_4 & e_1 & e_2 \\ e_8 & e_7 & e_6 & e_5 & e_4 & e_3 & e_2 & e_1 \end{array}, \quad G_2 = \begin{array}{cccccccc} e_9 & e_{10} & e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{10} & e_9 & e_{12} & e_{11} & e_{14} & e_{13} & e_{16} & e_{15} \\ e_{11} & e_{12} & e_9 & e_{10} & e_{15} & e_{16} & e_{13} & e_{14} \\ e_{12} & e_{11} & e_{10} & e_9 & e_{16} & e_{15} & e_{14} & e_{13} \\ e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} & e_9 & e_{10} & e_{11} & e_{12} \\ e_{14} & e_{13} & e_{16} & e_{15} & e_{10} & e_9 & e_{12} & e_{11} \\ e_{15} & e_{16} & e_{13} & e_{14} & e_{11} & e_{12} & e_9 & e_{10} \\ e_{16} & e_{15} & e_{14} & e_{13} & e_{12} & e_{11} & e_{10} & e_9 \end{array}$$

Друга ГЧС, слабозаповнена, виходить шляхом автопомноження ГЧС  $W1$  розмірності 4 застосуванням процедури  $MultiDim(W1, W1, e, 1, W16o)$  з пакету гіперкомплексних обчислень. Назвемо її  $W16o$ . Таблиця множення ГЧС  $W16o$  тривіальна:

$$f_i \cdot f_j = \begin{cases} 0 & : i \neq j \\ f_i & : i = j \end{cases}, \text{ де } f_i\text{-базисні елементи ГЧС } W16o.$$

Так як ГЧС  $W$  і  $W1$  ізоморфні, то, на основі теореми 2 з [64] ГЧС  $W16$  і  $W16o$  також ізоморфні. Теорема 3 з [64] визначає метод побудови оператора ізоморфізму між  $W16$  і  $W16o$ , тобто залежності між базисними елементами обох систем. З оператора ізоморфізму видно, що коефіцієнт модифікації ядра згортки в даному випадку дорівнює  $1/16$ .

Матриці числа і ядра можна перетворити в гіперкомплексні числа 16-ї вимірності. Припускаємо, що вони належать ГЧС  $W16$ . При цьому компонент  $x_{i,j}$  матриці перетворюється в компонент гіперкомплексного числа  $x_{4(i-1)+j}$ .

За допомогою оператора ізоморфізму ці числа можна перевести в ГЧС *W16o*. При цьому переході використовуються тільки операції додавання. Добуток цих чисел в загальному вигляді в системі *W16* дає 16-вимірне гіперкомплексне число, кожен компонент якого є сумою 16-ти парних добутків компонент ядра і сигналу. Наприклад, компонента при  $e_2$  має вигляд:

$$x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 + x_4y_3 + x_5y_6 + x_6y_5 + x_7y_8 + x_8y_7 + x_9y_{10} + x_{10}y_9 + x_{11}y_{12} + \\ x_{12}y_{11} + x_{13}y_{14} + x_{14}y_{13} + x_{15}y_{16} + x_{16}y_{15}$$

Аналіз компонент гіперкомплексного добутку ядра згортки і сигналу показує, що в ньому є фрагменти компонент згортки: 1 компонент довжиною 16 парних добутків, 8 по 8, 24 по 4, 32 по 2 і 16 одиночних парних добутків.

З іншого боку, добуток сигналу і ядра в ГЧС *W16o* переведене в ГЧС *W16*, дає 16 значень компонент добутку сигналу і ядра в ГЧС *W16*. Ця інформація дозволяє побудувати схему обчислення лінійної двовимірної згортки масивів 4x4, число множень в якій дорівнює 175 множень, що на 81 операцію менше, ніж при прямому обчисленні, що вимагає 256 дійсних множень.

Лінійну двовимірну згортку можна виконати шляхом зведення двовимірної згортки до послідовності одновимірних згорток шляхом згортання кожного рядка матриці сигналу з кожним рядком матриці ядра. При цьому необхідно виконати 16 одновимірних згорток 4X4, тобто знайти ті ж 256 парних добутків. Виконання лінійної згортки 4X4 за алгоритмом (5.21) вимагає 9 множень. Так що виконання двовимірної згортки 4X4 за порядковою схемою вимагає  $16 \cdot 9 = 144$  множень, що набагато менше попереднього алгоритму [118].

Критерієм  $\alpha$  ефективності алгоритму згортки є відношення числа множень  $M_N$ , необхідних при виконанні згортки  $N \times N$ , до всієї кількості парних добутків:  $\alpha = \frac{M_N}{N^2}$ .

Розглянемо компоненти лінійної згортки  $N \times N$  в загальному вигляді (рис. 5.1). Як видно з рис. 5.1, для переходу від згортки  $(N-1) \times (N-1)$  до згортки  $N \times N$  потрібно виконати  $2(N-1)$  множень. Таким чином, існує рекурентна залежність  $M_N = M_{N-1} + 2(N-1)$ .

При використанні такого методу побудови алгоритму обчислення згортки значення критерію  $\alpha$  зростає при збільшенні довжини послідовності, яка згортається. Наприклад, при збільшенні довжини послідовності від  $N=4$  значення  $\alpha$  буде зростати так:

$N$ .....	4	5	6	7	8	9	10
$\alpha$ .....	0,5625	0,68	0,75	0,79592	0,82812	0,85185	0,87

$x_1 y_1$			...			
$x_1 y_2 +$	$x_2 y_1$		...			
...	...	...	...	...	...	...
$x_1 y_{N-1} +$	$x_2 y_{N-2} +$	$x_3 y_5 +$	...	$x_{N-2} y_2 +$	$x_{N-1} y_1$	
$x_1 y_N +$	$x_2 y_{N-1} +$	$x_3 y_{N-2} +$	...	$x_{N-2} y_3 +$	$x_{N-1} y_2 +$	$x_N y_1$
	$x_2 y_N +$	$x_3 y_{N-1} +$	...	$x_{N-2} y_4 +$	$x_{N-1} y_3 +$	$x_N y_2$
...	...	...	...	...	...	...
				$x_{N-2} y_N +$	$x_{N-1} y_{N-1} +$	$x_N y_{N-2}$
			...		$x_{N-1} y_N +$	$x_N y_{N-1}$
			...			$x_N y_N$

Рис.5.1. Загальний вигляд компонент лінійної згортки  $N \times N$

Як бачимо при  $N=8$  індекс дорівнює  $\alpha = 0.82812$ . Однак, як було зазначено раніше для цілих степенів двійки є алгоритми декомпозиції, для яких цей індекс набагато менший:  $\alpha = 0.5625$ . Тому при  $N=8$  недоцільно продовжувати процес рекурсії від  $N=7$ , а слід використовувати алгоритм декомпозиції для степеня два.

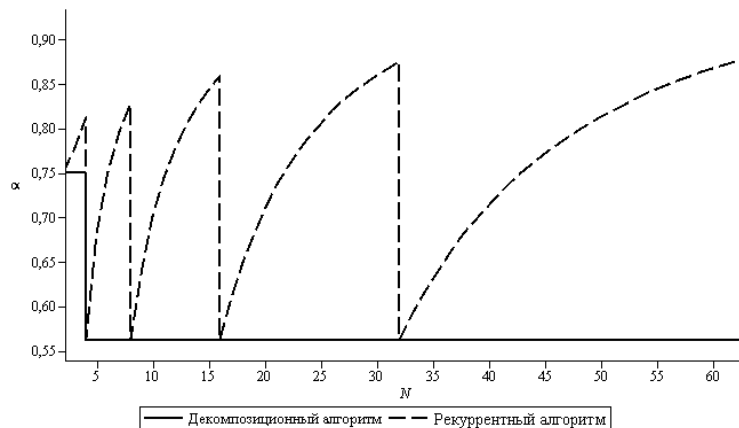


Рис.5.2. - Залежність індексу  $\alpha$  від довжини  $N$  масиву, який згортається

Таким чином, алгоритм обчислення згортки є рекурсивним до значення довжини згортаючої послідовності, що дорівнює  $2^n - 1$ , а далі, при  $N = 2^n$  використовується алгоритм декомпозиції, після чого продовжується рекурсія до заданого значення довжини звернутій послідовності. Як видно з рис. 5.2, найбільший ефект досягається при довжинах згортаючих масивів  $N$ , близьких до  $2^n$  зправа ( $\approx 40\%$ ), і знижується в міру наближення до  $2^n$  зліва.

#### 5.4. Представлення передавальної функції цифрового фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами

Нагадаємо, що цифровим фільтром називається цифрова система, яка використовується для фільтрації дискретного сигналу. Застосування ГЧС для синтезу структур цифрових фільтрів, як показано в роботах [64, 107, 119], дає відчутні переваги. Зокрема, цифрові фільтри з гіперкомплексними параметрами мають більшу швидкодію і кращі характеристики інтегральної параметричної чутливості.

Представлення передаточної функції цифрового фільтра з дійсними параметрами має наступний вигляд:

$$H_R = \frac{\sum_{k=0}^n \varphi_k z^{-k}}{\sum_{k=1}^n \phi_k z^{-k} + 1}, \quad (5.38)$$

де  $\varphi_k, \phi_k \in R$ ;  $\omega$  - кутова частота.

В роботі [64] наведено алгоритм представлення (5.38) в більш просту форму – передаточну функцію з гіперкомплексними параметрами, який полягає в розгляді дробово-раціональної функції, яка має вигляд:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (5.39)$$

де поліноми в чисельнику і знаменнику мають вигляд:

$$P(z) = \sum_{i=0}^l p_i z^{-i}, \quad Q(z) = \sum_{i=0}^l q_i z^{-i}, \quad (5.40)$$



$$p_i, q_i \in \Gamma(e, m), q_0 = 1. \quad (5.41)$$

В свою чергу  $\Gamma(e, m)$  - гіперкомплексна числова система  $m$ -ої вимірності з ідентифікатором базису  $e$ .

Переведення функції (5.39) до гіперкомплексного вигляду ґрунтоване на алгоритмі ділення двох гіперкомплексних чисел, описаному вище. Для його реалізації необхідно чисельник і знаменник помножити на поліном, спряжений до знаменника. Спряжений поліном визначається за правилом

$$\overline{Q(z)} = \sum_{i=0}^l \overline{q_i} z^{-i}, \quad (5.42)$$

Таким чином, в знаменнику отримаємо добуток  $Q(z) \cdot \overline{Q(z)}$ , який являє собою норму полінома  $Q(z)$ , помножену на одиничний елемент  $\varepsilon$  системи  $\Gamma(e, m)$ .

$$Q(z) \cdot \overline{Q(z)} = N(Q(z)) \cdot \varepsilon, \quad (5.43)$$

де  $N(Q(z)) \in R$ .

Враховуючи (5.42) та (5.43), функція (5.39) перетворюється в наступну функцію:

$$R(z) = \frac{P(z) \cdot \overline{Q(z)}}{N(Q(z))}. \quad (5.44)$$

Оскільки знаменник функції (5.44) – дійсне число, яке, врахувавши (5.41) можна записати у вигляді  $N(Q(z)) = N^*(Q(z)) + 1$ , то її можна представити у вигляді гіперкомплексної функції:

$$R(z) = \sum_{i=1}^m R_i(z) \cdot e_i. \quad (5.45)$$

Функція (5.45) по кожній вимірності створює свій фільтр з дійсними коефіцієнтами.

Таким чином, остаточне представлення передаточної функції з гіперкомплексними коефіцієнтами матиме вигляд:

$$H_r = \frac{A + Bz^{-1}}{\varepsilon + Cz^{-1}}, \quad (5.46)$$

де  $A, B, C \in \Gamma(e, m)$ .

Оскільки, норма гіперкомплексного числа являється формою  $m$ -ого степеня відносно компонент цього числа, та врахувавши, що  $Q(z)$  - поліном  $l$ -ого степеня, то норма  $N(Q(z))$  буде формою  $l \cdot m$ -ого степеня відносно оператора  $z$ . Відповідно і спряжене число  $\overline{Q(z)}$  буде формою степеня  $l \cdot (m-1)$ , а добуток  $P(z) \cdot \overline{Q(z)}$  буде формою степеня  $m$  відносно елементів гіперкомплексного числа, а відносно оператора  $z$  - степеня  $m \cdot l$ . То можна побачити, що із збільшенням вимірності гіперкомплексної системи зростає порядок поліномів чисельника і знаменника передавальної функції.

#### 5.4.1. Моделювання роботи цифрового фільтра з квадриплексними коефіцієнтами

Передавальна функція з гіперкомплексними коефіцієнтами вимірності 4, що описує цифровий фільтр першого порядку, може реалізовувати передавальну функцію з дійсними коефіцієнтами, що описує фільтр, порядок якого може бути до 4-го включно [120].

Розглянемо передавальну функцію фільтра четвертого порядку з дійсними коефіцієнтами:

$$H_R = \frac{\varphi_0 + \varphi_1 \cdot z^{-1} + \varphi_2 \cdot z^{-2} + \varphi_3 \cdot z^{-3} + \varphi_4 \cdot z^{-4}}{1 + \phi_1 \cdot z^{-1} + \phi_2 \cdot z^{-2} + \phi_3 \cdot z^{-3} + \phi_4 \cdot z^{-4}}, \quad (5.47)$$

Відповідна передавальна функція фільтра першого порядку з гіперкомплексними коефіцієнтами вимірності 4 буде мати вигляд (5.46), де

$$A = a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + a_3 \cdot e_3 + a_4 \cdot e_4, \quad B = b_1 \cdot e_1 + b_2 \cdot e_2 + b_3 \cdot e_3 + b_4 \cdot e_4 \quad \text{та}$$

$$C = c_1 \cdot e_1 + c_2 \cdot e_2 + c_3 \cdot e_3 + c_4 \cdot e_4.$$

Визначимо вид спряженого числа до знаменника передавальної функції (5,46) для того, щоб привести цю передавальну функцію до виду (5,44). Обчислене за допомогою процедур програмного комплексу гіперкомплексних обчислень таке число матиме вигляд:

$$> C1 := e_1 + (c_1 \cdot e_1 + c_2 \cdot e_2 + c_3 \cdot e_3 + c_4 \cdot e_4) \cdot z^{-1}$$

$$> C2 := \text{HyperLib}[\text{Conjug}](C1, K, e)$$

$$\begin{aligned}
C2 = & (1 + 3 \cdot c_1 \cdot z^{-1} + (3 \cdot c_1^2 + c_2^2 - c_4^2 + c_3^2) \cdot z^{-2} + (c_1^3 + c_1 \cdot c_2^2 - c_4^2 \cdot c_1 + 2 \cdot c_4 \cdot c_3 \cdot c_2 + c_3^2 \cdot c_1) \cdot z^{-3}) \cdot e_1 - \\
& - (c_2 \cdot z^{-1} + (2 \cdot c_2 \cdot c_1 + 2 \cdot c_3 \cdot c_4) \cdot z^{-2} + (c_2 \cdot c_1^2 + c_3^2 + 2 \cdot c_3 \cdot c_4 \cdot c_1 - c_3^2 \cdot c_2 + c_4^2 \cdot c_2) \cdot z^{-3}) \cdot e_2 - \\
& - (c_3 \cdot z^{-1} + (2 \cdot c_2 \cdot c_4 + 2 \cdot c_3 \cdot c_1) \cdot z^{-2} + (c_3^3 + 2 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot c_1 - c_3 \cdot c_2^2 + c_3 \cdot c_1^2 + c_4^2 \cdot c_3) \cdot z^{-3}) \cdot e_3 - \\
& - (c_4 \cdot z^{-1} + (2 \cdot c_4 \cdot c_1 - 2 \cdot c_2 \cdot c_3) \cdot z^{-2} + (c_4 \cdot c_1^2 - c_4 \cdot c_2^2 - 2 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot c_1 - c_4 \cdot c_3^2 - c_4^3) \cdot z^{-3}) \cdot e_4
\end{aligned}$$

А норма знаменника  $N(e_1 + C \cdot z^{-1})$  такої функції буде мати вигляд:

$$> NCl := \text{HyperLib}[\text{Norma}](Cl, K)$$

$$\begin{aligned}
NCl = & 1 + 4 \cdot c_1 \cdot z^{-1} + (2 \cdot c_3^2 + 2 \cdot c_2^2 - 2 \cdot c_4^2 + 6 \cdot c_1^2) \cdot z^{-2} + (4 \cdot c_1^3 + 4 \cdot c_1 \cdot c_2^2 + 8 \cdot c_4 \cdot c_3 \cdot c_2 - \\
& - 4 \cdot c_4^2 \cdot c_1 + 4 \cdot c_3^2 \cdot c_1) \cdot z^{-3} + (2 \cdot c_3^2 \cdot c_1^2 - 2 \cdot c_4^2 \cdot c_1^2 - 2 \cdot c_3^2 \cdot c_2^2 + 8 \cdot c_1 \cdot c_4 \cdot c_3 \cdot c_2 + 2 \cdot c_4^2 \cdot c_3^2 + 2 \cdot c_1^2 \cdot c_2^2 + \\
& + 2 \cdot c_4^2 \cdot c_2^2 + c_1^4 + c_2^4 + c_3^4 + c_4^4) \cdot z^{-4}
\end{aligned}$$

Помножимо чисельник і знаменник передавальної функції (5.46) з квадриплексними коефіцієнтами на число, спряжене до знаменника:

$$\begin{aligned}
H_{\Gamma}(z) = & H_{\Gamma_1}(z) \cdot e_1 + H_{\Gamma_2}(z) \cdot e_2 + H_{\Gamma_3}(z) \cdot e_3 + H_{\Gamma_4}(z) \cdot e_4 = \\
= & \frac{Hn_{\Gamma_1}(z) \cdot e_1 + Hn_{\Gamma_2}(z) \cdot e_2 + Hn_{\Gamma_3}(z) \cdot e_3 + Hn_{\Gamma_4}(z) \cdot e_4}{N(e_1 + C \cdot z^{-1})}, \quad (5.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Hn_{\Gamma_1}(z) = & a_1 + (b_1 - a_4 \cdot c_4 + a_2 \cdot c_2 + 3 \cdot a_1 \cdot c_1 + a_3 \cdot c_3) \cdot z^{-1} + (2 \cdot (a_2 \cdot c_3 \cdot c_4 + a_4 \cdot c_2 \cdot c_3 + a_3 \cdot c_2 \cdot c_4) + \\
& + a_1 \cdot (c_2^2 - c_4^2 + 3 \cdot c_1^2 + c_3^2) + c_2 \cdot b_2 + b_3 \cdot c_3 - b_4 \cdot c_4 + c_1 \cdot (2 \cdot a_2 \cdot c_2 - 2 \cdot a_4 \cdot c_4 + 2 \cdot a_3 \cdot c_3 + 3 \cdot b_1)) \cdot z^{-2} + \\
& + (a_4 \cdot c_4^3 - b_1 \cdot c_4^2 + (a_3 \cdot c_4^2 + 2 \cdot b_2 \cdot c_4 + (b_1 + a_4 \cdot c_4 + a_3 \cdot c_3) \cdot c_3) \cdot c_3 + (2 \cdot b_3 \cdot c_4 + a_2 \cdot c_4^2) \cdot c_2 - \\
& - a_1 \cdot c_4^2 \cdot c_1 + (c_3 \cdot (2 \cdot b_4 - a_2 \cdot c_3 + 2 \cdot a_1 \cdot c_4) + (a_4 \cdot c_4 - a_3 \cdot c_3 + b_1 + a_2 \cdot c_2) \cdot c_2) \cdot c_2 + \\
& + c_3 \cdot c_1 \cdot (2 \cdot b_3 + 2 \cdot a_2 \cdot c_4 + a_1 \cdot c_3) + 2 \cdot b_4 \cdot c_4 \cdot c_1 + c_2 \cdot c_1 \cdot (a_1 \cdot c_2 + 2 \cdot a_3 \cdot c_4 + 2 \cdot a_4 \cdot c_3 + 2 \cdot b_2) + \\
& + (a_2 \cdot c_2 - a_4 \cdot c_4 + 3 \cdot b_1 + a_3 \cdot c_3 + a_1 \cdot c_1) \cdot c_1^2) \cdot z^{-3} + (b_3 \cdot c_4^2 \cdot c_3 + b_4 \cdot c_4 \cdot c_3^2 + b_3 \cdot c_3^3 + b_4 \cdot c_4^3 + \\
& + (b_2 \cdot c_4^3 + 2 \cdot b_1 \cdot c_3 \cdot c_4 - b_2 \cdot c_3^2 + (b_4 \cdot c_4 - b_3 \cdot c_3 + b_2 \cdot c_2) \cdot c_2) \cdot c_2 + (2 \cdot c_3 \cdot (b_2 \cdot c_4 + b_4 \cdot c_2) + \\
& + b_1 \cdot (c_3^2 + c_2^2 - c_4^2) + 2 \cdot b_3 \cdot c_2 \cdot c_4 + (b_2 \cdot c_2 - b_4 \cdot c_4 + b_3 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_1) \cdot c_1) \cdot c_1) \cdot z^{-4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Hn_{\Gamma_2}(z) = & a_2 + (3 \cdot a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2 + b_2 + a_3 \cdot c_4 + a_4 \cdot c_3) \cdot z^{-1} + (b_3 \cdot c_4 - 2 \cdot c_1 \cdot (a_1 \cdot c_2 + a_3 \cdot c_4 + a_4 \cdot c_3) + \\
& + 3 \cdot c_1 \cdot (a_2 \cdot c_1 + b_2) - a_2 \cdot c_4^2 + (b_4 - 2 \cdot a_1 \cdot c_4 + a_2 \cdot c_3) \cdot c_3 + (2 \cdot a_4 \cdot c_4 + a_2 \cdot c_2 - 2 \cdot a_3 \cdot c_3 - b_1) \cdot c_2) \cdot z^{-2} + \\
& + ((a_4 \cdot c_4^2 - 2 \cdot b_1 \cdot c_4 + (b_2 - a_3 \cdot c_4 + a_4 \cdot c_3) \cdot c_3) \cdot c_3 + (2 \cdot (b_4 \cdot c_4 - b_3 \cdot c_3 + a_2 \cdot c_3 \cdot c_4) + a_1 \cdot c_3^2 - \\
& - a_1 \cdot c_4^2) \cdot c_2 + (b_2 - a_4 \cdot c_3 - a_3 \cdot c_4 - a_1 \cdot c_2) \cdot c_2^2 - a_3 \cdot c_4^3 - b_2 \cdot c_4^2 + (a_2 \cdot c_3^2 + a_2 \cdot c_2^2 - a_2 \cdot c_4^2 + \\
& + 2 \cdot c_3 \cdot (a_1 \cdot c_4 + b_4)) \cdot c_1 + (2 \cdot (a_4 \cdot c_2 \cdot c_4 - b_1 \cdot c_2 - a_3 \cdot c_2 \cdot c_3 + b_3 \cdot c_4) + (a_4 \cdot c_3 + a_3 \cdot c_4 - a_1 \cdot c_2 + \\
& + 3 \cdot b_2 + a_2 \cdot c_1) \cdot c_1) \cdot c_1 + (b_4 \cdot c_4^2 \cdot c_3 - b_3 \cdot c_4^3 + b_4 \cdot c_3^3 - b_3 \cdot c_4 \cdot c_3^2 + (b_1 \cdot c_3^2 + 2 \cdot b_2 \cdot c_3 \cdot c_4 - b_1 \cdot c_4^2 - \\
& - (b_3 \cdot c_4 + b_4 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2) \cdot c_2) \cdot c_2 + b_2 \cdot c_2^2 \cdot c_1 + (b_2 \cdot c_3^2 - b_2 \cdot c_4^2 + 2 \cdot b_4 \cdot c_2 \cdot c_4 - 2 \cdot b_1 \cdot c_3 \cdot c_4 - \\
& - 2 \cdot b_3 \cdot c_2 \cdot c_3 + (b_4 \cdot c_3 - b_1 \cdot c_2 + b_3 \cdot c_4 + b_2 \cdot c_1) \cdot c_1) \cdot c_1) \cdot z^{-4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Hn_{\Gamma_3}(z) = & a_3 + (3 \cdot a_3 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_3 + a_2 \cdot c_4 + a_4 \cdot c_2 + b_3) \cdot z^{-1} + (b_2 \cdot c_4 + (2 \cdot a_4 \cdot c_4 - b_1 + a_3 \cdot c_3) \cdot c_3 + \\
& + (b_4 - 2 \cdot (a_1 \cdot c_4 + a_2 \cdot c_3) + a_3 \cdot c_2) \cdot c_2 + (2 \cdot (a_4 \cdot c_2 - a_1 \cdot c_3 + a_2 \cdot c_4) + 3 \cdot (b_3 + a_3 \cdot c_1)) \cdot c_1 - \\
& - a_3 \cdot c_4^2) \cdot z^{-2} + ((2 \cdot b_4 \cdot c_4 - a_1 \cdot c_4^2 + (b_3 - a_2 \cdot c_4 - a_1 \cdot c_3) \cdot c_3) \cdot c_3 + 2 \cdot c_2 \cdot (a_3 \cdot c_4 \cdot c_3 - b_1 \cdot c_4 - b_2 \cdot c_3) - \\
& - c_2 \cdot a_4 \cdot c_3^2 + (a_4 \cdot c_4^2 + (b_3 - a_2 \cdot c_4 + a_1 \cdot c_3 + a_4 \cdot c_2) \cdot c_2) \cdot c_2 + 2 \cdot c_1 \cdot (c_3 \cdot (a_4 \cdot c_4 - a_2 \cdot c_2 - b_1) - \\
& - a_1 \cdot c_2 \cdot c_4 + b_4 \cdot c_2) + (a_3 \cdot c_3^2 - a_3 \cdot c_4^2 + a_3 \cdot c_2^2 + 2 \cdot b_2 \cdot c_4 + (3 \cdot b_3 + a_4 \cdot c_2 + a_2 \cdot c_4 - \\
& - a_1 \cdot c_3 + a_3 \cdot c_1) \cdot c_1) \cdot c_1 - a_2 \cdot c_4^3 - b_3 \cdot c_4^2) \cdot z^{-3} + ((b_4 \cdot (c_4^2 - c_3^2) + 2 \cdot b_3 \cdot c_4 \cdot c_3 + (b_1 \cdot c_3 - b_2 \cdot c_4 + \\
& + b_4 \cdot c_2) \cdot c_2) \cdot c_2 - b_1 \cdot c_4^2 \cdot c_3 - b_2 \cdot c_4 \cdot c_3^2 - b_1 \cdot c_3^3 - b_2 \cdot c_4^3 + (b_3 \cdot (c_2^2 + c_3^2 - c_4^2) + \\
& + 2 \cdot (b_4 \cdot c_3 \cdot c_4 - b_2 \cdot c_2 \cdot c_3 - b_1 \cdot c_2 \cdot c_4) + (b_4 \cdot c_2 - b_1 \cdot c_3 + b_2 \cdot c_4 + b_3 \cdot c_1) \cdot c_1) \cdot c_1) \cdot z^{-4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Hn_{\Gamma_4}(z) = & a_4 + (b_4 - a_1 \cdot c_4 - a_2 \cdot c_3 + 3 \cdot a_4 \cdot c_1 - a_3 \cdot c_2) \cdot z^{-1} + (a_4 \cdot c_3^2 - b_2 \cdot c_3 - a_4 \cdot c_4^2 - \\
& - 2a_3 \cdot c_4 \cdot c_3 - b_1 \cdot c_4 + (2 \cdot a_1 \cdot c_3 - 2 \cdot a_2 \cdot c_4 + a_4 \cdot c_2 - b_3) \cdot c_2 + (3 \cdot b_4 + 3 \cdot a_4 \cdot c_1 - 2 \cdot a_1 \cdot c_4 - \\
& - 2 \cdot a_2 \cdot c_3 - 2 \cdot a_3 \cdot c_2) \cdot c_1) \cdot z^{-2} + (a_1 \cdot c_4^3 - b_4 \cdot c_4^2 + ((a_1 \cdot c_4 + b_4 - a_2 \cdot c_3) \cdot c_3 - 2 \cdot a_3 \cdot c_4 - a_2 \cdot c_4^2) \cdot c_3 + \\
& + (2 \cdot b_1 \cdot c_3 + a_3 \cdot c_3^2 - a_3 \cdot c_4^2 - 2 \cdot b_2 \cdot c_4 + 2 \cdot a_4 \cdot c_3 \cdot c_4 + (a_1 \cdot c_4 + b_4 + a_2 \cdot c_3 - a_3 \cdot c_2) \cdot c_2) \cdot c_2 + \\
& + (2 \cdot a_1 \cdot c_2 \cdot c_3 - 2 \cdot b_1 \cdot c_4 - 2 \cdot a_2 \cdot c_2 \cdot c_4 - 2 \cdot b_3 \cdot c_2 + a_4 \cdot c_3^2 - 2 \cdot b_2 \cdot c_3 + a_4 \cdot c_2^2 - a_4 \cdot c_4^2 - 2 \cdot a_3 \cdot c_4 \cdot c_3 + \\
& + (3 \cdot b_4 - a_1 \cdot c_4 - a_2 \cdot c_3 - a_3 \cdot c_2 + a_4 \cdot c_1) \cdot c_1) \cdot c_1) \cdot z^{-3} + (b_1 \cdot c_4 \cdot c_3^2 - b_2 \cdot c_4^2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_4^3 - b_2 \cdot c_3^3 + \\
& + (b_3 \cdot c_3^2 - b_3 \cdot c_4^2 + 2 \cdot b_4 \cdot c_3 \cdot c_4 + (b_1 \cdot c_4 + b_2 \cdot c_3 - b_3 \cdot c_2) \cdot c_2) \cdot c_2 + (2 \cdot b_1 \cdot c_2 \cdot c_3 - 2 \cdot b_2 \cdot c_2 \cdot c_4 - \\
& - 2 \cdot b_3 \cdot c_4 \cdot c_3 - b_4 \cdot (c_4^2 + c_3^2 + c_2^2) + (b_4 \cdot c_1 - b_1 \cdot c_4 - b_2 \cdot c_3 - b_3 \cdot c_2) \cdot c_1) \cdot c_1) \cdot z^{-4}.
\end{aligned}$$

