

LA ESTRUCTURA COMO UN PROCESO EXPERIMENTAL DE DISEÑO

Arq. Rosa Elena Alvarez Martínez

ROSA ELENA ALVAREZ MARTINEZ

Realiza estudios de Arquitectura en la Universidad Nacional Autónoma de México y recibe el título de Licenciatura en 1968. Cursa la Maestría en Enseñanza Superior en la Escuela de Ciencias de la Educación de la Universidad La Salle.

Cuenta con Diplomado en Ciencias de la Educación y cursos de actualización en la Dirección General de Capacitación y Mejoramiento Profesional de la Secretaría de Educación Pública en temas de matemáticas y su didáctica así como cursos de Actualización y Superación Académica en la Universidad Autónoma Metropolitana en temas de tecnología, diseño, administración y computación.

Ha impartido cursos de actualización en Pedagogía, Didáctica e Investigación Educativa. Su participación en seminarios y en otras Instituciones y congresos en otras Universidades del País es importante.

Cuenta con cuatro publicaciones editadas por la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM) Azcapotzalco y en la División de Ciencias y Artes para el Diseño (CYAD).

En el campo profesional ha realizado y desarrollado diversos proyectos arquitectónicos y supervisión de obra.

Su actividad docente es a partir de 1968 en Institución a nivel medio superior y de Licenciatura, desempeñando cargos administrativos como Jefe de Área y Jefe de Departamento y es actualmente profesora investigadora de tiempo completo en la División CYAD de la Universidad Autónoma Metropolitana, Azcapotzalco.

LA ESTRUCTURA COMO UN PROCESO EXPERIMENTAL DE DISEÑO

Arq. Rosa Elena Alvarez Martínez



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO

División de Ciencias y Artes para el Diseño

Departamento de Procesos y Técnicas de Realización

Dr. Gustavo A. Chapela Castañares
Rector General

Dr. Enrique Fernández Fassnacht
Secretario General

Mtra. Silvia Ortega Salazar
Rectora Unidad Azcapotzalco

Ing. Enrique Tenorio Guillén
Secretario de Unidad

M.D.I. Emilio Martínez de Velasco
Director de la División de
Ciencias y Artes para el Diseño

Arq. Rosa Elena Alvarez Martínez
Jefe del Departamento de Procesos
y Técnicas de Realización.

Arq. Tomás Sosa Pedroza
Jefe de Area de Tecnología y Diseño para la
Producción de Espacios.

Coordinación Editorial
Imágenes y Aplicaciones Digitales
S.A. de C.V.

Fotomecánica e Impresión de la Portada
Talleres de Diseño de CYAD

Impresión Interior
Taller de Impresión y Reproducción
de la Unidad

Derechos Reservados
© 1992. Universidad Autonoma Metropolitana
División de Ciencias y Artes para el Diseño
Av. San Pablo No. 180
Azcapotzalco 02200
México 16, D.F. Apdo. Postal 16-307

INDICE

	Pág.
Prólogo	
Introducción	
I. Flexión en Vigas	
1. Generalidades y Conceptos	1
1.1 Clasificación de Cargas	1
1.2 Conceptos sobre: Elasticidad, Plasticidad, Esfuerzo y Deformación, Módulo de Sección	2
2. Teoría de la Elasticidad de la Flexión	4
Módulo de Elasticidad	4
no Elasticidad y Ley de Hooke	6
Módulo de Young	6
3. Momento de Inercia	8
3.1. Centroides y Momento Estático	9
3.2 Radio de giro	11
3.3 Momento Polar de Inercia	12
3.4 Producto de Inercia	12
3.5 Módulo de Sección	13
4. Flexión y Esfuerzos	13
4.1 Generalidades	13
4.2 Fuerza Cortante	14
4.3 Momento Flexionante	15
4.4 Tipo de Vigas	16
4.5 Condiciones de apoyo	18
5. Deflexión en Vigas	23
5.1 Curva Elástica	23
Ejercicios de aplicación experimental	27
Conclusiones de la experimentación	32
5.2. Deducción de la Ecuación General de la Escuadría	33

II. Fuerza Cortante en Vigas estáticamente determinadas	
1. Generalidades	38
2. Distribución de Esfuerzos Normales	41
3. Determinación del Cortante en vigas estáticamente determinadas	42
4. Esfuerzos Cortantes en una Viga Rectangular Relaciones entre carga, ecuaciones de corte y de momentos	45
5. Diagrama de Corte y de Momento	46
Ejercicios de aplicación experimental	48
Conclusiones de la experimentación	50
5.1 Distribución de Esfuerzos en una viga rectangular	50
5.2 Esfuerzos Cortantes en elementos de pared delgada	52
III. Centro de Corte	
1. Corte Simple	55
2. Centro de Corte	56
Ejercicios de aplicación experimental	59
Conclusiones de la experimentación	61
IV. Vigas Continuas	
1. Pendientes y Flechas	62
2. Puntos de Inflexión	66
3. Marcos Rígidos	
Definiciones y suposiciones fundamentales	66
Ejercicios de aplicación experimental	69
Conclusiones de la experimentación	71
4. Deflexión en Vigas al aplicar las áreas de momentos	71
Bibliografía	77

PROLOGO

La Arquitectura no puede concebirse sin pensar en la ESTRUCTURA, ya que es ésta la que da cuerpo formal y es el esqueleto sin el cual no podría plasmarse la "idea conceptual".

Se vuelve así imprescindible su conocimiento por todo aquel que pretenda ser arquitecto.

Una de las más serias deficiencias en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ESTRUCTURAS es la falta de experimentación, considerando también importante que existen serias diferencias entre la teoría y la práctica.

Se exponen aquí algunos conceptos elementales de la teoría estructural, con los que se pretende tener una visualización global del comportamiento de los materiales. Se ha ilustrado el texto con gran número de ejemplos que se han experimentado en laboratorio, porque ha sido preocupación fundamental, ofrecer a los estudiantes un manual práctico de fácil e inmediata aplicación; tiene por tanto un carácter eminentemente práctico y ha sido preparado con el afán de difundir aspectos y técnicas que sirvan para proyectar estructuras.

Se plantean básicamente cuatro temas, desarrollados a partir de objetivos específicos en base a una fundamentación teórica de los conceptos más importantes, del conocimiento de las propiedades y la obtención de las ecuaciones correspondientes.

Al finalizar cada tema, se plantea un desarrollo experimental, con ejercicios que han sido realizados en el "Laboratorio de Materiales" de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería (C.B.I); se dan en ellos conclusiones en resultados concretos que llevan implícita la intención de apreciarse objetivamente cada uno de los conceptos teóricos aprendidos y con el fin de permitir también, que pueda volverse

a experimentar, para de ésta manera lograr aprendizajes significativos.

Este material pretende ser un instrumento más de apoyo didáctico en relación a los conceptos estructurales que se imparten en las U.E.A.'s taller interdisciplinar VI y VII, "RESISTENCIAS DE MATERIALES" en la carrera de arquitectura de la División Ciencias y Artes para el Diseño de la Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco.

Nota: El presente documento recoge información de prácticas efectuadas en el Laboratorio de Materiales de la División C.B.I. Azcapotzalco.

ROSA ELENA ALVAREZ MARTINEZ.

INTRODUCCION

Lo que interesa al arquitecto y a todo aquel que esté relacionado con la edificación, no es tan sólo la posibilidad de poder calcular una estructura, sino el llegar a la comprensión global del problema estructural a través del conocimiento de cada una de sus partes. Así, se hace necesario atender a:

1. Las leyes de la naturaleza que afectan el comportamiento de las estructuras.
2. A la resistencia de éstas en ese aspecto.
3. Al conocimiento de los materiales de construcción.

Las principales leyes que determinan el comportamiento de las estructuras, se pueden reducir al concepto "equilibrio estático", (concepto que se aplica indistintamente a cualquier material); siendo las únicas diferencias, las debidas a su ELASTICIDAD y RESISTENCIA.

Las estructuras cumplen siempre una finalidad perfectamente definida, consistente en cerrar y delimitar espacios; la invención estructural ha de permitir la solución eficiente en los problemas planteados en el campo de la construcción, llegando a ser una combinación armónica entre la experimentación, la intuición personal y la ciencia estructural (impersonal, objetiva, realista y rigurosa).

En el cálculo estructural, la principal dificultad consiste en adquirir una cierta capacidad de imaginación, para poder comprender y relacionar en una estructura las cargas aplicadas y los esfuerzos resultantes.

La apreciación subjetiva de muchas formas estructurales -como dice Rosenthal-, se basa en consideraciones de ELASTICIDAD; sin embargo "la principal dificultad para comprender la TEORIA de la ELASTICIDAD, estriba en el tipo de formulación que manejamos en la aritmética; esfuerzos generalmente muy pequeños que se manejan en fracciones que nos cuesta trabajo imaginar. Por contraste, los MODULOS DE ELASTICIDAD pueden convertirse en grandes fórmulas que tampoco entendemos". Gordon, J.E.; "La Estructura".

Siempre ha sido un problema relacionar la función estructural con la estética formal. "Para inventar una estructura y darle proporciones exactas, se debe seguir tanto el camino intuitivo como el matemático". Salvadori.

Una vez establecidos los principios básicos del análisis estructural y teniendo un conocimiento del comportamiento de las estructuras, se deben sistematizar los conceptos para llegar a dominar los puntos más sutiles de la "teoría de las estructuras". Hecho que permitirá tener nuevas ideas y métodos para la mejor comprensión de los aspectos más delicados del diseño estructural.

I. FLEXION EN VIGAS

Objetivos

- * Describir los efectos cualitativos que la flexión produce en vigas de sección constante.
- * Explicar el efecto que la longitud de una viga, tiene sobre la deflexión de la misma.
- * Explicar el efecto que el momento de inercia de la sección de una viga, tiene sobre la deflexión de la misma.
- * Definir el Módulo de elasticidad de un material y explicar el efecto que tiene sobre la deflexión de una viga.

1. GENERALIDADES Y CONCEPTOS

Independientemente de considerar a los diferentes materiales que pueden constituir a la estructura, es importante tomar en cuenta el tipo de cargas que actúan sobre ellas; siendo las más importantes las denominadas "estáticas" y que constituyen la base para el proyecto de la estructura.

Existe un conjunto de normas y reglamentos contenidos en manuales de edificación, donde las cargas específicas son cargas convencionales.

1.1 Clasificación de Cargas

Cargas Permanentes : peso propio

Carga Util

Cargas por Viento

Cargas Térmicas y de Asentamiento

Cargas Dinámicas.

Las estructuras son en cierta medida elásticas, porque poseen la propiedad de deformarse bajo la acción de las cargas y de volver a su posición inicial al desaparecer la acción. Se dice que como consecuencia de su "elasticidad" las estructuras tienden a oscilar.

A partir de éstas consideraciones, se hace necesario plantear algunos conceptos:

1.2 Conceptos sobre: Elasticidad

Es la propiedad que tienen algunos materiales de recuperar su forma inicial al dejar de actuar una carga que provocó su deformación o al desaparecer el cambio de temperatura que provocó la deformación. Se dice que un material es "Elástico por Excelencia" cuando responde de la misma manera en cualquier parte de su superficie, ya sea que la deformación que se le pretende provocar sea debida a una fuerza de tensión o a una fuerza de compresión, que equivalen respectivamente a un alargamiento o un acortamiento.

Plasticidad

Se dice que un material ha entrado a un periodo plástico, cuando la deformación que se le provoca es permanente, o sea que, habiendo rebasado el límite elástico del material, éste quedará con una pequeña deformación que no le permitirá recuperar su forma inicial. Si se pretende continuar deformando un material y se rebasa su límite plástico, como consecuencia vendrá la ruptura del material.

Esfuerzos y Deformación

Las fuerzas que actúan sobre una estructura, producen unas reacciones que tienden a equilibrarlas y que están en función de la solución estructural tanto en forma como en dimensiones; por la acción de las fuerzas se produce un cambio de relación entre las moléculas del material, que debido a la inercia innata del mismo intenta volver a su estado natural.

Si la fuerza es muy grande en relación a la superficie aplicada, las tensiones producidas serán grandes; si la fuerza es pequeña y actúa sobre una gran superficie, los efectos son pequeños.

La relación:
$$\frac{\text{fuerza}}{\text{superficie}} = \frac{P}{A} = \sigma$$

se llama "esfuerzo" y es única la deformación que provoca.

La deformación es también relativa y sólo puede medirse en relación al tipo de objeto que se afecta.

La fuerza define una cierta carga, el esfuerzo cierta deformación.

Deformación

Entiéndase por deformación de un material, al cambio de forma que sufre el mismo; éste cambio de forma podrá estar provocado por la

acción de una carga que actúe sobre el material o por el cambio de temperatura que sufra el mismo.

Fatiga

Es el resultado del trabajo de las fuerzas internas a fin de equilibrar la fuerza externa y oponerse a la deformación.

Esfuerzo es equivalente a Fatiga y podemos decir:

$$\text{Fatiga } \frac{\text{Peso}}{A} = \frac{\text{cantidad en kgs.}}{\text{sobre cm}^2 \text{ de superficie}}$$

Deformación Longitudinal (δ)

Entiendase por deformación longitudinal del material, al cambio de forma que sufre el mismo en el sentido de la carga que está provocando dicha deformación. Las DEFORMACIONES TRANSVERSALES que se originan debido a ésta deformación, estarán alojadas sobre los ejes perpendiculares al eje que aloja a la carga que provoca la deformación longitudinal.

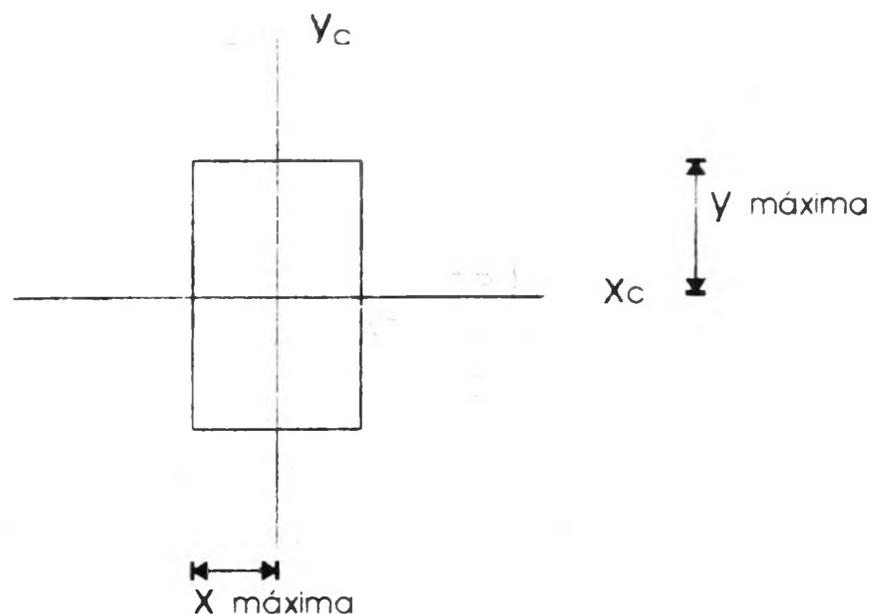
Deformación Unitaria

Es el valor que resulta de dividir la deformación sobre la longitud, por lo tanto será una relación de dos longitudes y en consecuencia, sin unidades.

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}$$

Módulo de Sección: (Sy ó Sx)

Es igual al momento de inercia con respecto al plano neutro dividido entre la distancia máxima a la fibra más alejada; y determina la flexión máxima que puede resistir una sección.



De donde:

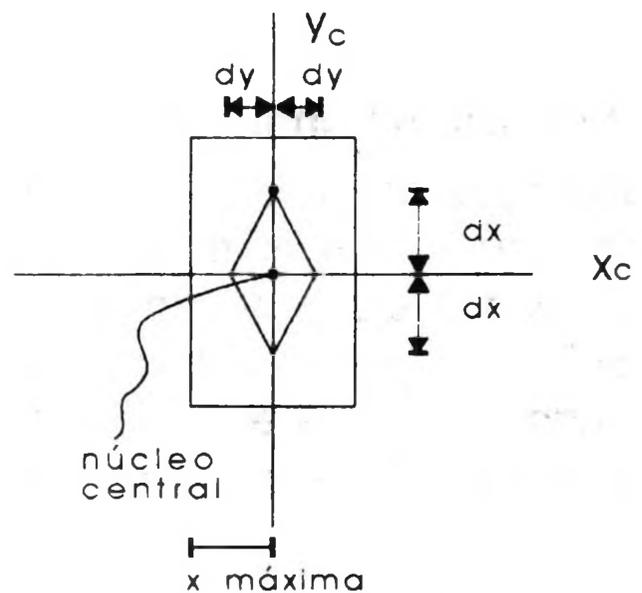
$$S_x = \frac{I_{xc}}{y \text{ máx}} \quad S_y = \frac{I_{yc}}{x \text{ máx}}$$

Si se hace necesario conocer las zonas de compresión simple y flexocompresión podemos dividir el módulo de sección correspondiente entre el área de la sección.

Así:

$$dx_c = \frac{S_x}{A}$$

$$dy_c = \frac{S_y}{A}$$



Plano Neutro:

Es aquel plano perpendicular al plano de las fuerzas que pasa por el centro de gravedad de la sección recta.

2. TEORIA DE LA ELASTICIDAD DE LA FLEXIÓN

La FLEXIÓN es uno de los fenómenos más comunes del comportamiento estructural y su causa son los momentos flectores.

La deformación aparece como consecuencia de estos esfuerzos.

Módulo de Elasticidad

El Módulo de Elasticidad es el esfuerzo que produce una deformación unitaria igual a la unidad.

Los materiales estructurales utilizados tales como el acero, el concreto reforzado, la madera, etc.; tienen características propias que

difieren de material a material. Las características a que se hace mención son:

- resistencia a esfuerzos de tensión.
- resistencia a esfuerzos de compresión.
- resistencia a esfuerzos torsionantes.
- resistencia a esfuerzos cortantes.
- ductilidad del material.
- su fragilidad.
- relación esfuerzo-deformación (entre otros).

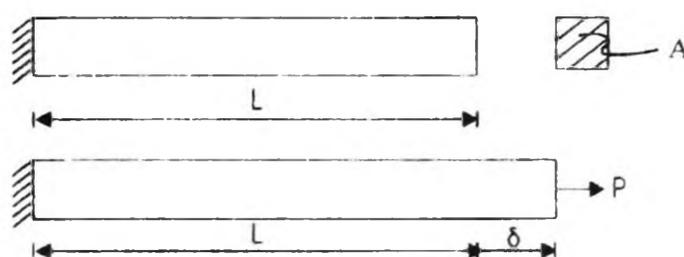
Por lo anterior, existe la necesidad de hacer pruebas estandarizadas que nos indiquen la relación que estas características guardan entre los materiales estructurales.

El Módulo de Elasticidad, nos dá una idea de la relación existente entre esfuerzos y deformación para un material dado.

Si a una barra de un material, con área constante en toda su longitud, la sometemos a tensión como se ilustra, se estará induciendo en ella un esfuerzo, representado por:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Considerando además que se deformará a la pieza una cantidad δ



De este modo, podemos definir a la deformación unitaria ϵ como la deformación que cada unidad de longitud de la barra ha sufrido, concepto que se expresa con la ecuación:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}$$

Representando gráficamente el esfuerzo $\sigma = P/A$ contra la deformación unitaria $\epsilon = \delta / L$ se obtiene una curva que es característica de las propiedades del material y no depende de las dimensiones de la barra utilizada.

Esta curva que corresponde al diagrama esfuerzo deformación, nos

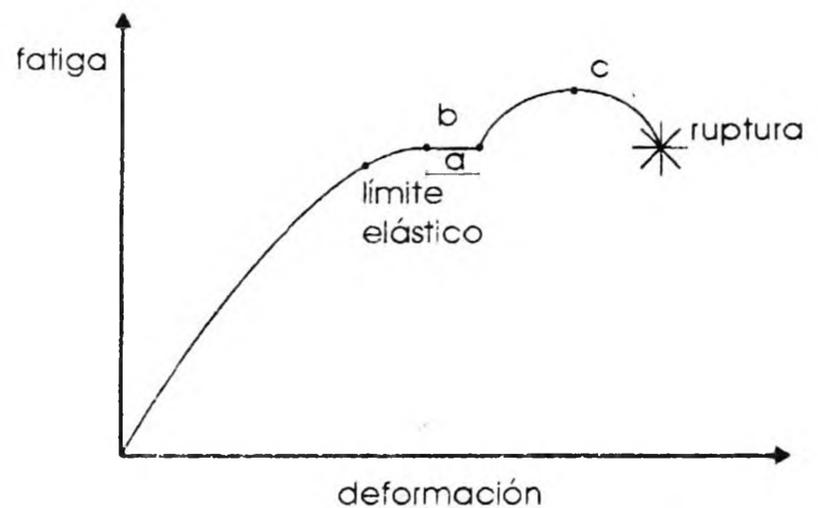
permite dividir a los materiales en dos amplias categorías: materiales dúctiles y materiales frágiles.

Antes de continuar, cabe hacer mención de la teoría de la elasticidad y la Ley de Hooke.

Elasticidad y Ley de Hooke

Dentro de ciertos límites, la deformación es proporcional a la fatiga.

$$\frac{\text{esfuerzo unitario}}{\text{deformación unitaria}} = \frac{\delta}{\epsilon} = E$$



- a.- Período plástico
- b.- límite de fluencia
- c.- Resistencia última

UNIDADES:

- f = fatiga : Kg/cm² (fatiga o esfuerzo unitario)
- d = deformación : cm
- E = módulo de elasticidad : Kg/cm²
- δu = deformación unitaria : sin unidades
- S_x , S_y = módulo de sección : cm

Después de Hooke, (aproximadamente un siglo más tarde), Young estableció la existencia de una constante para distintos materiales. "Materiales idénticos sufren iguales deformaciones bajo los mismos esfuerzos". Estas constantes se llaman:

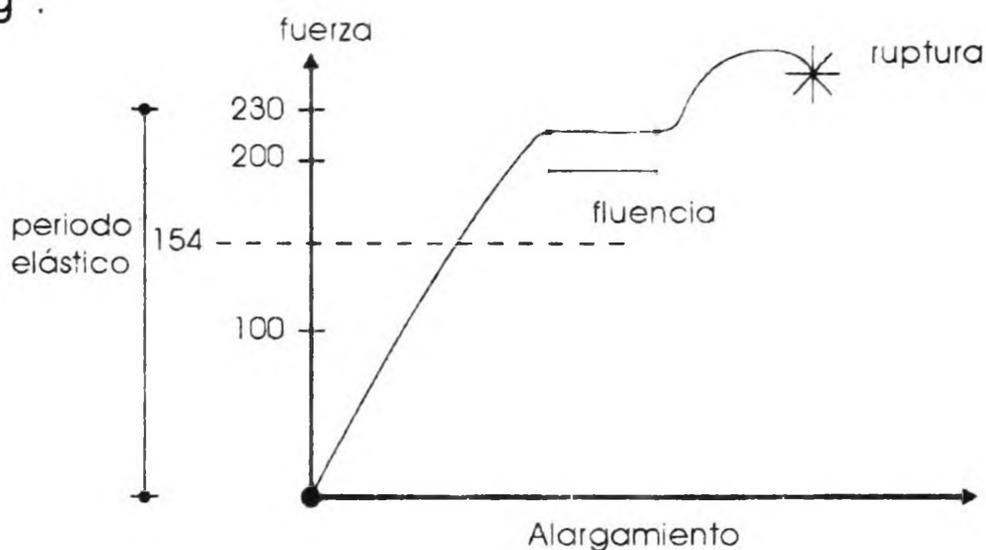
Módulo de Young (E).

El valor de ésta constante varía según el material.

Consideremos los esfuerzos que soportan materiales como: el acero, la madera y el hormigón.

En el ACERO: la relación fuerza aplicada, esfuerzo obtenido (deformación), sigue la ley de Hooke hasta un punto en que aumenta la deformación sin aumentar apreciablemente la fuerza. A este punto se le llama "PUNTO DE FLUENCIA" y a partir de él, el material no puede recuperarse. El Módulo de Young (E) para el Acero es:

13 000 t/pulg².



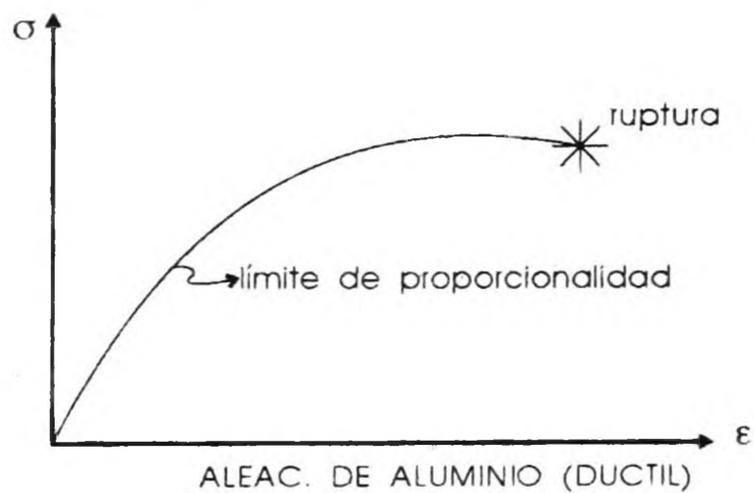
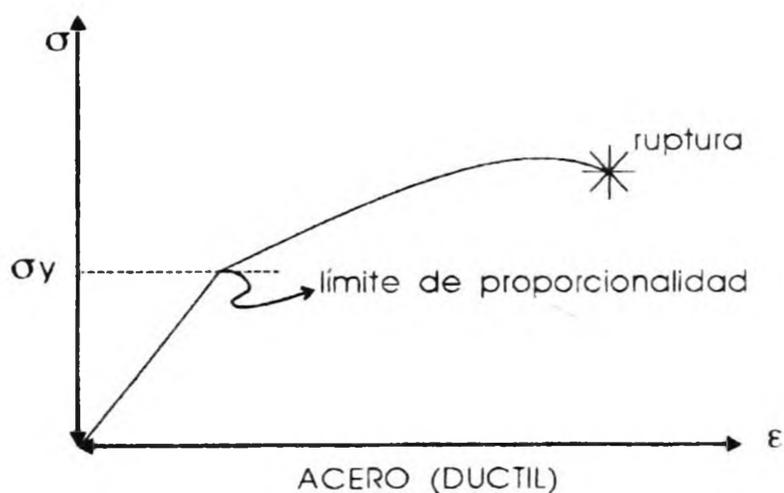
En la MADERA: Los esfuerzos para este producto natural dependen del tipo de madera que se utilice, es importante considerar el proceso de selección y el estado del grano o de los nudos. Para esfuerzos normales se puede señalar que corresponde de:

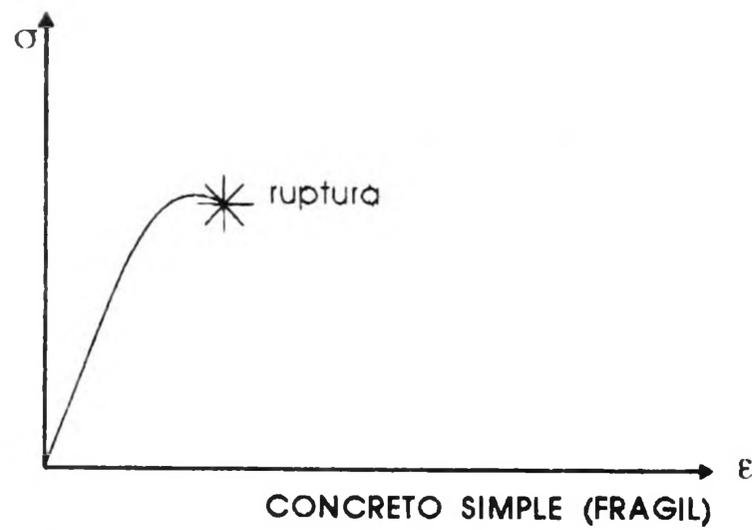
200 000 lb/pulg² a 2 000 000 lb/pulg²

Los esfuerzos que soporta el hormigón varían con la granulometría empleada y el método de elaboración (dosificación); puede variar de:

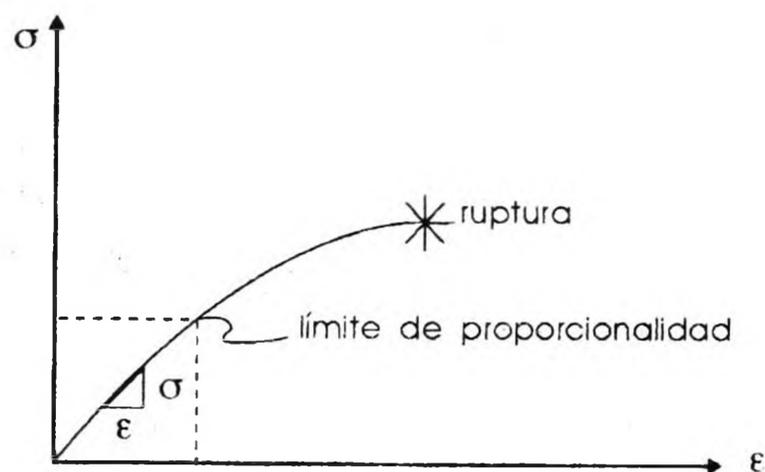
2 000 000 lb/pulg² a 3 000 000 lb/pulg²

A continuación se presentan diagramas esfuerzo-deformación característicos de algunos materiales, indentificado en ellos algunas zonas y puntos de interés.





Considerando que la mayoría de las estructuras son diseñadas para sufrir solo pequeñas deformaciones, de manera que entrañan sólo la parte recta del diagrama en donde el esfuerzo es proporcional a la deformación, tenemos:



y podemos escribir:

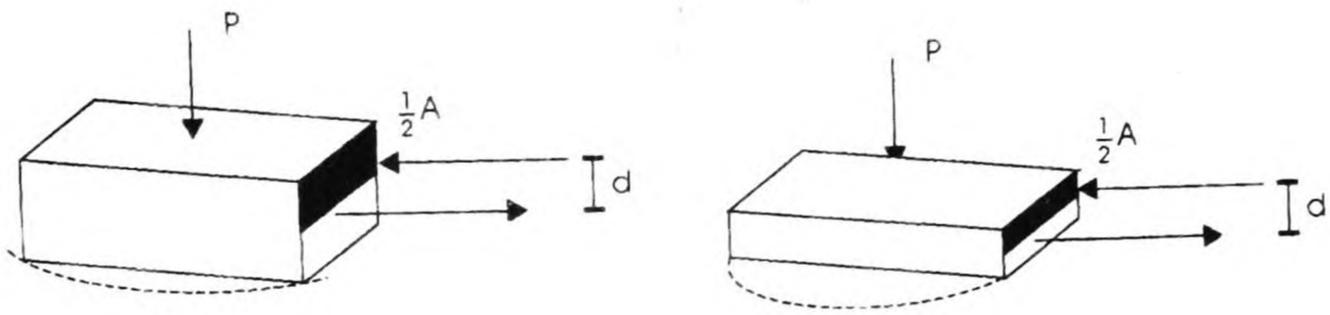
$$\sigma = E \varepsilon$$

Ecuación que corresponde a lo que se conoce como Ley del Hooke, en donde el cociente de proporcionalidad E , es el conocido como MODULO DE ELASTICIDAD.

El máximo valor de esfuerzo para el cual puede utilizarse la ley de Hooke debido a la proporcionalidad, es conocido como LIMITE DE PROPORCIONALIDAD.

3. MOMENTO DE INERCIA

Concepto vinculado a la resistencia al desplazamiento, en función a la forma de la masa.



Con estas gráficas se muestra que a mayor Inercia, mayor resistencia a la Flexión.

Antes de continuar y para comprender mejor éste concepto, recordemos lo siguiente:

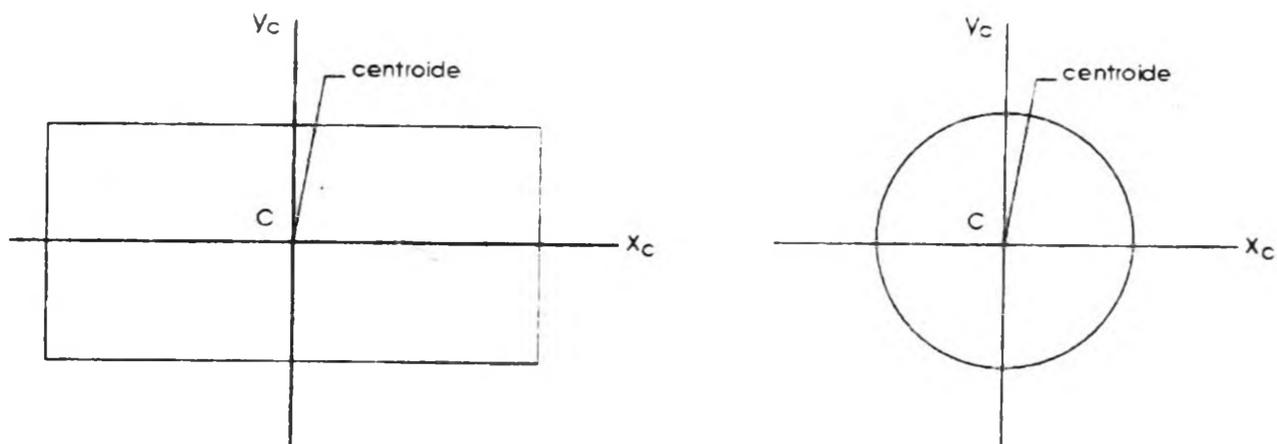
3.1 Centroide Y Momento Estático

Centroide es el punto donde se concentra toda el área de un cuerpo. Momento Estático o Momento de Primer Orden: Determina el punto de equilibrio de un sistema de áreas combinadas.

$$M_x = \int_y^A da \therefore y_c = \frac{M_x}{A} \qquad M_y = \int_x^A da \therefore x_c = \frac{M_y}{A}$$

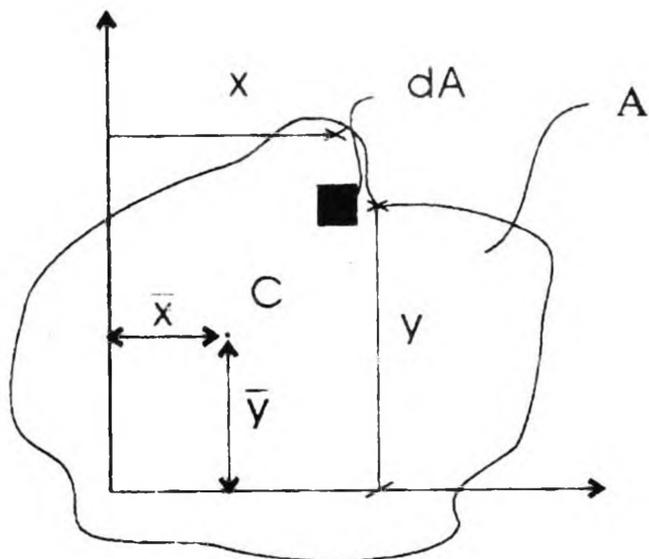
Unidad de Momentos Estáticos en cm^3

El centroide de una figura cualquiera nos dá idea de cómo se distribuye el área dentro de la sección. En algunas figuras que tienen ejes de simetría, la intersección de estos ejes nos define el centroide, como se ilustra:



x_c, y_c ejes de simetría

Sin embargo, cuando se trata de un área irregular como la siguiente, las coordenadas del centroide se definen:



$$I_{\bar{x}} = \int_A x dA$$

$$I_{\bar{y}} = \int_A y dA$$

Considerando de nuevo la figura de área A localizada en el plano x-y, el momento de inercia o momento de segundo orden, se define como:

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

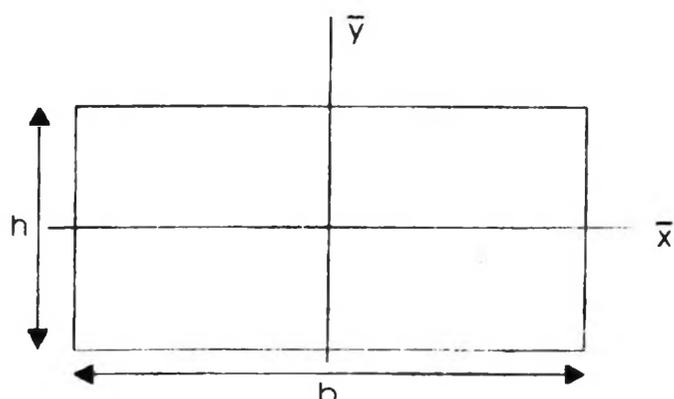
$$I_y = \int_A x^2 dA$$

Momento de Inercia
respecto al eje x

Momento de Inercia
respecto al eje y

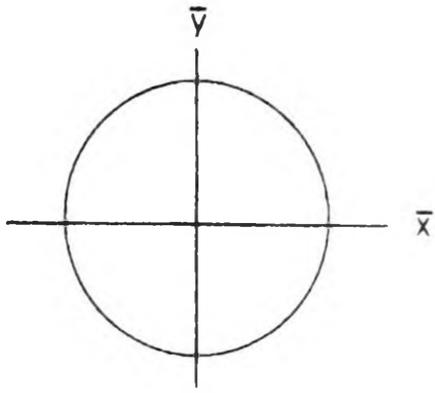
El momento de inercia de un área cualquiera, se puede expresar respecto a cualquier eje, sin embargo, muchas veces es conveniente expresarlo con respecto a los ejes centroidales de la figura en cuestión, con lo cual toma el nombre de " MOMENTO DE INERCIA CENTROIDAL ".

Recordando que el concepto de MOMENTO DE INERCIA, está vinculado a la resistencia al desplazamiento en función a la "forma" de la masa, y considerando que cada cuerpo o área, tiene un momento de Inercia centroidal que viene a ser una constante de diseño, a continuación se presenta una tabla con los momentos de Inercia centroidales para algunas figuras comunmente usadas como secciones de elementos estructurales.

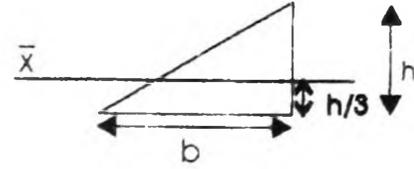


$$I_{\bar{x}} = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_{\bar{y}} = \frac{1}{12} h b^3$$



$$I_{\bar{x}} = I_{\bar{y}} = \frac{1}{4} \pi r^4$$



$$I_{\bar{x}} = \frac{1}{3} bh^3$$

Así, cada cuerpo o área tiene un momento de inercia centroidal que viene a ser una constante de diseño.

La unidad de Momento de Inercia es cm^4 , para obtener el momento de inercia de la sección hay que hacer referencia al "Teorema del Eje Paralelo":

$$I_x = I_{\bar{x}} + Ad^2$$

En el rectángulo

$$I_x = \frac{bh^3}{12} + Ad^2$$

$$I_y = I_{\bar{y}} + Ad^2$$

donde "d" corresponde a la distancia entre el centroide de cada cuerpo y el eje centroidal.

El I_x e I_y contribuyen a definir la forma y posición de una sección respecto a un eje.

El momento de inercia puede ser negativo solo que el área sea hueca.

3.2 Radio de Giro

Corresponde a la concentración de la Inercia. k_x ó k_y son distancias únicas llamadas Radios de Giro.

Sus ecuaciones son:

$$k_x = \pm \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

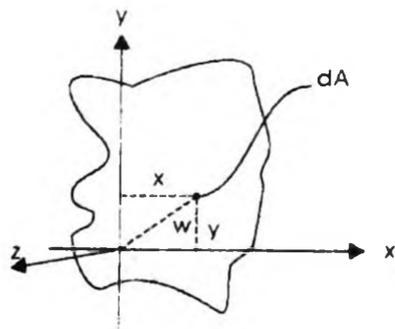
$$k_y = \pm \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

datos que sobre el eje centroidal definen a los ejes de la "Elipse de Inercia" donde ésta contribuye a determinar la resistencia al pandeo de piezas estructurales sometidas a compresión.

Relación de Esbeltes, es la razón que existe entre la longitud libre de la pieza y el radio de giro K_x .

$$K_x = \frac{\text{long. libre de la pza.}}{K_x}$$

3.3 Momento Polar de Inercia:



$$I_p = \int^A w^2 dA$$

$$w^2 = x^2 + y^2$$

$$\int^A (x^2 + y^2) dA$$

$$I_p = I_x + I_y$$

El momento Polar de Inercia determina los esfuerzos de torsión.

3.4 Producto de Inercia

$$I_{xy} = \int^A x \cdot y dA$$

Determina los momentos máximos y mínimos de inercia, estableciéndose a partir de un par de ejes llamados "EJES PRINCIPALES". Son aquellos donde el producto de inercia es igual a cero y a ellos corresponden los valores máximo y mínimo de los momentos de inercia. Cuando existe simetría, el producto de inercia es igual a cero.

Para llegar a: $I_{xy} = 0$

$$I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}} + Aab$$

$$\text{como } I_{xy} = 0$$

$$I_{xy} = Aab$$

donde "a" y "b" son distancias entre el centroide del cuerpo y los ejes centroidales.

Los Ejes de Simetría están incluidos en los Ejes Principales, así "todos los ejes de simetría son ejes principales y algunos ejes principales son ejes de simetría".

Si $I_{xy}=0$ se produce una rotación donde el ángulo se define:

$$\tan 2 \theta = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}$$

Si $\tan 2 \theta = +$ entonces la rotación es 

Si $\tan 2 \theta = -$ entonces la rotación es 

3.5 Módulo de Sección

$$S_x = \frac{I_{\bar{x}}}{y \text{ máx.}}$$

$$S_y = \frac{I_{\bar{y}}}{x \text{ máx.}}$$

la fatiga máxima en una sección se define como:

$$f \text{ máx} = \frac{M \text{ de la sección}}{S_x \text{ de la sección}}$$

La fatiga máxima de una sección es la razón que existe en el momento estático de la sección dividida entre el módulo de sección de la misma.