Таким чином, ми отримали передавальну функція фільтра першого порядку з квадриплексними коефіцієнтами. Компоненти  $H_{\Gamma_1}$ ,  $H_{\Gamma_2}$ ,  $H_{\Gamma_3}$  та  $H_{\Gamma_4}$  передавальної функції (5.48) можна розглядати як передавальні функції з дійсними коефіцієнтами, що описують фільтр четвертого порядку.

Щоб передавальна функція з квадриплексними коефіцієнтами (5.48) описувала той самий фільтр, що і передавальна функція з дійсними коефіцієнтами (5.47) необхідно, щоб один з виразів  $H_{\Gamma_1}$ ,  $H_{\Gamma_2}$ ,  $H_{\Gamma_3}$  або  $H_{\Gamma_4}$  співпадав з функцією (5.47).

Прирівняємо вирази при рівних степенях  $z$  в чисельнику та знаменнику передавальних функцій (5.47) та  $H_{\Gamma_1}$ , отримаємо дві системи рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot c_1 = \phi_1 \\ 2 \cdot c_3^2 + 2 \cdot c_2^2 - 2 \cdot c_4^2 + 6 \cdot c_1^2 = \phi_2 \\ 4 \cdot c_1^3 + 4 \cdot c_1 \cdot c_2^2 + 8 \cdot c_4 \cdot c_3 \cdot c_2 - 4 \cdot c_4^2 \cdot c_1 + 4 \cdot c_3^2 \cdot c_1 = \phi_3 \\ 2 \cdot (c_3^2 \cdot c_1^2 - c_4^2 \cdot c_1^2 - c_3^2 \cdot c_2^2 + c_4^2 \cdot c_3^2 + c_1^2 \cdot c_2^2 + c_4^2 \cdot c_2^2) + 8 \cdot c_1 \cdot c_4 \cdot c_3 \cdot c_2 + \\ + c_1^4 + c_2^4 + c_3^4 + c_4^4 = \phi_4 \end{array} \right. , \quad (5.49)$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо вирази для знаходження коефіцієнтів  $c_i$ ,  $i=1,\dots,4$  по відомим коефіцієнтам  $\phi_i$ ,  $i=1,\dots,4$  передавальної функції фільтра четвертого порядку з дійсними коефіцієнтами.

Виконавши аналогічний алгоритм в знаменниках, визначимо коефіцієнти  $a_i, b_i, i=1,\dots,4$ . Але в цьому випадку система буде неоднозначною, оскільки кількість невідомих коефіцієнтів передавальної функції  $H_{\Gamma_1}$  – 8 а кількість рівнянь – 5. Отже така система має безліч розв'язків і для визначення одного з них необхідно надати трьом невідомим певних значень. Для спрощення системи прирівнюємо до нуля невідомі, що найчастіше зустрічаються в системі:  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 0$ ,  $b_3 = 0$ , а з першого рівняння системи маємо  $a_1 = \varphi_0$ . Тоді отримаємо систему лінійних рівнянь, що матиме вигляд:

$$\begin{cases} a_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot c_3 - a_4 \cdot c_4 + 3 \cdot \varphi_0 \cdot c_1 = \varphi_1 \\ 2 \cdot (a_4 \cdot (c_2 \cdot c_3 - c_4 \cdot c_1) + a_2 \cdot (c_2 \cdot c_1 + c_3 \cdot c_4) + a_3 \cdot (c_2 \cdot c_4 + c_3 \cdot c_1)) + \\ + \varphi_0 \cdot (c_3^2 + c_2^2 - c_4^2 + 3 \cdot c_1^2) - b_4 \cdot c_4 = \varphi_2 \\ c_1 \cdot \varphi_0 \cdot (c_3^2 + c_2^2 + c_1^2 - c_4^2) + 2 \cdot b_4 \cdot (c_2 \cdot c_3 - c_4 \cdot c_1) + a_2 \cdot (2 \cdot c_3 \cdot c_4 \cdot c_1 - \\ - c_2 \cdot (c_3^2 + c_4^2 + c_2^2 + c_1^2)) + a_3 \cdot (c_4^2 \cdot c_3 + c_3 \cdot c_1^2 + c_3^3 - c_3 \cdot c_2^2 + 2 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot c_1) + \\ + a_4 \cdot (c_4 \cdot c_3^2 + c_4^3 + 2 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot c_1 - c_4 \cdot c_1^2 + c_4 \cdot c_2^2) + 2 \cdot \varphi_0 \cdot c_4 \cdot c_3 \cdot c_2 = \varphi_3 \\ b_4 \cdot (c_4^3 - c_4 \cdot c_1^2 + c_4 \cdot c_3^2 + c_4 \cdot c_2^2 + 2 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot c_1) = \varphi_4. \end{cases} \quad (5.50)$$

В результаті розв'язання систем (5.49) та (5.50) отримуємо значення квадриплексних коефіцієнтів передавальної функції (5.46) фільтра першого порядку, при яких вираз при базисній одиниці  $e_1$  квадриплексної системи у функції (5.48) буде співпадати з передавальною функцією з дійсними коефіцієнтами фільтра четвертого порядку (5.47). Тобто для обробки сигналу за допомогою фільтра з квадриплексними коефіцієнтами у цьому випадку буде використовуватися перший з чотирьох каналів.

Оскільки наведені обрахунки мають дуже громіздкий вигляд, то скористаємося засобами СКА Maple для знаходження коефіцієнтів  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

```
Filtr:=proc( $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ )
local  $c_1, c_2, c_3, c_4, Zn_1, Zn_2, Zn_3, Zn_4, z, NZn, ConZn, ConZn[1], ConZn[2],$ 
 $ConZn[3], ConZn[4], ZnC[1], ZnC[2], ZnC[3], ZnC[4], sys1, CoeffC, C, e, i, a_1, a_2,$ 
 $a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, P_1, P_2, P_3, P_4, Chisel_1, Chisel_2, Chisel_3, Chisel_4, sys2, sys,$ 
 $CoeffAB, A, B, H_K;$ 
```

$Zn_1 := 1 + \frac{c_1}{z}; Zn_2 := \frac{c_2}{z}; Zn_3 := \frac{c_3}{z}; Zn_4 := \frac{c_4}{z};$   
 $NZn := collect(expand((Zn_1^2 + Zn_2^2 + Zn_3^2 + Zn_4^2)^2 - (2Zn_1 \cdot Zn_4 - 2Zn_2^2 \cdot Zn_3^2)^2), z);$   
 $ConZn := (Zn_1(Zn_1^2 - Zn_2^2 - Zn_3^2 - Zn_4^2)^2 + 2 \cdot Zn_2 \cdot Zn_3 \cdot Zn_4) \cdot e_1 +$   
 $+ (Zn_2(-Zn_1^2 + Zn_2^2 - Zn_3^2 - Zn_4^2)^2 + 2 \cdot Zn_1 \cdot Zn_3 \cdot Zn_4) \cdot e_2 +$   
 $+ (Zn_3(-Zn_1^2 - Zn_2^2 + Zn_3^2 - Zn_4^2)^2 + 2 \cdot Zn_1 \cdot Zn_2 \cdot Zn_4) \cdot e_3 +$   
 $+ (Zn_4(-Zn_1^2 - Zn_2^2 - Zn_3^2 + Zn_4^2)^2 + 2 \cdot Zn_1 \cdot Zn_2 \cdot Zn_3) \cdot e_4;$   
 $ConZn[1] := collect(expand(Zn_1(Zn_1^2 - Zn_2^2 - Zn_3^2 - Zn_4^2)^2 + 2 \cdot Zn_2 \cdot Zn_3 \cdot Zn_4), z);$   
 $ConZn[2] := collect(expand(Zn_2(-Zn_1^2 + Zn_2^2 - Zn_3^2 - Zn_4^2)^2 + 2 \cdot Zn_1 \cdot Zn_3 \cdot Zn_4), z);$   
 $ConZn[3] := collect(expand(Zn_3(-Zn_1^2 - Zn_2^2 + Zn_3^2 - Zn_4^2)^2 + 2 \cdot Zn_1 \cdot Zn_2 \cdot Zn_4), z);$   
 $ConZn[4] := collect(expand(Zn_4(-Zn_1^2 - Zn_2^2 - Zn_3^2 + Zn_4^2)^2 + 2 \cdot Zn_1 \cdot Zn_2 \cdot Zn_3), z);$   
 $ZnC[1] := 4 \cdot c_1; ZnC[2] := 2 \cdot c_3^2 + 2 \cdot c_2^2 - 2 \cdot c_4^2 + 6 \cdot c_1^2;$   
 $ZnC[3] := 4 \cdot c_1^3 + 4 \cdot c_1 \cdot c_2^2 + 8 \cdot c_4 \cdot c_3 \cdot c_2 - 4 \cdot c_4^2 \cdot c_1 + 4 \cdot c_3^2 \cdot c_1;$   
 $ZnC[4] := \frac{2 \cdot (c_3^2 \cdot c_1^2 - c_4^2 \cdot c_1^2 - c_3^2 \cdot c_2^2 + c_4^2 \cdot c_3^2 + c_1^2 \cdot c_2^2 + c_4^2 \cdot c_2^2) + 8 \cdot c_1 \cdot c_4 \cdot c_3 \cdot c_2 +}{+ c_1^4 + c_2^4 + c_3^4 + c_4^4};$   
 $sys1 := \{ ZnC[1] = \phi_1, ZnC[2] = \phi_2, ZnC[3] = \phi_3, ZnC[4] = \phi_4 \}; CoeffC := solve(sys1, [c_1, c_2,$   
 $c_3, c_4]);$   
**for i from 1 to 4 do c[i] := rhs(CoeffC[i]) end do;**  
 $P_1 := a_1 + \frac{b_1}{z}; P_2 := a_2 + \frac{b_2}{z}; P_3 := a_3 + \frac{b_3}{z}; P_4 := a_4 + \frac{b_4}{z};$   
 $Chisel_1 := collect(expand(P_1 \cdot ConZn_1 - P_2 \cdot ConZn_2 - P_3 \cdot ConZn_3 + P_4 \cdot ConZn_4), z);$   
 $Chisel_2 := collect(expand(P_1 \cdot ConZn_2 + P_2 \cdot ConZn_1 - P_3 \cdot ConZn_4 + P_4 \cdot ConZn_3), z);$   
 $Chisel_3 := collect(expand(P_1 \cdot ConZn_3 + P_3 \cdot ConZn_1 - P_2 \cdot ConZn_4 - P_4 \cdot ConZn_2), z);$   
 $Chisel_4 := collect(expand(P_1 \cdot ConZn_4 + P_4 \cdot ConZn_1 + P_2 \cdot ConZn_3 + P_3 \cdot ConZn_2), z);$   
 $sys2 := \{ a_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot c_3 - a_4 \cdot c_4 + 3 \cdot \phi_0 \cdot c_1 = \phi_1,$   
 $2 \cdot (a_4 \cdot (c_2 \cdot c_3 - c_4 \cdot c_1) + a_2 \cdot (c_2 \cdot c_1 + c_3 \cdot c_4) + a_3 \cdot (c_2 \cdot c_4 + c_3 \cdot c_1)) +$   
 $+ \phi_0 \cdot (c_3^2 + c_2^2 - c_4^2 + 3 \cdot c_1^2) - b_4 \cdot c_4 = \phi_2,$   
 $c_1 \cdot \phi_0 \cdot (c_3^2 + c_2^2 + c_1^2 - c_4^2) + 2 \cdot b_4 \cdot (c_2 \cdot c_3 - c_4 \cdot c_1) + a_2 \cdot (2 \cdot c_3 \cdot c_4 \cdot c_1 - c_2 \cdot (c_3^2 + c_4^2 + c_2^2 + c_1^2)) +$   
 $+ a_3 \cdot (c_4^2 \cdot c_3 + c_3 \cdot c_1^2 + c_3^3 - c_3 \cdot c_2^2 + 2 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot c_1) + a_4 \cdot (c_4 \cdot c_3^2 + c_4^3 + 2 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot c_1 -$   
 $- c_4 \cdot c_1^2 + c_4 \cdot c_2^2) + 2 \cdot \phi_0 \cdot c_4 \cdot c_3 \cdot c_2 = \phi_3,$   
 $b_4 \cdot (c_4^3 - c_4 \cdot c_1^2 + c_4 \cdot c_3^2 + c_4 \cdot c_2^2 + 2 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot c_1) = \phi_4 \}$   
 $sys := subs(b_3 = 0, b_2 = 0, b_1 = 0, sys2);$   
 $CoeffAB := solve(sys, [a_1, a_2, a_3, a_4, b_4]);$   
**for i from 1 to 4 do a[i] := rhs(CoeffAB[i]) end do**  
 $b_1 := 0, b_2 := 0, b_3 := 0, b_4 := rhs(CoeffAB[5]);$   
 $A := [a[1]e[1], a[2]e[2], a[3]e[3], a[4]e[4]]; B := [b[1]e[1], b[2]e[2], b[3]e[3], b[4]e[4]];$   
 $C := [c[1]e[1], c[2]e[2], c[3]e[3], c[4]e[4]];$

$$H_K = \frac{A + Bz^{-1}}{e_1 + Cz^{-1}};$$

*RETURN*( $H_K$ )

**end proc**

Таким чином, компоненти квадриплексних коефіцієнтів  $A, B, C$  гіперкомплексного фільтра першого порядку, який еквівалентний фільтру четвертого порядку з дійсними коефіцієнтами, визначається розв'язками систем *sys1* та *sys*.

Покажемо який вигляд матиме розв'язок цієї задачі з використанням ПК. Оскільки, як показано вище, для знаходження коефіцієнтів квадриплексного фільтра потрібно знаходити норму гіперкомплексного числа, спряжений елемент та виконувати дію множення, а програмно-алгоритмічний засіб містить процедури для безпосереднього виконання таких операцій, то доцільно ними скористатися.

*Filtr1:=proc*( $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ )

**local**  $C, Q, NQ, sys1, CoeffC, A, B, P, ConQ, Chis, Chis1, Chisel, Chisell, sys2, sys, CoeffAB, A, B, H_K$ ;

$$C := c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 + c_4e_4;$$

$$Q := ConvertA(e_1 + C \cdot z^{-1}, 4);$$

$$NQ := collect(expand(Norma(Q1, K)), z^{-1});$$

$$sys1 := \{ coeff(NQ, z^{-1}) = \phi_1, coeff(NQ, z^{-2}) = \phi_2, coeff(NQ, z^{-3}) = \phi_3, coeff(NQ, z^{-4}) = \phi_4, \};$$

$$CoeffC := solve(sys1, [c_1, c_2, c_3, c_4]);$$

**for**  $i$  **from** 1 **to** 4 **do**  $c[i] := rhs(CoeffC[i])$  **end do**;

$$A := a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4; B := b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4; P := A + B \cdot z^{-1};$$

$$ConQ := Conjug(Q1, K, e);$$

$$Chis := ConvertA(natMulti(P, ConQ[2], K, e), 4);$$

**for**  $i$  **from** 1 **to** 4 **do**  $Chis1[i] := factor(Chis[i])$  **end do**;

$$Chisel := VizInA([Chis1[1], Chis1[2], Chis1[3], Chis1[4]], e);$$

$$Chisell := collect(expand(coeff(Chisel, e[1])), z);$$

$$sys2 := \{ coeff(Chisell, z^0) = \varphi_0, coeff(Chisell, z^{-1}) = \varphi_1, coeff(Chisell, z^{-2}) = \varphi_2, coeff(Chisell, z^{-3}) = \varphi_3, coeff(Chisell, z^{-4}) = \varphi_4 \};$$

$$sys := subs(b_3 = 0, b_2 = 0, b_1 = 0, sys2);$$

$$CoeffAB := solve(sys, [a_1, a_2, a_3, a_4, b_4]);$$

**for**  $i$  **from** 1 **to** 4 **do**  $a[i] := rhs(CoeffAB[i])$  **end do**;

$$b_1 := 0, b_2 := 0, b_3 := 0, b_4 := rhs(CoeffAB[5]);$$

$A:= a[1]e[1] + a[2]e[2] + a[3]e[3] + a[4]e[4]; B:=b[1]e[1] + b[2]e[2] + b[3]e[3] + b[4]e[4];$

$C:=c[1]e[1] + c[2]e[2] + c[3]e[3] + c[4]e[4];$

$$H_K = \frac{A + Bz^{-1}}{e_1 + Cz^{-1}}$$

*RETURN*( $H_K$ )

**end proc**

#### **5.4.2. Застосування ізоморфізму між ГЧС для зменшення кількості операцій при моделюванні цифрового фільтра**

Як зазначено в підрозділі 5.1.2, системою, яка ізоморфна квадриплексній числовій системі є бікомплексна числова система. Оператор ізоморфного переходу між цими системами має вигляд (5.11). Отже, бікомплексна система може використовуватися для спрощення складності цифрового фільтра, що описується передавальною функцією з квадриплексними коефіцієнтами.

Якщо ж розглядати передавальну функцію з квадриплексними коефіцієнтами і згідно з підходом до зменшення складності таких фільтрів, виконати ізоморфний перехід до бікомплексних коефіцієнтів, то всі арифметичні операції будуть вже виконуватися за правилами бікомплексної системи, для якої вони значно простіші.

Тоді, якщо для представлення цифрового фільтра використовується компонента  $H_{r_1}$  передавальної функції з квадриплексними коефіцієнтами (5.48), використовуючи систему (5.11) для перетворення коефіцієнтів  $A, B, C$  отримаємо фільтр, описаний передавальною функцією з бікомплексними коефіцієнтами. А розв'язавши системи (5.49) та (5.50), попередньо перетворивши коефіцієнти  $A, B, C$  згідно правил (5.11), отримаємо бікомплексні коефіцієнти передавальної функції (5.48), при яких компонента  $H_{r_1}$  такої функції буде співпадати з передавальною функцією з дійсними коефіцієнтами фільтра четвертого порядку (5.47).

Якщо роботу цифрових фільтрів з передавальною функцією (5.48) описувати різницеvim рекурентним рівнянням



$$y[t] = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x[t-i] - \sum_{i=1}^n b_i \cdot y[t-i], \quad (5.51)$$

то при використанні ізоморфного переходу до бікомплексних чисел таке рівняння прийме вигляд:

$$y_K[t] = \bar{L} \left( \sum_{i=0}^n L(a_i) \cdot L(x[t-i]) - \sum_{i=1}^n L(b_i) \cdot y_B[t-i] \right), \quad (5.52)$$

де  $L$  - оператор ізоморфного переходу від квадриплексних до бікомплексних чисел,  $\bar{L}$  - оператор зворотного ізоморфного переходу,  $y_K$  належить квадриплексним числам, а  $y_B$  належить до бікомплексних чисел.

Тобто квадриплексні коефіцієнти  $a_i, b_i$  передавальної функції та відліки вхідного сигналу в квадриплексній формі  $x[t-i]$  необхідно перевести до бікомплексної системи, а значення на виході перевести з бікомплексної до квадриплексної системи для подальшого виділення дійсного сигналу виходу.

Порахуємо кількість операцій, необхідних для реалізації фільтрів з гіперкомплексними коефіцієнтами та фільтрів, отриманих в результаті ізоморфного переходу до системи з простішою таблицею множення базисних елементів. Таким чином, можемо оцінити ефективність використання ізоморфних переходів для зменшення складності цифрових фільтрів з гіперкомплексними коефіцієнтами. Результати підрахунку кількості дійсних операцій (множення, додавання, віднімання та елементи затримки) наведені в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1

### Результати застосування ізоморфізму ГЧС для зменшення кількості операцій

Система чисел	Порядок фільтра	Кількість множень дійсних чисел	Кількість додавань та віднімань дійсних чисел	Кількість елементів затримки дійсних чисел
Дійсні числа	4	9	8	8
Квадриплексні числа	1	48	44	5
Бікомплексні числа	1	25	21	5

Значення АЧХ при деякій частоті вказує у скільки разів амплітуда сигналу на виході системи відрізняється від амплітуди вхідного сигналу на цій же частоті.

Розглянемо цифровий фільтр 4-го порядку з дійсними коефіцієнтами з такою передавальною функцією:

$$H = \frac{-0.2576785 + 0.41760426 \cdot z^{-1} - 0.57248388 \cdot z^{-2} + 0.41760426 \cdot z^{-3} - 0.2576785 \cdot z^{-4}}{1 - 0.00322709 \cdot z^{-1} + 0.71946051 \cdot z^{-2} + 0.12106509 \cdot z^{-3} + 0.0792995 \cdot z^{-4}}, \quad (5.53)$$

Модуль цієї передавальної функції наведено на рис. 5.3.