Los Ejes Principales se simbolizan:

I_{x_1} e I_{y_1} ,

tenemos como ecuación:

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

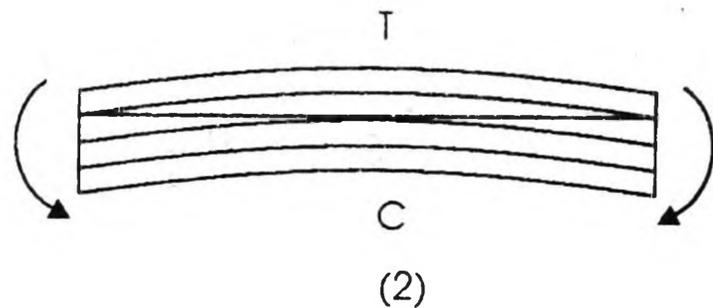
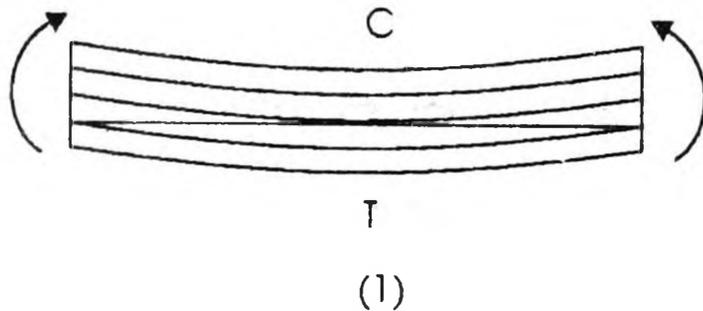
$$I_{y_1} = I_y \cos^2 \theta + I_x \sin^2 \theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

4. FLEXION Y ESFUERZOS.

4.1 Generalidades

La flexión en vigas está constituida por deformaciones en el sentido longitudinal de la viga.

Considérese un par de vigas sometidas a momentos en sus extremos:



Por convención, se dice que la viga no. 1 está sometida a un momento positivo, mientras que la viga no. 2 está sometida a un momento negativo.

En la viga 1, se puede observar que la fibra extrema superior está sometida a compresión y por lo tanto se acorta; mientras que la fibra extrema inferior está sometida a tensión y por tanto se alarga.

También es posible observar que existe una fibra a una determinada altura, que no sufre deformación, a esta fibra se le conoce como "EJE NEUTRO".

Hablando de las fibras verticales, se observa que éstas se conservan rectas aun después de que la viga ha sido flexionada.

Esto último se cumple cuando la sección transversal es simétrica con respecto a su eje vertical, situación que se da en la mayoría de los casos y que además no actúa en la sección la fuerza Cortante.

4.2 Fuerza Cortante:

Es la suma algebraica de las fuerzas de un sistema determinado en equilibrio, a la izquierda o a la derecha de la sección de viga considerada.

En general las vigas son de sección regular y tienen un plano vertical de

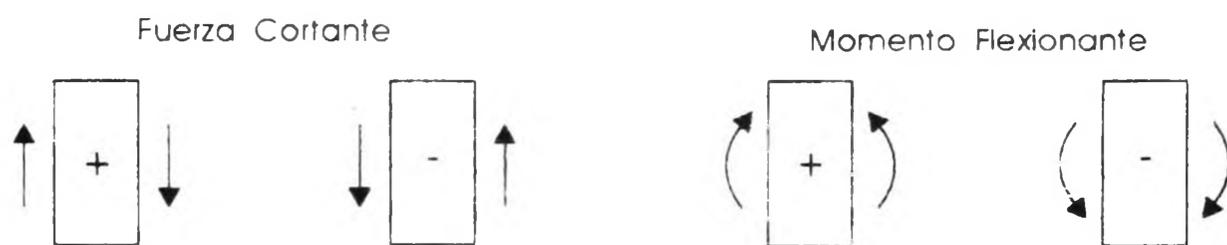
simetría en el que se considera que actúan cargas y reacciones y en el que por lo tanto se efectúa "La Flexión"; si la viga está en equilibrio, cargas y reacciones constituirán un sistema coplanar también en equilibrio.

Este sistema externo ejercerá cierta acción interna en la viga, lo que puede ser investigado tomando en cualquier parte de su longitud una porción diferencial de viga. Si se aísla esta porción elemental y se determinan las fuerzas y momentos que actúan en sus caras, se habrán investigado las acciones internas a que está sometida la VIGA FLEXIONADA en el punto considerado.

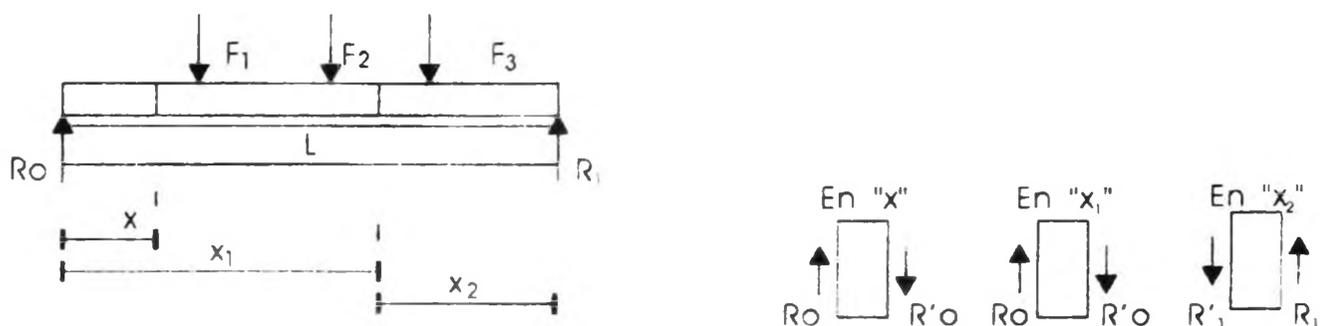
4.3 Momento Flexionante:

Es igual a la suma algebraica de los momentos de un sistema de fuerzas determinado en equilibrio, a la izquierda o a la derecha de la sección considerada.

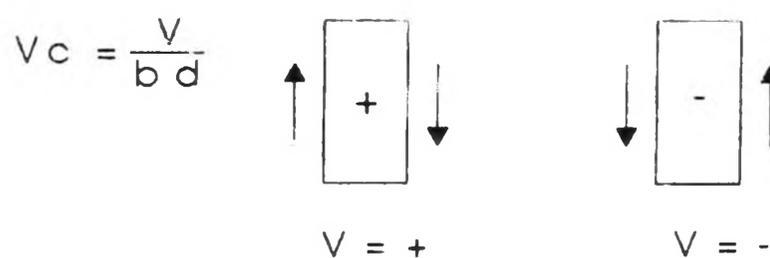
Convención de Signos



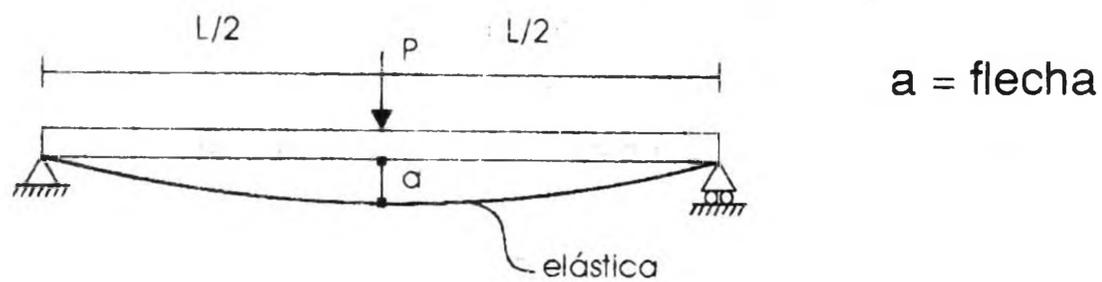
La fuerza cortante es máxima en los apoyos.



Al cortar una viga siempre hay una fuerza y se produce un par. Si la suma de fuerzas a la izquierda es hacia arriba, las de la derecha serán hacia abajo y el cortante entonces es positivo.



El cálculo del momento flexionante establece la FLEXION DE LA VIGA



La concavidad de la viga por flexión puede ser



El momento es máximo donde el cortante vale cero. El cortante es máximo en los apoyos.

Antes de iniciar el análisis resulta conveniente definir el concepto y los tipos de

VIGAS: Se llama viga a aquel elemento estructural que soporta una carga determinada y que salva también un determinado claro. Una viga es estáticamente determinada cuando cumple con las condiciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0$$

movimientos
horizontales

$$\sum F_y = 0$$

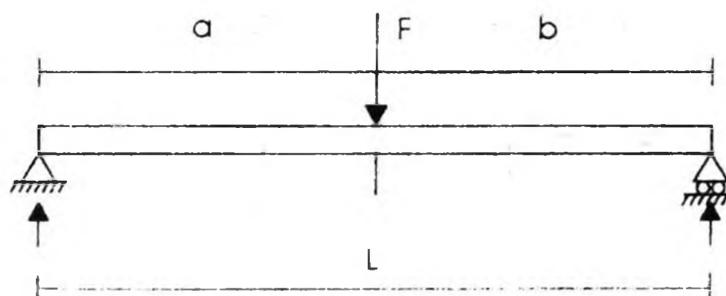
movimientos
verticales

$$\sum MoF = 0$$

movimientos
de rotación

4.4 Tipos de Vigas:

1) *Viga Apoyada:* se llama así a una pieza cargada transversalmente con sus dos apoyos articulados siendo uno de ellos deslizable, así se descarta la posibilidad de que existan reacciones horizontales y momentos en los apoyos, por lo que las reacciones sólo serán verticales.



De haber una fuerza inclinada, habría una componente horizontal que tendría que ser equilibrada en el apoyo no deslizable.

Aplicando las condiciones de equilibrio:

$$Fa = R_1L$$

$$R_1 = Fa/L$$

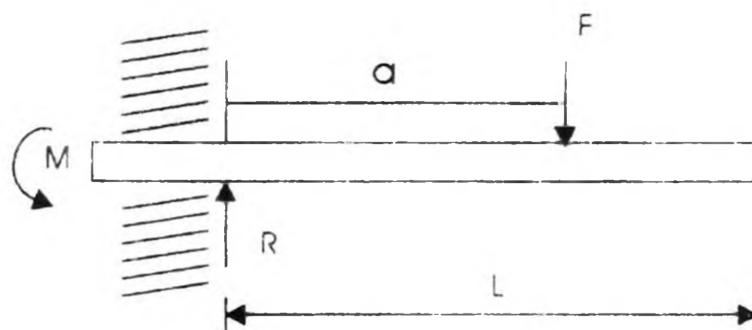
haciendo $\sum M$ en R_0

$$-F(a) + R_1L = 0$$

$$R_0 + R_1 = F$$

$$R_0 = Fb/L$$

2) *Viga en Ménsula*: es una pieza cargada transversalmente con un extremo libre y el otro empotrado, en el que solo se impiden los movimientos de rotación y vertical.



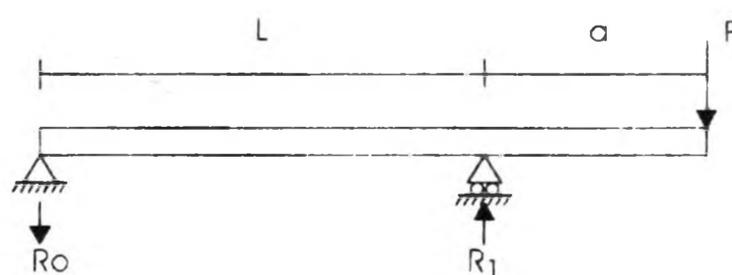
Existencia de dos incógnitas

$$M = Fa$$

$$R = F$$

3) *Viga Apoyada con un extremo en Ménsula*: pieza cargada transversalmente con un apoyo articulado y el otro deslizable, en éste punto prolongada en voladizo.

Estas condiciones, destruyen la posibilidad de reacción horizontal.



$$R_1 L = F(a + L)$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{F(a+L)}{L}$$

$$R_0 = \frac{-Fa}{L}$$

$$R_0 + R_1 = F$$

Resumiendo, al considerar que una viga deberá estar apoyada, los tipos de apoyo pueden ser:

- un apoyo empotrado
- dos o más apoyos libres
- apoyos articulados

4.5 Condiciones de Apoyo:

Apoyo deslizable: no hay resistencia al movimiento horizontal, implica que en él no habrá reacción horizontal.

Apoyo articulado: tiene resistencia al movimiento de rotación, implica que no habrá momento.

Empotre: este apoyo existe solo cuando la viga está en "mensula" porque de haber un segundo apoyo se convertiría en una solución hiperestática.

Con la intención de poder comprender con más claridad los experimentos en laboratorio, se plantean a continuación ciertos conceptos complementarios a esfuerzos y flexión:

Sección Recta: entiéndase por sección recta al área mínima que se obtiene al efectuar un corte en dicho material siendo por lo tanto necesario que el plano de corte sea perpendicular al eje longitudinal del material.

Esfuerzos Principales: los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 son un máximo y un mínimo respectivamente y son normales entre sí. Se dice también que son esfuerzos que actúan en los planos donde el esfuerzo normal es máximo o mínimo y el esfuerzo cortante es nulo.

esfuerzo normal máximo: sección recta

esfuerzo normal mínimo: donde el ángulo = 90°

La deformación producida por el esfuerzo cortante será máxima en el eje neutro y mínima en las fibras más alejadas de dicho eje.

En el plano neutro, donde el esfuerzo normal es nulo y el esfuerzo cortante es máximo los esfuerzos principales son iguales y tienen una inclinación de 45°.

Ductilidad: es la propiedad de algunos cuerpos para soportar deformación plástica al estar sometidos a tensión.

Maleabilidad: permite a la sección, soportar deformación plástica al estar sometido a compresión.

Tenacidad: propiedad que permite al material soportar choque o golpe.

Rigidez: propiedad que permite al material soportar una fatiga y sufrir una deformación muy pequeña.

Dentro de las deformaciones por Flexión plantearé las siguientes ecuaciones:
Ecuación diferencial de la elástica:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M}{EI}$$

Momento Flexionante:

$$EI = \frac{d^2y}{dz^2} = -M$$

Fuerza Cortante:

$$EI \frac{d^3y}{dz^3} = -V$$

Pendiente:

(Primera derivada del momento)

$$EI \frac{dy}{dz} = \int Mdz = \theta$$

Flecha

(Segunda derivada del momento)

$$EIy = \int dz \int Mdz = \lambda$$

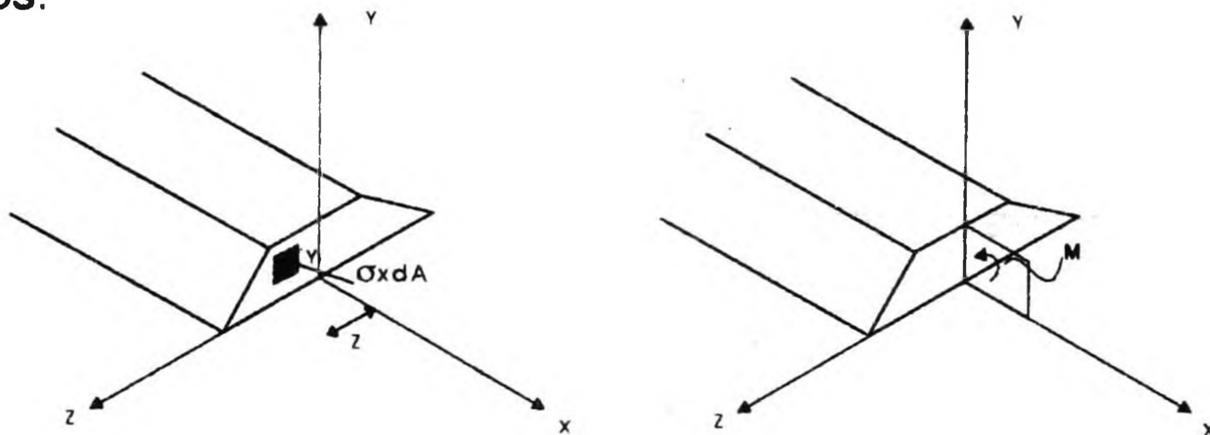
$$\frac{dM}{dz} = V \qquad \frac{dV}{dz} = -W$$

Area de momentos: es el ángulo formado por las tangentes a dos puntos A_y de la elástica, es igual al área del diagrama de momentos entre las verticales correspondientes $A'B'$, dividida entre EI_x .

La pendiente: de la elástica en la sección cualquiera Z de una viga, es igual a la fuerza cortante en la misma sección Z de su viga conjugada dividida entre EI .

La flecha: de la elástica en la sección cualquiera Z de una viga, es igual al momento flexionante en la misma sección Z de su viga conjugada, dividido entre EI .

Aplicando los conceptos anteriores y considerando la siguiente sección de una viga, en donde actúan fuerzas en elementos diferenciales de área, observamos:



donde, estableciendo algunas ecuaciones de la estática, se tiene:

$$\sum F_x = \int \sigma_x dA = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\sum M_y = \int z \sigma_x dA = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\sum M_z = \int (-y \sigma_x dA) = M \dots\dots\dots (3)$$

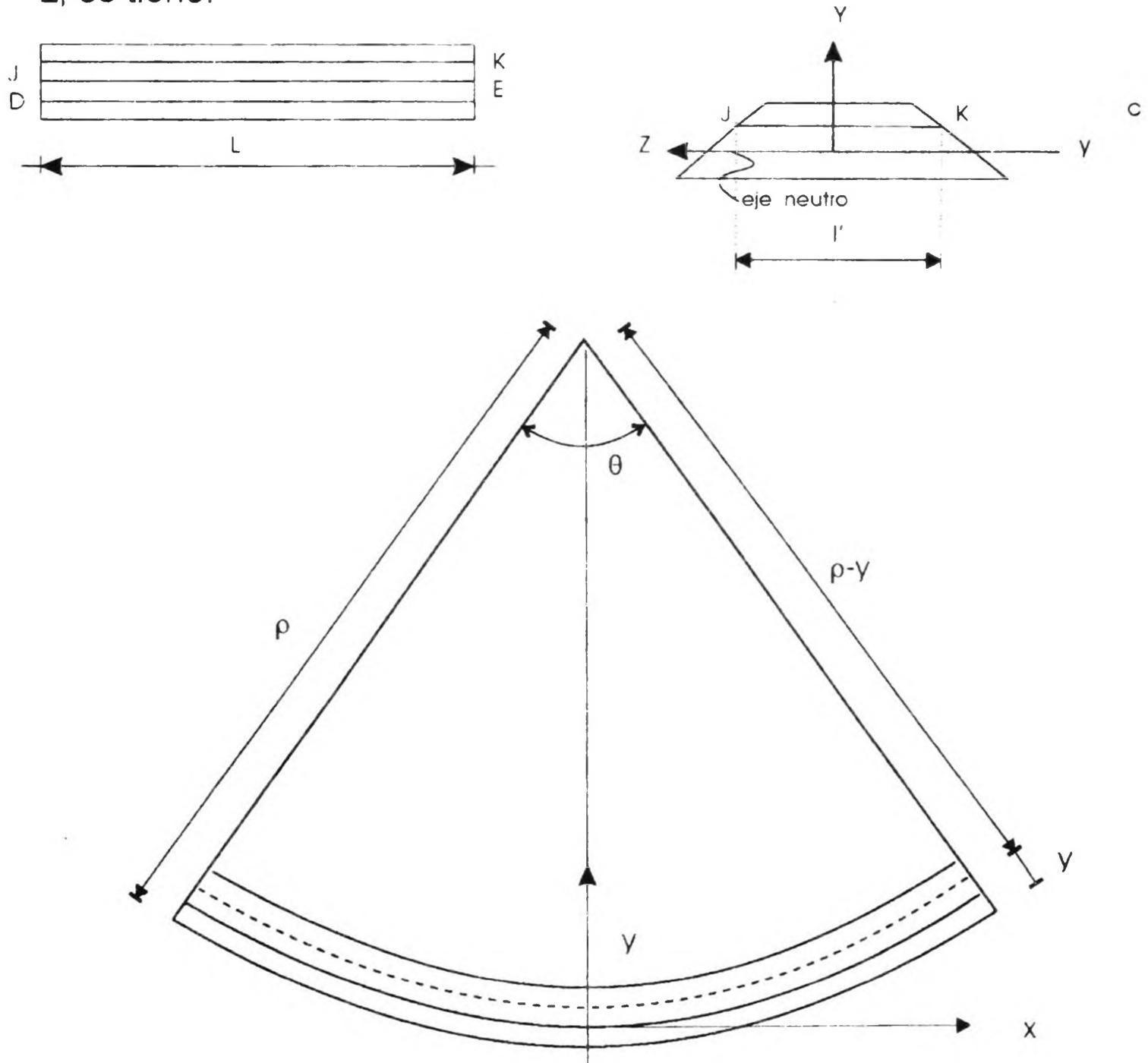
El signo (-) en la tercera ecuación, corresponde a la convención de signo de momentos positivos.

Considerando el eje x , que tiene un origen 0 , podemos determinar que, teniendo un tornillo en la posición indicada, y dándole vuelta en la dirección ↻ el tornillo avanza en el sentido positivo del eje x : →

La flecha que indica el sentido en que se debe dar vuelta al tornillo para avanzar en la dirección positiva del eje x, indica también el sentido positivo de momento. Lo anterior es aplicable para cualquier eje: x, y, z,.



Por otra parte, considerando una viga flexionada, cuya longitud inicial era L, se tiene:



Denotando por ρ el radio del arco DE, por θ al ángulo central correspondiente a DE y observando que la longitud L del elemento no deformado, se tiene:

$$L = \rho\theta$$

Considerando ahora el arco JK, localizado a una distancia "y" por encima del eje neutro, se puede afirmar que su longitud l' es:

$$l' = (\rho - y) \theta$$

puesto que la longitud original del arco JK era L, la deformación de JK es:

$$\delta = l' - L$$

$$\delta - (\rho - y) \theta - \rho \theta = -y\theta$$

La deformación unitaria longitudinal ϵ_x en los elementos de JK se obtienen:

$$\epsilon_x \frac{\delta}{L} = \frac{-y \theta}{\rho \theta} \quad \text{ó} \quad \epsilon_x = -\frac{y}{\rho}$$

El signo (-) indica el hecho de que se ha supuesto un momento flector positivo y por lo tanto las fibras por encima del eje neutro sufrirán acortamiento.

La deformación normal longitudinal varía linealmente, a través del elemento, con la distancia "y" medida desde la superficie neutra. Esta deformación alcanza su valor máximo en la fibra extrema, es decir a una distancia "c" desde el eje neutro.

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho}$$

$$\Rightarrow \epsilon_x = \frac{-y}{c} \epsilon_m$$

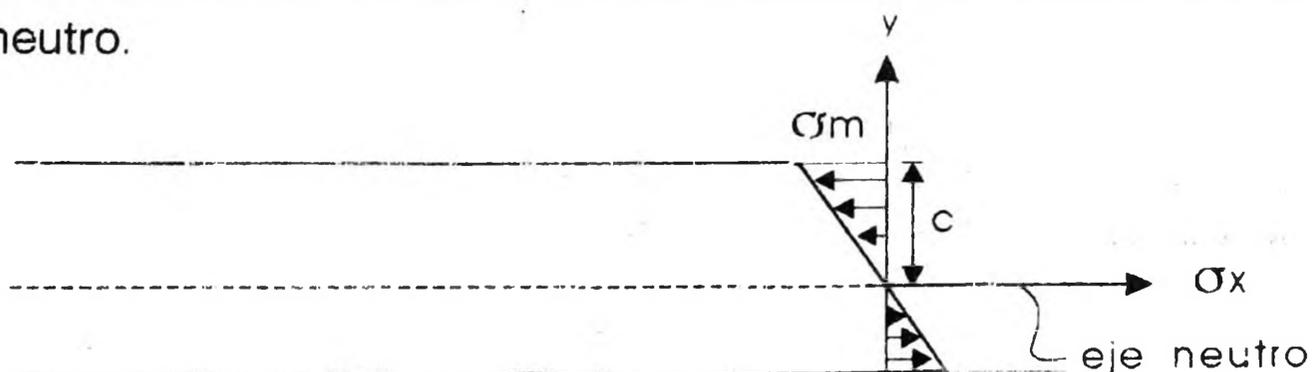
Si se considera que las deformaciones producidas se mantienen dentro del rango elástico podremos aplicar la ley de Hook:

$$\sigma_x = E \epsilon_x$$

$$E \epsilon_x = -\frac{y}{c} (E \epsilon_m)$$

$$\sigma_x = -\frac{y}{c} \sigma_m$$

donde σ_m es el máximo valor absoluto del esfuerzo, de manera que en la zona elástica el esfuerzo normal varía linealmente con la distancia desde el eje neutro.



Hasta este momento no se conoce la posición del eje neutro ni el máximo valor σ_m del esfuerzo, aunque pueden ser encontrados en base a las ecuaciones (1), (2) y (3).

$$\int \sigma_x dA = \int \left(-\frac{y}{c} \sigma_m\right) dA = -\frac{\sigma_m}{c} \int y dA = 0$$

Por otra parte:

$$\int (-y \sigma_x) dA = M$$

sustituyendo valores:

$$\int (-y) \left(-\frac{y}{c} \sigma_m\right) dA = M$$

$$\frac{\sigma_m}{c} = \int y^2 dA = M$$

La integral representa el momento de segundo orden o momento de inercia " I " de la sección transversal con respecto al eje neutro.

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I}$$

Generalizando podemos encontrar el esfuerzo normal a cualquier distancia "y" del eje neutro:

$$\sigma_m = \frac{My}{I}$$

Ecuación de la esquadria

5. DEFLEXION EN VIGAS.

5.1 Curva Elástica.

La deformación de un elemento causada por el momento flector M es medida por la curvatura del eje neutro. La curvatura es definida como el inverso del radio del arco ρ y puede obtenerse despejando $1/\rho$ de la

ecuación.

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_m}{c}$$

En la zona elástica se tiene $\epsilon_m = \sigma_m / E$ sustituyendo ϵ_m y teniendo en cuenta la ecuación de la escauadría, se tiene:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_m}{E c} = \frac{1}{E c} \frac{M_c}{I} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E I}$$

Hablando ahora en términos generales tenemos que tanto el momento flector como la curvatura de la superficie neutra varían a lo largo de la longitud de la viga, por lo tanto se puede escribir:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E I}$$

Del cálculo elemental se tiene que la curvatura de una curva plana en un punto $Q(x,y)$, puede expresarse como:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y / d x^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}$$

en donde dy/dx y d^2y/dx^2 son la primera y la segunda derivada de la función $\mu(x)$ representada por dicha curva. En el caso de la curva elástica de una viga, la pendiente dy/dx es muy pequeña y su cuadrado aún más, por lo tanto se puede escribir:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{d x^2}$$

sustituyendo $1/\rho$ de la ecuación: $\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{E I}$, se tiene:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{M(x)}{E I}$$

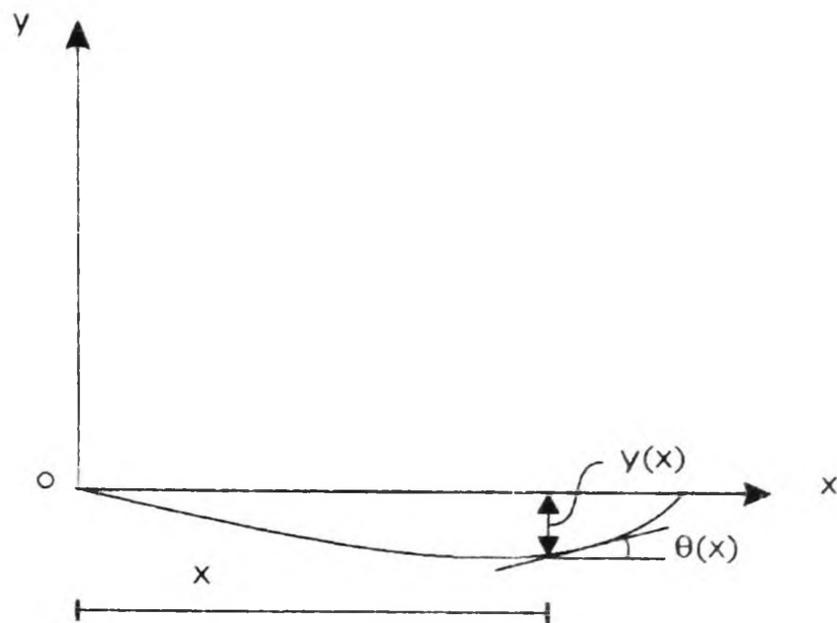
El producto $E I$ es la rigidez a la flexión.

Reescribiendo la ecuación anterior, se tiene:

$$E I \frac{d y}{d x} = \int_0^x M(x) dx + c_1$$

c_1 : constante de integración.

Refiriéndose a la figura y designando por $\theta(x)$ el ángulo, medido en radianes que la tangente en Q a la curva elástica forma con la horizontal y recordando que este ángulo es pequeño, se tiene:



$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta = \theta(x)$$

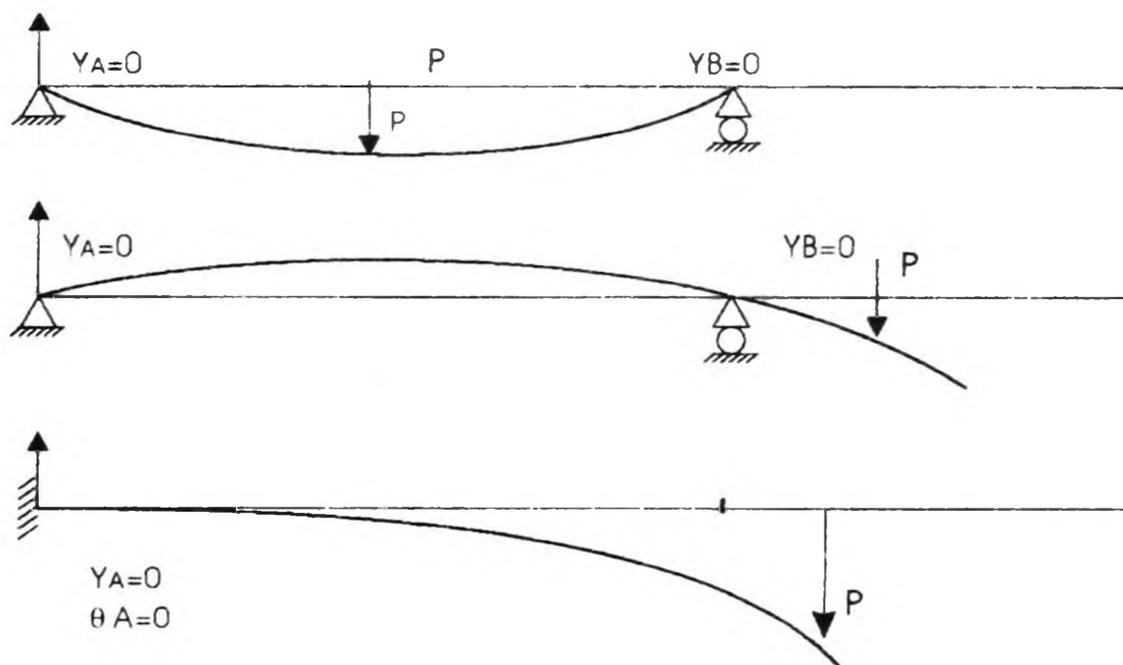
$$EI \theta(x) = \int_0^x M(x) dx + c_1$$

Integrando de nuevo los dos miembros con respecto a x:

$$EI y = \int_0^x dx \int_0^x M(x) dx + c_1 x + c_2$$

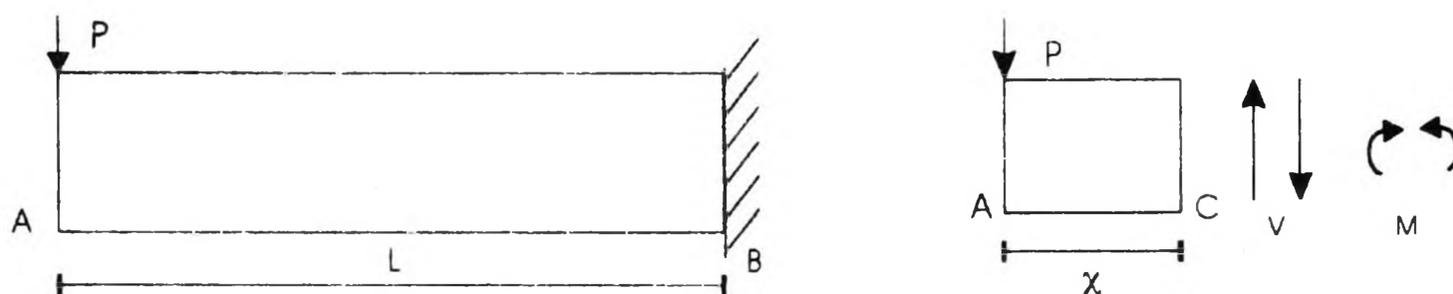
En la ecuación $dy/dx = \tan \theta = \theta(x)$, θ representa la tangente del punto referido de la elástica con respecto a la horizontal. En la otra Ecuación, "y" representa la distancia vertical (flecha o deflexión), que un punto sobre la elástica tiene con respecto a la horizontal.

Las constante c_1 , y c_2 , se determinan con base en las condiciones de contorno, es decir, en las condiciones impuestas en la viga por sus apoyos. A continuación se dan ejemplos de condiciones de contorno.



A modo de ejemplo, considérese la viga en voladizo de sección transversal uniforme, que soporta una carga P en el extremo A.

Hallar la ecuación de la curva elástica, la deflexión y la pendiente en el punto A.



Usando el diagrama de cuerpo libre AC, se tiene:

$$M = -Px$$

de la ecuación :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

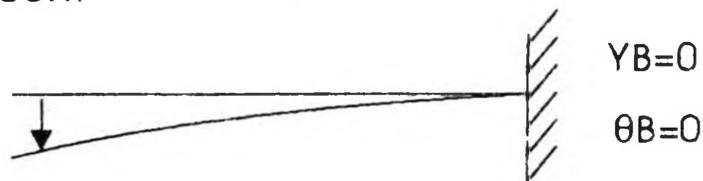
se tiene:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -Px$$

Integrando:

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} Px^2 + C_1$$

Las condiciones de contorno son:



Sustituyendo $x=L$ en la ecuación, se tendrá el valor de c , igualando a cero:

$$C_1 = \frac{1}{2} PL^2$$

Sustituyendo C_1 en la ecuación:

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} Px^2 + \frac{1}{2} PL^2$$

Integrando:

$$E I y = -\frac{1}{6} P x^3 + \frac{1}{2} P L^2 x + C_2 \dots\dots\dots (a)$$

En esta ecuación la condición de contorno es $x=L$, $y=0$

$$0 = -\frac{1}{6} P L^3 + \frac{1}{2} P L^3 + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{3} P L^3$$

sustituyendo C_2 en (a):

$$E I y = -\frac{1}{6} P x^3 + \frac{1}{2} P L^2 x - \frac{1}{3} P L^3$$
$$\Rightarrow y = \frac{P}{6 E I} (-x^3 + 3 L^2 x - 2 L^3)$$

que corresponde en este caso a la ecuación de la elástica.

Si se quiere saber la flecha en A y la pendiente en el mismo punto, se evalúa $x=0$ en las ecuaciones de la elástica:

$$Y_A = \frac{P L^3}{3 E I} \qquad \theta_A = \left(\frac{dy}{dx}\right)_A = \frac{P L^2}{2 E I}$$

El signo (-) indica que Y_A es una deflexión de la viga hacia abajo.

De manera generalizada se observa que la deflexión de la viga será directamente proporcional al cubo de su longitud e inversamente proporcional a su módulo de elasticidad y a su momento de inercia.

Ejercicios de Aplicación Experimental

Nota: Para lograr el objetivo en la experimentación, se hace necesaria acudir al laboratorio de materiales.

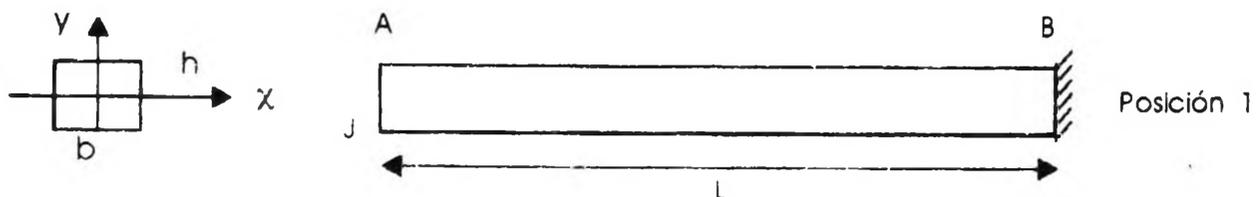
Ejercicio 1

Tomando el modelo de viga de material no. 1, y provocando en él, un momento positivo y a continuación un momento negativo, se puede verificar:

- * Las fibras que en uno y otro caso se encuentran en tensión.
- * Las fibras que en uno y otro caso se encuentran en compresión.
- * Se logra identificar en ambos casos el eje neutro.

Ejercicio 2

a) Colocando la viga rectangular de material no. 1 en el marco, empotrándola en un extremo, como muestra la figura.



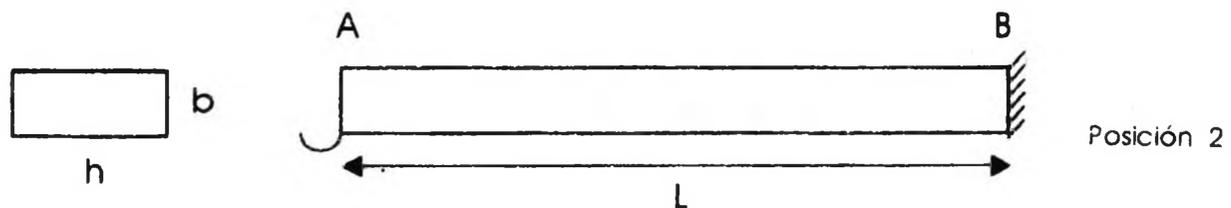
De acuerdo a la introducción teórica, el momento de inercia de esta viga con respecto al eje x, se calcula:

$$I_x = \frac{b h^3}{12} = \frac{\text{cm} \times (\quad)^3}{12} \text{cm}^3 = \quad \text{cm}^4$$

b) Posteriormente se procede a cargar la viga con las pesas que a continuación se indican (en la tabla) y calcular el esfuerzo máximo. Indicar en qué fibra existe tensión y en cuales compresión.

c) Medir con una escala adecuada la deflexión en el punto A, para cada carga.

d) Colocar ahora la viga en la posición que se ilustra, calculando el momento de inercia con respecto al eje y cual es el eje con respecto al cual la viga se flexionará:



$$I_y = \frac{h b^3}{12} = \frac{\text{cm} \times (\quad)^3}{12} \text{cm}^3 = \quad \text{cm}^4$$

e) Cargar la viga con las pesas que estan indicadas en la siguiente tabla y calcular el esfuerzo máximo. Indicar las fibras a tensión y las fibras a compresión.

POSICION 1			POSICION 2		
Carga	Deflexión	$\sigma_m = \frac{PL \cdot h/2}{I_x}$	Carga	Deflexión	$\sigma_m = \frac{PL \cdot b/2}{I_y}$

Considerando que:

* El esfuerzo máximo se encuentra en las fibras extremas y en la sección en donde el momento es máximo, es decir en el empotramiento, por tanto:

$$\sigma = \frac{My}{I} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M = PL \\ y_{\max} = h/2 \\ I = I_x \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_m = \frac{PL \cdot h/2}{I_x}$$

** Para este caso, se tiene

$$\sigma = \frac{My}{I} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M = PL \\ y_{\max} = b/2 \\ I = I_y \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_m = \frac{PL \cdot b/2}{I_y}$$

Concluimos que:

En la posición 1 las fibras superiores se encuentran a

_____ y las inferiores a _____

tensión/compresión

tensión/compresión

En la posición 2 las fibras superiores se encuentran a

_____ y las inferiores a _____

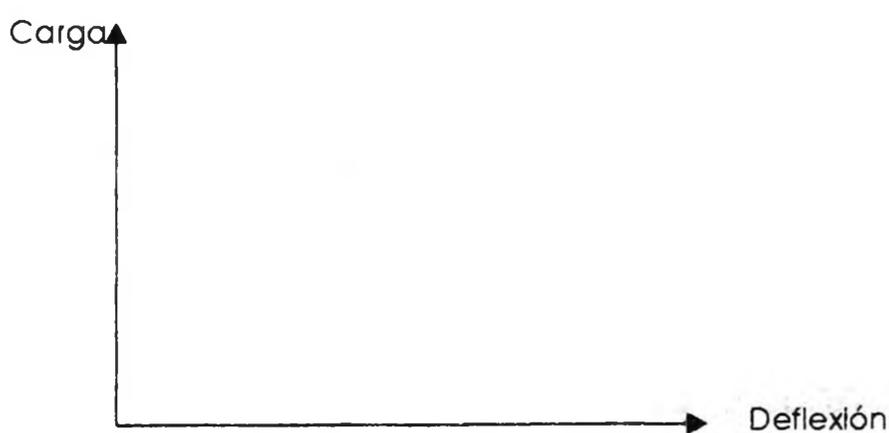
tensión/compresión

tensión/compresión

* Comparar cada deflexión obtenida experimentalmente con la deflexión teórica, dada por

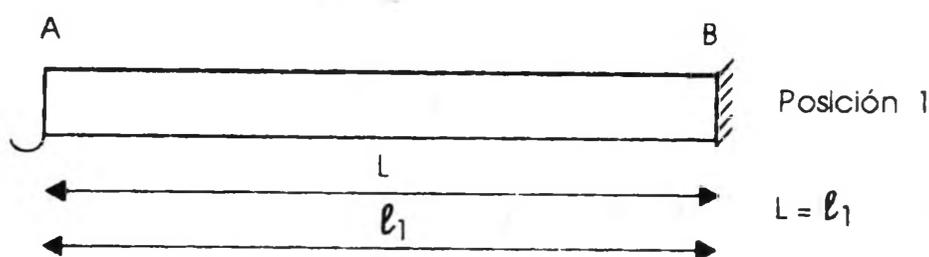
$$y_A = \frac{PL^3}{3EI}$$

* En la gráfica, colocar los puntos: carga-deflexión, indicando qué línea pertenece a que posición, e indicando en cada una el momento de inercia calculado.