За допомогою вищеприписаного методу, для наведеної передавальної функції цифрового фільтра 4-го порядку з дійсними коефіцієнтами (5.53) можна побудувати відповідну передавальну функцію цифрового фільтра 1-го порядку з квадриплексними коефіцієнтами:

$$H = \frac{A + \frac{B}{z}}{1 + \frac{C}{z}}$$

Розв'язавши системи (5.49) та (5.50) отримаємо наступні значення коефіцієнтів:  $A = -0.25767851 \cdot e_1 + 0.11358319 \cdot e_3$ ,

$$B = 0.39043641 \cdot e_1 + 1.16738193 \cdot e_2 + 0.35338518 \cdot e_3 - 0.98076212 \cdot e_4,$$

$$C = -0.00080677 \cdot e_1 - 0.56395578 \cdot e_2 + 0.23369819 \cdot e_3 - 0.11372189 \cdot e_4.$$

Оскільки, для визначення АЧХ потрібно обчислити комплексну норму від норми передавальної функції з квадриплексними коефіцієнтами, то відповідна програма з використанням процедур ПК матиме вигляд:

```

AChH_filtr:=proc( H_K )
local Q, NQ, HK, HKv, HKv1;
Q:=ConvertA(denom(H_K), 4);
NQ:=collect(expand(Norma(Q, K)), z^{-1});
HK:= ConvertA( subs(e_2 = 0, e_3 = 0, e_4 = 0, H_K), 4);
HKv:=HK/NQ;
HKv1:=subs( z = e^{2\pi i w}, Norma(HKv, K));
P:=plot( evalf(abs(HKv1)), w=0..1., style=line, color=[black], titlefont=[TIMES,
ROMAN, 14], labels=["Частота", "Чутливість"],
labelfont=[TIMES, ROMAN, 14]);
RETURN(P); end proc

```

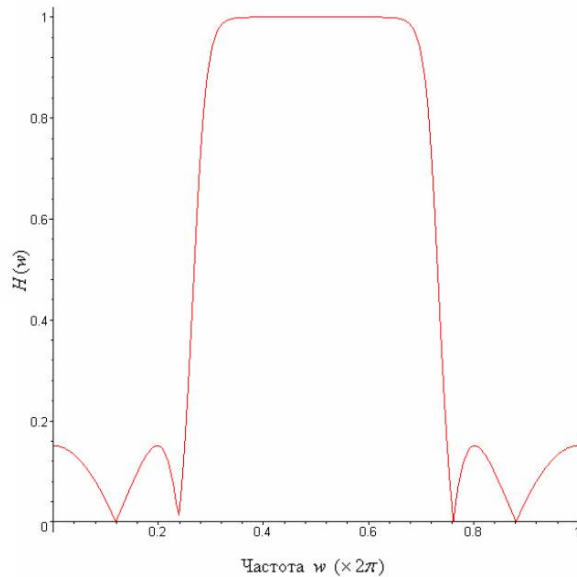


Рис. 5.3. - АЧХ цифрового фільтра 4-го порядку з дійсними коефіцієнтами

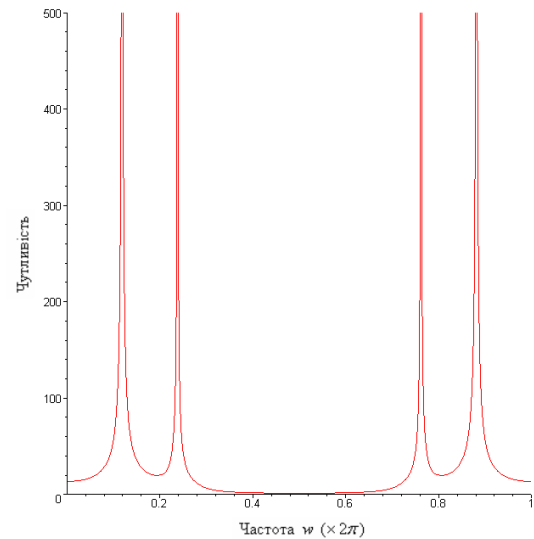


Рис. 5.4. - АЧХ цифрового фільтра 1-го порядку з квадриплексними коефіцієнтами

Застосувавши наведені в цьому розділі формули, за допомогою розробленої в системі Maple програми отримуємо залежність сумарної параметричної чутливості модуля передавальної функції даного фільтра першого порядку з квадриплексними коефіцієнтами від частоти. Графік цієї залежності наведено на рис. 5.4, за яким робиться висновок про те, при яких значеннях частоти вихідний сигнал буде більше чи менше спотворений.

## Висновки до розділу 5

В цьому розділі запропоновано зменшити обчислювальну складність математичного моделювання задач цифрової обробки сигналів за допомогою підходу, що ґрунтується на властивостях ізоморфного переходу між різними ГЧС.

Показано, що виконання нелінійних операцій над гіперкомплексними числами за допомогою переходу від ГЧС із сильнозаповненою таблицею множення базисних елементів до ізоморфної їй ГЧС, таблиця множення базисних елементів якої є слабозаповненою, виконання операцій в ній, і зворотного переходу значно зменшує кількість необхідних дійсних операцій,

особливо множення. Так при множенні гіперкомплексних чисел вимірності  $2^n$  кількість множень дійсних чисел знижується в  $n$  разів, а в інших випадках більш, ніж в  $n/2$  разів.

Показано, що перехід від системи квадриплексних чисел до ізоморфної їй системи бікомплексних чисел при моделюванні роботи фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами зменшує кількість дійсних операцій на  $\approx 50\%$ .

Розроблено програмні модулі для синтезу задач цифрової обробки сигналів за допомогою процедур програмного комплексу гіперкомплексних обчислень.

Зменшено об'єм програмної реалізації задачі синтезу структури алгоритмів швидкої двомірної згортки масивів різної вимірності засобами гіперкомплексних обчислень на  $\approx 30\%$ .

Показано, що представлення квадриплексних коефіцієнтів при математичному моделюванні реверсивного цифрового фільтра за допомогою програмних засобів гіперкомплексних обчислень дозволяє зменшити об'єм програми на 21%.

## Висновки

В результаті досліджень, виконаних в рамках дисертаційної роботи, направлених на підвищення ефективності математичного моделювання задач цифрової обробки сигналів методами і засобами подання та обробки даних у гіперкомплексних числових системах, отримані такі наукові та практичні результати:

1. Проаналізовано сучасний стан форм представлення даних при математичному моделюванні задач цифрової обробки сигналів, область застосувань яких розширюється із розвитком інформаційних технологій. Показано, що практична доцільність використання гіперкомплексних числових систем для математичного моделювання задач цифрової обробки сигналів зростає з огляду на те, що наявність широкого спектру ГЧС дозволяє досягти високого рівня адекватності моделей таких задач.
2. Проведений аналіз показав, що сучасні вимоги до точності і швидкості моделювання задач цифрової обробки сигналів можуть бути досягнуті при використанні гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності, для побудови яких можна використати принцип подвоєння.
3. Вперше шляхом застосування процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда побудовано класи некомутативних та комутативних гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності, які відрізняються від інших тим, що на структурному рівні враховують задані обмеження області представлення даних моделей, що при математичному моделюванні задач цифрової обробки сигналів дозволяє зменшити об'єми обчислень.
4. Вперше побудовано таблиці множення базисних елементів синтезованих класів ГЧС четвертої вимірності у загальному вигляді і досліджено узагальнені алгебраїчні властивості зазначених класів ГЧС, що дозволило отримати частинні вирази для основних характеристик цих ГЧС шляхом підстановки конкретних значень параметрів математичного моделювання задач цифрової обробки сигналів.

5. Розвинено метод асоційованої системи лінійних диференціальних рівнянь для побудови представлень експоненціальної, тригонометричних та гіперболічних функцій в синтезованих класах ГЧС, що дозволяє зменшити час обчислення експоненти в порівнянні з прямими методами, до 300 разів, а тригонометричних та гіперболічних функцій – до 100 разів, в залежності від вимірності ГЧС та її властивостей.
6. Вперше запропоновано метод ізоморфного переходу від ГЧС із сильнозаповненою таблицею множення до ізоморфної їй ГЧС, таблиця множення базисних елементів якої є слабозаповненою, що дає можливість зменшити кількість дійсних операцій при виконанні гіперкомплексних нелінійних операцій від  $n/2$  до  $n$  разів ( $n$  - вимірність ГЧС) за рахунок збільшення кількості нульових множників.
7. Вперше запропоновано принципи використання ГЧС для синтезу схем обчислень компонентів лінійної згортки масивів різних вимірностей. Використання гіперкомплексного представлення даних в таких схемах дозволяє зменшити кількість операцій порівняно з існуючими моделями за рахунок представлення масивів даних в ізоморфних гіперкомплексних числових системах, отриманих множенням вимірності системи подвійних чисел і ортогональних подвійних чисел, що спрощує перехід від однієї системи до іншої.
8. Розроблено комплекс алгоритмічних та програмних засобів для числових та аналітичних обчислень в різних ГЧС, в тому числі і в побудованих класах ГЧС, використання якого значно спрощує процес розробки математичних моделей з використанням ГЧС.
9. Розроблено за допомогою комплексу числових та аналітичних обчислень в різних ГЧС математичні моделі обчислення компонент лінійної згортки масивів різних вимірностей, використання в яких гіперкомплексного представлення даних дозволяє зменшити кількість операцій порівняно з існуючими моделями приблизно на 30%.

10. Показано, що представлення квадриплексних коефіцієнтів при математичному моделюванні рекурсивного цифрового фільтра за допомогою розробленого програмного комплексу гіперкомплексних обчислень дозволяє зменшити об'єм програми на 21%, в порівнянні з програмним кодом у якому відсутні підключення процедур комплексу.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. История математики с древнейших времён до начала Нового времени: у 3 т. / за ред. А. П. Юшкевич. – Москва: Наука. – 1970. – Т.1. – 352 с.
2. Калиновский Я. А. Гиперкомплексные числовые системы четвертой размерности / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало. – Київ: ІПРІ НАН України. – 2017. – 126 с.
3. Ван дер Варден, Пробуждающаяся наука. Математика древнего Вавилона и Греции / Ван дер Варден. – Москва: Наука. – 1959. – С.85.
4. Смышляев В.К. О математике и математиках / В.К. Смышляев. – Москва: Наука. – 1977. – 224с.
5. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики / Д.Я. Стройк. – Москва: Наука. – 1984. – 285 с.
6. Лейбниц Г. Рассуждения о метафизике. Соч. в 4-х томах / Г. Лейбниц. – Москва: Просвещение. – Т.1. –1982.
7. Кантор И.Л. Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. – Москва: Наука. – 1973. – 144с.
8. Grassman H. Gesammelte mathematische und physikalische werke / H. Grassman. – Bd.1-3. – Leipzig. – 1894-1911.
9. Пуанкаре А. Избранные труды: в 3 т. / А. Пуанкаре. – Москва: Наука. – Т.1. – 1971.
10. Полак Л. С. Уильям Гамильтон / Л. С. Полак. – Москва: Наука. – 1993. – С.1805 – 1865.
11. Study E. Uber Systeme von Complexen Zahlen. *Nachrichten von der K.G.D.M. Gottingen.* – 1889. – № 9. – P. 237 – 268.
12. Синьков М. В. Розвиток теорії гіперкомплексного представлення інформації та її застосування / М.В. Синьков, Ю.Є. Боярінова, Я.О. Каліновський, Т.Г. Постнікова, Т.В. Синькова, О.В. Федоренко // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2007. — Т. 9, № 4. — С. 28–48.



13. *Rochon D., Shapiro M.* On Algebraic Properties of Bicomplex and Hyperbolic Numbers // *Anal. Univ. Oradea, fasc. Math.* — 2004. — N 11. — P.71-110.
14. Туренко А.С. Дослідження властивостей одного узагальнення гіперкомплексної системи кватерніонів / А.С. Туренко // *Реєстрація, зберігання і оброб. даних.* — 2014. — Т. 16, № 1. — С. 19–27.
15. Clifford Type Algebra Characteristics Investigation [Електронний ресурс] / Y.O. Kalinovsky, D.V. Lande, Y.E. Boyarinova, A.S. Turenko // Режим доступу: <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1406/1406.3461.pdf>. - Дата розміщення: 13.06.2014.
16. Туренко А. С. Дослідження властивостей антикватерніонної гіперкомплексної числової системи / А. С. Туренко // *Матеріали щорічної підсумкової конференції ІПРІ НАН України.* – Київ, ІПРІ НАНУ. – 2014. – С. 102 – 103.
17. Туренко А. С. Дослідження обчислювальних властивостей системи антикватерніонів / А. С. Туренко // *Реєстрація, зберігання і обробка даних.* – 2014. – Т. 16, № 2. – С. 62 – 73.
18. Dieterich E. Zur Klassifikation Vierdimensionaler Reeller Divisionsalgebren / E. Dieterich // *Math. Nachr.* – 1998. – No. 194. – P. 13–22.
19. Nobauer C. The Number of Isomorphism Classes of d.g. Near-Rings on the Generalized Quaternion Groups // *Proc. of the Conf. on Near-Rings and Near-Fields.* — Stellenbosch (South Africa). — 2001. — P. 133–137.
20. Калиновский Я. А. Исследование классов изоморфизма неканонических гиперкомплексных числовых систем размерности 2 / Я. А. Калиновский, Я. В. Хицко, А. С. Туренко // *Системный анализ и информационные технологии: материалы 16-й Международной научно-практической конференции SAIT 2014.* – К.: УНК «ИПСА» КПИ им. Игоря Сикорского, 2014. – С. 93.
21. Generalized quaternions and their relations with Grassmann-Clifford procedure of doubling [Електронний ресурс] / Y.O. Kalinovsky, Y.E. Boyarinova, A.S. Turenko, Y.V. Khitsko // Режим доступу:

<http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1412/1412.8185.pdf>. - Дата розміщення:  
28.12.2014.

22. Каліновський Я. О. Обчислювальні властивості одного класу некомутативних гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності / Я. О. Каліновський, Ю. Є. Боярінова, А. С. Туренко // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2014. – Т. 16, № 3. – С. 12 – 24.
23. Калиновский Я. А. Построение высокоразмерных изоморфных гиперкомплексных числовых систем для повышения эффективности вычислительных процессов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Т. В. Синькова, А. С. Сукало // Электронное моделирование. – 2016. – Т. 38, № 6. – С. 67 – 84.
24. Синьков М.В. Построение некоторых функций в гиперкомплексной числовой системе 4-го порядка / М.В. Синьков, Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова, А.В. Федоренко // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2006. — Т. 8, № 1. — С. 9–16.
25. Scheicher K. Elementary Inequalities in Hypercomplex Numbers Anzeiger / K. Scheicher, R.F. Tichy, K.W. Tomantschger // Abt. II. — 1997. — No 134. — P. 3–10.
26. Синьков М.В. Биплексные числовые системы и функции в них / М.В. Синьков, Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Т.В. Синькова // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2005. – Т. 7, № 4. – С. 21 – 29.
27. Калиновский Я. А. Математическое моделирование представлений экспоненциальной и логарифмической функций в гиперкомплексной числовой системе обобщенных кватернионов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2015. – Т. 17, № 4. – С. 11 – 20.
28. Калиновский Я. А. Разработка представлений тригонометрических функций в числовой системе обобщенных кватернионов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Т. В. Синькова, А. С. Сукало // Электронное моделирование. – 2016. – Т. 38, № 3. – С. 23 – 32.

29. Калиновский Я. А. Свойства обобщенных кватернионов и их связь с процедурой удвоения Грассмана-Клиффорда / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Туренко, Я. В. Хицко // Электронное моделирование. – 2015. – Т. 37, № 2. – С. 17 – 26.
30. Калиновский Я. А. Исследование алгебраических и функциональных свойств обобщенных гиперкомплексных систем четвертой размерности / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2017. – Т. 19, № 1. – С. 22 – 33.
31. Computer modeling of exponential and logarithmic functions of generalized quaternions in symbolic computation system [Электронный ресурс] / Y.O. Kalinovsky, D.V. Lande, Y.E. Boyarinova, A.S. Sukalo // Режим доступа: <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1611/1611.06867.pdf>. - Дата розміщення: 17.10.2016.
32. Синьков М. В. О дифференциальных уравнениях, определяющих функции гиперкомплексного переменного / М.В. Синьков, Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова, А.В. Федоренко // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2006. — Т. 8, № 3. — С. 20–24.
33. Стельмашук Н.Т. Об интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений с F-производными / Н.Т. Стельмашук // Дифференциальные уравнения. — 1987. — № 2. — С. 357–358.
34. Синьков М.В. Развитие исследований алгоритмов решения линейных дифференциальных уравнений от гиперкомплексного переменного порядка выше первого / М.В. Синьков, Т.В. Синькова, Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2004. — Т. 6, № 2. — С. 19–27.
35. Chaitin-Chatelin F. Computation with Hypercomplex Numbers / F. Chaitin-Chatelin, T. Meskauskas, A. Zaoui // GERFACS Technical Report TR/PA/00/69 // On line: <http://www.gerfacs.fr> (2000).
36. Синьков М.В. Алгоритмічно-програмний інструментарій аналітичних обчислень над гіперкомплексними числами в системі комп'ютерної

- математики MAPLE / М.В. Синьков, Ю.Е. Бояринова, Я.А. Калиновский, Т.Г. Постнікова, Т.В. Синькова // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2005. — Т. 7, № 2. — С. 18–24.
37. Синьков М.В. Модульні операції над гіперкомплексними числами в системі комп'ютерної математики MAPLE / М.В. Синьков, Ю.Е. Бояринова, Я.А. Калиновский, Т.Г. Постнікова, Т.В. Синькова // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2005. — Т. 7, № 3. — С. 55–62.
38. Туренко А. С. Програмно-алгоритмічні засоби дослідження обчислювальних властивостей гіперкомплексних чисел в середовищі символьних обчислень Maple / А. С. Туренко // Матеріали щорічної підсумкової конференції ІПРІ НАН України ( 26 – 27 травня 2015 р.). – Київ, ІПРІ НАНУ. – 2015. – С. 110 – 112.
39. Калиновский Я. А. Обработка гиперкомплексных данных с использованием пакета символьных вычислений в среде Maple / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Глобальні та регіональні проблеми інформатизації в суспільстві і природокористуванні '2017: матеріали 5-ї Міжнародної науково-технічної конференції НУБіП України (22 – 23 червня 2017 р.). – К.: Компринт. – 2017. – С. 63 – 65.
40. Калиновский Я. А. Программный комплекс для гиперкомплексных вычислений / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Т. В. Синькова, А. С. Сукало // Электронное моделирование. – 2017. – Т. 39, № 5. – С. 81 – 96.
41. Калиновский Я. А. Система гиперкомплексных операций в Maple / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Я. В. Хицко, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2017. – Т. 19, № 2. – С. 11 – 23.
42. Бранец В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. – Москва: Наука. – 1973. – 319 с.
43. Про автоматизоване проектування системи програмно-апаратних засобів на базі гіперкомплексних чисел для задач орієнтації твердого тіла. Частина 1 / М.Ф. Будьонний, Я.О. Каліновський, А.П. Панов, А.І. Петренко, Т.Г.

- Постнікова, М.В. Синьков, Т.В. Синькова // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2001. — Т. 3, № 4. — С. 73–83.
44. Ignagni M.B. Optimal Strapdown Attitude Integration Algorithms // AIAA J. of Guidance, Control and Dynamics. —1990. — Vol. 13, N 2. — P. 363–369.
45. Davailus G., Newman B. The Application of Quaternion Algebra to Gyroscopic Motion, Navigation, and Guidance URL: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2005-5945>. - 2005.
46. Mukundan R. Quaternions: From Classical Mechanics to Computer Graphics, and Beyond // Proc. of the 7th Asian Technology Conf. in Mathematics. — 2002. — P. 97–106.
47. Samareh J. A. Application of Quaternions for Mesh Deformation // 8-th International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations. — Honolulu. — 2002.
48. Hestenes D. Modeling Elastically Coupled Rigid Bodies with Geometric Algebra // Hestenes D., Fasse E. / Preprint. — 2001. — P.13. - On line: <http://modelingnts.la.asu.edu/pdf/ElasticModeling.pdf>.
49. Felsberg M. Non-commutative Hypercomplex Fourier Transforms of multidimensional Signals / Felsberg M., Bulow T., Sommer G. // On line: [www.isy.liu.se/~mfe/publications.html](http://www.isy.liu.se/~mfe/publications.html). - 2001.
50. Bas P. Color Image Watermarking using Quaternion Fourier Transform. / Bas P., Le Bihan N., Chassery J.-M. // URL: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00166555/document>.
51. Sangwine S.J. Colour in image processing // Electronics & Communication Engineering Jour. —2000. — Vol. 12, No. 5. P. — 211 — 219.
52. Алексейчук А.Н. Модулярная схема разделения секрета над кольцом целых гауссовых чисел / А.Н. Алексейчук, Ю.Е. Бояринова // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2007. — Т. 9, № 1. — С. 87–99.
53. Калиновский Я. А. Применение обобщенных кватернионов в цифровой подписи / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Системный анализ и информационные технологии: материалы 18-й Международной

- научно-практической конференции SAIT 2016. – К.: УНК «ИПСА» КПИ им. Игоря Сикорского, 2016. – С. 327.
54. Калиновский Я. А. Построение алгоритма цифровой подписи с использованием функций от обобщенных кватернионов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2015. – Т. 17, № 3. – С. 48 – 55.
  55. Coppersmith D. Weakness in Quaternion Signatures // J. Cryptology. — 2000. — P. OF1–OF9.
  56. Brodsky V. Dual Numbers Representation of rigid body dynamics / Brodsky V., Shoham M. // J. of Mechanisms and Machine Theory. — 1999. — Vol. 34, N 5. — P. 693–718.
  57. Bayro-Corrochano E. Motor Algebra Approach for Visually Guided Robotics / Bayro-Corrochano E. // Pattern Recognition. — 2002. — Vol. 35. — P. 279–294.
  58. Ning Ying, Use of Dual Euler Angles to Describe General Spatial Movements of Human Joints / Ning Ying, Wangdo Kim // URL: [asme.pinetec.com/bio2001/data/pdfs/a0014419.pdf](http://asme.pinetec.com/bio2001/data/pdfs/a0014419.pdf).
  59. Фурман Я.А., Кревецкий А.В., Роженцов А.А., Хафизов Р.Г., Леухин А.Н., Егомин Л.А. Комплекснозначные и гиперкомплексные системы в задачах обработки многомерных сигналов / Я.А. Фурман, А.В. Кревецкий, А.А. Роженцов, Р.Г. Хафизов, А.Н. Леухин, Л.А. Егомин. – М.:Физматлит. - 2003. – 456с.
  60. Чернов В.М. Ассоциативно-коммутативные гиперкомплексные алгебры в задачах цифровой обработки многомерных сигналов / В.М. Чернов // URL: [www.hypercomplex.ru/worksforprise.html](http://www.hypercomplex.ru/worksforprise.html).
  61. Синьков М.В. Непозиционные представления в многомерных числовых системах / М.В. Синьков, Н.М. Губарени. — К.: Наукова думка. - 1979. —140с.

62. Синьков М.В. Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / М.В. Синьков, Ю.Е. Бояринова, Я.А. Калиновский. — К.: Инфодрук, 2010. — 388с.
63. Сильвестров В.В. Системы чисел / В.В. Сильвестров // Соросовский образовательный журнал. — 1998. — №8. — С. 121-127.
64. Калиновский Я.А. Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вычислений / Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова. — К.: Инфодрук, 2012. — 183с.
65. Computing Characteristics of One Class of Non-commutative Hypercomplex Number Systems of 4-dimension [Электронный ресурс] / Y.O. Kalinovsky, D.V. Lande, Y.E. Boyarinoва, A.S. Turenko // <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1409/1409.3193.pdf>. - Дата розміщення: 09.09.2014.
66. Каратаев Е. А. Элементарные функции матриц / Е. А. Каратаев. — М.: Фантазия. — 2002. — 40 с.
67. Калиновський Я. О.. Методи комп'ютерного моделювання та обчислень з використанням гіперкомплексних числових систем :дис. ... д-ра техн. наук: 01.05.02; Ін-т пробл. реєстрації інформації НАН України. — Київ. — 2007. — 417 с.
68. Калиновский Я.А. Методы построения нелинейностей в расширениях комплексных чисел / Я.А. Калиновский, Н.В. Роечко, М.В. Синьков // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 4. — С. 178–181.
69. Catoni F. Hypercomplex Numbers, Functions of Hypercomplex Variable and Physical Fields (RT/ERG/94/18). URL: <http://www.studi131.casaccia.enea.it/enea/it/rt/exg9418.html>.
70. Калиновский Я. А. Исследование вычислительных операций в гиперкомплексной числовой системе антикватернионов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Я. В. Хицко, А. С. Туренко // Электронное моделирование. — 2014. — Т. 36, № 5. — С. 49 – 65.

71. Калиновский Я. А. Обобщение кватернионов вращения и связь с процедурой удвоения Грассмана-Клиффорда / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Туренко // Системный анализ и информационные технологии: материалы 17-й Международной научно-практической конференции SAIT 2015. – К.: УНК «ИПСА» КПИ им. Игоря Сикорского, 2015. – С. 50.
72. Калиновский Я. А. Исследование свойств обобщенных гиперкомплексных числовых систем четвертой размерности, полученных процедурой удвоения Грассмана-Клиффорда / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2016. – Т. 18, № 3. – С. 3 – 11.
73. Бояринова Ю.Е. Неканонические гиперкомплексные числовые системы размерности 2 и их изоморфизмы / Ю.Е.Бояринова // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2011. — Т. 13, № 1. — с. 29–38.
74. Godel S. An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation / S. Godel // Rev. Mod. Phys. – 1949. — Vol. 21. — No. 3. – P. 447-450.
75. Szeto G. On generalized quaternion algebras / G. Szeto // Internat. J. Math. And Math. Sci. – 1980. – Vol. 3, No. 2. – P. 237-245.
76. Cai Yong-yu On the First-degree Algebraic Equation of the Generalized Quaternion / Cai Yong-yu // Chinese Quarterly Journal of Mathematics. – 2002. – Vol. 17, No. 2. – P. 59-64.
77. Flaut C. An efficient method for solving equations in generalized quaternion and octonion algebras. [Электронный ресурс] / C. Flaut, V. Shpakivskyi. — Режим доступа : <http://arxiv.org/pdf/1405.5652.pdf>. 2014.
78. Jafari M. Generalized quaternion and rotation in 3-space  $E_{\alpha\beta}^3$  / M. Jafari, Y. Yayli // Department of Mathematics, Faculty of Science Ankara University, 06100 Ankara, Turkey. - 11 p.
79. Mamagami A. B. On Properties of Generalized Quaternion Algebra / A. B. Mamagami, M. Jafari // Journal of Novel Applied Sciences. – 2013. – Vol 2, No. 12. – P. 683-689.



80. Синьков М.В. Матричные представления изоморфных гиперкомплексных числовых систем / М.В. Синьков, Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2010. — Т. 12, № 4. — С. 43–53.
81. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре / А.Г. Курош. - М.: Наука. - 1973.- 400с.
82. Клипков С.И. Обобщенный анализ матричных представлений ассоциативных гиперкомплексных числовых систем, используемых в задачах энергетики / И.С. Клипков // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2014. — Т. 16, № 2. — С. 28–41.
83. Alagos Ya. Split Quaternion Matrices / Ya. Alagos, K. At H. Oral, S. Yuce // Miscolc Mathematical Notes. – 2012. – Vol. 13, No. 2, 223–232 p.
84. Janovska D. Linear equations and the Kronecker product in coquaternions / D. Janovska, G. Opfer // Mitt. Math. Ges. Hamburg. – 2013. Vol. 33. – P. 181–196.
85. Mamagami A. B. Some Notes on Matrix of Generalized Quaternion / A. B. Mamagami, M. Jafari // International Research Journal of Applied and Basic Sciences. – 2013. – Vol 7, No. 14. – P. 1164-1171.
86. Flaut C. Some equations in algebras obtained by the Cayley-Dickson process / C. Flaut // An. St. Univ. Ovidius Constanta. – 2001. – Vol. 9, No. 2. – P. 45-68.
87. Каліновський Я. О. Синтез матричних представлень узагальнених кватерніонів / Я. О. Каліновський, Ю. Є. Боярінова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2015. – Т. 17, № 2. – С. 14 – 29.
88. Brackx F. The Exponential Function of a Quaternion Variable / F. Brackx // Applicable Analysis.-1979.- Vol.19/ - P. 265-276.
89. Калиновский Я.А. Изоморфизм коммутативных гиперкомплексных числовых систем и представления экспоненциальных функций в них / Я.А. Калиновский, Т.В. Синькова // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2012. — Т. 14, № 1. — С. 10–24.
90. Каліновський Я. О. Побудова представлень логарифмічної функції в одному класі комутативних ГЧС четвертої вимірності / Я. О. Каліновський, Ю. Є.

- Боярінова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2016. – Т. 18, № 4. – С. 12 – 23.
91. Калиновский Я. А. Разработка представлений гиперболических и тригонометрических нелинейностей в системе обобщенных кватернионов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Т. В. Синькова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2016. – Т. 18, № 1. – С. 14 – 22.
  92. Дьяконов В.П. Maple 9 в математике, физике и образовании – М.: Солон - 2004. – 688 с.
  93. Дьяконов В. П. Maple 6 Учебный курс. — СПб.: «Питер», 2001. — С. 608.
  94. Голоскоков Д. П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. — Москва: Питер. — 2004. — 544с.
  95. Калиновский Я. А. Пакет гиперкомплексных символьных вычислений в среде Maple / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало, Я. В. Хицко // Системный анализ и информационные технологии: материалы 19-й Международной научно-практической конференции SAIT 2017. – К.: УНК «ИПСА» КПИ им. Игоря Сикорского, 2017. – С. 232.
  96. Сукало А. С. Підсистема визначення алгебраїчних характеристик гіперкомплексних даних спеціалізованої бібліотеки процедур в середовищі символьних обчислень Maple / А. С. Сукало // Матеріали щорічної підсумкової конференції ІПРІ НАН України. – Київ, ІПРІ НАНУ. – 2017. – С. 51 – 52.
  97. Каліновський Я. О. Моделювання практичних задач за допомогою програмного комплексу гіперкомплексних обчислень / Я.О. Каліновський, А. С. Сукало // Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій: матеріали Міжнародної наукової конференції ( 2 – 4 березня 2018 р.). – Рівне, 2018. – С. 49 – 51.
  98. The basic principles and the structure and algorithmically software of computing by hypercomplex number [Електронний ресурс] / Y.O. Kalinovsky, Y.E. Boyarinova, A.S. Sukalo, Y.V. Khitsko // Режим доступу:

<https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1708/1708.04021.pdf>. - Дата розміщення:  
14.08.2017.

99. Кострикин А.И. Введение в алгебру / А.И. Кострикин. – М.: Наука, 1977. – 496 с.
100. Мельников О.В. Общая алгебра / О.В. Мельников, В.Н. Ремесленников, В.А. Романьков, Л.А. Скорняков, И.П. Шестков. - М.: Наука, 1991. – Т.2. – 480 с.
101. Онищенко С. М. Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы / С.М. Онищенко. – К.: Наукова думка, 1983. – 208 с.
102. Catoni F. Two-dimensional hypercomplex Numbers and related Trigonometries and Geometries / Catoni F., Cannata R., Catoni V., Zampetti P. // Advanced in Applied Clifford Algebras. – 2004. – Vol. 14. – No. 1. – P.47-68.
103. Березин А.В. Кватернионы в релятивистской физике / А.В. Березин, Ю.А. Курочкин, Е.А. Толкачев. – Минск: Едиториал УРСС. - 2003. – 200 с.
104. Диментберг Ф.М. Винтовое исчисление и его проложения в механике / Ф.М. Диментберг/ – М.:Наука. - 1965.
105. Лурье А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. - М.: Физматгиз. – 1961.
106. Дрозд Ю.А. Конечномерные алгебры / Ю.А. Дрозд, В.В. Кириченко. -К.-Вища школа, 1980.-192с.
107. *H. Toyoshima, Computationally Efficient Implementation of Hypercomplex Digital Filters / IEICE Trans. Fundamentals. — E85—A. 8. — pp.1870—1876. - Aug. 2002.*
108. Schutte H.D. Digital filter zur Verarbeitung komplexer und hypercomplexer Signale / H.D. Schutte // Dissertation. Paderborn, 1991. — 100 p.
109. Schulz D. Widely Linear SIMO Filtering for Hypercomplex Numbers / D. Schulz, J. Seitz, J.P. LusLustosadaCosta // IEEE Information Theory Workshop. – 2011. – P. 390-394.
110. Калиновский Я.А. Оптимизация суммарной параметрической чувствительности реверсивных цифровых фильтров с коэффициентами в неканонических гиперкомплексных числовых системах / Я.А.Калиновский,

- Ю.Е.Бояринова, Хицко Я.В // Электронное моделирование. — 2015. — Т.37, №5. — с. 117—126.
- 111.Калиновский Я.А. Эффективные алгоритмы решения уравнений изоморфизма гиперкомплексных числовых систем с помощью представлений экспонент/ Я.А.Калиновский// Электронное моделирование. — 2017. — Т.39, №1. — с. 75—90.
112. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов / Р. Блейхут. — М.:Мир, 1989. — 449 с.
- 113.Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток /Г.Нуссбаумер.-М.:Радио и связь. - 1985. - 248с.
- 114.Калиновский Я.А. Гиперкомплексные числовые системы и быстрые алгоритмы цифровой обработки информации / Я.А.Калиновский, Д.В.Ландэ, Ю.Е.Бояринова, Я.В.Хицко – К.: ИПРИ НАНУ, 2014. — 130с.
- 115.Калиновский Я.А. Структура гиперкомплексного метода быстрого вычисления линейной свертки дискретных сигналов. / Я.А.Калиновский // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2013. – Т. 15, № 1.– с.31—44.
- 116.Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов / А.Б.Сергиенко. — СПб.:Питер. — 2003. — 604с.
- 117.Даджион Д. Цифровая обработка многомерных сигналов. / Д.Даджион, Р.Мерсеро. – М.:Мир. - 1988. - 488 с.
- 118.Калиновский Я.А. Гиперкомплексные числовые системы и быстрые алгоритмы цифровой обработки информации / Я.А. Калиновский, Д.В. Ландэ, Ю.Е. Бояринова, Я.В. Хицко — К. : Інфодрук – 2014. — 130 с.
- 119.Ueda K. Digital Filtrs with hypercomplex Coefficients / Ueda K., Takahashi S. // ISCAP. – 1993. – P. 479-482.
- 120.Синьков М.В. Новые применения гиперкомплексных квадриплексных чисел. Часть 2 / М.В. Синьков, П. В. Трубников, Я. А. Калиновский, Т. В. Синькова, Ю. Е. Бояринова // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2003. — Т. 5, № 3. — С. 4–7.

121. Kalinovsky Ya.A. Principles of constructing algorithms for processing digital signals using hypercomplex number systems / Ya.A. Kalinovsky, Yu.E. Boyarinova, Ya.V. Khitsko, A.S. Sukalo // 20th International Conference on System Analysis and Information Technology( SAIT 2018). – K.: Institute for Applied System Analysis of National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, 2018. – P. 194–195.

## Додаток А. Довідка про впровадження результатів дисертаційного дослідження

Міністерство освіти і науки України  
**ЖИТОМИРСЬКИЙ  
 ДЕРЖАВНИЙ  
 УНІВЕРСИТЕТ  
 ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА**  
 Вул. В. Бердичівська, 40,  
 м. Житомир, 10008  
 телефон /факс (0412) 43-14-17  
 E-mail: [zu@zu.edu.ua](mailto:zu@zu.edu.ua) Web: [www.zu.edu.ua](http://www.zu.edu.ua)  
 код ЄДРПОУ 02125208



Ministry of Education and Science of Ukraine  
**Zhytomyr Ivan Franko State University**  
 40, Velyka Berdychivska Str.,  
 City of Zhytomyr Ukraine, 10008  
 Tel/Fax (0412) 43-14-17  
 E-mail: [zu@zu.edu.ua](mailto:zu@zu.edu.ua) Web: [www.zu.edu.ua](http://www.zu.edu.ua)  
 USREOU 02125208

Від 21.08.2019 № 1/936  
 На № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_

### ДОВІДКА

**про впровадження результатів дисертаційного дослідження  
 Сукало Аліни Сергіївни  
 у навчальний процес  
 Житомирського державного університету імені Івана Франка**

Цією довідкою засвідчується, що результати дисертаційного дослідження Сукало Аліни Сергіївни на тему: "Методи моделювання задач цифрової обробки сигналів засобами гіперкомплексних обчислень" використовуються викладачами кафедри математичного аналізу Житомирського державного університету імені Івана Франка при підготовці та викладанні навчального курсу "Елементи гіперкомплексного аналізу" для фахівців ступеня вищої освіти «магістр» спеціальності «014.04 Середня освіта (Математика)».

Проректор з навчальних робіт  
 кандидат біологічних наук,  
 доцент



Н. М. Корнійчук

**Додаток Б. Таблиці Келі, правила множення, псевдонорми та ознаки  
дільників нуля систем некомутативного класу ГЧС**

Таблиці Келі некомутативних гіперкомплексних числових систем 4-ї  
вимірності

№	Позначення	Таблиця Келі																									
1.	$H = D_n(C, C, 4)$	<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>H</math></th> <th><math>e_1</math></th> <th><math>e_2</math></th> <th><math>e_3</math></th> <th><math>e_4</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>e_1</math></td> <td><math>e_1</math></td> <td><math>e_2</math></td> <td><math>e_3</math></td> <td><math>e_4</math></td> </tr> <tr> <td><math>e_2</math></td> <td><math>e_2</math></td> <td><math>-e_1</math></td> <td><math>e_4</math></td> <td><math>-e_3</math></td> </tr> <tr> <td><math>e_3</math></td> <td><math>e_3</math></td> <td><math>-e_4</math></td> <td><math>-e_1</math></td> <td><math>e_2</math></td> </tr> <tr> <td><math>e_4</math></td> <td><math>e_4</math></td> <td><math>e_3</math></td> <td><math>-e_2</math></td> <td><math>-e_1</math></td> </tr> </tbody> </table>	$H$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_2$	$e_2$	$-e_1$	$e_4$	$-e_3$	$e_3$	$e_3$	$-e_4$	$-e_1$	$e_2$	$e_4$	$e_4$	$e_3$	$-e_2$	$-e_1$
$H$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$																							
$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$																							
$e_2$	$e_2$	$-e_1$	$e_4$	$-e_3$																							
$e_3$	$e_3$	$-e_4$	$-e_1$	$e_2$																							
$e_4$	$e_4$	$e_3$	$-e_2$	$-e_1$																							
2.	$AH = D_n(C, W, 4)$	<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>AH</math></th> <th><math>e_1</math></th> <th><math>e_2</math></th> <th><math>e_3</math></th> <th><math>e_4</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>e_1</math></td> <td><math>e_1</math></td> <td><math>e_2</math></td> <td><math>e_3</math></td> <td><math>e_4</math></td> </tr> <tr> <td><math>e_2</math></td> <td><math>e_2</math></td> <td><math>-e_1</math></td> <td><math>e_4</math></td> <td><math>-e_3</math></td> </tr> <tr> <td><math>e_3</math></td> <td><math>e_3</math></td> <td><math>-e_4</math></td> <td><math>e_1</math></td> <td><math>-e_2</math></td> </tr> <tr> <td><math>e_4</math></td> <td><math>e_4</math></td> <td><math>e_3</math></td> <td><math>e_2</math></td> <td><math>e_1</math></td> </tr> </tbody> </table>	$AH$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_2$	$e_2$	$-e_1$	$e_4$	$-e_3$	$e_3$	$e_3$	$-e_4$	$e_1$	$-e_2$	$e_4$	$e_4$	$e_3$	$e_2$	$e_1$
$AH$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$																							
$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$																							
$e_2$	$e_2$	$-e_1$	$e_4$	$-e_3$																							
$e_3$	$e_3$	$-e_4$	$e_1$	$-e_2$																							
$e_4$	$e_4$	$e_3$	$e_2$	$e_1$																							
3.	$D_n(C, D, 4)$	<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>D_n(C, D, 4)</math></th> <th><math>e_1</math></th> <th><math>e_2</math></th> <th><math>e_3</math></th> <th><math>e_4</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>e_1</math></td> <td><math>e_1</math></td> <td><math>e_2</math></td> <td><math>e_3</math></td> <td><math>e_4</math></td> </tr> <tr> <td><math>e_2</math></td> <td><math>e_2</math></td> <td><math>-e_1</math></td> <td><math>e_4</math></td> <td><math>-e_3</math></td> </tr> <tr> <td><math>e_3</math></td> <td><math>e_3</math></td> <td><math>-e_4</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>0</math></td> </tr> <tr> <td><math>e_4</math></td> <td><math>e_4</math></td> <td><math>e_3</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>0</math></td> </tr> </tbody> </table>	$D_n(C, D, 4)$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_2$	$e_2$	$-e_1$	$e_4$	$-e_3$	$e_3$	$e_3$	$-e_4$	$0$	$0$	$e_4$	$e_4$	$e_3$	$0$	$0$
$D_n(C, D, 4)$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$																							
$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$																							
$e_2$	$e_2$	$-e_1$	$e_4$	$-e_3$																							
$e_3$	$e_3$	$-e_4$	$0$	$0$																							
$e_4$	$e_4$	$e_3$	$0$	$0$																							
4.	$D_n(W, W, 4)$	<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>D_n(W, W, 4)</math></th> <th><math>e_1</math></th> <th><math>e_2</math></th> <th><math>e_3</math></th> <th><math>e_4</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>e_1</math></td> <td><math>e_1</math></td> <td><math>e_2</math></td> <td><math>e_3</math></td> <td><math>e_4</math></td> </tr> <tr> <td><math>e_2</math></td> <td><math>e_2</math></td> <td><math>e_1</math></td> <td><math>e_4</math></td> <td><math>e_3</math></td> </tr> <tr> <td><math>e_3</math></td> <td><math>e_3</math></td> <td><math>-e_4</math></td> <td><math>-e_1</math></td> <td><math>e_2</math></td> </tr> <tr> <td><math>e_4</math></td> <td><math>e_4</math></td> <td><math>-e_3</math></td> <td><math>-e_2</math></td> <td><math>e_1</math></td> </tr> </tbody> </table>	$D_n(W, W, 4)$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_2$	$e_2$	$e_1$	$e_4$	$e_3$	$e_3$	$e_3$	$-e_4$	$-e_1$	$e_2$	$e_4$	$e_4$	$-e_3$	$-e_2$	$e_1$
$D_n(W, W, 4)$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$																							
$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$																							
$e_2$	$e_2$	$e_1$	$e_4$	$e_3$																							
$e_3$	$e_3$	$-e_4$	$-e_1$	$e_2$																							
$e_4$	$e_4$	$-e_3$	$-e_2$	$e_1$																							
5.	$D_n(D, D, 4)$	<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>D_n(D, D, 4)</math></th> <th><math>e_1</math></th> <th><math>e_2</math></th> <th><math>e_3</math></th> <th><math>e_4</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>e_1</math></td> <td><math>e_1</math></td> <td><math>e_2</math></td> <td><math>e_3</math></td> <td><math>e_4</math></td> </tr> <tr> <td><math>e_2</math></td> <td><math>e_2</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>e_4</math></td> <td><math>0</math></td> </tr> <tr> <td><math>e_3</math></td> <td><math>e_3</math></td> <td><math>-e_4</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>0</math></td> </tr> <tr> <td><math>e_4</math></td> <td><math>e_4</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>0</math></td> </tr> </tbody> </table>	$D_n(D, D, 4)$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_2$	$e_2$	$0$	$e_4$	$0$	$e_3$	$e_3$	$-e_4$	$0$	$0$	$e_4$	$e_4$	$0$	$0$	$0$
$D_n(D, D, 4)$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$																							
$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$																							
$e_2$	$e_2$	$0$	$e_4$	$0$																							
$e_3$	$e_3$	$-e_4$	$0$	$0$																							
$e_4$	$e_4$	$0$	$0$	$0$																							
6.	$D_n(W, D, 4)$	<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>D_n(W, D, 4)</math></th> <th><math>e_1</math></th> <th><math>e_2</math></th> <th><math>e_3</math></th> <th><math>e_4</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>e_1</math></td> <td><math>e_1</math></td> <td><math>e_2</math></td> <td><math>e_3</math></td> <td><math>e_4</math></td> </tr> <tr> <td><math>e_2</math></td> <td><math>e_2</math></td> <td><math>e_1</math></td> <td><math>e_4</math></td> <td><math>e_3</math></td> </tr> <tr> <td><math>e_3</math></td> <td><math>e_3</math></td> <td><math>-e_4</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>0</math></td> </tr> <tr> <td><math>e_4</math></td> <td><math>e_4</math></td> <td><math>-e_3</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>0</math></td> </tr> </tbody> </table>	$D_n(W, D, 4)$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_2$	$e_2$	$e_1$	$e_4$	$e_3$	$e_3$	$e_3$	$-e_4$	$0$	$0$	$e_4$	$e_4$	$-e_3$	$0$	$0$
$D_n(W, D, 4)$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$																							
$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$																							
$e_2$	$e_2$	$e_1$	$e_4$	$e_3$																							
$e_3$	$e_3$	$-e_4$	$0$	$0$																							
$e_4$	$e_4$	$-e_3$	$0$	$0$																							

## Правила множення в некомутативному класі ГЧС

№	ГЧС	Правило множення
1.	$H$	$w_1 w_2 = (a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4) e_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3) e_2 +$ $+ (a_1 b_3 + a_3 b_1 - a_2 b_4 + a_4 b_2) e_3 + (a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2) e_4$
2.	$AH$	$w_1 w_2 = (a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4) e_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_3 b_4 + a_4 b_3) e_2 +$ $+ (a_1 b_3 + a_3 b_1 - a_2 b_4 + a_4 b_2) e_3 + (a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2) e_4$
3.	$D_n(C, D, 4)$	$w_1 w_2 = (a_1 b_1 - a_2 b_2) e_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) e_2 +$ $+ (a_1 b_3 + a_3 b_1 - a_2 b_4 + a_4 b_2) e_3 + (a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2) e_4$
4.	$D_n(W, W, 4)$	$w_1 w_2 = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4) e_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_3 b_4 + a_4 b_3) e_2 +$ $+ (a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_2 b_4 - a_4 b_2) e_3 + (a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2) e_4$
5.	$D_n(D, D, 4)$	$w_1 w_2 = a_1 b_1 e_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) e_2 +$ $+ (a_1 b_3 + a_3 b_1) e_3 + (a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2) e_4$
6.	$D_n(W, D, 4)$	$w_1 w_2 = (a_1 b_1 + a_2 b_2) e_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) e_2 +$ $+ (a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_2 b_4 - a_4 b_2) e_3 + (a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2) e_4$

## Ознаки дільників нуля в некомутативному класі

№	ГЧС	Ознака дільника нуля
1.	$H$	—
2.	$AH$	$a_1^2 + a_2^2 = a_3^2 + a_4^2$
3.	$D_n(C, D, 4)$	$a_1^2 + a_2^2 = 0$
4.	$D_n(W, W, 4)$	$a_1^2 + a_4^2 = a_3^2 + a_2^2$
5.	$D_n(D, D, 4)$	$a_1^2 = 0$
6.	$D_n(W, D, 4)$	$a_1^2 = a_2^2$



Псевдонорма систем із  $\mathcal{D}_n$  класу

№	ГЧС	Матриця норми	Псевдонорма
1.	$H$	$N(w) = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$	$N(w) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$
2.	$AH$	$N(w) = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$	$N(w) = a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2$
3.	$\mathcal{D}_n(C, D, 4)$	$N(w) = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$	$N(w) = a_1^2 + a_2^2$
4.	$\mathcal{D}_n(W, W, 4)$	$N(w) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$	$N(w) = a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + a_4^2$
5.	$\mathcal{D}_n(D, D, 4)$	$N(w) = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & a_1 & 0 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$	$N(w) = a_1^2$
6.	$\mathcal{D}_n(W, D, 4)$	$N(w) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$	$N(w) = a_1^2 - a_2^2$

## Додаток В. Основні алгебраїчні та арифметичні властивості комутативних ГЧС 4-ої вимірності

Таблиці Келі комутативних гіперкомплексних числових систем 4-ї вимірності

№	Позначення	Таблиця Келі				
1.	$K = D_k(C, C, 4)$	$D_k(C, C, 4)$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
		$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
		$e_2$	$e_2$	$-e_1$	$e_4$	$-e_3$
		$e_3$	$e_3$	$e_4$	$-e_1$	$-e_2$
		$e_4$	$e_4$	$-e_3$	$-e_2$	$e_1$
2.	$D_k(C, W, 4)$	$D_k(C, W, 4)$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
		$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
		$e_2$	$e_2$	$-e_1$	$e_4$	$-e_3$
		$e_3$	$e_3$	$e_4$	$e_1$	$e_2$
		$e_4$	$e_4$	$-e_3$	$e_2$	$-e_1$
3.	$D_k(C, D, 4)$	$D_k(C, D, 4)$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
		$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
		$e_2$	$e_2$	$-e_1$	$e_4$	$-e_3$
		$e_3$	$e_3$	$e_4$	$0$	$0$
		$e_4$	$e_4$	$-e_3$	$0$	$0$
4.	$D_k(W, C, 4)$	$D_k(W, C, 4)$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
		$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
		$e_2$	$e_2$	$e_1$	$e_4$	$e_3$
		$e_3$	$e_3$	$e_4$	$-e_1$	$-e_2$
		$e_4$	$e_4$	$e_3$	$-e_2$	$-e_1$
5.	$D_k(W, W, 4)$	$D_k(W, W, 4)$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
		$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
		$e_2$	$e_2$	$e_1$	$e_4$	$e_3$
		$e_3$	$e_3$	$e_4$	$e_1$	$e_2$
		$e_4$	$e_4$	$e_3$	$e_2$	$e_1$
6.	$D_k(W, D, 4)$	$D_k(W, D, 4)$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
		$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
		$e_2$	$e_2$	$e_1$	$e_4$	$e_3$
		$e_3$	$e_3$	$e_4$	$0$	$0$
		$e_4$	$e_4$	$e_3$	$0$	$0$

7.	$D_k(D, C, 4)$	$D_k(D, C, 4)$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
		$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
		$e_2$	$e_2$	0	$e_4$	0
		$e_3$	$e_3$	$e_4$	$-e_1$	$-e_2$
		$e_4$	$e_4$	0	$-e_2$	0
8.	$D_k(D, W, 4)$	$D_k(D, W, 4)$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
		$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
		$e_2$	$e_2$	0	$e_4$	0
		$e_3$	$e_3$	$e_4$	$e_1$	$e_2$
		$e_4$	$e_4$	0	$e_2$	0
9.	$D_k(D, D, 4)$	$D_k(D, D, 4)$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
		$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
		$e_2$	$e_2$	0	$e_4$	0
		$e_3$	$e_3$	$e_4$	0	0
		$e_4$	$e_4$	0	0	0