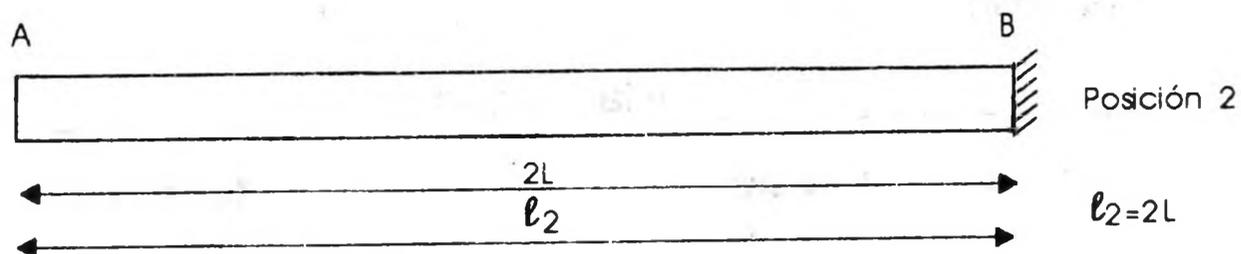
Ejercicio 3

- a) Colocar la viga de material 1 en cantiliver como se muestra:



b) Medir su longitud libre L. Colocar una carga en el extremo A y medir en una escala adecuada de la deflexión de este extremo.

c) Colocar la misma viga pero ahora aumentando su longitud al doble, como se muestra.



tomar nota de su longitud que deberá ser igual a 2L, colocar la misma carga anterior en el extremo A, midiendo en una escala adecuada la deflexión de este extremo.

Llenar la siguiente tabla.

POSICION 1		POSICION 2	
Deflexión Teórica*	Deflexión Experimental	Deflexión Teórica	Deflexión Experimental

* Deflexión Teórica = $y_A = \frac{PL^3}{3EI}$

Ejercicio 4

La viga de material no. 1 la denominaremos viga no. 1, del mismo modo para la viga de material no. 2. Las dos vigas tienen la misma sección transversal.

En el marco anteriormente utilizado colocar en cantiliver la viga no. 1 y colocar una serie de cargas, (una a la vez), midiendo en cada caso la deflexión. Calcular el momento de inercia respecto al eje sobre el que se flexionará. Vaciar los resultados en la tabla.

Colocar ahora la viga no. 2 también en cantiliver y seguir el mismo procedimiento.

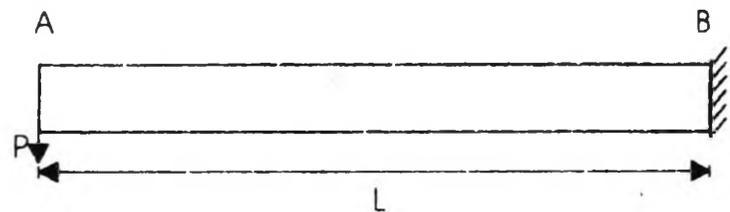
NOTA: Las dos vigas deberán colocarse de modo que se flexionen sobre el mismo eje. Además tienen la misma sección transversal, por lo tanto tendrán idéntico momento de inercia.

VIGA 1			VIGA 2		
Carga	Deflex. Exper.	Deflex. Teórica*	Carga	Deflex. Exper.	Deflex. Teórica*

$$I_x = \frac{b h^3}{12} \quad ; \quad E \text{ viga } 1 = \quad ; \quad E \text{ viga } 2 =$$

La deflexión teórica en el extremo A será:

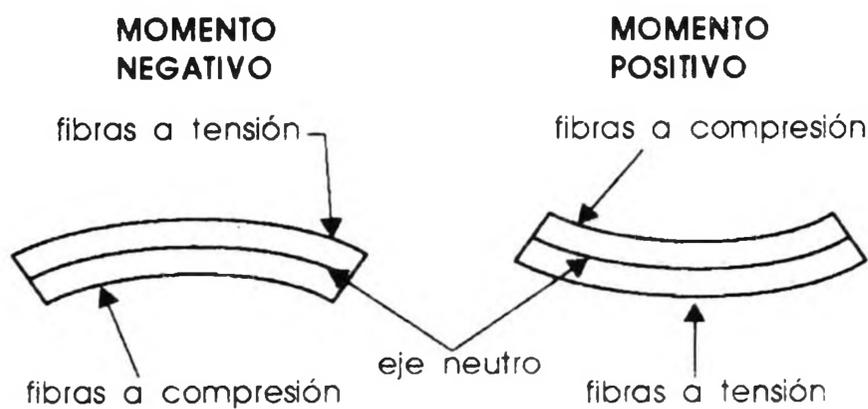
$$y_A = \frac{PL^3}{3EI}$$



CONCLUSIONES DE LA EXPERIMENTACIÓN

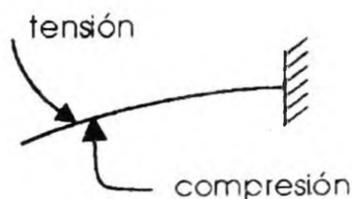
Ejercicio 1

La figura siguiente señala las conclusiones al respecto



Ejercicio 2

La conclusión es que manteniendo los parámetros de P, E, L constantes, la viga que sufre mayor deflexión es la viga con menor momento de inercia, con respecto al eje de flexión.



Ejercicio 3

Manteniendo constantes para las dos vigas los parámetros P, E, I; la deflexión de una viga en cantiliver, es proporcional al cubo de su longitud.

$$y_A = \frac{PL^3}{3EI}$$

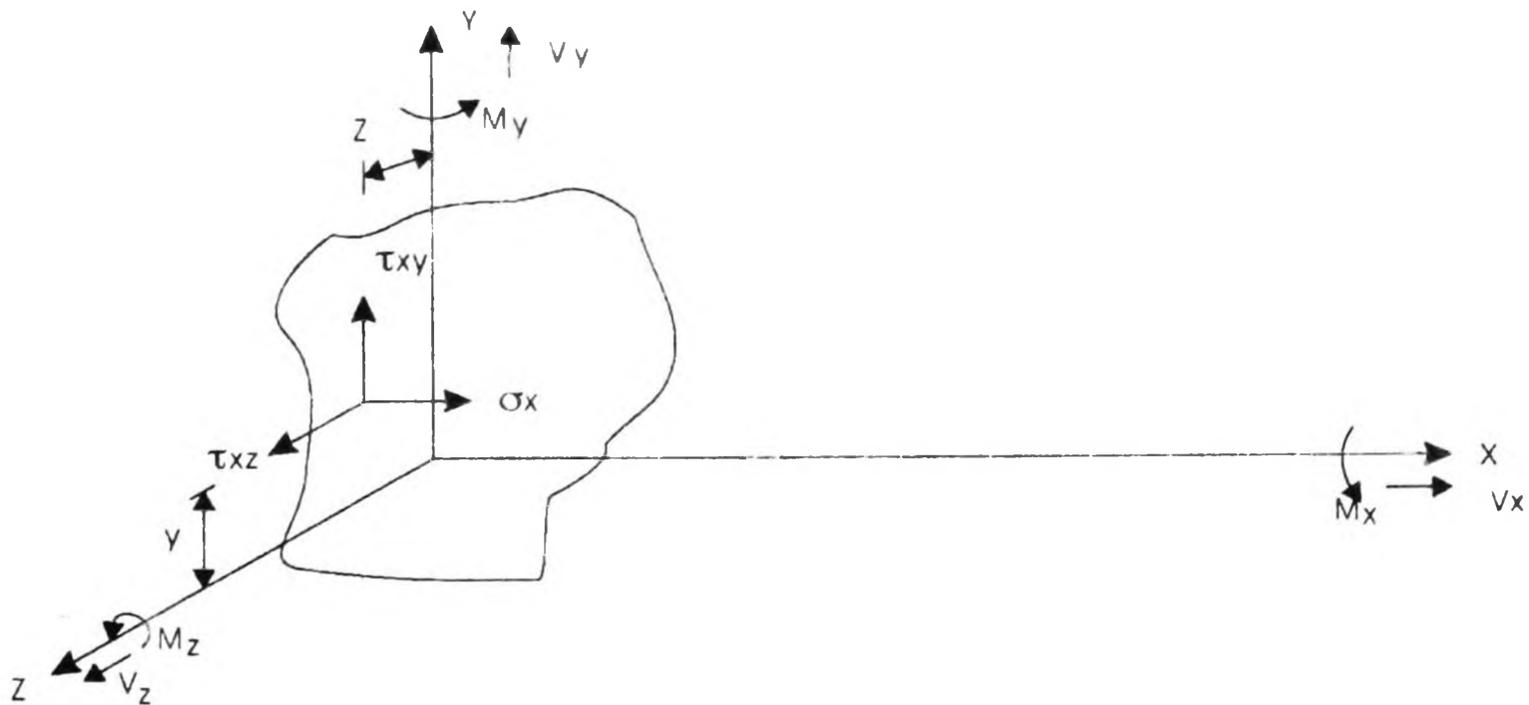
Ejercicio 4

Manteniendo constantes los parámetros P, I, L; la deflexión es inversamente proporcional al módulo de elasticidad. Por lo tanto, la viga con menor módulo de elasticidad se deflexiona más.

$$Y_A = \frac{PL^3}{3EI}$$

5.2. Deducción de la Ecuación General de la Escuadría

Considérese el cuerpo irregular que se muestra, en el cual se presenta un elemento diferencial de área sobre el que actúan tanto esfuerzos normales en la dirección "z" como esfuerzos cortantes en "x" y "y".



- a la fuerza que actúa en dirección x, se le llama V_x
- a la fuerza que actúa en dirección y, se le llama V_y
- a la fuerza que actúa en dirección z, se le llama V_z
- al momento que actúa alrededor del eje x, se le llama M_x
- al momento que actúa alrededor del eje y, se le llama M_y
- al momento que actúa alrededor del eje z, se le llama M_z

Estableciendo la sumatoria de fuerzas a lo largo de los tres ejes, se tiene:

$$V_x = \int_A \sigma_x dA \dots\dots\dots (1.1)$$

$$V_y = \int_A \tau_{xy} dA$$

$$V_z = \int_A \tau_{xz} dA$$

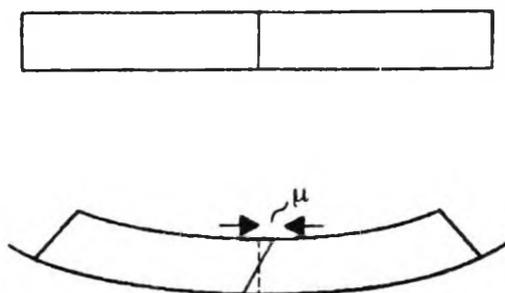
Estableciendo ahora la suma de momentos respecto de cada eje:

$$M_x = \int_A \tau_{xz} y dA - \int_A \tau_{xy} z dA$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA \dots\dots\dots (1.2)$$

$$M_z = - \int_A \sigma_x y dA \dots\dots\dots (1.3)$$

Para considerar esta demostración, se supondrá que se trabaja únicamente con barras de eje recto y de sección constante. De acuerdo a lo anterior y suponiendo que las secciones tienen simetría con respecto a su eje vertical; una sección que sea plana antes de la deformación de la barra, seguirá siendo plana después de sufrir la misma.



La deformación representada por μ , la podemos representar como una ecuación lineal en función de los parámetros "y" y "z".

$$\mu = \beta + \gamma y + \delta z$$

Por lo tanto se tendrá que la deformación unitaria se obtiene dividiendo la deformación de un elemento diferencial entre la longitud de éste.

$$E_x = \frac{d\mu}{dx} = \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\gamma}{dx} y + \frac{d\delta}{dx} z$$

Introduciendo algunas identidades:

$$\frac{d\beta}{d_x} = b \quad ; \quad \frac{d\gamma}{d_x} = c \quad ; \quad \frac{d\delta}{d_x} = d$$

(b,c,d son constantes)

así, se tendrá:

$$\epsilon_x = b + cy + dz$$

Recordando la ley de Hooke, la deformación unitaria es:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

Igualando:

$$\sigma_x = E\epsilon_x = E (b + cy + dz) \dots\dots\dots(1.4)$$

Sustituyendo (1.4) en (1.1), se tendrá:

$$\begin{aligned} V_x &= \int_A \sigma_x dA = \int_A E (b + cy + dz) dA \\ &= \int_A E \left(\frac{d\beta}{d_x} + \frac{d\gamma}{d_x} y + \frac{d\delta}{d_x} z \right) dA \\ &= E b + c E \int_A y dA + d E \int_A z dA \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int y dA = \text{primer momento del área} = Q_z$$

$$\int z dA = \text{primer momento del área} = Q_y$$

$$\Rightarrow V_x = b E A + c E Q_z + d E Q_y$$

(b,c,d) son incógnitas

Sustituyendo en la ecuación:

$$\begin{aligned}
 M_y &= \int_A \sigma_x z \, dA \\
 &= \int_A E (b + cy + dz) z \, dA \\
 &= Eb \int_A z \, dA + cE \int_A yz \, dA + dE \int_A z^2 \, dA
 \end{aligned}$$

Sustituyendo las igualdades:

$$\begin{aligned}
 \int_A yz \, dA &= I_{yz} && \text{donde:} \\
 \int_A z^2 \, dA &= I_y && I_{yz} = \text{producto de inercia}
 \end{aligned}$$

se tendrá:

$$M_y = bEQ_y + c E I_{yz} + d E I_y \dots\dots\dots (1.6)$$

(b, c, d, son incógnitas)

Sustituyendo ahora en la ecuación:

$$\begin{aligned}
 M_z &= - \int_A \sigma_x y \, dA = - \int_A E (b + cy + dz) y \, dA \\
 M_z &= -b E \int_A y \, dA - c E \int_A y^2 \, dA - d E \int_A zy \, dA && \text{(b, c, d, son incógnitas)} \\
 \Rightarrow M_z &= -b E Q_z - c E I_z - d E I_{yz} \dots\dots\dots (1.7)
 \end{aligned}$$

Con las ecuaciones (1.5), (1.6) y (1.7) se tiene un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas:

$$\begin{bmatrix} A & Q_z & Q_y \\ -Q_z & -I_z & -I_{zy} \\ Q_y & I_{zy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} N_y \\ M_z \\ M_y \end{bmatrix}$$

Si ahora, se supone que los ejes a los que se ha referido todo este desarrollo, son centroidales:

$$Q_z = Q_y = 0$$

$$b = \frac{V_x}{EA} \quad c = \frac{-M_z I_y - M_y I_{yz}}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} \quad d = \frac{-M_y I_z - M_z I_{yz}}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)}$$

Sustituyendo b, c, d, en la ecuación (1.9), obtenemos:

$$\sigma_x = \frac{V_x}{A} + \frac{-M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + \frac{-M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z$$

Si los ejes a los que se refiere la presente deducción resultan ser aquellos en que se presentan los máximos esfuerzos, se tendrá la ecuación de la escauadría generalizada.

$$\sigma_x = \frac{V_x}{A} - \frac{M_z Y}{I_z} + \frac{M_y Z}{I_y}$$

Nota: Para tener más claras estas consideraciones, es importante recordar lo relacionado a los temas:

- 1) Momento de primer orden de un área.
- 2) Ejes principales.

II. FUERZA CORTANTE EN VIGAS ESTATICAMENTE DETERMINADAS

Objetivos:

- * Definir el concepto de vigas estáticamente determinadas
- * Describir los efectos cualitativos de la presencia de esfuerzo cortante en una viga.
- * Explicar las condiciones de equilibrio y las ecuaciones utilizadas para obtener la ecuación de esfuerzo cortante.
- * Cuantificar el esfuerzo cortante en una sección de una viga sometida a cargas.
- * Verificar la distribución parabólica de los esfuerzos cortantes en una sección rectangular de una viga sometida a cargas.

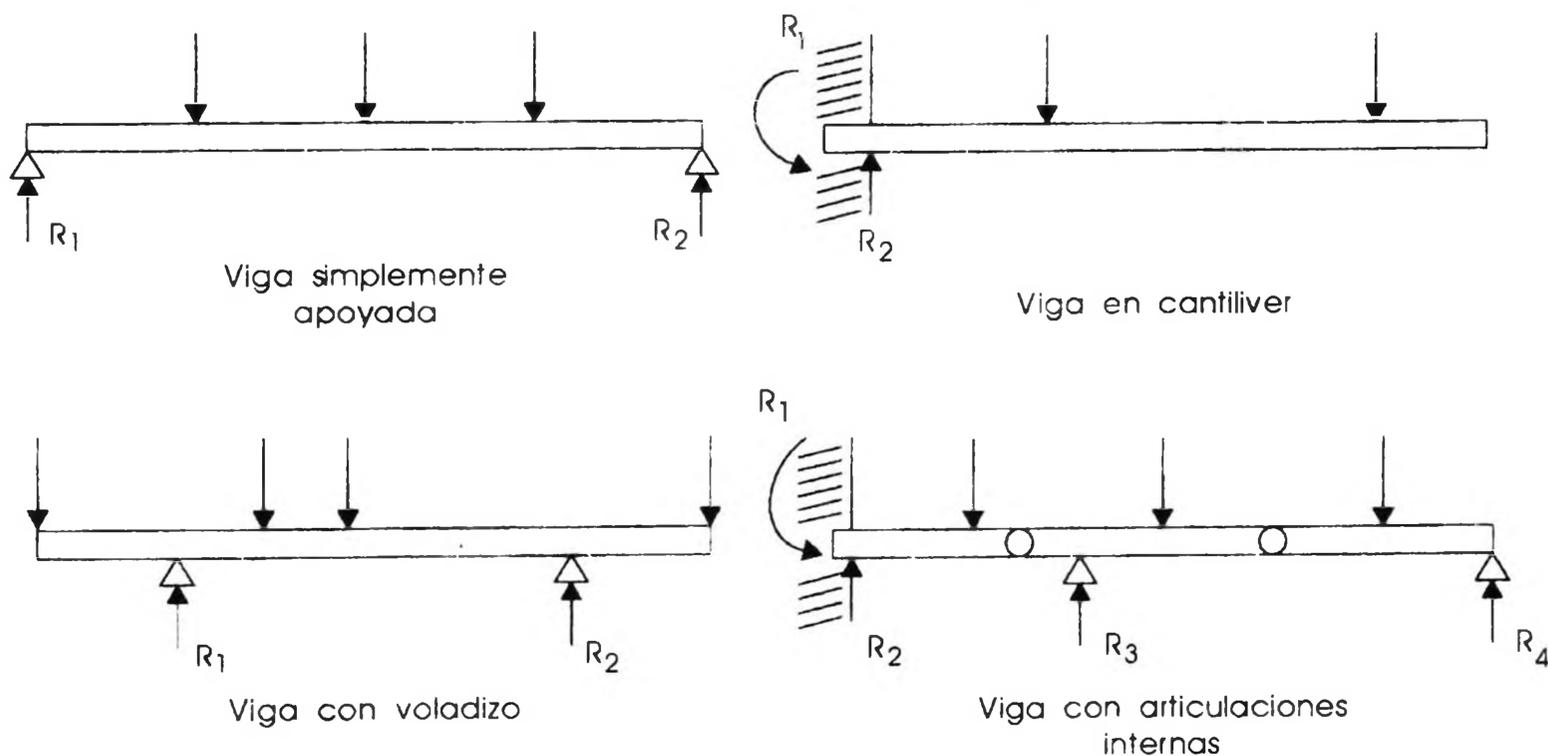
Fundamentación Teórica:

Se ha desarrollado parte de ella en el capítulo anterior

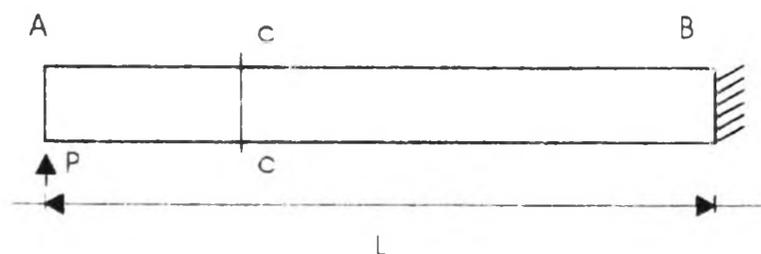
1. Generalidades

Una viga estáticamente determinada es aquella que puede analizarse por completo mediante las ecuaciones de la estática.