### Правила множення в комутативному класі ГЧС

№	ГЧС	Правило множення
1.	<b>K</b>	$w_1 w_2 = (a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 + a_4 b_4) e_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_3 b_4 - a_4 b_3) e_2 + (a_1 b_3 + a_3 b_1 - a_2 b_4 - a_4 b_2) e_3 + (a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2) e_4$
2.	$D_k(C, W, 4)$	$w_1 w_2 = (a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4) e_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 + a_4 b_3) e_2 + (a_1 b_3 + a_3 b_1 - a_2 b_4 - a_4 b_2) e_3 + (a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2) e_4$
3.	$D_k(C, D, 4)$	$w_1 w_2 = (a_1 b_1 - a_2 b_2) e_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) e_2 + (a_1 b_3 + a_3 b_1 - a_2 b_4 - a_4 b_2) e_3 + (a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2) e_4$
4.	$D_k(W, W, 4)$	$w_1 w_2 = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4) e_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 + a_4 b_3) e_2 + (a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_2 b_4 + a_4 b_2) e_3 + (a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2) e_4$
5.	$D_k(D, D, 4)$	$w_1 w_2 = a_1 b_1 e_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) e_2 + (a_1 b_3 + a_3 b_1) e_3 + (a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2) e_4$
6.	$D_k(W, D, 4)$	$w_1 w_2 = (a_1 b_1 + a_2 b_2) e_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) e_2 + (a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_2 b_4 + a_4 b_2) e_3 + (a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2) e_4$

Норма систем із  $\mathcal{D}_k$  класу

№	ГЧС	Матриця норми	Норма
1.	$K$	$N(w) = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1 & -a_4 & -a_3 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$	$N(w) = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2 - (2a_1a_4 - 2a_2a_3)^2$
2.	$\mathcal{D}_k(C, W, 4)$	$N(w) = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$	$N(w) = (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2)^2 + (2a_1a_4 - 2a_2a_3)^2$
3.	$\mathcal{D}_k(C, D, 4)$	$N(w) = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$	$N(w) = (a_1^2 + a_2^2)^2$
4.	$\mathcal{D}_k(W, W, 4)$	$N(w) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$	$N(w) = (a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + a_4^2)^2 - (2a_1a_4 - 2a_2a_3)^2$
5.	$\mathcal{D}_k(D, D, 4)$	$N(w) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$	$N(w) = a_1^4$
6.	$\mathcal{D}_k(W, D, 4)$	$N(w) = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$	$N(w) = (a_1^2 - a_2^2)^2$

## Ознаки дільників нуля в комутативному класі

№	ГЧС	Ознака дільника нуля
1.	<b><i>K</i></b>	$a_1 = a_4, a_2 = a_3$
2.	$D_k(C, W, 4)$	$a_1^2 + a_2^2 = a_3^2 + a_4^2; a_1 a_2 = a_2 a_3$
3.	$D_k(C, D, 4)$	$a_1 = a_2 = 0$
4.	$D_k(W, W, 4)$	$ a_1 - a_4  =  a_2 - a_3 $
5.	$D_k(D, D, 4)$	$a_1 = 0$
6.	$D_k(W, D, 4)$	$ a_1  =  a_2 $

## Додаток Г. Матричні представлення класів ГЧС 4-ої вимірності

## Матричні представлення систем некомутативного класу

№	ГЧС	Матричне представлення
1.	$H$	$\mathbf{M}_H = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ e_3^2 c_2 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ -a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ -a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$
2.	$AH$	$\mathbf{M}_{AH} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ e_3^2 c_2 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$
3.	$D_n(C, D, 4)$	$\mathbf{M}_{D_n(C,D,4)} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ e_3^2 c_2 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$
4.	$D_n(W, W, 4)$	$\mathbf{M}_{D_n(W,W,4)} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ e_3^2 c_2 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & -a_2 \\ -a_4 & a_3 & -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$
5.	$D_n(D, D, 4)$	$\mathbf{M}_{D_n(D,D,4)} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ e_3^2 c_2 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$
6.	$D_n(W, D, 4)$	$\mathbf{M}_{D_n(W,D,4)} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ e_3^2 c_2 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$

## Матричні представлення систем комутативного класу

№	ГЧС	Матричне представлення
1.	$K = \mathcal{D}_k(C, C, 4)$	$\mathbf{M}_K = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ -a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & -a_3 & -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$
2.	$\mathcal{D}_k(C, W, 4)$	$\mathbf{M}_{\mathcal{D}_k(C, W, 4)} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ -a_4 & a_3 & -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$
3.	$\mathcal{D}_k(C, D, 4)$	$\mathbf{M}_{\mathcal{D}_k(C, D, 4)} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$
4.	$\mathcal{D}_k(W, W, 4)$	$\mathbf{M}_{\mathcal{D}_k(W, W, 4)} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$
5.	$\mathcal{D}_k(D, D, 4)$	$\mathbf{M}_{\mathcal{D}_k(D, D, 4)} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$
6.	$\mathcal{D}_k(W, D, 4)$	$\mathbf{M}_{\mathcal{D}_k(W, D, 4)} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$

**Додаток Д. Представлення експоненціальної, логарифмічної,  
тригонометричних та гіперболічних функцій**

**Представлення експоненти в некомутативному класі ГЧС**

<b>№</b>	<b>ГЧС</b>	<b>Представлення експоненти</b>
1.	<b><i>H</i></b>	$Exp(M) = e^{m_1} \left( \cos \sqrt{m_2^2 + m_3^2 + m_4^2} e_1 + \frac{(m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4)}{\sqrt{m_2^2 + m_3^2 + m_4^2}} sh \sqrt{m_2^2 + m_3^2 + m_4^2} \right)$
2.	<b><i>AH</i></b>	$Exp(M) = e^{m_1} \left( ch \sqrt{ -m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 } e_1 + \frac{(m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4)}{\sqrt{ -m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 }} sh \sqrt{ -m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 } \right)$
3.	<b><math>D_n(C, D, 4)</math></b>	$Exp(M) = e^{m_1} \left( \cos  m_2  e_1 + \frac{\sin  m_2 }{ m_2 } (m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4) \right)$
4.	<b><math>D_n(W, W, 4)</math></b>	$Exp(M) = e^{m_1} \left( ch \sqrt{ m_2^2 + m_3^2 - m_4^2 } e_1 + \frac{(m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4)}{\sqrt{ m_2^2 + m_3^2 - m_4^2 }} sh \sqrt{ m_2^2 + m_3^2 - m_4^2 } \right)$
5.	<b><math>D_n(D, D, 4)</math></b>	$Exp(M) = e^{m_1} (e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4)$
6.	<b><math>D_n(W, D, 4)</math></b>	$Exp(M) = e^{m_1} \left( ch  m_2  e_1 + \frac{sh  m_2 }{ m_2 } (m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4) \right)$



## Представлення логарифмічної функції в некомутативному класі ГЧС

№	ГЧС	Представлення логарифмічної функції
1.	$H$	$\bar{m} = -m_2^2 - m_3^2 - m_4^2 < 0$ $Ln\left(\sum_{k=1}^4 x_k e_k\right) = \ln \sqrt{\bar{x}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{\bar{x} - x_1^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\bar{x} - x_1^2}}{x_1} \left(\sum_{k=2}^4 x_k e_k + \pi \sum_{k=2}^4 n_k e_k\right),$ $n_k \in \mathbb{Z}$
2.	$AH$	$1) \bar{m} = -(m_2^2 - m_3^2 - m_4^2) < 0$ $Ln\left(\sum_{k=1}^4 x_k e_k\right) = \ln \sqrt{\bar{x}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{\bar{x} - x_1^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\bar{x} - x_1^2}}{x_1} \left(\sum_{k=2}^4 x_k e_k + \pi \sum_{k=2}^4 n_k e_k\right),$ $n_k \in \mathbb{Z}$ $2) \bar{m} = -(m_2^2 - m_3^2 - m_4^2) > 0$ $Ln\left(\sum_{k=1}^4 x_k e_k\right) = \ln \sqrt{\bar{x}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{x_1^2 - \bar{x}}} \operatorname{arth} \frac{\sqrt{x_1^2 - \bar{x}}}{x_1} \sum_{k=2}^4 x_k e_k$
3.	$D_n(C, D, 4)$	$\bar{m} = -m_2^2 < 0$ $Ln\left(\sum_{k=1}^4 x_k e_k\right) = \ln \sqrt{\bar{x}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{\bar{x} - x_1^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\bar{x} - x_1^2}}{x_1} \left(\sum_{k=2}^4 x_k e_k + \pi \sum_{k=2}^4 n_k e_k\right),$ $n_k \in \mathbb{Z}$
4.	$D_n(W, W, 4)$	$1) \bar{m} = -(-m_2^2 - m_3^2 + m_4^2) < 0$ $Ln\left(\sum_{k=1}^4 x_k e_k\right) = \ln \sqrt{\bar{x}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{\bar{x} - x_1^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\bar{x} - x_1^2}}{x_1} \left(\sum_{k=2}^4 x_k e_k + \pi \sum_{k=2}^4 n_k e_k\right),$ $n_k \in \mathbb{Z}$ $2) \bar{m} = -(-m_2^2 - m_3^2 + m_4^2) > 0$ $Ln\left(\sum_{k=1}^4 x_k e_k\right) = \ln \sqrt{\bar{x}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{x_1^2 - \bar{x}}} \operatorname{arth} \frac{\sqrt{x_1^2 - \bar{x}}}{x_1} \sum_{k=2}^4 x_k e_k$
5.	$D_n(D, D, 4)$	$\bar{m} = 0$ $Ln\left(\sum_{k=1}^4 x_k e_k\right) = \ln \sqrt{\bar{x}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{\bar{x} - x_1^2}} \left(\sum_{k=2}^4 x_k e_k\right)$
6.	$D_n(W, D, 4)$	$\bar{m} = m_2^2 > 0$ $Ln\left(\sum_{k=1}^4 x_k e_k\right) = \ln \sqrt{\bar{x}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{x_1^2 - \bar{x}}} \operatorname{arth} \frac{\sqrt{x_1^2 - \bar{x}}}{x_1} \sum_{k=2}^4 x_k e_k$

## Представлення експоненти в комутативному класі ГЧС

№	ГЧС	Представлення експоненти
1.	$K$	$\begin{aligned} \text{Exp}(M) = & \frac{1}{2} (e^{m_1-m_4} \cos(m_2+m_3) + e^{m_1+m_4} \cos(m_2-m_3))e_1 + \\ & + \frac{1}{2} (e^{m_1-m_4} \sin(m_2+m_3) + e^{m_1+m_4} \sin(m_2-m_3))e_2 + \\ & + \frac{1}{2} (e^{m_1-m_4} \sin(m_2+m_3) - e^{m_1+m_4} \sin(m_2-m_3))e_3 - \\ & - \frac{1}{2} (e^{m_1-m_4} \cos(m_2+m_3) - e^{m_1+m_4} \cos(m_2-m_3))e_4 \end{aligned}$
2.	$D_k(C, W, 4)$	$\begin{aligned} \text{Exp}(M) = & \frac{1}{2} (e^{m_1+m_3} \cos(m_2+m_4) + e^{m_1-m_3} \cos(m_2-m_4))e_1 + \\ & + \frac{1}{2} (e^{m_1+m_3} \sin(m_2+m_4) + e^{m_1-m_3} \sin(m_2-m_4))e_2 + \\ & + \frac{1}{2} (e^{m_1+m_3} \cos(m_2+m_4) - e^{m_1-m_3} \cos(m_2-m_4))e_3 + \\ & + \frac{1}{2} (e^{m_1+m_3} \sin(m_2+m_4) - e^{m_1-m_3} \sin(m_2-m_4))e_4 \end{aligned}$
3.	$D_k(C, D, 4)$	$\begin{aligned} \text{Exp}(M) = & e^{m_1} \cos(m_2)e_1 + e^{m_1} \sin(m_2)e_2 + \\ & + e^{m_1} (m_3 \cos(m_2) - m_4 \sin(m_2))e_3 + e^{m_1} (m_4 \cos(m_2) + m_3 \sin(m_2))e_4 \end{aligned}$
4.	$D_k(W, W, 4)$	$\begin{aligned} \text{Exp}(M) = & \frac{1}{2} (e^{m_1+m_4} \text{ch}(m_2+m_3) + e^{m_1-m_4} \text{ch}(m_2-m_3))e_1 + \\ & + \frac{1}{2} (e^{m_1+m_4} \text{sh}(m_2+m_3) + e^{m_1+m_4} \text{sh}(m_2-m_3))e_2 + \\ & + \frac{1}{2} (e^{m_1+m_4} \text{sh}(m_2+m_3) - e^{m_1+m_4} \text{sh}(m_2-m_3))e_3 + \\ & + \frac{1}{2} (e^{m_1+m_4} \text{ch}(m_2+m_3) - e^{m_1-m_4} \text{ch}(m_2-m_3))e_4 \end{aligned}$
5.	$D_k(D, D, 4)$	$\text{Exp}(M) = e^{m_1} (e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 + (m_4 + m_2 m_3) e_4)$
6.	$D_k(W, D, 4)$	$\begin{aligned} \text{Exp}(M) = & e^{m_1} \text{ch}(m_2)e_1 + e^{m_1} \text{sh}(m_2)e_2 + \\ & + e^{m_1} (m_3 \text{ch}(m_2) + m_4 \text{sh}(m_2))e_3 + e^{m_1} (m_4 \text{ch}(m_2) + m_3 \text{sh}(m_2))e_4 \end{aligned}$

## Представлення логарифмічної функції в комутативному класі ГЧС

№	ГЧС	Представлення логарифмічної функції
1.	<b>K</b>	$  \begin{aligned}  Ln(X) = & \left( \frac{1}{8} \ln \left( \frac{(x_1^2 - 2x_1x_4 + x_4^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2)^2 (x_1^2 + 2x_1x_4 + x_4^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2)^2}{(x_1^2 - 2x_1x_4 + x_4^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2)^2} \right) \right) + \\  & + \frac{1}{4} I(\arctg(x_2+x_3, x_1-x_4) + \arctg(x_2-x_3, -x_1-x_4) + \arctg(-x_2-x_3, x_1-x_4) + \\  & + \arctg(-x_2+x_3, -x_1-x_4)) e_1 + \\  & + \frac{1}{4} (\arctg(x_2+x_3, x_1-x_4) - \arctg(x_2-x_3, -x_1-x_4) - \arctg(-x_2-x_3, x_1-x_4) + \\  & + \arctg(-x_2+x_3, -x_1-x_4)) e_2 + \\  & + \frac{1}{4} (\arctg(x_2+x_3, x_1-x_4) + \arctg(x_2-x_3, -x_1-x_4) - \arctg(-x_2-x_3, x_1-x_4) - \\  & - \arctg(-x_2+x_3, -x_1-x_4)) e_3 + \\  & + \left( \frac{1}{8} \ln \left( \frac{(x_1^2 + 2x_1x_4 + x_4^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2)^2}{(x_1^2 - 2x_1x_4 + x_4^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2)^2} \right) \right) + \frac{1}{4} I(-\arctg(x_2+x_3, x_1-x_4) + \\  & + \arctg(x_2-x_3, -x_1-x_4) - \arctg(-x_2-x_3, x_1-x_4) + \arctg(-x_2+x_3, -x_1-x_4)) e_4  \end{aligned}  $
2.	$\mathcal{D}_k(\mathbf{C}, \mathbf{W}, 4)$	$  \begin{aligned}  Ln(X) = & \left( \frac{1}{8} \ln \left( \frac{(x_1^2 + 2x_1x_3 + x_4^2 + x_2^2 + 2x_2x_4 + x_3^2)^2 (x_1^2 - 2x_1x_3 + x_4^2 + x_2^2 - 2x_2x_4 + x_3^2)^2}{(x_1^2 - 2x_1x_3 + x_4^2 + x_2^2 + 2x_2x_4 + x_3^2)^2} \right) \right) + \\  & + \frac{1}{4} I(\arctg(x_2+x_4, x_1+x_3) + \arctg(-x_2+x_4, -x_1+x_3) + \arctg(x_2+x_4, -x_1-x_3) + \\  & + \arctg(-x_2+x_4, x_1-x_3)) e_1 + \\  & + \frac{1}{4} (\arctg(x_2+x_4, x_1+x_3) + \arctg(-x_2+x_4, -x_1+x_3) - \arctg(x_2+x_4, -x_1-x_3) - \\  & - \arctg(-x_2+x_4, x_1-x_3)) e_2 + \\  & + \left( \frac{1}{8} \ln \left( \frac{(x_1^2 + 2x_1x_3 + x_4^2 + x_2^2 + 2x_2x_4 + x_3^2)^2}{(x_1^2 - 2x_1x_3 + x_4^2 + x_2^2 - 2x_2x_4 + x_3^2)^2} \right) \right) + \frac{1}{4} I(\arctg(x_2+x_4, x_1+x_3) - \\  & - \arctg(-x_2+x_4, -x_1+x_3) + \arctg(x_2+x_4, -x_1-x_3) - \arctg(-x_2+x_4, x_1-x_3)) e_3 + \\  & + (\arctg(x_2+x_4, x_1+x_3) - \arctg(-x_2+x_4, -x_1+x_3) - \arctg(x_2+x_4, -x_1-x_3) + \\  & + \arctg(-x_2+x_4, x_1-x_3)) e_4  \end{aligned}  $
3.	$\mathcal{D}_k(\mathbf{C}, \mathbf{D}, 4)$	$  Ln(X) = \frac{1}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2) e_1 + \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{2x_2x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \right) e_2 + \frac{x_3x_1 + x_2x_4}{x_2^2 + x_1^2} e_3 + \frac{-x_3x_2 + x_1x_4}{x_2^2 + x_1^2} e_4  $
4.	$\mathcal{D}_k(\mathbf{W}, \mathbf{W}, 4)$	$  \begin{aligned}  Ln(X) = & \frac{1}{4} \ln((x_1 + x_4 + x_2 + x_3)(-x_1 + x_4 + x_2 - x_3)(x_1 + x_4 - x_2 - x_3)(-x_1 + x_4 - x_2 + x_3)) e_1 + \\  & + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{(x_1 + x_4 + x_2 + x_3)(-x_1 + x_4 - x_2 + x_3)}{(-x_1 + x_4 + x_2 - x_3)(x_1 + x_4 - x_2 - x_3)} \right) e_2 + \\  & + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{(x_1 + x_4 + x_2 + x_3)(-x_1 + x_4 + x_2 - x_3)}{(-x_1 + x_4 - x_2 + x_3)(x_1 + x_4 - x_2 - x_3)} \right) e_3 + \\  & + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{(-x_1 + x_4 - x_2 + x_3)(-x_1 + x_4 + x_2 - x_3)}{(x_1 + x_4 + x_2 + x_3)(x_1 + x_4 - x_2 - x_3)} \right) e_4  \end{aligned}  $
5.	$\mathcal{D}_k(\mathbf{D}, \mathbf{D}, 4)$	$  Ln(X) = \ln(x_1) e_1 + \frac{x_2}{x_1} e_2 + \frac{x_3}{x_1} e_3 + \frac{-x_2x_3 + x_1x_4}{x_1^2} e_4  $
6.	$\mathcal{D}_k(\mathbf{W}, \mathbf{D}, 4)$	$  Ln(X) = \frac{1}{2} \ln(x_1^2 - x_2^2) e_1 + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \right) e_2 + \frac{x_3x_1 - x_2x_4}{x_1^2 - x_2^2} e_3 - \frac{x_3x_2 - x_1x_4}{x_1^2 - x_2^2} e_4  $

## Представлення гіперболічних функцій для некомутативного класу систем

№	ГЧС	Представлення гіперболічних функцій
1.	<b>H</b>	$Sh(A) = sh(a_1) \left( \begin{array}{l} \cos \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} e_1 + \\ + \frac{\sin \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}{\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}} (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \end{array} \right)$ $Ch(A) = ch(a_1) \left( \begin{array}{l} \cos \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} e_1 + \\ + \frac{\sin \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}{\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}} (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \end{array} \right)$
2.	<b>AH</b>	$Sh(A) = sh(a_1) \left( \begin{array}{l} \cos \sqrt{ a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 } e_1 + \\ + \frac{\sin \sqrt{ a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 }}{\sqrt{ a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 }} (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \end{array} \right)$ $Ch(A) = ch(a_1) \left( \begin{array}{l} \cos \sqrt{ a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 } e_1 + \\ + \frac{\sin \sqrt{ a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 }}{\sqrt{ a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 }} (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \end{array} \right)$
3.	$\mathcal{D}_n(\mathbf{C}, \mathbf{D}, 4)$	$Sh(A) = sh(a_1) \left( \cos  a_2  e_1 + \frac{\sin  a_2 }{ a_2 } (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \right)$ $Ch(A) = ch(a_1) \left( \cos  a_2  e_1 + \frac{\sin  a_2 }{ a_2 } (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \right)$
4.	$\mathcal{D}_n(\mathbf{W}, \mathbf{W}, 4)$	$Sh(A) = sh(a_1) \left( \begin{array}{l} \cos \sqrt{ -a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 } e_1 + \\ + \frac{\sin \sqrt{ -a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 }}{\sqrt{ -a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 }} (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \end{array} \right)$ $Ch(A) = ch(a_1) \left( \begin{array}{l} \cos \sqrt{ -a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 } e_1 + \\ + \frac{\sin \sqrt{ -a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 }}{\sqrt{ -a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 }} (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \end{array} \right)$
5.	$\mathcal{D}_n(\mathbf{D}, \mathbf{D}, 4)$	$Sh(A) = sh(a_1) + (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \cdot ch(a_1)$ $Ch(A) = ch(a_1) + (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \cdot sh(a_1)$
6.	$\mathcal{D}_n(\mathbf{W}, \mathbf{D}, 4)$	$Sh(A) = sh(a_1) \left( \cos \sqrt{ -a_2^2 } e_1 + \frac{\sin \sqrt{ -a_2^2 }}{\sqrt{ -a_2^2 }} (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \right)$

		$Ch(A) = ch(a_1) \left( \cos \sqrt{ -a_2^2 } e_1 + \frac{\sin \sqrt{ -a_2^2 }}{\sqrt{ -a_2^2 }} (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \right)$
--	--	--

Представлення тригонометричних функцій для некомутативного класу систем

№	ГЧС	Представлення тригонометричних функцій
1.	<b>H</b>	$\begin{aligned} Sin(A) &= \sin(a_1) ch \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} e_1 + \\ &+ \cos(a_1) \frac{sh \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}{\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}} (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \\ Cos(A) &= \cos(a_1) ch \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} e_1 + \\ &+ \sin(a_1) \frac{sh \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}{\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}} (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \end{aligned}$
2.	<b>AH</b>	$\begin{aligned} Sin(A) &= \sin(a_1) ch \sqrt{ a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 } e_1 + \\ &+ \cos(a_1) \frac{sh \sqrt{ a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 }}{\sqrt{ a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 }} (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \\ Cos(A) &= \cos(a_1) ch \sqrt{ a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 } e_1 + \\ &+ \sin(a_1) \frac{sh \sqrt{ a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 }}{\sqrt{ a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 }} (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \end{aligned}$
3.	$D_n(C, D, 4)$	$\begin{aligned} Sin(A) &= \sin(a_1) ch  a_2  e_1 + \cos(a_1) \frac{sh  a_2 }{ a_2 } (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \\ Cos(A) &= \cos(a_1) ch  a_2  e_1 + \sin(a_1) \frac{sh  a_2 }{ a_2 } (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \end{aligned}$
4.	$D_n(W, W, 4)$	$\begin{aligned} Sin(A) &= \sin(a_1) ch \sqrt{ -a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 } e_1 + \\ &+ \cos(a_1) \frac{sh \sqrt{ -a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 }}{\sqrt{ -a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 }} (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \end{aligned}$

		$\begin{aligned} \text{Cos}(A) &= \cos(a_1) \text{ch} \sqrt{-a_2^2 - a_3^2 + a_4^2} e_1 + \\ &+ \sin(a_1) \frac{\text{sh} \sqrt{-a_2^2 - a_3^2 + a_4^2}}{\sqrt{-a_2^2 - a_3^2 + a_4^2}} (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \end{aligned}$
5.	$\mathcal{D}_n(\mathbf{D}, \mathbf{D}, 4)$	$\begin{aligned} \text{Sin}(A) &= \sin(a_1) + (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \cdot \cos(a_1) \\ \text{Cos}(A) &= \cos(a_1) - (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \cdot \sin(a_1) \end{aligned}$
6.	$\mathcal{D}_n(\mathbf{W}, \mathbf{D}, 4)$	$\begin{aligned} \text{Sin}(A) &= \sin(a_1) \text{ch} \sqrt{-a_2^2} e_1 + \\ &+ \cos(a_1) \frac{\text{sh} \sqrt{-a_2^2}}{\sqrt{-a_2^2}} (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \\ \text{Cos}(A) &= \cos(a_1) \text{ch} \sqrt{-a_2^2} e_1 + \\ &+ \sin(a_1) \frac{\text{sh} \sqrt{-a_2^2}}{\sqrt{-a_2^2}} (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \end{aligned}$

Представлення гіперболічних функцій для комутативного класу систем

№	ГЧС	Представлення гіперболічних функцій
1.	$\mathbf{K}$	$\begin{aligned} \text{Sh}(M) &= \frac{1}{2} (\cos(m_2 + m_3) \text{sh}(m_1 - m_4) + \cos(m_2 - m_3) \text{sh}(m_1 + m_4)) e_1 + \\ &+ \frac{1}{2} (\sin(m_2 + m_3) \text{ch}(m_1 - m_4) + \sin(m_2 - m_3) \text{ch}(m_1 + m_4)) e_2 + \\ &+ \frac{1}{2} (\sin(m_2 + m_3) \text{ch}(m_1 - m_4) - \sin(m_2 - m_3) \text{ch}(m_1 + m_4)) e_3 - \\ &- \frac{1}{2} (\cos(m_2 + m_3) \text{sh}(m_1 - m_4) - \cos(m_2 - m_3) \text{sh}(m_1 + m_4)) e_4 \\ \text{Ch}(M) &= \frac{1}{2} (\cos(m_2 + m_3) \text{ch}(m_1 - m_4) + \cos(m_2 - m_3) \text{ch}(m_1 + m_4)) e_1 + \\ &+ \frac{1}{2} (\sin(m_2 + m_3) \text{sh}(m_1 - m_4) + \sin(m_2 - m_3) \text{sh}(m_1 + m_4)) e_2 + \\ &+ \frac{1}{2} (\sin(m_2 + m_3) \text{sh}(m_1 - m_4) - \sin(m_2 - m_3) \text{sh}(m_1 + m_4)) e_3 - \\ &- \frac{1}{2} (\cos(m_2 + m_3) \text{ch}(m_1 - m_4) - \cos(m_2 - m_3) \text{ch}(m_1 + m_4)) e_4 \end{aligned}$
2.	$\mathcal{D}_k(\mathbf{C}, \mathbf{W}, 4)$	$\begin{aligned} \text{Sh}(M) &= \frac{1}{2} (\cos(m_2 + m_4) \text{sh}(m_1 + m_3) + \cos(m_2 - m_4) \text{sh}(m_1 - m_3)) e_1 + \\ &+ \frac{1}{2} (\sin(m_2 + m_4) \text{ch}(m_1 + m_3) + \sin(m_2 - m_4) \text{ch}(m_1 - m_3)) e_2 + \\ &+ \frac{1}{2} (\cos(m_2 + m_4) \text{sh}(m_1 + m_3) - \cos(m_2 - m_4) \text{sh}(m_1 - m_3)) e_3 + \\ &+ \frac{1}{2} (\sin(m_2 + m_4) \text{ch}(m_1 + m_3) - \sin(m_2 - m_4) \text{ch}(m_1 - m_3)) e_4 \end{aligned}$

		$Ch(M) = \frac{1}{2} (\cos(m_2 + m_4)ch(m_1+m_3) + \cos(m_2 - m_4)ch(m_1-m_3))e_1 +$ $+ \frac{1}{2} (\sin(m_2 + m_4)sh(m_1+m_3) + \sin(m_2 - m_4)sh(m_1-m_3))e_2 +$ $+ \frac{1}{2} (\cos(m_2 + m_4)ch(m_1+m_3) - \cos(m_2 - m_4)ch(m_1-m_3))e_3 +$ $+ \frac{1}{2} (\sin(m_2 + m_4)sh(m_1+m_3) - \sin(m_2 - m_4)sh(m_1-m_3))e_4$
3.	$\mathcal{D}_k(\mathbf{C}, \mathbf{D}, 4)$	$Sh(M) = \cos(m_2)sh(m_1)e_1 + \sin(m_2)ch(m_1)e_2 + (m_3 \cos(m_2)ch(m_1) - m_4 \sin(m_2)sh(m_1))e_3 +$ $+ (m_4 \cos(m_2)ch(m_1) + m_3 \sin(m_2)sh(m_1))e_4$ $Ch(M) = \cos(m_2)ch(m_1)e_1 + \sin(m_2)sh(m_1)e_2 + (m_3 \cos(m_2)sh(m_1) - m_4 \sin(m_2)ch(m_1))e_3 +$ $+ (m_4 \cos(m_2)sh(m_1) + m_3 \sin(m_2)ch(m_1))e_4$
4.	$\mathcal{D}_k(\mathbf{W}, \mathbf{W}, 4)$	$Sh(M) = (sh(m_1)ch(m_2)ch(m_3)ch(m_4) + ch(m_1)sh(m_2)sh(m_3)sh(m_4))e_1 +$ $+ (sh(m_1)ch(m_2)sh(m_3)sh(m_4) + ch(m_1)sh(m_2)ch(m_3)ch(m_4))e_2 +$ $+ (sh(m_1)sh(m_2)ch(m_3)sh(m_4) + ch(m_1)ch(m_2)sh(m_3)ch(m_4))e_3 +$ $+ (sh(m_1)sh(m_2)sh(m_3)ch(m_4) + ch(m_1)ch(m_2)ch(m_3)sh(m_4))e_4$ $Ch(M) = (ch(m_1)ch(m_2)ch(m_3)ch(m_4) + sh(m_1)sh(m_2)sh(m_3)sh(m_4))e_1 +$ $+ (ch(m_1)ch(m_2)sh(m_3)sh(m_4) + sh(m_1)sh(m_2)ch(m_3)ch(m_4))e_2 +$ $+ (ch(m_1)sh(m_2)ch(m_3)sh(m_4) + sh(m_1)ch(m_2)sh(m_3)ch(m_4))e_3 +$ $+ (ch(m_1)sh(m_2)sh(m_3)ch(m_4) + sh(m_1)ch(m_2)ch(m_3)sh(m_4))e_4$
5.	$\mathcal{D}_k(\mathbf{W}, \mathbf{D}, 4)$	$Sh(M) = \frac{1}{2} (sh(m_1-m_2) + sh(m_1+m_2))e_1 - \frac{1}{2} (sh(m_1-m_2) - sh(m_1+m_2))e_2 +$ $+ \frac{1}{2} ((m_3 - m_4)ch(m_1-m_2) + (m_3 + m_4)ch(m_1+m_2))e_3 +$ $+ \frac{1}{2} ((m_4 - m_3)ch(m_1-m_2) + (m_3 + m_4)ch(m_1+m_2))e_4$ $Ch(M) = \frac{1}{2} (ch(m_1-m_2) + ch(m_1+m_2))e_1 - \frac{1}{2} (ch(m_1-m_2) - ch(m_1+m_2))e_2 +$ $+ \frac{1}{2} ((m_3 - m_4)sh(m_1-m_2) + (m_3 + m_4)sh(m_1+m_2))e_3 +$ $+ \frac{1}{2} ((m_4 - m_3)sh(m_1-m_2) + (m_3 + m_4)sh(m_1+m_2))e_4$
6.	$\mathcal{D}_k(\mathbf{D}, \mathbf{D}, 4)$	$Sh(M) = sh(m_1)e_1 + m_2 ch(m_1)e_2 + m_3 ch(m_1)e_3 + (m_4 ch(m_1) + m_2 m_3 sh(m_1))e_4$ $Ch(M) = ch(m_1)e_1 + m_2 sh(m_1)e_2 + m_3 sh(m_1)e_3 + (m_4 sh(m_1) + m_2 m_3 ch(m_1))e_4$

Представлення тригонометричних функцій для комутативного класу  
систем

№	ГЧС	Представлення тригонометричних функцій
1.	$D_k(C, C, 4)$	$\begin{aligned} \sin(M) &= \frac{1}{2}(ch(m_2+m_3)\sin(m_1+m_4) + ch(m_2-m_3)\sin(m_1-m_4))e_1 + \\ &+ \frac{1}{2}(sh(m_2+m_3)\cos(m_1+m_4) - sh(m_2-m_3)\cos(m_1-m_4))e_2 + \\ &+ \frac{1}{2}(sh(m_2+m_3)\cos(m_1+m_4) + sh(m_2-m_3)\cos(m_1-m_4))e_3 - \\ &- \frac{1}{2}(ch(m_2+m_3)\sin(m_1+m_4) + ch(m_2-m_3)\sin(m_1-m_4))e_4 \\ \cos(M) &= \frac{1}{2}(ch(m_2+m_3)\cos(m_1+m_4) + ch(m_2-m_3)\cos(m_1-m_4))e_1 - \\ &- \frac{1}{2}(sh(m_2+m_3)\sin(m_1+m_4) + sh(m_2-m_3)\sin(m_1-m_4))e_2 - \\ &- \frac{1}{2}(sh(m_2+m_3)\sin(m_1+m_4) + sh(m_2-m_3)\sin(m_1-m_4))e_3 - \\ &- \frac{1}{2}(ch(m_2+m_3)\cos(m_1+m_4) + ch(m_2-m_3)\cos(m_1-m_4))e_4 \end{aligned}$
2.	$D_k(C, W, 4)$	$\begin{aligned} \sin(M) &= \frac{1}{2}(ch(m_2+m_4)\sin(m_1+m_3) + ch(m_2-m_4)\sin(m_1-m_3))e_1 + \\ &+ \frac{1}{2}(sh(m_2+m_4)\cos(m_1+m_3) - sh(m_2-m_4)\cos(m_1-m_3))e_2 + \\ &+ \frac{1}{2}(ch(m_2+m_4)\sin(m_1+m_3) - ch(m_2-m_4)\sin(m_1-m_3))e_3 + \\ &+ \frac{1}{2}(sh(m_2+m_4)\cos(m_1+m_3) + sh(m_2-m_4)\cos(m_1-m_3))e_4 \\ \cos(M) &= \frac{1}{2}(ch(m_2+m_4)\cos(m_1+m_3) + ch(m_2-m_4)\cos(m_1-m_3))e_1 - \\ &- \frac{1}{2}(sh(m_2+m_4)\sin(m_1+m_3) - sh(m_2-m_4)\sin(m_1-m_3))e_2 + \\ &+ \frac{1}{2}(ch(m_2+m_4)\cos(m_1+m_3) + ch(m_2-m_4)\cos(m_1-m_3))e_3 - \\ &- \frac{1}{2}(sh(m_2+m_4)\sin(m_1+m_3) - sh(m_2-m_4)\sin(m_1-m_3))e_4 \end{aligned}$
3.	$D_k(C, D, 4)$	$\begin{aligned} \sin(M) &= ch(m_2)\sin(m_1)e_1 + sh(m_2)\cos(m_1)e_2 + (m_3ch(m_2)\cos(m_1) + m_4sh(m_2)\sin(m_1))e_3 + \\ &+ (m_4ch(m_2)\cos(m_1) - m_3sh(m_2)\sin(m_1))e_4 \\ \cos(M) &= \cos(m_2)ch(m_1)e_1 + \sin(m_2)sh(m_1)e_2 + (m_3\cos(m_2)sh(m_1) - m_4\sin(m_2)ch(m_1))e_3 + \\ &+ (m_4\cos(m_2)sh(m_1) + m_3\sin(m_2)ch(m_1))e_4 \end{aligned}$
4.	$D_k(W, W, 4)$	$\begin{aligned} \sin(At) &= \frac{1}{4} \left( \begin{aligned} &\sin(m_1+m_2+m_3+m_4) + \sin(m_1-m_2+m_3-m_4) + \\ &+ \sin(m_1+m_2-m_3-m_4) + \sin(m_1-m_2-m_3+m_4) \end{aligned} \right) e_1 + \\ &+ \frac{1}{4} \left( \begin{aligned} &\sin(m_1+m_2+m_3+m_4) - \sin(m_1-m_2+m_3-m_4) - \\ &- \sin(m_1+m_2-m_3-m_4) + \sin(m_1-m_2-m_3+m_4) \end{aligned} \right) e_2 + \\ &+ \frac{1}{4} \left( \begin{aligned} &\sin(m_1+m_2+m_3+m_4) - \sin(m_1-m_2+m_3-m_4) + \\ &+ \sin(m_1+m_2-m_3-m_4) - \sin(m_1-m_2-m_3+m_4) \end{aligned} \right) e_3 + \\ &+ \frac{1}{4} \left( \begin{aligned} &\sin(m_1+m_2+m_3+m_4) + \sin(m_1-m_2+m_3-m_4) - \\ &- \sin(m_1+m_2-m_3-m_4) - \sin(m_1-m_2-m_3+m_4) \end{aligned} \right) e_4 \end{aligned}$



		$\begin{aligned} \text{Cos}(At) = & \frac{1}{4} \left( \cos(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) + \cos(m_1 - m_2 + m_3 - m_4) + \right. \\ & \left. + \cos(m_1 + m_2 - m_3 - m_4) + \cos(m_1 - m_2 - m_3 + m_4) \right) e_1 + \\ & + \frac{1}{4} \left( \cos(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) - \cos(m_1 - m_2 + m_3 - m_4) + \right. \\ & \left. - \cos(m_1 + m_2 - m_3 - m_4) + \cos(m_1 - m_2 - m_3 + m_4) \right) e_2 + \\ & + \frac{1}{4} \left( \cos(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) - \cos(m_1 - m_2 + m_3 - m_4) + \right. \\ & \left. + \cos(m_1 + m_2 - m_3 - m_4) - \cos(m_1 - m_2 - m_3 + m_4) \right) e_3 + \\ & + \frac{1}{4} \left( \cos(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) + \cos(m_1 - m_2 + m_3 - m_4) - \right. \\ & \left. - \cos(m_1 + m_2 - m_3 - m_4) - \cos(m_1 - m_2 - m_3 + m_4) \right) e_4 \end{aligned}$
5.	$\mathcal{D}_k(\mathbf{W}, \mathbf{D}, 4)$	$\begin{aligned} \text{Sin}(M) = & \frac{1}{2} (\sin(m_1 - m_2) + \sin(m_1 + m_2)) e_1 - \frac{1}{2} (\sin(m_1 - m_2) - \sin(m_1 + m_2)) e_2 + \\ & + \frac{1}{2} ((m_3 - m_4) \cos(m_1 - m_2) + (m_3 + m_4) \cos(m_1 + m_2)) e_3 + \\ & + \frac{1}{2} ((m_4 - m_3) \cos(m_1 - m_2) + (m_3 + m_4) \cos(m_1 + m_2)) e_4 \\ \text{Cos}(M) = & \frac{1}{2} (\cos(m_1 - m_2) + \cos(m_1 + m_2)) e_1 - \frac{1}{2} (\cos(m_1 - m_2) - \cos(m_1 + m_2)) e_2 - \\ & - \frac{1}{2} ((m_3 + m_4) \sin(m_1 - m_2) + (m_3 - m_4) \sin(m_1 + m_2)) e_3 - \\ & - \frac{1}{2} ((m_3 + m_4) \sin(m_1 + m_2) + (-m_3 + m_4) \sin(m_1 - m_2)) e_4 \end{aligned}$
6.	$\mathcal{D}_k(\mathbf{D}, \mathbf{D}, 4)$	$\begin{aligned} \text{Sin}(M) = & \sin(m_1) e_1 + m_2 \cos(m_1) e_2 + m_3 \cos(m_1) e_3 + (m_4 \cos(m_1) - m_2 m_3 \sin(m_1)) e_4 \\ \text{Cos}(M) = & \cos(m_1) e_1 - m_2 \sin(m_1) e_2 - m_3 \sin(m_1) e_3 - (m_4 \sin(m_1) + m_2 m_3 \cos(m_1)) e_4 \end{aligned}$

## Додаток Ж. Структура програмного комплексу гіперкомплексних обчислень

1) Процедура візуалізації гіперкомплексного числа із спискової форми в натуральну – *HyperLib[VizInA](inA, E)*.

Дана процедура відновлює загальний вигляд гіперкомплексного числа, використовуючи в якості вхідного параметра список коефіцієнтів *inA* та ім'я елементів базису *E*. При цьому ставиться умова, що список коефіцієнтів являється позиційним. Вимірність гіперкомплексного числа визначається автоматично з допомогою стандартного оператора, який визначає кількість елементів списку. Процедура має наступний вигляд:

```
HyperLibVizInA := proc (inA, E)
local A, i;
  A := 0;
  for i to nops(inA) do A := A + inA[i] * E[i] end do
end proc
```

Далі наведено результат виконання цієї процедури:

> inA := [a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, a<sub>3</sub> - 5, 0, 3];

$$inA := [a_1, a_2, a_3 - 5, 0, 3]$$

> A := VizInA(inA, E);

$$A := a_1 E_1 + a_2 E_2 + (a_3 - 5) E_3 + 3 E_5$$

2) Процедура перетворення натуральної форми гіперкомплексного числа в спискову *HyperLib[ConvertA](A, DimHNS)* з допомогою підстановок списку символів Кронекера.

Дана задача полягає в тому, щоб число *A* в формі (4.1) перевести у форму (4.2). На перший погляд це зробити дуже просто: зробити підстановки  $e_i = 1$ ,  $i = 1..n$  з допомогою команди *subs*, після чого отриманий вираз  $A = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  з допомогою команди *convert(A, list)* перетворити в (4.2). Однак, якщо в числі *A* один чи більше коефіцієнтів  $a_i$  рівні нулю, тобто гіперкомплексне число *A*

неповне, то отримаємо список, довжина якого менша  $n$ , що приведе в подальшому до неправильних результатів.

Ідея алгоритму, який працює правильно як з повними гіперкомплексними числами, так і з неповними, полягає в наступному. Спочатку генерується список довжиною  $n$  - заготовка результату:

$$inA = [0, 0, \dots, 0]. \quad (1)$$

Потім генерується список такої ж довжини, який складається із рівностей  $e_i = 0$ :

$$sp = [e_1 = 0, \dots, e_i = 0, \dots, e_n = 0],$$

для кожного із значень індексів будується список таких рівностей:

$$sp1 = [e_1 = 0, \dots, e_i = 1, \dots, e_n = 0] \quad (2)$$

і виконується підстановка в початкове число списку (2). Якщо в числі  $A$  деяка компонента  $a_i = 0$ , то вона такою ввійде в список (1). Таким чином, ця підстановка виділяє коефіцієнт  $a_i$ , який присвоюється  $i$ -му елементу списку (1).

Нижче наведено повний текст програми. Формальними процедури являються:  $A$  – гіперкомплексне число в натуральній формі та  $DimHNS$  – вимірність ГЧС, в якій задано число  $A$ .

```

HyperLibConvertA := proc( $A$ ,  $DimHNS$ )
  local  $inA$ ,  $sp$ ,  $i$ ,  $sp1$ ,  $e$ ,  $A1$ ;
  if  $A = 0$  then
     $A1 := 0$  else
     $A1 := \text{subs}(\text{HyperLib}[\text{nameBas}](A) = e, A)$ ;
  end if
   $inA := [\text{seq}(0, i = 1..DimHNS)]$ ;
   $sp := [\text{seq}(e[i] = 0, i = 1..DimHNS)]$ ;
  for  $i$  to  $DimHNS$  do
     $sp1 := sp$ ;
     $sp1[i] := e[i] = 1$ ;
     $inA[i] := \text{subs}(sp1, A1)$ 
  end do;
  RETURN( $inA$ )
end proc

```

Результат виконання цієї процедури має наступний вигляд:

$$> A := a_1 e_1 + a_2 e_2 + (a_3 - 5) e_3 + 3 e_5$$

$$A := a_1 e_1 + a_2 e_2 + (a_3 - 5) e_3 + 3 e_5$$

>  $inA := \text{HyperLib}[\text{ConvertA}](A, 5)$

$$inA := [a_1, a_2, a_3 - 5, 0, 3]$$

3) Процедура поповнення списку на один елемент **HyperLib[Refill]** (**Spisok**, **Element**).

Вхідними параметрами процедури **HyperLib[Refill]** є список коефіцієнтів **Spisok**, який необхідно поповнити, та **Element** – елемент, на який здійснюється поповнення списку. Причому **Element** розміщується вкінці списку **Spisok**.

Тіло цієї процедури має наступний вигляд:

```
HyperLibRefill := proc (Spisok, Element)
  local i, Spisok1;
  Spisok1 := [seq(0, i = 1..nops(Spisok) + 1)];
  for i from 1 to nops(Spisok) do Spisok1[i] := Spisok[i] end do;
  Spisok1[nops(Spisok1)] := Element;
  RETURN(Spisok1)
end proc
```

Далі наведено результат виконання процедури **HyperLib[Refill]**:

>  $Spisok := [a_1, a_2, a_3 - 5, 0, 3]$

$$Spisok := [a_1, a_2, a_3 - 5, 0, 3]$$

>  $Spisok1 := \text{HyperLib}[\text{Refill}](Spisok, b)$

$$Spisok1 := [a_1, a_2, a_3 - 5, 0, 3, b]$$

4) Процедура генерації списку-шаблону для внутрішнього представлення ГЧС **HyperLib[ListHNS](DimHNS)**. Шаблон являє собою список списків рядків комірок представлення таблиці. Вхідним параметром цієї процедури є вимірність ГЧС **DimHNS**.

```
HyperLibListHNS := proc(DimHNS)
  local HNS, i;
  HNS := [seq(0, i = 1..3)];
```

```

HNS[1]:=name;
HNS[2]:=[seq(Строка[i], i=1..DimHNS)];
for i to DimHNS do
HNS[2, i]:=[seq(Ячейка[i, j], j=1..DimHNS)]: HNS[3]:=[seq(0, i=1..5)]
end do;
RETURN(HNS)
end proc

```

Результат виконання процедури наведено нижче

```
> HNS:=HyperLib[ListHNS](2)
```

```
HNS := [name, [[Ячейка1,1, Ячейка1,2], [Ячейка2,1, Ячейка2,2]], [0, 0, 0, 0, 0]]
```

5) *HyperLib[inConvertHNS](M, Name)* – процедура перетворення таблиці ГЧС із натуральної форми в спискову.

Вхідними параметрами цієї процедури є таблиця Келі в матричному вигляді  $M$ , причому базисні елементи повинні мати ідентифікатор  $e$  та  $Name$  – ім'я ГЧС, таблиця множення базисних елементів якої якої перетворюється.

На виході ми отримуємо список списків структурних констант, які визначаються із таблиці Келі.

Отже, процедура має наступний вигляд:

```

HyperLib_inConvertHNS:=proc(M, Name)
local n, Spis, i, j;
n:=vectdim(M[1]);
Spis:=HyperLib[ListHNS](n);
Spis[1]:=Name;
for i from 1 to n do for j from 1 to n do
Spis[2, i, j]:=HyperLib[ConvertA](M[i,j], n) end do end do; RETURN(Spis)
end proc

```

Результат виконання цієї процедури, наприклад для системи комплексних чисел  $C$ , має наступний вигляд:

```
> M:=
```

$$\begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ e_2 & -e_1 \end{bmatrix}$$

$$M := \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ e_2 & -e_1 \end{bmatrix}$$

>  $Spis := HyperLib[inConvertHNS](M, C)$

$Spis := [C, [[[1, 0], [0, 1]], [[0, 1], [-1, 0]]], [0, 0, 0, 0, 0]]$

6) Процедура визначення ідентифікатора базиса ГЧС по гіперкомплексному числу в натуральному вигляді  $HyperLib[nameBas](A)$ .

Процедура має наступний вигляд:

```

HyperLibnameBas := proc (A)
  local A1, n, i, j, j1, z1, z2;
if A=0 then z2:=0 else A1:=convert(A, string); j:=0; n:=length(A1); for i from n-1
by -1 to 1 do
  if A1[i]=”[“ then j1:=i; break end if end do;
for i from j1 by -1 to 1 do
  if A1[i]=”*” or A1[i]=”+” or A1[i]=”-“ then j:=i; break end if end do;
  if j=0 and A1[1]=”-“ then j:=1 end if;
z1:=substring(A1, j+1..j1-1); z2:=convert(z1, symbol) end if;
RETURN(z2)
end proc

```

В результаті виконання, процедура  $HyperLib[nameBas]$  дає наступний

результат:

>  $A := 5e_1 - 7e_2 + e_4$ ;  $B := a_1f_1 - a_2f_2$

$$A := 5 e_1 - 7 e_2 + e_4$$

$$B := a_1 f_1 - a_2 f_2$$

>  $z1 := HyperLib[nameBas](A)$ ;  $z2 := HyperLib[nameBas](B)$

$$z1 := e$$

$$z2 := f$$

7)  $HyperLib[renamA](A, nam, DimHNS)$  – процедура переіменування ідентифікатора базиса в гіперкомплексному числі. Процедура має три вхідні параметри:  $A$  – гіперкомплексне число в натуральній формі;  $nam$  – новий ідентифікатор базису;  $DimHNS$  – вимірність ГЧС. На виході отримуємо гіперкомплексне число з новим ідентифікатором базису.

Тіло процедури має наступний вигляд:

```

HyperLibrenamA := proc (A, nam, DimHNS)

```

```

local inA, AI;
inA:=HyperLib[ConvertA](A, DimHNS);
AI:=HyperLib[VizInA](inA, nam);
RETURN(AI)

```

**end proc**

Далі наведено результат виконання цієї процедури:

> A:= 5e<sub>1</sub> - 7e<sub>2</sub> + e<sub>4</sub>

$$A := 5 e_1 - 7 e_2 + e_4$$

> AI:=HyperLib[renamA](A, f, 4)

$$AI := 5 f_1 - 7 f_2 + f_4$$

8) **HyperLib[VizHNS](Spis, nam)** - процедура візуалізації списку ГЧС в таблицю Келі. Вхідними параметрами є список ГЧС **Spis** – другий елемент повного списку ГЧС та ідентифікатор базису **nam**. В результаті виконання цієї процедури отримаємо таблицю Келі ГЧС з відповідним ім'ям базису.