Pueden ser: apoyadas en forma simple, en cantiliver y vigas con voladizos

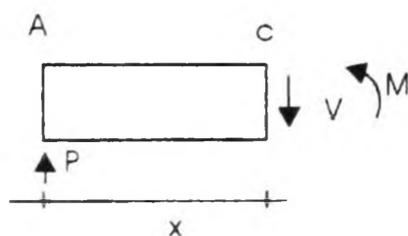


Considérese una viga AB, con su extremo B empotrado como se muestra en la figura:



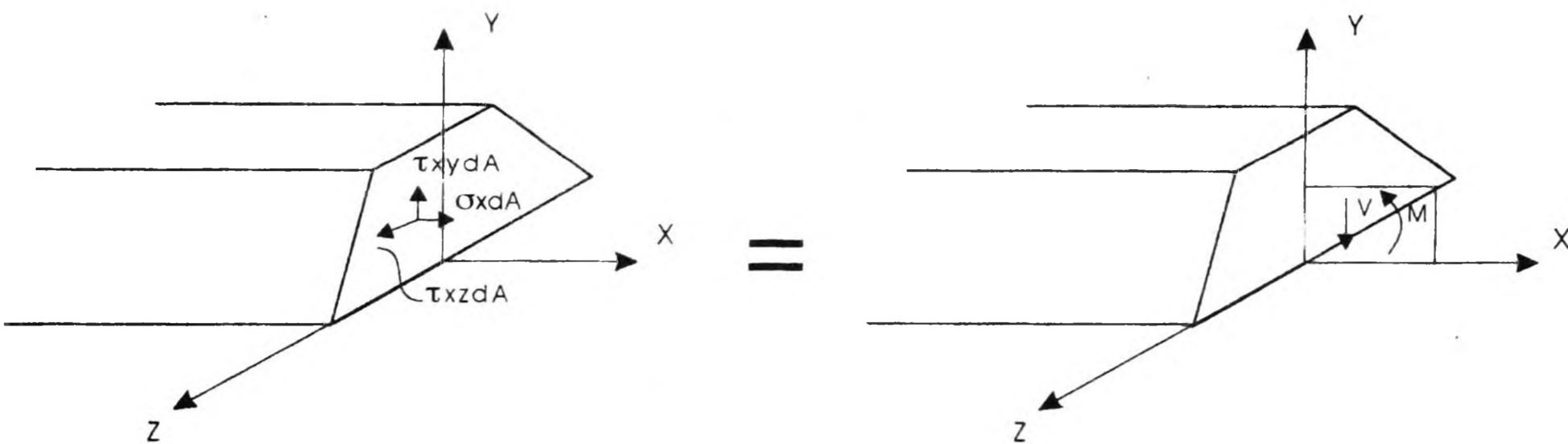
En su extremo libre A, se aplica una fuerza vertical hacia arriba P , se supone que la viga posee un plano vertical de simetría en sentido longitudinal y que la fuerza P se aplica en dicho plano.

Si se corta la viga en su sección $c-c$ y se hace un diagrama de cuerpo libre de la porción AC, se observarán las fuerzas internas aplicadas en AC, que son equivalentes a la fuerza cortante V de magnitud $V=P$, y un par de flexión M de momento $M=Px$, donde x , es la distancia desde "c" hasta el extremo A.



De acuerdo a la convención de signos para los momentos flexionantes, el momento actuante en la viga, es positivo.

Ahora considérese la siguiente figura, donde se muestran algunos vectores de fuerza equivalentes al cortante y al momento flexionante que actúan sobre la viga.

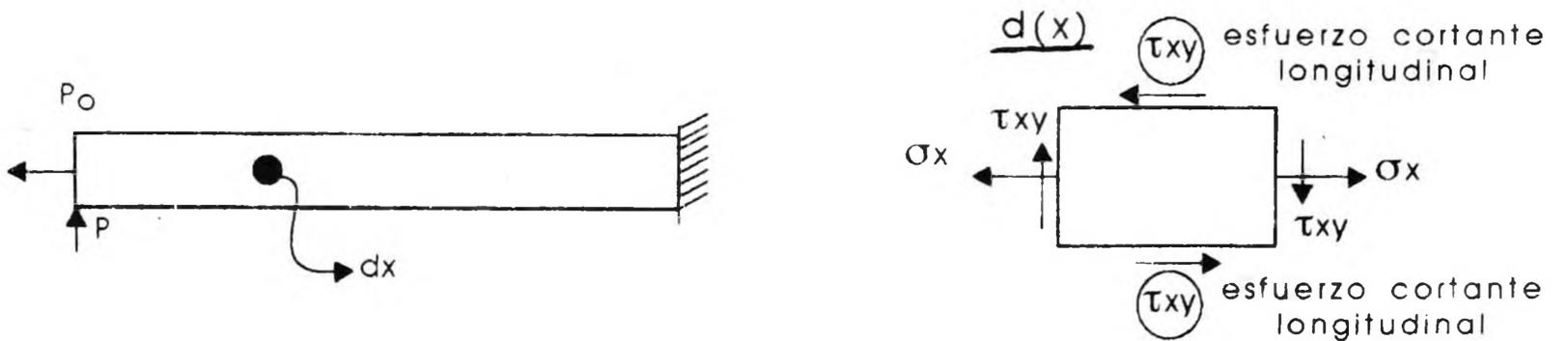


De acuerdo a la figura, se pueden establecer las siguientes ecuaciones:

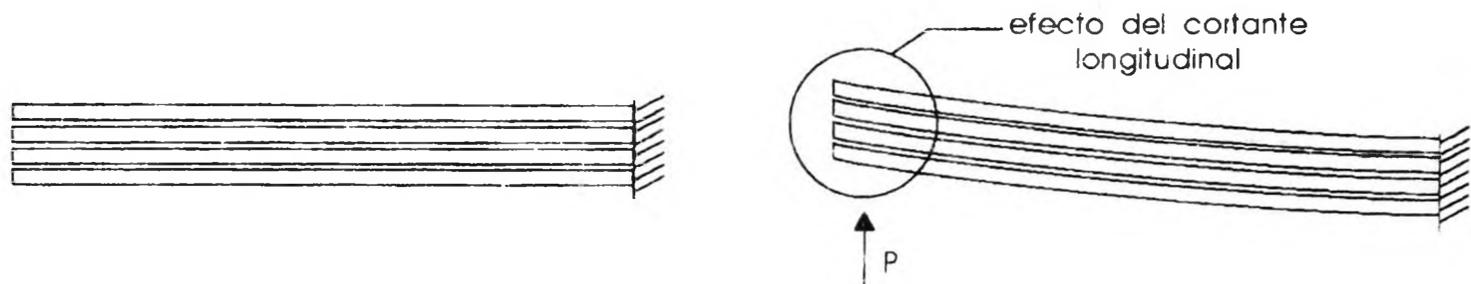
$$\sum F_y = \sum F_y ; \int \tau_{xy} dA = -V$$

$$\sum F_z = \sum F_z ; \int \tau_{xz} dA = 0$$

Ahora bien, si se considera la siguiente figura y aplicando un equilibrio de fuerzas, se tiene:



De acuerdo a esta figura se puede concluir que los esfuerzos cortantes longitudinales deben existir en cualquier elemento sometido a carga transversal. Lo anterior puede verificarse si se considera una viga estratificada y se aplica una fuerza P en uno de sus extremos.



En la práctica correspondiente a "Flexión en Vigas", se comprobó que si una viga se somete a flexión pero no a cortante, las secciones planas antes de la flexión continuaban planas después de ésta, teniendo en su sección el eje vertical como eje de simetría.

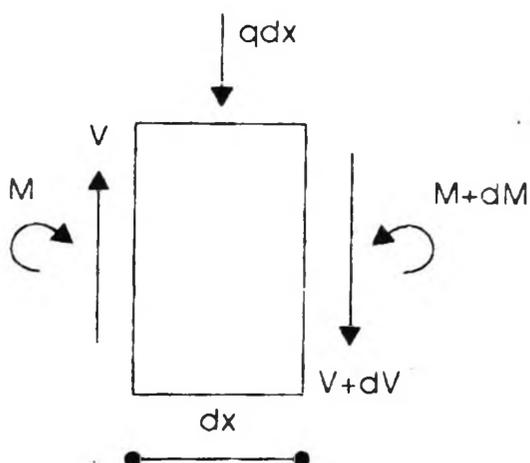
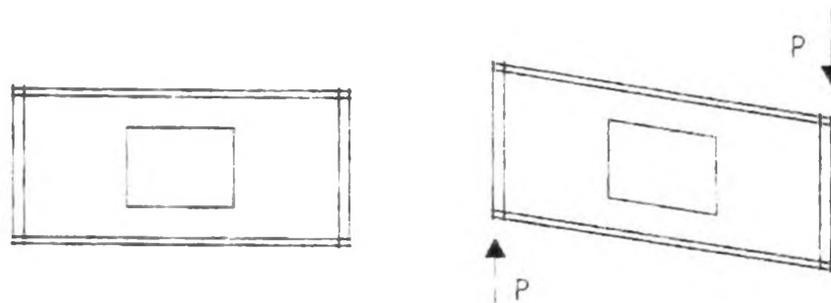


Diagrama de un cuerpo libre de un elemento de longitud diferencial dx

Cuando existe cortante lo anterior no sucede y se puede comprobar introduciendo fuerzas cortantes en un marco con membrana, en donde el ángulo recto se verá destruido debido a la presencia de cortante.

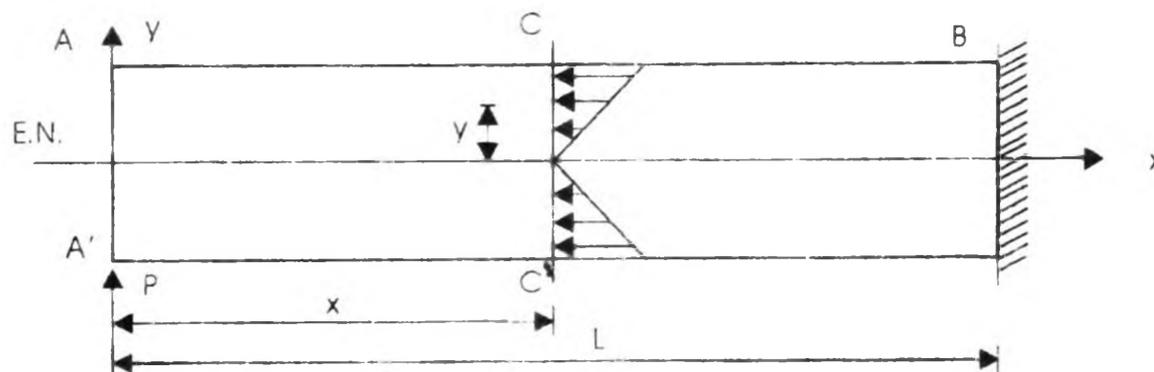


2. Distribución de Esfuerzos Normales

La ecuación de la escuadría define los esfuerzos normales en una sección dada.

$$\sigma_z = \frac{M_y}{I}$$

Teniendo en consideración la siguiente figura:



y considerando que "x" es la distancia de un punto de corte a la carga P, y "y" su elevación por encima del eje neutro; aplicando la ecuación de la escuadría:

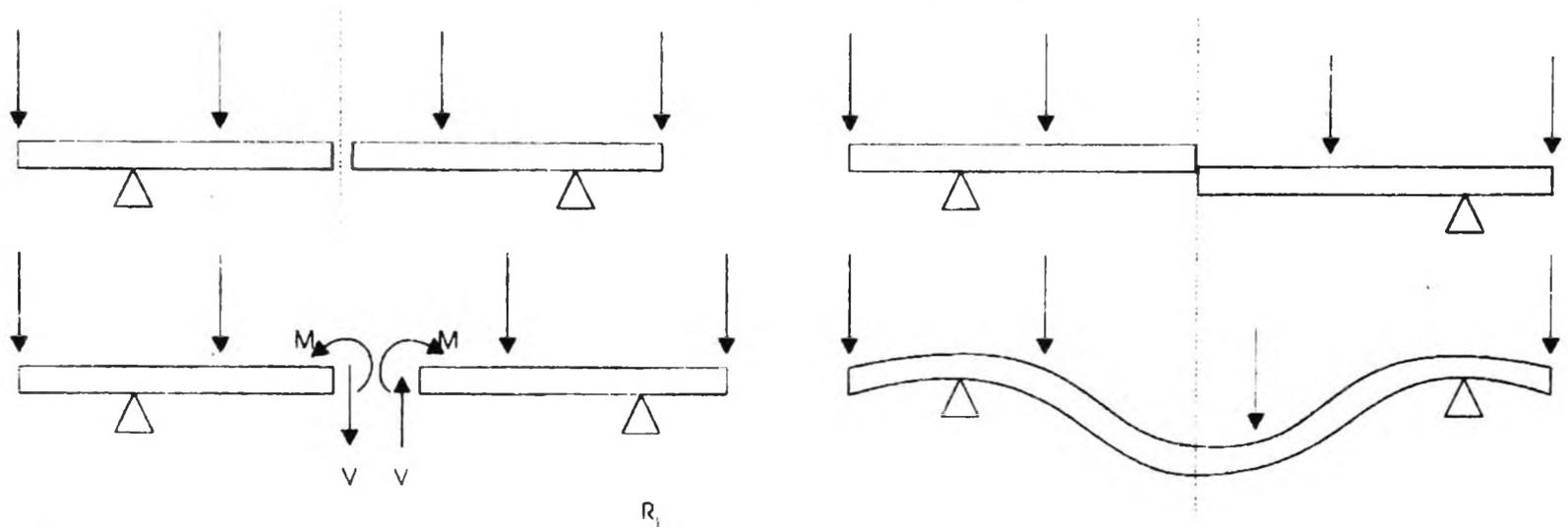
$$\sigma_z = \frac{M_y}{I} = - \frac{Pxy}{I}$$

El signo (-) en la ecuación, indica que por encima del eje neutro los esfuerzos en la sección serán de compresión.

Dado que los esfuerzos son proporcionales a la distancia "x" desde la carga hasta la sección considerada, el esfuerzo máximo de compresión se tendrá cuando $x=L$.

3. Determinación del Cortante en vigas estáticamente determinadas

Cuando una viga se separa en dos partes a través de una sección, la interacción entre ellas se constituye por una fuerza cortante V y en un momento flector " M ". Recordar que el momento flector en una sección es positivo si la viga muestra concavidad en su parte superior, debido a la acción del momento (como en el siguiente ejemplo):

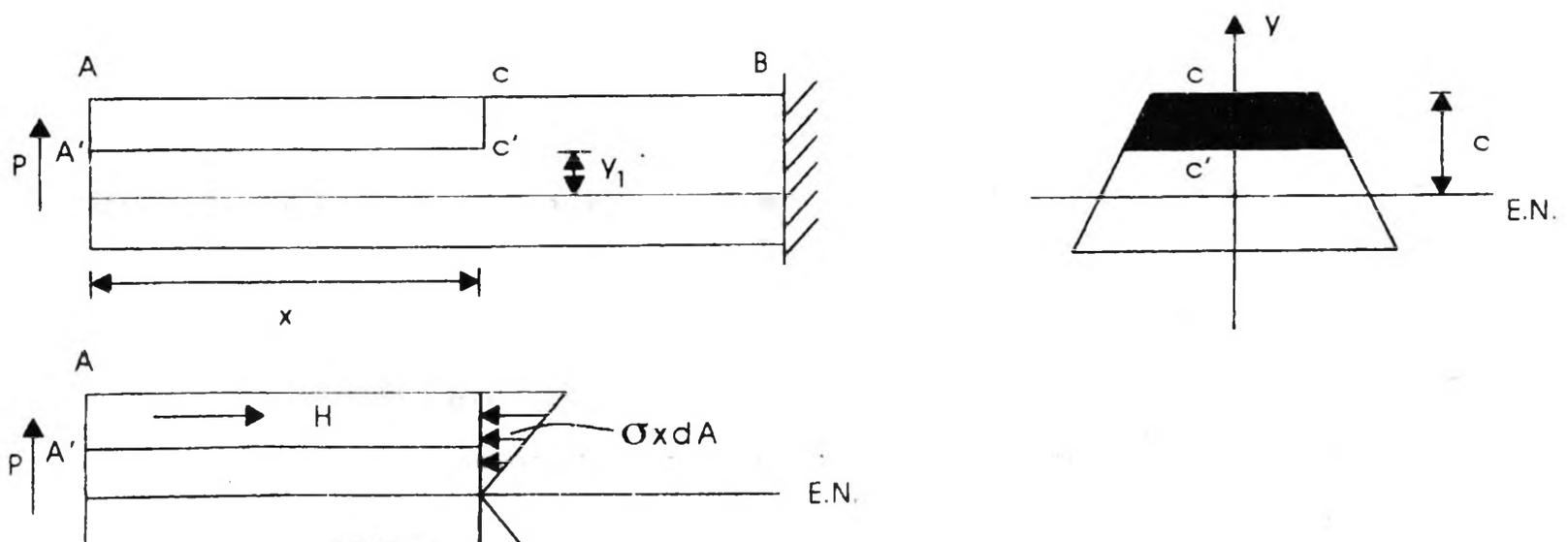


En éste diagrama la parte derecha necesita actuar sobre la izquierda mediante una fuerza V hacia abajo para evitar que ésta se desplace hacia arriba relativamente a la parte derecha; los momentos M - M se producen por esfuerzo de tensión y compresión que actúan respectivamente, en las porciones inferiores y superiores de la sección.

Los datos del cortante y del momento flector en la sección son necesarios en el cálculo de la resistencia de la viga en aquella sección.

Se recordará que τ_{xy} representa tanto la componente vertical del esfuerzo cortante en una sección perpendicular a la viga, como la componente longitudinal del esfuerzo cortante en una sección horizontal.

De la viga en voladizo mostrada anteriormente, se considerará en especial el diagrama de cuerpo libre de la sección $AA' - CC'$, donde se aprecian las fuerzas involucradas.



donde:

- p': Porción de la carga que se aplica al cuerpo libre.
- V': La resultante de las fuerzas cortantes aplicadas en CC'
- $\sigma_x dA$: Las fuerzas normales que actúan en CC'
- H: Resultante de las fuerzas cortantes horizontales.

Recordando la ecuación de la escuadría, se tiene:

$$\sigma_x dA = - \frac{P_{xy}}{I} dA$$

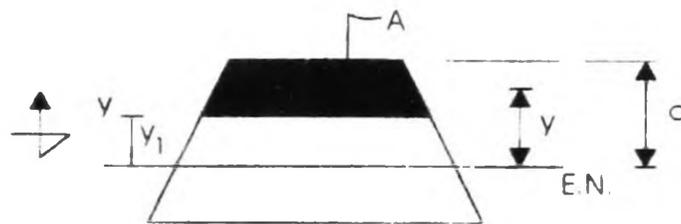
Escribiendo ahora la ecuación de equilibrio $\sum F_x = 0$ para AA'-CC'

$$\sum F_x = 0 ; H - \int \frac{P_{xy}}{I} dA = 0$$

De la ecuación anterior, se despeja a H, teniendo a "x" constante en la sección.

$$H = \frac{P_x}{I} \int_{y=y_1}^{y=c} y dA$$

Con la ecuación anterior se puede identificar a la integral como el momento de primer orden Q, del área de la sección transversal que está localizada por encima de la línea y - y



$$Q = \int_{y=y_1}^{y=c} y dA = A \bar{y}$$

\bar{y} : distancia del eje neutro de la sección, al centroide del área $A \bar{y}$ sombreada

Sustituyendo ecuaciones, se tendrá:

$$H = \frac{PQ}{I} x \quad \text{ó} \quad \frac{H}{x} = \frac{PQ}{I}$$

La ecuación muestra que la fuerza cortante horizontal H , aplicada en la cara inferior de la porción de la viga $AA' - CC'$ es proporcional a su longitud x .