Процедура має наступний вигляд:

```

HyperLibVizHNS := proc (Spis, nam)
local dimHNS, M, i, j;
dimHNS:=nops(Spis);
M:=Matrix(dimHNS);
for i from 1 to dimHNS do
for j from 1 to dimHNS do
M[i,j]:=HyperLib[VizInA](Spis[i,j], nam) end do end do; RETURN(M)
end proc

```

Наприклад, для системи комплексних чисел результат виконання

процедури **HyperLib[VizHNS]** матиме вигляд:

> Spis:= [[[1,0],[0,1]],[[0,1],[-1,0]]]

$$Spis := [ [ [ 1, 0 ], [ 0, 1 ] ], [ [ 0, 1 ], [ -1, 0 ] ] ]$$

> M:=HyperLib[VizHNS](Spis, f)

$$M := \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ e_2 & -e_1 \end{bmatrix}$$

9) **HyperLib[LibHNS]()** – процедура–хранилище таблиць Келі. Дана процедура містить в собі список таблиць Келі деяких ГЧС. Тіло процедури має наступний вигляд:

```
> HyperLib[LibHNS] := proc () local Lib: Lib:=[[C, [[[1,0], [0,1]], [[0,1], [-1,0]]],
[комплексная, 1,0,0,0]], [W, [[[1,0], [0,1]], [[0,1], [1,0]]], [двойная, 1,0,0,0]], [Du,
[[[1,0], [0,1], [[0,1], [0,0]]], [дуальная, 1,0,0,0]], [H, [[[1,0,0,0], [0,1,0,0], [0,0,1,0],
[0,0,0,1]], [[0,1,0,0], [-1,0,0,0], [0,0,0,1], [0,0,-1,0]], [[0,0,1,0], [0,0,0,-1], [-1,0,0,0],
[0,1,0,0]], [[0,0,0,1], [0,0,1,0], [0,-1,0,0], [-1,0,0,0]]], [кватернионы, 2,0,0,0]], [K,
[[[1,0,0,0], [0,1,0,0], [0,0,1,0], [0,0,0,1]], [[0,1,0,0], [-1,0,0,0], [0,0,0,1], [0,0,-1,0]],
[[0,0,1,0], [0,0,0,1], [-1,0,0,0], [0,-1,0,0]], [[0,0,0,1], [0,0,-1,0], [0,-1,0,0], [1,0,0,0]]],
[квадриплексные числа, 1,0,0,0]], [W1, [[[1,0], [0,0]], [[0,0], [0,1]]], [двойная
ортогональная, 1,0,0,0]], [Q2, [[[1,0], [0,1]], [[0,1], [p,q]]], [обобщенная2,
0,0,0,0],[R⊕C, [[[1,0,0], [0,0,0], [0,0,0]], [[0,0,0],[0,1,0], [0,0,1]], [[0,0,0], [0,0,1],
[0,-1,0]]], [вещественно – комплексная, коммутативная, 0,0,0]], [T, [[[1,0,0],
[0,1,0], [0,0,1]], [[0,1,0], [-1/2,0,1/2], [0,-1,0]], [[0,0,1], [0,-1,0], [1,0,0]]],
[триплексная, коммутативная, 0,0,0]], [Q21, [[[1,0], [0,1]], [[0,1],
[p,0]]],[обобщенная – 2, коммутативная, 0,0,0],[Q4k, [[[1,0,0,0], [0,1,0,0],
[0,0,1,0], [0,0,0,1]], [[0,1,0,0], [α,0,0,0], [0,0,0,1], [0,0, α,0]], [[0,0,1,0], [0,0,0,1],
[β,0,0,0], [0,β,0,0]], [[0,0,0,1], [0,0, α,0], [0, β,0,0], [αβ,0,0,0]]],
[коммутативное удвоение систем C – W – Du, 1,0,0,0]], [Q4n, [[[1,0,0,0],
[0,1,0,0], [0,0,1,0], [0,0,0,1]], [[0,1,0,0], [-α,0,0,0], [0,0,0,1], [0,0, -α,0]], [[0,0,1,0],
[0,0,0,-1], [-β,0,0,0], [0,β,0,0]], [[0,0,0,1], [0,0,α,0], [0, -β,0,0], [-αβ,0,0,0]]],
[некоммутативное удвоение систем C – W – Du, 1,0,0,0]], [Qnk, [[[1,0,0,0],
[0,1,0,0], [0,0,1,0], [0,0,0,1]], [[0,1,0,0], [p,q,0,0], [0,0,0,1], [0,0, p,q]], [[0,0,1,0],
[0,0,0,1], [p,0,q,0], [0,p,0,q]], [[0,0,0,1], [0,0,p,q], [0,p,0,q], [p2,pq,pq, q2]]],
[автоудвоение системы Q2, коммутативная, 0,0,0]], [Qnp, [[[1,0,0,0], [0,1,0,0],
[0,0,1,0], [0,0,0,1]], [[0,1,0,0], [p,q,0,0], [0,0,0,1], [0,0, p,q]], [[0,0,1,0], [0,0,0,-1],
[p,0,q,0], [0,-p,0,-q]], [[0,0,0,1], [0,0,-p,-q], [0,p,0,q], [-p2,-pq,-pq,-q2]]],
[автоудвоение системы Q2, некоммутативная, 0,0,0]]]: RETURN(Lib): end;
```

В результаті звернення до цієї процедури на екран виводиться список таблиць Келі *Lib*.

10) **HyperLib[SearchHNS](NameHNS, nameRepos)** – процедура пошуку ГЧС в хранилищі.

Дана процедура має два вхідні параметри, серед яких *NameHNS* - ім'я шуканої ГЧС, *nameRepos* - ідентифікатор хранилища.

```
HyperLibSearchHNS := proc (NameHNS, nameRepos)
local i, inHNS;
for i to nops(nameRepos) do
```



```

if nameRepos[i,1]=nameHNS then inHNS:=nameRepos[i,2]
end if end do;
RETURN(inHNS)

```

**end proc**

При зверненні до цієї процедури отримаємо наступний результат:

```

> Sys:=HyperLib[SearchHNS] (Qnn, HyperLib[LibHNS]())
Sys := [[ [1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1]], [[0, 1, 0, 0], [p, q, 0, 0], [0, 0, 0, 1], [0, 0, p, q]], [[0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, -1], [p, 0, q, 0], [0, -p, 0, -q]], [[0, 0, 0, 1], [0, 0, -p, -q], [0, p, 0, q], [-p2, -p q, -p q, -q2]]]

```

11) **HyperLib[RefillHNS](nameLib, nameHNS)** – процедура видалення ГЧС із хранилища.

Дана процедура має два вхідні параметри, серед яких **nameLib** - ідентифікатор хранилища, **nameHNS** - ім'я ГЧС, яку потрібно видалити.

Тіло процедури **HyperLib[RefillHNS]** має наступний вигляд:

```

HyperLibRefillHNS := proc (nameLib, nameHNS)
local SI, i, j;
SI:=[seq(0, i=1..nops(nameLib)-1)];
j:=0;
for i to nops(nameLib) do
if nameLib[i,1]<>nameHNS then j:=j+1;
SI[j]:=nameLib[i] end if end do;
RETURN(SI)
end proc

```

Нижче наведено приклад звернення до процедури **HyperLib[RefillHNS]**.

Врезультаті її виконання на екрані буде виведено хранилище ГЧС без системи **nameHNS**. Наприклад, видалимо ГЧС *Qnk* з хранилища:

```

> Lib1:=HyperLib[RefillHNS] (HyperLib[LibHNS](),Qnk)
[[ [C, [[ [1, 0], [0, 1]], [[0, 1], [-1, 0]], [комплексная, 1, 0, 0, 0]], [W, [[ [1, 0], [0, 1]], [0, 1], [1, 0]], [двойная, 1, 0, 0, 0]], [Du, [[ [1, 0], [0, 1]], [[0, 1], [0, 0]],
.....

```

$[-\alpha \beta, 0, 0, 0]]$ , [некоммутативное удвоение систем  $C - W - Di, 1, 0, 0, 0]$ , [Qm,  
 $[[[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1]], [[0, 1, 0, 0], [p, q, 0, 0], [0, 0, 0, 1],$   
 $[0, 0, p, q]], [[0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, -1], [p, 0, q, 0], [0, -p, 0, -q]], [[0, 0, 0, 1], [0, 0,$   
 $-p, -q], [0, p, 0, q], [-p^2, -pq, -pq, -q^2]]]$ , [автоудвоение системы Q2,  
некоммутативная, 0, 0, 0]]

12) **HyperLib[VizLibHNS](LibHNS)** – процедура перегляду всіх ГЧС із хранилища.

Дана процедура має один вхідний параметр **LibHNS** - ідентифікатор хранилища.

Тіло процедури **HyperLib[VizLibHNS]** має наступний вигляд:

```
HyperLibVizLibHNS := proc (LibHNS)
local i, M;
print(Таблицы Кели всех ГЧС);
for i to nops(LibHNS) do
print(i, LibHNS[i,1], LibHNS[i,3,1]);
M:=HyperLib[VizHNS](LibHNS[i,2],E);
print(M)
end do
```

**end proc**

При зверненні до цієї процедури, отримаємо наступний результат:

> HyperLib[VizLibHNS]( HyperLib[LibHNS]())

*Таблицы Кели всех ГЧС*

1, C, комплексная

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ E_2 & -E_1 \end{bmatrix}$$

2, W, двойная

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ E_2 & E_1 \end{bmatrix}$$

3,  $Du$ , дуальная

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ E_2 & 0 \end{bmatrix}$$

4,  $H$ , кватернионы

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ E_2 & -E_1 & E_4 & -E_3 \\ E_3 & -E_4 & -E_1 & E_2 \\ E_4 & E_3 & -E_2 & -E_1 \end{bmatrix}$$

5,  $K$ , квадриплексные числа

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ E_2 & -E_1 & E_4 & -E_3 \\ E_3 & E_4 & -E_1 & -E_2 \\ E_4 & -E_3 & -E_2 & E_1 \end{bmatrix}$$

6,  $W1$ , двойная ортогональная

$$\begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}$$

7,  $Q2$ , обобщенная2

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ E_2 & p E_1 + q E_2 \end{bmatrix}$$

8,  $R \oplus C$ , вещественно — комплексная

$$\begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & E_3 \\ 0 & E_3 & -E_2 \end{bmatrix}$$

9,  $T$ , триплексная

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ E_2 & -\frac{1}{2} E_1 + \frac{1}{2} E_3 & -E_2 \\ E_3 & -E_2 & E_1 \end{bmatrix}$$

10,  $Q21$ , обобщенная — 2

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ E_2 & p E_1 \end{bmatrix}$$

11,  $Q4k$ , коммутативное удвоение систем  $C - W - Du$

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ E_2 & \alpha E_1 & E_4 & \alpha E_3 \\ E_3 & E_4 & \beta E_1 & \beta E_2 \\ E_4 & \alpha E_3 & \beta E_2 & \alpha \beta E_1 \end{bmatrix}$$

12,  $Q4n$ , некоммутативное удвоение систем  $C - W - Du$

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ E_2 & -\alpha E_1 & E_4 & -\alpha E_3 \\ E_3 & -E_4 & -\beta E_1 & \beta E_2 \\ E_4 & \alpha E_3 & -\beta E_2 & -\alpha \beta E_1 \end{bmatrix}$$

13,  $Qnk$ , автоудвоение системы  $Q2$

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ E_2 & p E_1 + q E_2 & E_4 & p E_3 + q E_4 \\ E_3 & E_4 & p E_1 + q E_3 & p E_2 + q E_4 \\ E_4 & p E_3 + q E_4 & p E_2 + q E_4 & p^2 E_1 + p q E_2 + p q E_3 + q^2 E_4 \end{bmatrix}$$

14, *Qm*, автоудвоение системы *Q2*

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ E_2 & p E_1 + q E_2 & E_4 & p E_3 + q E_4 \\ E_3 & -E_4 & p E_1 + q E_3 & -p E_2 - q E_4 \\ E_4 & -p E_3 - q E_4 & p E_2 + q E_4 & -p^2 E_1 - p q E_2 - p q E_3 - q^2 E_4 \end{bmatrix}$$

13) *HyperLib[inAdd](X, Y)* – процедура додавання двох гіперчисел *X* та *Y* в списковій формі. Тіло процедури має наступний вигляд:

```
HyperLib[inAdd] := proc (X, Y)
local C; C:=X+Y;
RETURN(C)
end
```

Результатом виконання цієї процедури є гіперкомплексне число в списковій формі, компонентами якого є суми компонент вхідних чисел, тобто:

>  $A := [5, -7, 1]; B := [b_1, b_2, b_3]$

$A := [5, -7, 1]$

$B := [b_1, b_2, b_3]$

>  $Z := \text{HyperLib[inAdd]}(A, B)$

$Z := [b_1 + 5, b_2 - 7, b_3 + 1]$

14) *HyperLib[Ad](A, B, dimHNS)* – процедура додавання двох гіперкомплексних чисел *A* та *B* вимірності *dimHNS* в натуральній формі.

Процедура виконується за наступним алгоритмом: спочатку вхідні числа, які потрібно додати, переводяться в спискову форму за допомогою процедури *HyperLib[ConvertA]*, додаються, а потім їхня сума, яка має спискову форму, переводиться процедурою *HyperLib[VizInA]* в натуральну форму:

```
HyperLibAd := proc (A, B, dimHNS)
local C, X;
C:=HyperLib[ConvertA](A, dimHNS) + HyperLib[ConvertA](B, dimHNS);
```

$X := \text{HyperLib}[\text{VizInA}](C, e)$

**end proc**

Далі наведено результат виконання процедури **HyperLib[Ad]**:

$> A := 5e_1 - 7e_2 + e_3; B := b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$

$$A := 5e_1 - 7e_2 + e_3$$

$$B := b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$

$> Z := \text{HyperLib}[\text{Ad}](A, B, 3)$

$$Z := (b_1 + 5)e_1 + (b_2 - 7)e_2 + (b_3 + 1)e_3$$

15) **HyperLib[Subtr](A, B, dimHNS)** – процедура віднімання двох гіперкомплексних чисел **A** та **B** вимірності **dimHNS** в натуральній формі.

Процедура побудована за аналогічним принципом як і процедура **HyperLib[Ad]**. Тобто, спочатку вхідні гіперкомплексні числа переводяться з натуральної форми в спискову, віднімаються та результат переводиться в натуральну форму за допомогою відповідних процедур, описаних вище.

**HyperLib<sub>Subtr</sub> := proc** (*A, B, dimHNS*)

**local** *C*;

*C* := **HyperLib**[**VizInA**](**HyperLib**[**ConvertA**](*A, dimHNS*) – **HyperLib**[**ConvertA**](*B, dimHNS*), **HyperLib**[**nameBas**](*B*))

**end proc**

Наведемо приклад звернення до процедури **HyperLib[Subtr]**:

$> A := 5e_1 - 7e_2 + e_3; B := b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$

$$A := 5e_1 - 7e_2 + e_3$$

$$B := b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$

$> C := \text{HyperLib}[\text{Subtr}](A, B, 3)$

$$C := (-b_1 + 5)e_1 + (-b_2 - 7)e_2 + (-b_3 + 1)e_3$$

16) **HyperLib[inMulti](A, B, HNS)** – процедура множення двох гіперкомплексних чисел в списковій формі.

Вхідними параметрами являються гіперкомплексні множники **A** та **B**, ще одним, третім параметром є **HNS** - ім'я ГЧС, якій належать множники а яким визначається таблиця Келі з допомогою процедури **HyperLib[LibHNS]**.

Процедура реалізує узагальнену формулу множення гіперкомплексних чисел:  $A \cdot B = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_i b_j \gamma_{ij}^k$ , де  $n$  - вимірність ГЧС,  $\gamma_{ij}^n$  - структурні константи законів композиції ГЧС.

Повний текст програми наведено нижче:

```

HyperLibinMulti := proc (A, B, HNS)
local X, k, i, j, Lib, HNSI;
  Lib:=HyperLib[LibHNS]();
  HNSI:=HyperLib[SearchHNS](HNS,Lib);
  X:=[seq(0, i=1..nops(HNSI[1]))];
  for k from 1 to nops(HNSI[1]) do
    X[k]:=0;
for i from 1 to nops(HNSI[1]) do
for j from 1 to nops(HNSI[1]) do
    X[k]:=X[k]+A[i]*B[j]*HNSI[i,j,k];
  end do end do end do;
  RETURN(X)
end proc

```

Врезультаті виконання цієї процедури ми отримаємо гіперкомплексне число в списковій формі, наприклад, при множенні двох комплексних чисел в списковому вигляді отримаємо наступний результат:

> A:= [a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>]; B:= [b<sub>1</sub>, b<sub>2</sub>]

$$A := [a_1, a_2]$$

$$B := [b_1, b_2]$$

> X:=HyperLib[inMulti](A, B, C)

$$X := [a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1]$$



17) ***HyperLib[natMulti](A, B, HNS, nBas)*** – процедура множення двох гіперкомплексних чисел в натуральній формі.

Алгоритм виконання цієї процедури полягає в такій послідовності дій: спочотку добутки переводяться процедурою ***HyperLib[ConvertA]*** в спискову форму, а потім перемножаються за попередньою процедурою ***HyperLib[inMulti]*** та закінчується переведенням результату в натуральну форму за процедурою ***HyperLib[VizInA]***.

На відміну від процедури ***HyperLib[inMulti]***, дана процедура має ще й четвертий вхідний параметр ***nBas*** - ідентифікатор базису, який використовується процедурою для переведення добутки в натуральну форму.

Отже, тіло процедури ***HyperLib[natMulti]*** має наступний вигляд:

```
HyperLibnatMulti := proc (A, B, HNS, nBas)
  HyperLib[VizInA](HyperLib[inMulti](HyperLib[ConvertA](A, nops
(HyperLib[SearchHNS](HNS,HyperLib[LibHNS]()))), HyperLib [ConvertA](B,
nops(HyperLib[SearchHNS](HNS, HyperLib [LibHNS]()))), HNS), nBas)
end proc
```

Як уже було зазначено вище, в результаті виконання цієї процедури отримуємо гіперкомплексне число в натуральній формі. Наприклад, при множенні двох комплексних чисел результат матиме наступний вигляд:

$$> A := a_1 e_1 + a_2 e_2; B := b_1 e_1 + b_2 e_2$$

$$A := a_1 e_1 + a_2 e_2$$

$$B := b_1 e_1 + b_2 e_2$$

$$> Z := \text{HyperLib[natMulti]}(A, B, C, e)$$

$$Z := (a_1 b_1 - a_2 b_2) e_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) e_2$$

18) ***HyperLib[Norma](A, nameHNS)*** – процедура визначення псевдонорми гіперкомплексного числа.

В якості вхідних параметрів тут виступають: ***A*** - гіперкомплексне число в списковій формі та ***nameHNS*** - ім'я ГЧС.

Алгоритм виконання цієї процедури полягає в наступній послідовності дій. Перш за все, за таблицею Келі ГЧС визначається її вимірність, потім знаходиться матриця норми, компонентами якої є лінійні комбінації структурних констант та коефіцієнтів гіперкомплексного числа. На останньому кроці обчислюється детермінант матриці за допомогою стандартної процедури Maple, та результат виводиться на екран. На рис. Д.1 наведено блок схему виконання процедури *HyperLib[Norma]*.

```

HyperLibNorma := proc (A, nameHNS)
  local M, j, k, i, N, lib, HNS;
  lib:=HyperLib[LibHNS]();
  HNS := HyperLib[SearchHNS](nameHNS,lib);
  M:=Matrix(nops(HNS));
  for j from 1 to nops(HNS) do
  for k from 1 to nops(HNS) do for i
  from 1 to nops(HNS) do M[j,k]:=M[j,k]+HNS[i,j,k]*A[i]
  end do end do end do; RETURN(det(M))
end proc

```

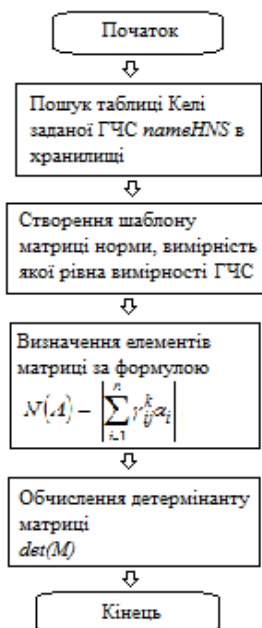


Рис. Ж.1. Блок-схема процедури знаходження псевдонорми гіперкомплексного числа

Наприклад, для довільного кватерніона норма, обчислена за допомогою процедури *HyperLib[Norma]* матиме вигляд:

$$> A := [a_1, a_2, a_3, a_4]$$

$$A := [a_1, a_2, a_3, a_4]$$

>  $M := \text{HyperLib}[\text{Norma}](A, H)$

$$M := a_1^4 + 2 a_1^2 a_2^2 + 2 a_4^2 a_1^2 + 2 a_3^2 a_1^2 + a_2^4 + 2 a_4^2 a_2^2 + 2 a_3^2 a_2^2 + a_3^4 + 2 a_3^2 a_4^2 + a_4^4$$

Отриманий результат можна спростити за допомогою стандартної команди Maple, а саме:

>  $M1 := \text{factor}(M)$

$$M1 := (a_1^2 + a_2^2 + a_4^2 + a_3^2)^2$$

Врезультаті отримали відоме представлення норми кватерніона.

19) ***HyperLib[Unit](nameHNS, name)*** – процедура визначення одиничного елемента.

Процедура має два вхідних параметри: ***nameHNS*** - ім'я ГЧС, в якій проводяться обчислення; ***name*** - ім'я базису ГЧС.

Ця процедура полягає у виконанні наступного алгоритму дій. Спочатку відбувається звернення до хранилища ГЧС, потім задане гіперкомплексне число  $A$  та шуканий одиничний елемент  $X$  представляються у вигляді позиційних списків коефіцієнтів. На наступному кроці за допомогою процедури ***HyperLib[inMulti]*** обчислюється добуток чисел  $A$  та  $X$ , та із рівняння  $X \cdot A = A$  складається система рівнянь.

Отримана система рівнянь розв'язується за допомогою стандартної програми *solve*. Далі результат із спискового вигляду переводиться, за допомогою процедури ***HyperLib[VizInA]***, в натуральну форму.

Після закінчення виконання програми, на екрані виводиться список з двох елементів. Першим елементом такого списку є шуканий одиничний елемент в списковій формі, а другим – цей же елемент в натуральній формі.

```
HyperLibUnit := proc (nameHNS, name)
local lib, HNS, X, A, sys, i, inU, U;
lib := HyperLib[LibHNS]();
HNS := HyperLib[SearchHNS](nameHNS, lib);
```

```

X:=[seq(x[i], i=1..nops(HNS))];
A:=[seq(a[i], i=1..nops(HNS))];
sys:=[seq(0, i=1..nops(HNS))];
for i from 1 to nops(HNS) do
  sys[i]:=HyperLib[inMulti](X,A,nameHNS)[i]=A[i] end do;
X:=solve(sys,X)[1];
inU:=[seq(inU[i], i=1..nops(HNS))];
for i from 1 to nops(HNS) do
  inU:=rhs(X[i]);
  U:=HyperLib[VizInA](inU,name) end do;
  RETURN([inU, U])
end proc

```

Далі наведено результат виконання процедури **HyperLib[Unit]**.

> *OneEl:=HyperLib[Unit](Q4k e)*

$$OneEl := [ [ 1, 0, 0, 0 ], e_1 ]$$

20) **HyperLib[Conjug](A, nameHNS, name)** – процедура визначення спряженого числа.

Дана процедура має три вхідні параметри:  $A$  - гіперкомплексне число в списковій формі, **nameHNS** - ім'я ГЧС, в якій проводиться дослідження та **name** - ідентифікатор базису.

Алгоритм виконання процедури **HyperLib[Conjug]** має наступні кроки. Спочатку відбувається звернення до хранилища таблиць Келі ГЧС, потім невідомий шуканий елемент  $X$  представляються у вигляді позиційного списку коефіцієнтів. На наступному кроці, якщо  $A$  – ненульовий елемент, за допомогою процедури **HyperLib[inMulti]** обчислюється добуток чисел  $A$  та  $X$ , та із рівняння  $A \cdot X = N(A)$  складається система рівнянь.

Отримана система рівнянь розв'язується за допомогою стандартної програми *solve*. Далі результат із спискового вигляду переводиться, за допомогою процедури **HyperLib[VizInA]**, в натуральну форму.

Після закінчення виконання програми, на екрані виводиться список з двох елементів. Першим елементом такого списку є шуканий спряжений елемент в списковій формі, а другим – спряжений елемент в натуральній формі.

Блок-схема (рис. Д.2) та тіло процедури мають наступний вигляд:

```

HyperLibConjug := proc (A, nameHNS, nam)
local lib, HNS, X, conA, sys,  $\varepsilon$ , i, natconA;
lib := HyperLib[LibHNS]();
HNS := HyperLib[SearchHNS] (nameHNS, lib);
X := [seq(x[i], i = 1..nops(HNS))];
conA := [seq(0, i = 1..nops(HNS))];
if HyperLib[VizInA](A, e) <> 0 then
  sys := [seq(0, i = 1..nops(HNS))];
   $\varepsilon$  := HyperLib[Unit](nameHNS, nam);
  for i from 1 to nops(HNS) do
    sys[i] := HyperLib[inMulti](A, X, nameHNS)[i] =
      = expand(HyperLib[Norma](A, nameHNS) *  $\varepsilon$ )[1, i] end do;
for i from 1 to nops(HNS) do
  conA[i] := rhs(solve(sys, X)[1, i]
end do end if;
natconA := HyperLib[VizInA](conA, nam);
RETURN([conA, natconA])
end proc

```

Знайдемо представлення спряженого елемента в системі дуальних чисел,

яка в хранилищі ГЧС має ім'я *Du*.

>  $A := [a_1, a_2]$

$A := [a_1, a_2]$

>  $Conj := \text{HyperLib}[Conjug](A, Du, e)$

$Conj := [[a_1, -a_2], a_1 e_1 - a_2 e_2]$

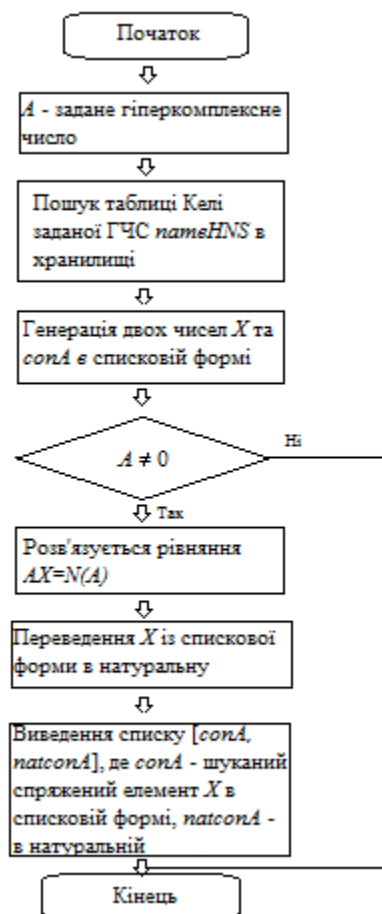


Рис. Ж.2. Блок-схема вираження спряженого елемента

21) *HyperLib[Divis](A,B,nameHNS)* – процедура ділення двох гіперкомплексних чисел.

Дана процедура має три вхідні параметри, два з яких це гіперкомплексні числа – ділене та дільник, а третій параметр – ім'я ГЧС, в якій виконується ділення.

Процедура полягає в послідовному виконанні наступних кроків. Спочатку відбувається звернення до хранилища таблиць Келі ГЧС, потім, якщо ділене та дільник представлені в натуральній формі, то вони переводяться в спискову за допомогою відповідної процедури. На наступному кроці перевіряється чи псевдонорма дільника рівна нулю, якщо так, то так то ділення не виконується і на екран виводиться інформація «дільник нуля, або ділення на нуль». В протилежному випадку, за допомогою процедури *HyperLib[inMulti]*

обчислюється добуток чисел  $A$  та спряженого до  $B$ . Далі отриманий добуток ділиться на норму дільника.

Після закінчення виконання програми, на екрані виводиться список з двох елементів. Першим елементом такого списку є частка в списковій формі, а другим – частка в натуральній формі, яка отримується із першого за допомогою процедури **HyperLib[VizInA]**. Блок-схема цієї процедури наведена на рис. Д.3.

Процедура має наступний вигляд:

```

HyperLibDivis := proc ( $A, B, nameHNS$ )
local  $lib, HNS, inF, inA, inB, n, nom, i$ ;
 $lib := HyperLib[LibHNS]();$ 
 $HNS := HyperLib[SearchHNS](nameHNS, lib);$ 
 $inF := [seq(0, i=1..nops(HNS)[2])];$ 
if  $whattype(A) <> list$  then
 $inA := HyperLib[ConvertA](A, nops(HNS)[2])$  else  $inA := A$  end if;
if  $whattype(B) <> list$  then
 $inB := HyperLib[ConvertA](B, nops(HNS)[2])$  else  $inB := B$  end if;
 $n := HyperLib[Norma](inB, nameHNS);$ 
if  $n=0$  then  $print("Деление на нуль или делитель нуля")$  else
 $nom := HyperLib[inMulti](inA, HyperLib[Conjug](inB, nameHNS, f)[1],$ 
 $nameHNS);$ 
for  $i$  to  $nops(HNS)[2]$  do  $inF[i] := nom[i]/n$  end do end if;
RETURN ( $[inF, HyperLib[VizInA](inF, e)]$ )
end proc

```

Нижче наведено приклад виконання вищеприписаної процедури

**HyperLib[Divis]** в системі комплексних чисел:

>  $A := [a_1, a_2]; B := [b_1, b_2]$

$$A := [a_1, a_2]$$

$$B := [b_1, b_2]$$

>  $Div := HyperLib[Divis](A, B, C)$

$$Div := \left[ \left[ \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{b_1^2 + b_2^2}, \frac{-a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1^2 + b_2^2} \right], \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2) e_1}{b_1^2 + b_2^2} + \frac{(-a_1 b_2 + a_2 b_1) e_2}{b_1^2 + b_2^2} \right]$$

>  $A := a_1 e_1 + a_2 e_2; B := [b_1, b_2]$

$$A := a_1 e_1 + a_2 e_2$$

$$B := b_1 e_1 + b_2 e_2$$

>  $Div1 := HyperLib[Divis](A, B, C)$

$$Div1 := \left[ \left[ \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{b_1^2 + b_2^2}, \frac{-a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1^2 + b_2^2} \right], \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2) e_1}{b_1^2 + b_2^2} + \frac{(-a_1 b_2 + a_2 b_1) e_2}{b_1^2 + b_2^2} \right]$$

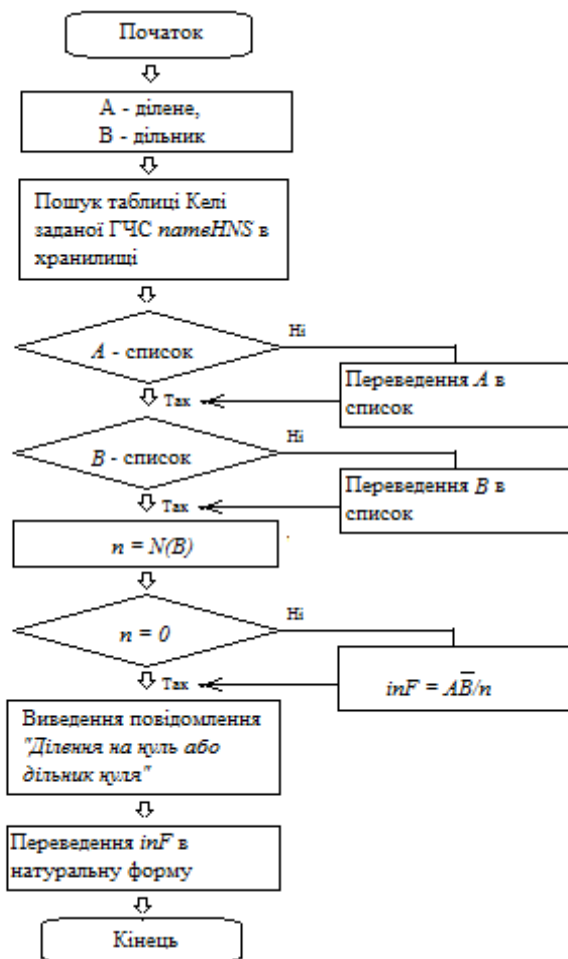


Рис. Ж.3. Блок-схема виконання процедури ділення двох гіперкомплексних чисел

22)  $HyperLib[Trans](M, s, t)$  – процедура транспозиції рядків і стовпців таблиці Келі ГЧС.

Серед вхідних параметрів матриця  $M$  - це ідентифікатор таблиці Келі ГЧС, а  $s$  та  $t$  - номери рядків (стовпців), які міняються місцями.

Нижче наведено повний текст процедури:

**$HyperLib_{Trans} := \text{proc } (M, s, t)$**   
**local  $n, N, i, j, P;$**



```

n:=coldim(M);
N:=Matrix(n)
for i to n do for j to n do N[i,j]:=M[i,j] end do end do;
for i to n do N[t,i]:=row(M,s)[i];
N[s,i]:=row(M,t)[i] end do;
P:=Matrix(n);
for i to n do for j to n do P[i,j]:=N[i,j] end do end do;
for i to n do P[i,t]:=col(N,s)[i];
P[i,s]:=col(N,t)[i] end do;
RETURN(P)
end proc

```

Нижче наведено результат виконання процедури *HyperLib[Trans]* на прикладі таблиці Келі системи квадриплексних чисел:

$$> K := \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & -e_1 & e_4 & -e_3 \\ e_3 & e_4 & -e_1 & -e_2 \\ e_4 & -e_3 & -e_2 & e_1 \end{bmatrix}$$

$$K := \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & -e_1 & e_4 & -e_3 \\ e_3 & e_4 & -e_1 & -e_2 \\ e_4 & -e_3 & -e_2 & e_1 \end{bmatrix}$$

> K1:=HyperLib[Trans](K,2,3)

$$K1 := \begin{bmatrix} e_1 & e_3 & e_2 & e_4 \\ e_3 & -e_1 & e_4 & -e_2 \\ e_2 & e_4 & -e_1 & -e_3 \\ e_4 & -e_2 & -e_3 & e_1 \end{bmatrix}$$

23) *HyperLib[AddHNS](Name,Table,Comment,Type)* – процедура поповнення хранилища на одну ГЧС.

Серед чотирьох вхідних параметрів *Name* – символічне ім'я ГЧС, *Table* - таблиця Келі ГЧС, яка додається, *Comment* - назва ГЧС, *Type* – комутативність.

Дана процедура поповнює процедуру-хранилище ГЧС *HyperLib[LibHNS]* на одну систему, яку розміщує вкінці списку.

Процедура має наступний вигляд:

```
HyperLibAddHNS := proc (Name, Table, Comment, Type)
local lib, HNS;
lib := HyperLib[LibHNS](0);
HNS := HyperLib[inConvertHNS](Table, Name);
HNS[3,1] := Comment;
HNS[3,2] := Type;
lib := HyperLib[Refill](lib, HNS);
RETURN(lib)
end proc
```

Наприклад, доповнимо існуюче хранилище ГЧС *HyperLib[LibHNS]* системою антикватерніонів *AH*:

$$> \text{TabAH} := \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & -e_1 & e_4 & -e_3 \\ e_3 & -e_4 & e_1 & -e_2 \\ e_4 & e_3 & e_2 & e_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{TabAH} := \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & -e_1 & e_4 & -e_3 \\ e_3 & -e_4 & e_1 & -e_2 \\ e_4 & e_3 & e_2 & e_1 \end{bmatrix}$$

> *lib1* := *HyperLib[AddHNS]*(*AH, TabAH, антикватерниони, коммутативная*)

Оскільки хранилище ГЧС доволі громіздке, то обмежимося представленням лише той її частини, яка містить додану ГЧС:

*lib1* := [...

$0, q, 0], [0, -p, 0, -q], [[0, 0, 0, 1], [0, 0, -p, -q], [0, p, 0, q], [-p^2, -pq, -pq, -q^2]]],$   
 $[автоудвоение системы Q2, некоммутативная, 0, 0, 0], [AH, [[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1,$   
 $0], [0, 0, 0, 1]], [[0, 1, 0, 0], [-1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1], [0, 0, -1, 0]], [[0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, -1],$   
 $[1, 0, 0, 0], [0, -1, 0, 0]], [[0, 0, 0, 1], [0, 0, 1, 0], [0, 1, 0, 0], [1, 0, 0, 0]], [антикватернионы,$   
 $некоммутативная, 0, 0, 0]]]$

24) **HyperLib[GenIzo](L::Matrix,nameHNS,newBas)** – процедура генерації ізоморфної ГЧС шляхом лінійного перетворення базису.

Вхідними параметрами тут виступають **L** - оператор лінійного перетворення базису, **Matrix** – його тип, **nameHNS** - ім'я ГЧС, яка перетворюється, **newBas** - ідентифікатор нового базису.

На виході отримуємо список, першим елементом якого є таблиця множення нових базисних елементів, представлених списковою формою, а другим – та ж таблиця з елементами в натуральній формі.

Процедура **HyperLib[GenIzo]** має наступний вигляд:

```

HyperLibGenIzo := proc (L::Matrix,nameHNS,newBas)
  local lib, HNS, Lt, n, i, g, G, j, G1, s, G2;
  lib:=HyperLib[LibHNS]();
  HNS:=HyperLib[SearchHNS](NameHNS,lib);
  Lt:=1/L';
  n:=vectdim(L[1]);
  for i to n do g[i]:=convert(row(L,i),list) end do;
  G:=Matrix(n);
  for i to n do for j to n do
    G[i,j]:=HyperLib[inMulti](g[i],g[j],nameHNS) end do end do;
  G1:=Matrix(n);
  for i to n do for j to n do: for s to n do
    G1[i,j]:=G1[i,j]+G[i,j][s]*convert(row(Lt,s),list)
  end do end do end do;
  G2:=Matrix(n);
  for i to n do for j to n do;
    G2[i,j]:=HyperLib[VizInA](G1[i,j],newBas) end do end do;
  RETURN(G1,G2)
end proc

```

Далі наведено результат виконання процедури **HyperLib[GenIzo]**:

$$> e_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; e_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; L := e_1 + e_2$$

$$e_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

>  $G := \text{HyperLib}[\text{GenIzo}](L, Du, E)$

$$G := \begin{bmatrix} [1, 1] & [0, 1] \\ [0, 1] & [0, 0] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} E_1 + E_2 & E_2 \\ E_2 & 0 \end{bmatrix}$$

25) **HyperLib[DimSum2](Name1, Name2)** – процедура побудови прямої суми двох ГЧС з іменами *Name1* та *Name2*.

На виході отримуємо список, першим елементом якого є ім'я нової ГЧС, другим – її таблиця Келі в списковій формі.

Процедура **HyperLib[DimSum2]** має наступний вигляд:

```
HyperLibDimSum2 := proc (Name1, Name2)
local lib, HNS1, HNS2, n, dir, i, j;
lib := HyperLib[LibHNS]();
HNS1 := HyperLib[SearchHNS](Name1, lib);
HNS2 := HyperLib[SearchHNS](Name2, lib);
n[1] := nops(HNS1);
n[2] := nops(HNS2);
n[3] := n[1] + n[2];
dir := HyperLib[ListHNS](n[3]);
dir[1] := Name1 ⊕ Name2;
for i to n[1] do
  for j to n[1] do dir[2][i, j] := HNS1[i, j] end do;
  for j from n[1] + 1 to n[3] do dir[2][i, j] := 0 end do end do;
  for i from n[1] + 1 to n[3] do
    for j to n[1] do dir[2][i, j] := 0 end do;
    for j from n[1] + 1 to n[3] do dir[2][i, j] := HNS2[i - n[1], j - n[1]] end do end do;
RETURN(dir)
```

**end proc**

Нижче наведено результат виконання процедури *HyperLib[DimSum2]*. В результаті прямої суми двох ГЧС подвійних чисел  $W$ , отримали подвійну-подвійну систему чисел  $W \oplus W$ :

> *NewSys* := *HyperLib[DimSum2]*( $W, W$ )

*NewSys* := [ $W \oplus W$ , [[ [1, 0], [0, 1], 0, 0], [0, 1], [1, 0], 0, 0], [0, 0, [1, 0], [0, 1]], [0, 0, [0, 1], [1, 0]], [0, 0, 0, 0, 0]]]

26) *HyperLib[DimSumN](Spisok, nameBas)* – процедура побудови прямої суми декількох ГЧС.

Вхідними параметрами цієї процедури є *Spisok* - список імен ГЧС, які додаються та *nameBas* - ідентифікатор базису утвореної ГЧС.

На виході отримуємо список, першим елементом якого є таблиця Келі нової ГЧС в списковій формі, другим – та ж таблиця Келі в натуральній формі.

Процедура *HyperLib[DimSumN]* має наступний вигляд:

```
HyperLibDimSumN := proc (Spisok, nameBas)
local lib, n, i, HNS, N, spis, dir, j, b, e, s, k, DirSum;
lib := HyperLib[LibHNS]();
n := nops(Spisok);
for i to n do
  HNS[i] := HyperLib[SearchHNS](Spisok[i], lib) end do;
  N := 0;
  for i to n do N := N + nops(HNS[i]) end do;
  spis := [seq(0, i = 1..N)];
  dir := HyperLib[ListHNS](N);
  dir[1] := Spisok[1];
  for i from 2 to n do dir[1] := cat(dir[1], "⊕", Spisok[i]) end do;
  for i to N do
    for j to N do dir[2, i, j] := spis end do end do;
b := 1;
e := 0;
for s to n do e := e + nops(HNS[s]);
  for k from b to e do
    for i from b to e do
      for j from b to e do
        dir[2, k, i, j] := HNS[s][k - b + 1][i - b + 1][j - b + 1]
      end do end do end do;
  b := e + 1 end do;
```

```

DirSum:=HyperLib[VizHNS](dir[2],nameBas);
RETURN(dir, DirSum)
end proc

```

Нижче наведено результат виконання процедури **HyperLib[DimSumN]**.

В результаті прямої суми двох ГЧС подвійних чисел  $W$ , отримали подвійну-подвійну систему чисел  $W \oplus W$ :

```
> NSys:= HyperLib[DimSumN](C,C)
```

```

NSys := [C ⊕ C, [[ [1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0] ], [ [0, 1, 0, 0], [-1, 0, 0, 0],
0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0] ], [ [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1] ], [ [0, 0, 0, 0],

```

$$0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1], [0, 0, -1, 0]], [0, 0, 0, 0, 0]], \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & 0 & 0 \\ e_2 & -e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & e_4 \\ 0 & 0 & e_4 & -e_3 \end{bmatrix}$$

27) **HyperLib[HNSnumber](n,Name,NameBas)** – процедура генерації гіперкомплексного числа.

Серед вхідних параметрів  $n$  - вимірність, **Name** - ім'я компонент числа, **NameBas** - ім'я базису ГЧС.

На виході отримуємо два елементи, першим з яких є гіперкомплексне число в списковій формі, другим – те саме число в натуральній формі.

Процедура **HyperLib[HNSnumber]** має наступний вигляд:

```

HyperLibHNSnumber := proc (n,Name,NameBas)
local A, i;
A:= [seq(0,i=1..n)];
for i from 1 to n do
A[i]:=Name[i] end do;
RETURN(A,HyperLib[VizInA](A,NameBas))
end proc

```

Нижче наведено результат виконання процедури **HyperLib[HNSnumber]**:

```
> A:= HyperLib[HNSnumber](6, a, e)
```

$$A := [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6], a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6$$

**Додаток 3. Список публікацій за темою дисертації**

1. Калиновский Я. А. Гиперкомплексные числовые системы четвертой размерности / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало. – Київ: ІПРІ НАН України. – 2017. – 126 с. – монографія.
2. Калиновский Я. А. Система гиперкомплексных операций в Maple / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Я. В. Хицко, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2017. – Т. 19, № 2. – С. 11 – 23. (Індексується та реферується в ICI Journals Master List).
3. Калиновский Я. А. Исследование алгебраических и функциональных свойств обобщенных гиперкомплексных систем четвертой размерности / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2017. – Т. 19, № 1. – С. 22 – 33. (Індексується та реферується в ICI Journals Master List).
4. Каліновський Я. О. Побудова представлень логарифмічної функції в одному класі комутативних ГЧС четвертої вимірності / Я. О. Каліновський, Ю. Є. Боярінова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2016. – Т. 18, № 4. – С. 12 – 23. (Індексується та реферується в ICI Journals Master List).
5. Калиновский Я. А. Исследование свойств обобщенных гиперкомплексных числовых систем четвертой размерности, полученных процедурой удвоения Грасмана-Клиффорда / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2016. – Т. 18, № 3. – С. 3 – 11. (Індексується та реферується в ICI Journals Master List).
6. Калиновский Я. А. Разработка представлений гиперболических и тригонометрических нелинейностей в системе обобщенных кватернионов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Т. В. Синькова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2016. – Т. 18, № 1. – С. 14 – 22. (Індексується та реферується в ICI Journals Master List).
7. Калиновский Я. А. Свойства обобщенных кватернионов и их связь с процедурой удвоения Грассмана-Клиффорда / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Туренко (А. С. Сукало), Я. В. Хицко // Электронное моделирование. – 2015. – Т. 37, № 2. – С. 17 – 26. (Індексується та реферується в Cambridge Scientific Abstracts, Computer and Information Systems Abstracts, INIS Collection, Inspec, BINITI РАН).
8. Калиновский Я. А. Исследование вычислительных операций в гиперкомплексной числовой системе антикватернионов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Я. В. Хицко, А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Электронное моделирование. – 2014. – Т. 36, № 5. – С. 49 – 65. (Індексується та реферується

в Cambridge Scientific Abstracts, Computer and Information Systems Abstracts, INIS Collection, Inspec, BINITI РАН).

9. Калиновский Я. А. Математическое моделирование представлений экспоненциальной и логарифмической функций в гиперкомплексной числовой системе обобщенных кватернионов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2015. – Т. 17, № 4. – С. 11 – 20.
10. Калиновский Я. А. Построение алгоритма цифровой подписи с использованием функций от обобщенных кватернионов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2015. – Т. 17, № 3. – С. 48 – 55.
11. Каліновський Я. О. Синтез матричних представлень узагальнених кватерніонів / Я. О. Каліновський, Ю. Є. Боярінова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2015. – Т. 17, № 2. – С. 14 – 29.
12. Каліновський Я. О. Дослідження зв'язків між узагальненими кватерніонами та процедурою подвоєння ГЧС / Я. О. Каліновський, Ю. Є. Боярінова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2015. – Т. 17, № 1. – С. 36 – 45.
13. Каліновський Я. О. Обчислювальні властивості одного класу некомутативних гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності / Я. О. Каліновський, Ю. Є. Боярінова, А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2014. – Т. 16, № 3. – С. 12 – 24.
14. Калиновский Я. А. Программный комплекс для гиперкомплексных вычислений / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Т. В. Синькова, А. С. Сукало // Электронное моделирование. – 2017. – Т. 39, № 5. – С. 81 – 96.
15. Калиновский Я. А. Построение высокоразмерных изоморфных гиперкомплексных числовых систем для повышения эффективности вычислительных процессов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Т. В. Синькова, А. С. Сукало // Электронное моделирование. – 2016. – Т. 38, № 6. – С. 67 – 84.
16. Калиновский Я. А. Разработка представлений тригонометрических функций в числовой системе обобщенных кватернионов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Т. В. Синькова, А. С. Сукало // Электронное моделирование. – 2016. – Т. 38, № 3. – С. 23 – 32.
17. Туренко А. С. Дослідження обчислювальних властивостей системи антикватерніонів / А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2014. – Т. 16, № 2. – С. 62 – 73.



18. Туренко А. С. (Сукало А. С.) Дослідження властивостей одного узагальнення гіперкомплексної системи кватерніонів / А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2014. – Т. 16, № 1. – С. 19 – 27.
19. Kalinovsky Ya.A. Principles of constructing algorithms for processing digital signals using hypercomplex number systems / Ya.A. Kalinovsky, Yu.E. Boyarinova, Ya.V. Khitsko, A.S. Sukalo // 20th International Conference on System Analysis and Information Technology( SAIT 2018). – К.: Institute for Applied System Analysis of National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, 2018. – P. 194–195.
20. Каліновський Я. О. Моделювання практичних задач за допомогою програмного комплексу гіперкомплексних обчислень / Я.О. Каліновський, А. С. Сукало // Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій: матеріали Міжнародної наукової конференції ( 2 – 4 березня 2018 р.). – Рівне, 2018. – С. 49 – 51.
21. Калиновский Я. А. Обработка гиперкомплексных данных с использованием пакета символьных вычислений в среде Maple / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Глобальні та регіональні проблеми інформатизації в суспільстві і природокористуванні ‘2017: матеріали 5-ї Міжнародної науково-технічної конференції НУБіП України (22 – 23 червня 2017 р.). – К.: Компринт. – 2017. – С. 63 – 65.
22. Калиновский Я. А. Пакет гиперкомплексных символьных вычислений в среде Maple / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало, Я. В. Хицко // Системный анализ и информационные технологии: материалы 19-й Международной научно-практической конференции SAIT 2017. – К.: УНК «ИПСА» КПИ им. Игоря Сикорского, 2017. – С. 232.
23. Сукало А. С. Підсистема визначення алгебраїчних характеристик гіперкомплексних даних спеціалізованої бібліотеки процедур в середовищі символьних обчислень Maple / А. С. Сукало // Матеріали щорічної підсумкової конференції ІПРІ НАН України. – Київ, ІПРІ НАНУ. – 2017. – С. 51 – 52.
24. Калиновский Я. А. Применение обобщенных кватернионов в цифровой подписи / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Системный анализ и информационные технологии: материалы 18-й Международной научно-практической конференции SAIT 2016. – К.: УНК «ИПСА» КПИ им. Игоря Сикорского, 2016. – С. 327.
25. Калиновский Я. А. Обобщение кватернионов вращения и связь с процедурой удвоения Грассмана-Клиффорда / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Системный анализ и информационные технологии: материалы 17-й Международной научно-практической конференции SAIT 2015. – К.: УНК «ИПСА» КПИ им. Игоря Сикорского, 2015. – С. 50.

26. Туренко А. С. (Сукало А. С.) Програмно-алгоритмічні засоби дослідження обчислювальних властивостей гіперкомплексних чисел в середовищі символічних обчислень Maple / А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Матеріали щорічної підсумкової конференції ІПРІ НАН України ( 26 – 27 травня 2015 р.). – Київ, ІПРІ НАНУ. – 2015. – С. 110 – 112.
27. Калиновский Я. А. Исследование классов изоморфизма неканонических гиперкомплексных числовых систем размерности 2 / Я. А. Калиновский, Я. В. Хицко, А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Системный анализ и информационные технологии: материалы 16-й Международной научно-практической конференции SAIT 2014. – К.: УНК «ИПСА» КПИ им. Игоря Сикорского, 2014. – С. 93.
28. Туренко А. С. (Сукало А. С.) Дослідження властивостей антикватерніонної гіперкомплексної числової системи / А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Матеріали щорічної підсумкової конференції ІПРІ НАН України. – Київ, ІПРІ НАНУ. – 2014. – С. 102 – 103.