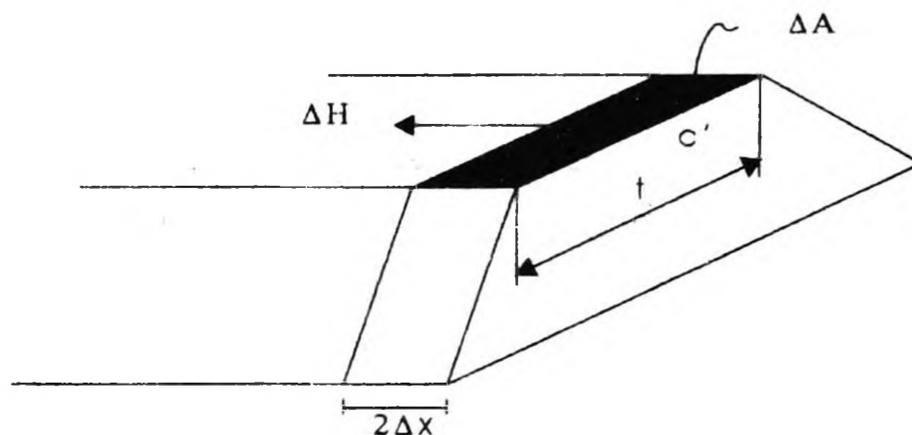
Así, se puede concluir que la fuerza cortante horizontal por unidad de longitud H/x , es constante e igual a PQ/I . A la fuerza cortante por unidad de longitud, se le denomina flujo de corte q .

$$q = \frac{PQ}{I}$$

En el caso en que la viga se encuentre sometida a una serie de cargas de cualquier tipo (concentradas, distribuidas, etc.), y de cualquier magnitud, la ecuación anterior sigue siendo válida, aunque la fuerza P en este desarrollo se debe sustituir por la suma de fuerzas consideradas hasta la sección de interés, de aquí que:

$$q = \frac{VQ}{I}$$

Considerando ahora la viga de la figura.



en donde la fuerza cortante ΔH aplicada en una porción de longitud, Δx del corte horizontal que pasa por C' , es:

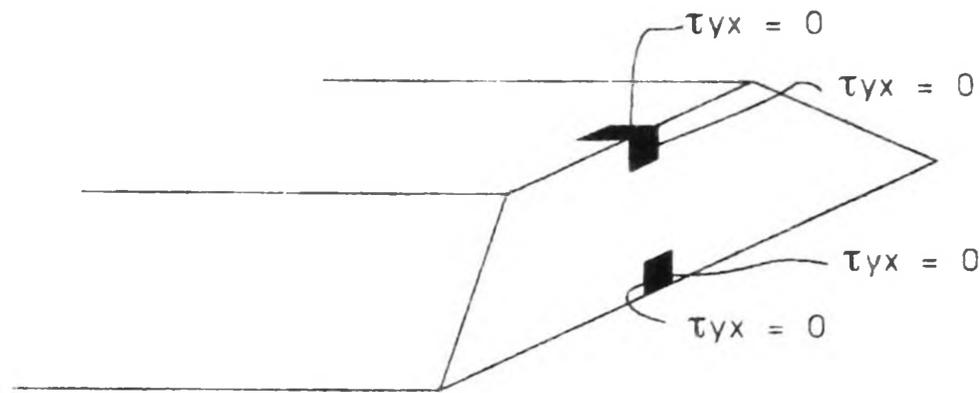
$$\Delta H = q\Delta x = \frac{VQ}{I} \Delta x$$

Dividiendo entre el área $\Delta A = \tau\Delta x$, donde t es el ancho del corte, se obtendrá el valor promedio del esfuerzo cortante, τ yx.

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{\Delta H}{\Delta A} = \frac{VQ}{I} \frac{\Delta x}{t\Delta x}$$

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{IE}$$

Obsérvese que $\tau_{yx} = 0$ en las caras superior e inferior de la viga, puesto que no hay fuerzas aplicadas en dichas caras.



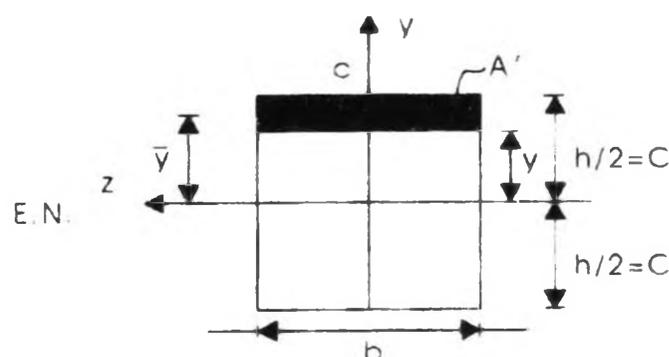
Nótese que mientras Q es máximo con $y = 0$, no se puede concluir que τ_{prom} sea máximo a lo largo del eje neutro, puesto que τ_{prom} depende del ancho de la sección, así como de Q .

4. Esfuerzos Cortantes en una Viga Rectangular. Relaciones entre carga, ecuaciones de corte y de momentos.

Las secciones de discontinuidad se encuentran por lo general a lo largo de la viga y en ellas actúan cargas concentradas o reacciones; o en las mismas la carga distribuída cambia de intensidad o de forma.

Las ecuaciones de carga, de corte y de momento en cualquier punto entre dos secciones de discontinuidad adyacentes pueden expresarse en términos de una variable independiente que representa la distancia del punto a un punto de referencia arbitrario escogido.

Obtención de la ecuación del esfuerzo cortante para una sección dada de una viga rectangular.



Se usará la ecuación que dá el esfuerzo cortante promedio:

$$\tau_{xy} = \tau_{prom} = \frac{VQ}{It}$$

donde:

- τ : corresponde al ancho b de la viga
- Q : momento de primer orden del área A' , con respecto al eje z
- I : momento de inercia del área A , total.

La distancia desde el eje neutro al centroide C del área A' , es:

$$\bar{y} = \frac{1}{2} (c + y)$$

$$A' = b (c - y)$$

De ahí que:

$$Q = A\bar{y} = b (c - y) \frac{1}{2} (c + y) = \frac{1}{2} b(c^2 - y^2)$$

$$I = \frac{bh^3}{12} \text{ pero } h = 2c \Rightarrow I = \frac{2}{3} bc^3$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{3}{4} \frac{c^2 - y^2}{bc^3} V$$

Si se tiene que el área de la sección total de la viga A , es $A=2bc$:

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \dots\dots\dots (1)$$

La ecuación (1) muestra que la distribución de los esfuerzos cortantes en una sección transversal de una viga rectangular, es parabólica.

Teniendo $y = 0$, se obtiene el esfuerzo cortante máximo en una sección dada de una viga rectangular:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \dots\dots\dots (2)$$

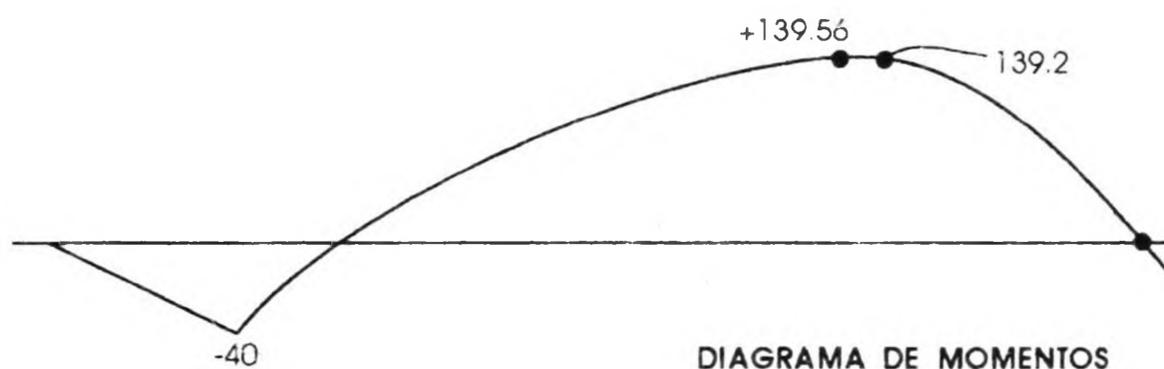
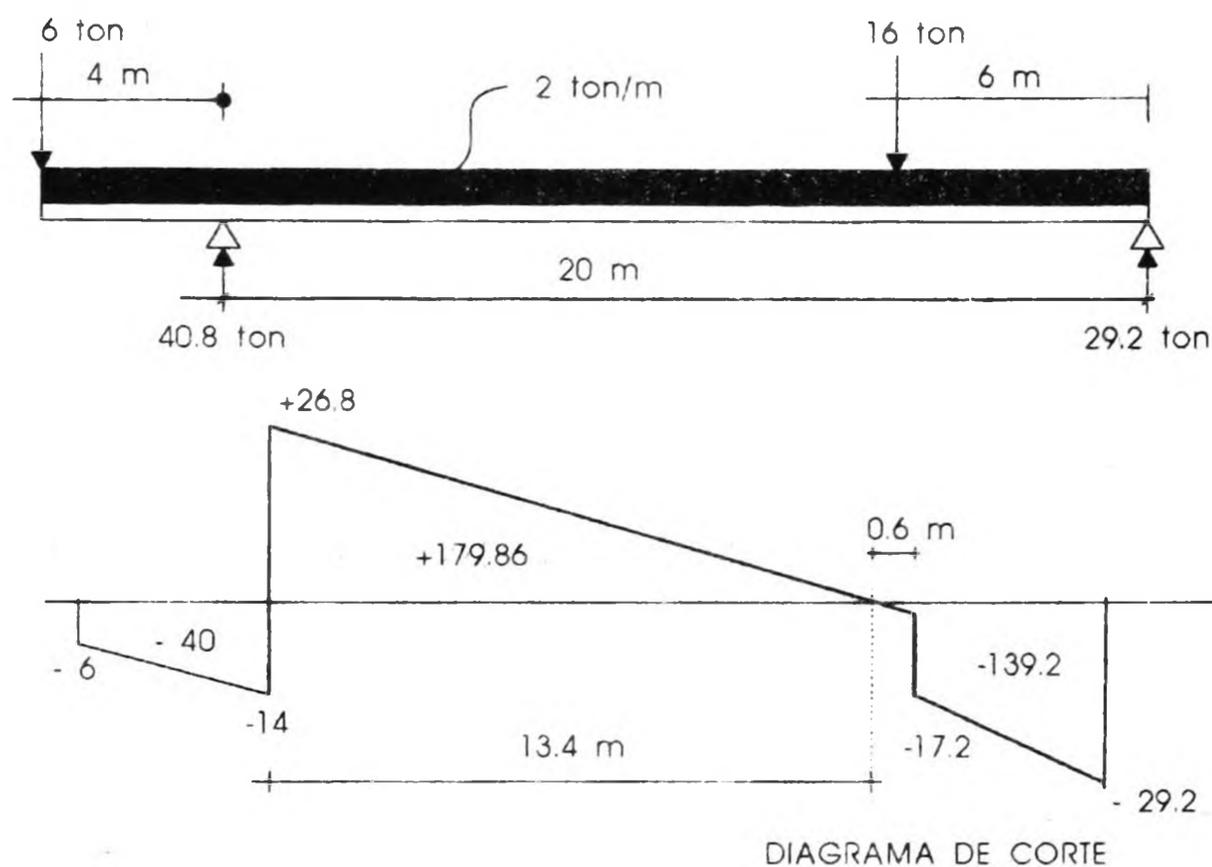
5. Diagrama de Corte y de Momento

Demuestra su variación a lo largo de la viga mediante un trazo, con base en una línea horizontal. Los diagramas resultan útiles en el diseño de la resistencia de la viga.

El diagrama de corte puede construirse simplemente comenzando en el extremo izquierdo y subiendo y bajando con la carga hasta llegar al extremo derecho.

El diagrama de momento puede construirse calculando primero sus ordenadas en aquellas secciones en que se presenta discontinuidad y luego trazando su curva.

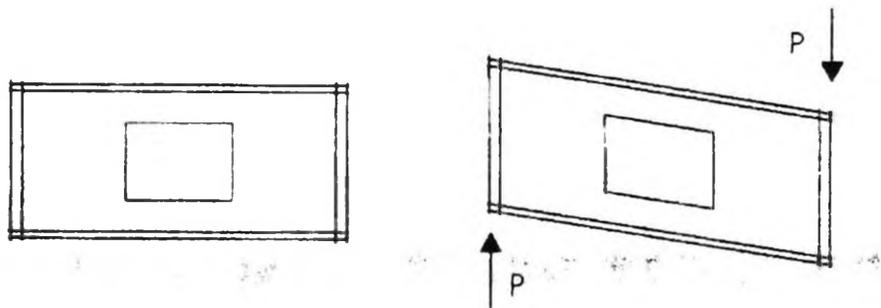
$$\int dM = \int v dx$$



Ejercicios de Aplicación Experimental en Laboratorio

Ejercicio 1

- Tómese el marco de membrana, manteniendo los lados del mismo, en ángulo recto.
- Asegúrese que el cuadrado dibujado en la membrana conserva sus ángulos perfectamente rectos.
- Introduzca fuerza cortante al marco, mediante un par de fuerzas y observe que el ángulo recto se destruye.



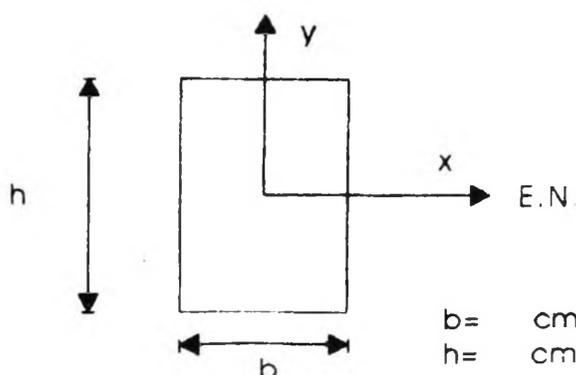
Ejercicio 2

- Móntese la viga estratificada en cantiliver y obsérvese el extremo libre de la misma, así como los cuadrados dibujados en ella.
- Aplíquese una fuerza vertical hacia arriba en el extremo libre y obsérvese éste. Observe también los cuadrados dibujados en la viga.

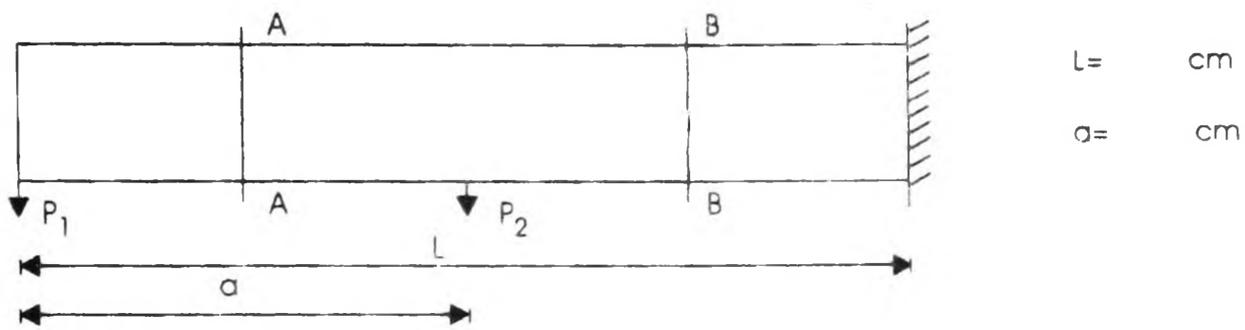


Ejercicio 3

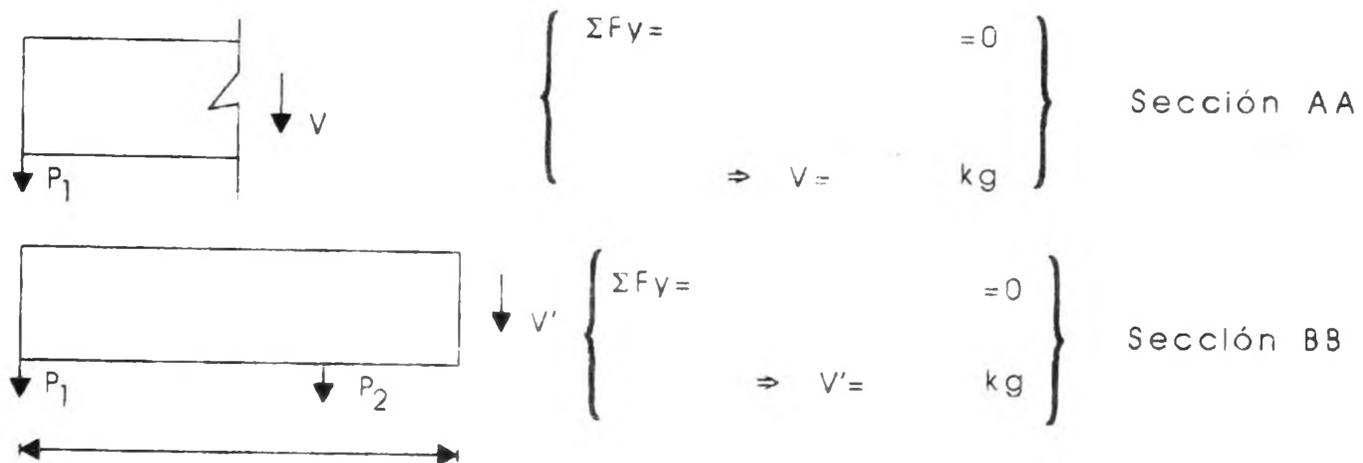
- Móntese una viga rectangular en cantiliver, anotando sus dimensiones y características geométricas.



$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{()\text{cm} \times ()^3}{12} \text{cm}^3 = \text{cm}^4$$



- En función de las cargas P_1 y P_2 y con ayuda del diagrama de cuerpo libre correspondiente, calcule los cortantes actuando en la sección AA y BB.



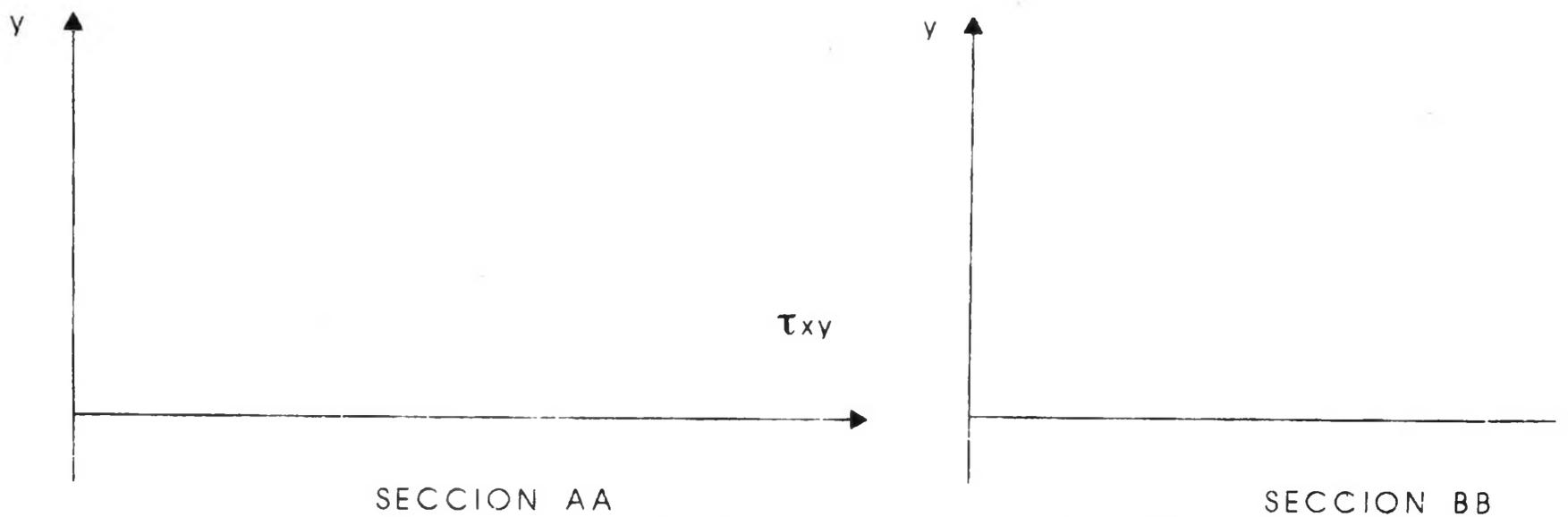
- Con ayuda de las ecuaciones (1) y (2), calcúlense los valores del esfuerzo cortante a distintas distancias del eje neutro.

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3}{2} \frac{V}{A}$$

SECCION AA			SECCION BB		
V	Y	τ_{xy}	V'	Y	τ_{xy}
	c			c	
	0.8c			0.8c	
	0.6c			0.6c	
	0.4c			0.4c	
	0.2c			0.2c	
	0			0	

-De la tabla anterior extráiganse los valores necesarios para construir el diagrama de esfuerzos cortantes en las secciones indicadas de la viga.



Conclusiones de la experimentación:

Ejercicios 1 y 2.

Observar los efectos cualitativos de la presencia de esfuerzo cortante en una viga.

Ejercicio 3

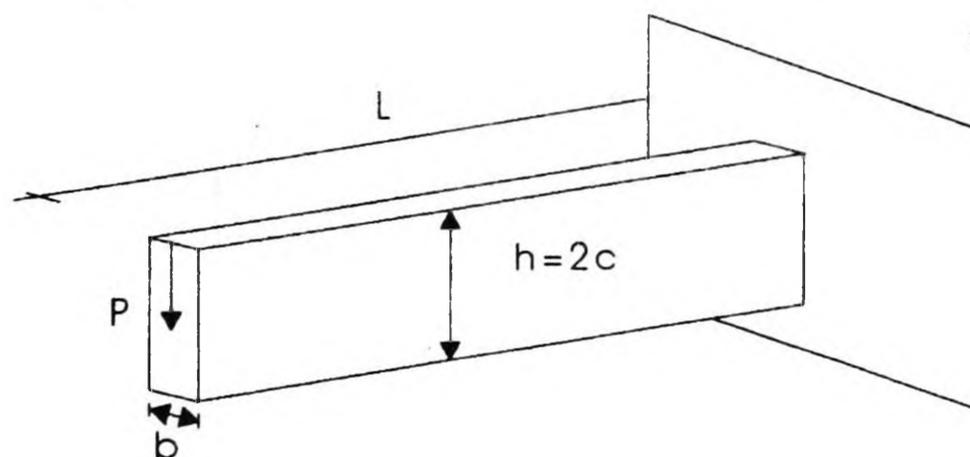
Se comprobará la curva parabólica que describe la función de esfuerzos cortantes a lo largo de una sección de viga.

Se comprobará que la ecuación (2) dá un valor igual a la ecuación (1), cuando el esfuerzo cortante se evalúa con $y = 0$.

5.1 Distribución de Esfuerzos en una Viga Rectangular

Fundamentación Teórica.

Si se considera la viga que se muestra en la figura y puesto que la fuerza cortante V en la viga es constante e igual en magnitud a la carga P .

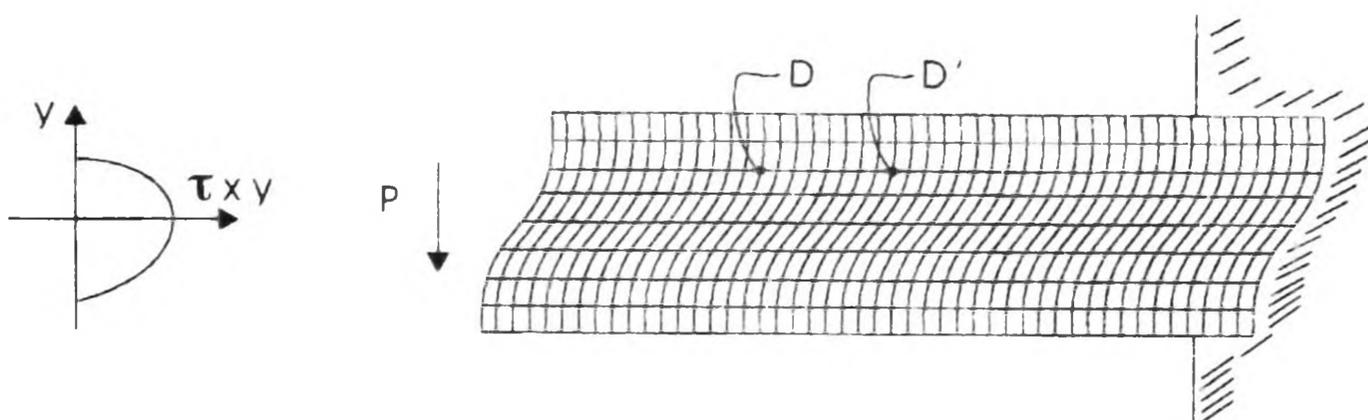


Donde la ecuación de la distribución del esfuerzo cortante es:

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{P}{A} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)$$

Según esta ecuación, los esfuerzos cortantes dependen únicamente de la distancia "y" desde la superficie neutra. Por lo anterior se concluye que todos los elementos localizados a la misma distancia desde la superficie neutra, soportan la misma deformación debida al corte.

En la figura siguiente, aunque las secciones planas no permanecen planas, la distancia entre dos puntos correspondientes D y D' localizados en diferentes secciones, permanece igual.



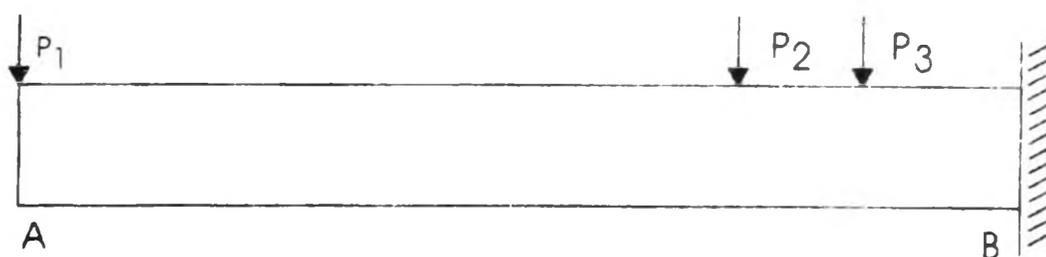
Los esfuerzos normales en la viga, se calculan con la ecuación:

$$\sigma_x = \frac{P \times y}{I}$$

La validez de ésta ecuación depende de la condición de la viga en sus extremos. Según la otra ecuación, la carga P, debiera distribuirse parabólicamente en la sección del extremo libre de la viga; además el apoyo empotrado, deberá ser tal que permita la deformación de corte que se aprecia en la figura anterior.

No obstante, las dos ecuaciones proporcionan la correcta distribución de esfuerzos, excepto cerca de cualquiera de los extremos de la viga.

Cuando en una viga se aplican cargas como se ilustra:



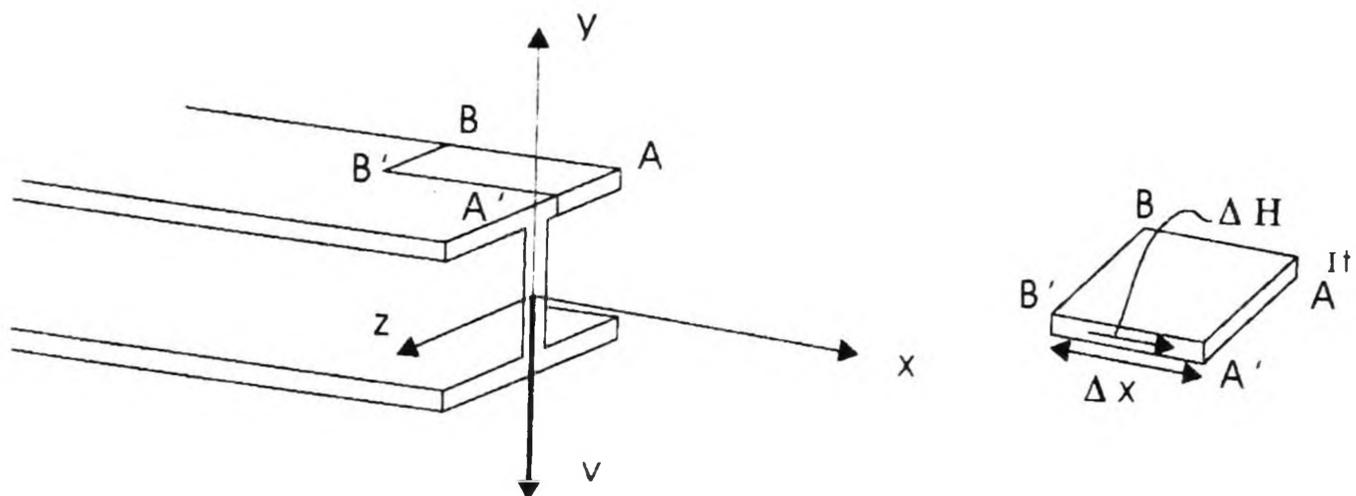
Puesto que las cargas P_2 y P_3 se aplican en la superficie de la viga y no pueden suponerse distribuidas parabólicamente en la sección transversal, los resultados obtenidos cesan su validez en la vecindad de los puntos de aplicación de las cargas.

5.2 Esfuerzos Cortantes en elementos de pared delgada.

La siguiente ecuación, puede ser utilizada para determinar el flujo de corte en cualquier corte longitudinal de un elemento sometido a carga transversal en su plano vertical de simetría.

$$q = \frac{VQ}{I}$$

Ahora considérese un segmento de longitud Δx , de una viga I de ala ancha:



Siendo V la fuerza cortante vertical en la sección transversal mostrada.

Al desprender la sección $ABB'A'$, del ala superior, la fuerza ΔH que actúa en el corte, será:

$$\Delta H = q \Delta x$$

$$q = \text{Flujo de corte}$$

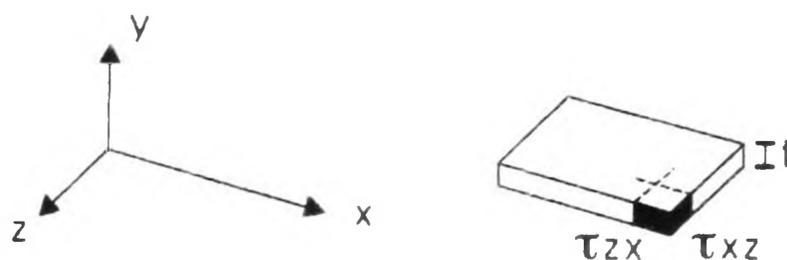
Sustituyendo q de la primera ecuación, en la ecuación anterior se tiene:

$$\Delta H = \frac{VQ}{I} \Delta x$$

Dividiendo ambos miembros entre el área $A = t\Delta$, se tiene:

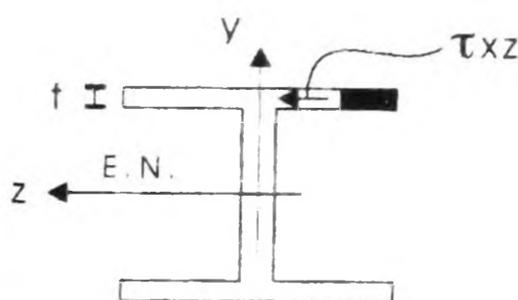
$$\tau_{prom} = \frac{VQ}{It}$$

De acuerdo a la figura siguiente, se tendrá:



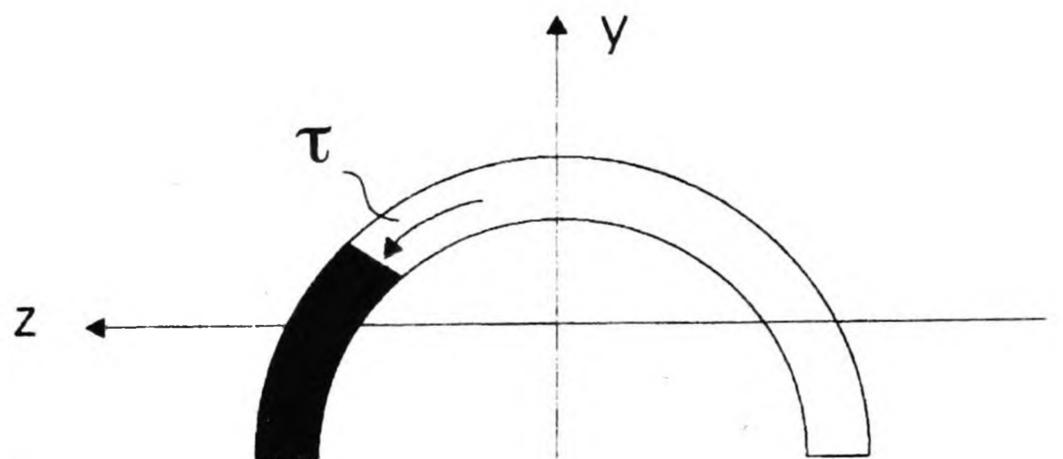
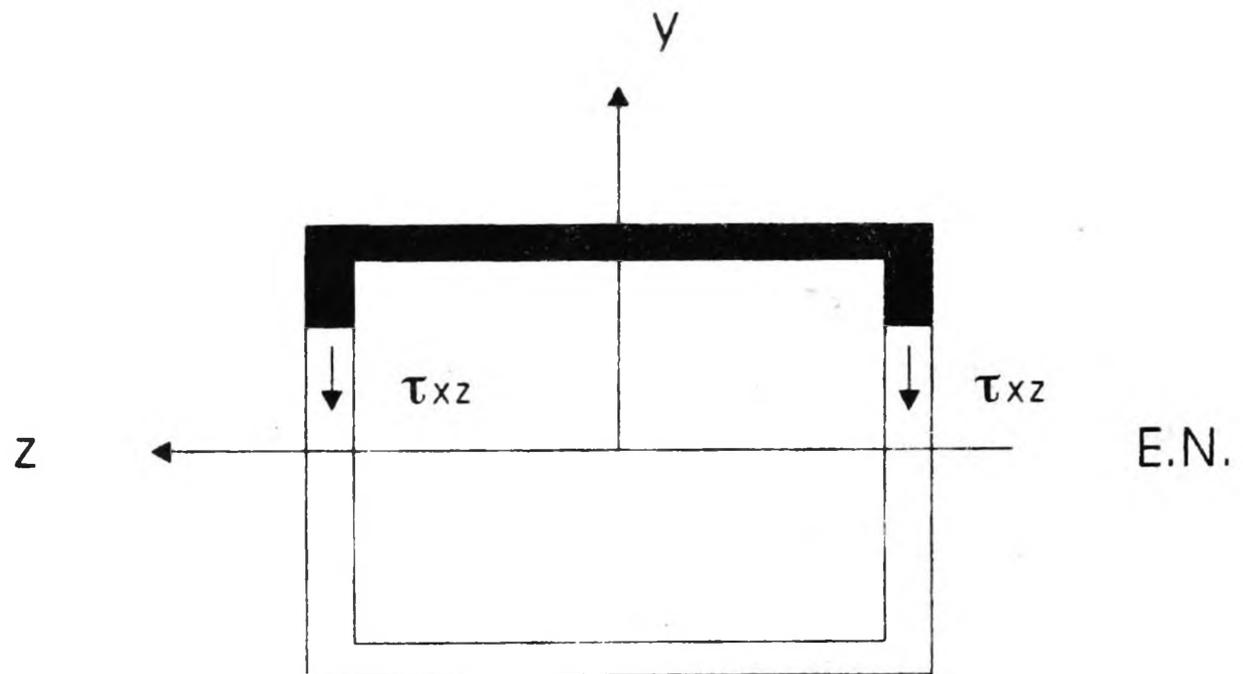
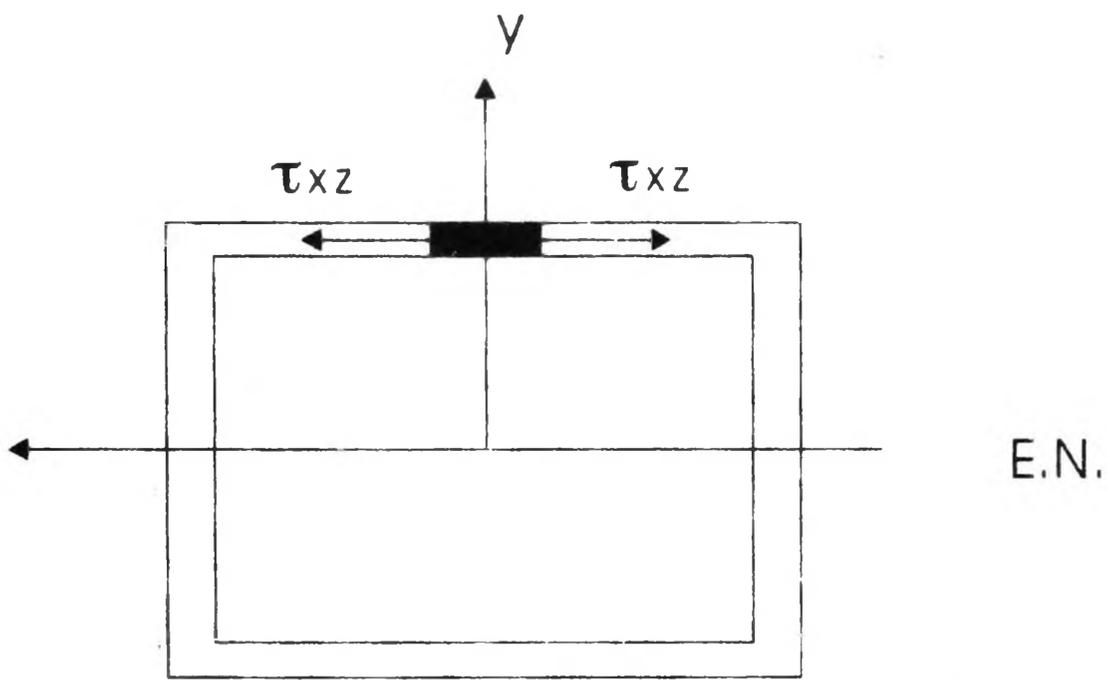
τ_{prom} de la ecuación representa el promedio de los esfuerzos cortantes τ_{zx} que actúan en el corte vertical, pero es conveniente considerar que t es muy pequeño, y por lo tanto existirá muy poca variación de τ_{zx} en el corte.

Por otra parte, se tiene que $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, por lo que se vé que la componente horizontal τ_{xz} del esfuerzo cortante en cualquier punto de una sección transversal del ala, puede obtenerse con la ecuación promedio en donde Q representa el momento de primer orden del área sombreada en la figura siguiente con respecto al eje neutro.



La ecuación τ_{prom} , puede usarse para determinar los esfuerzos cortantes en otros elementos de pared delgada, tales como vigas en cajón y tubos medios, siempre y cuando las cargas se apliquen en el plano de simetría del elemento.

Ejemplos:



III. CENTRO DE CORTE

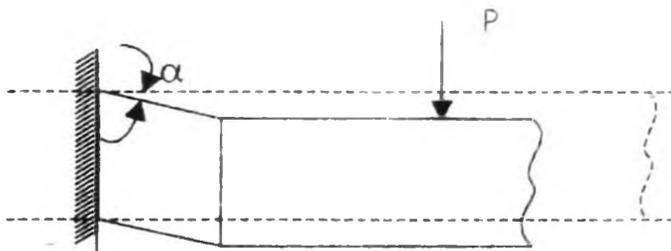
Objetivos:

- * Definir centro de corte.
- * Explicar las condiciones en las cuales se presenta torción de las secciones.
- * Explicar los efectos que produce el cargar una sección en su centro de corte.

1. Corte Simple

Corte es el estado de tensión en el cual las partículas del material se deslizan con movimiento relativo entre unas y otras.

El corte introduce deformaciones capaces de cambiar la forma de un elemento rectangular convirtiéndolo en un paralelogramo inclinado. La distorsión se mide por el ángulo de inclinación del rectángulo deformado y no por una variación de longitud, tal como sucede en el caso de la tensión o la compresión.



α = ángulo de deformación por corte

Las fuerzas que produce esta deformación actúan sobre los planos en los que se produce el deslizamiento, se denominan "tensiones de corte", cuando se les mide sobre una unidad de superficie. En el intervalo de comportamiento elástico, la deformación es proporcional a la fuerza y por lo tanto la distorsión es proporcional a la tensión de corte.

Se llama "módulo de elasticidad por corte" a la relación entre tensión y distorsión. Viene a ser también una característica propia de cada material y su valor corresponde aproximadamente a la mitad del módulo de tracción o compresión; por ejemplo para el acero corresponde un módulo de corte de 810.000 Kg/cm².

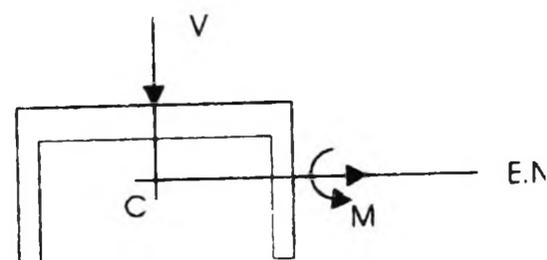
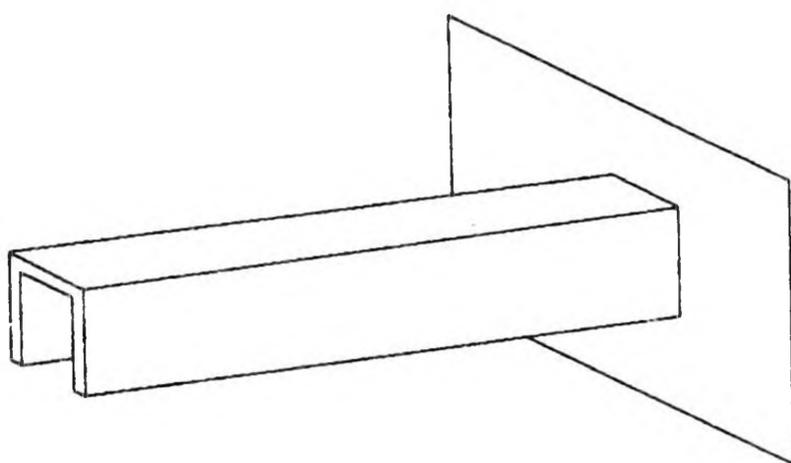
El corte produce deslizamiento en dos planos, siempre perpendiculares entre sí; también tiende a hacer girar a la sección y puede considerarse como una combinación de tracción y compresión normales entre sí, en

direcciones que forman ángulos de 45° con la dirección del corte.

Analíticamente, el corte en una sección es la suma de las fuerzas hacia arriba entre el extremo izquierdo y la sección, el diagrama de corte puede construirse simplemente comenzando en el extremo izquierdo y subiendo y bajando con la carga hasta que se llega al extremo derecho. Como la pendiente de la curva del corte es la intensidad de la carga, la variación del corte es una línea horizontal sobre un segmento sin carga y deberá descender linealmente hacia la derecha sobre un segmento uniformemente cargado.

2. Centro de Corte

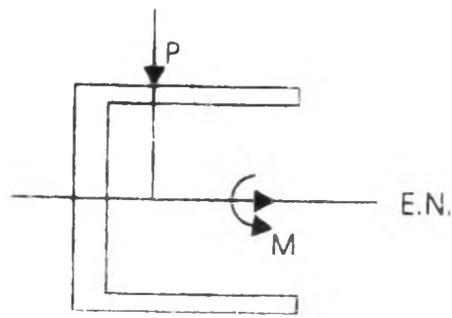
Cuando se tiene un elemento que posee un plano vertical de simetría y sobre el cual actúan cargas transversales, la flexión M y la fuerza cortante V , producen esfuerzos normal y cortante definidos en las ecuaciones siguientes respectivamente.



$$\sigma_x = \frac{M_y}{I}$$

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{I t}$$

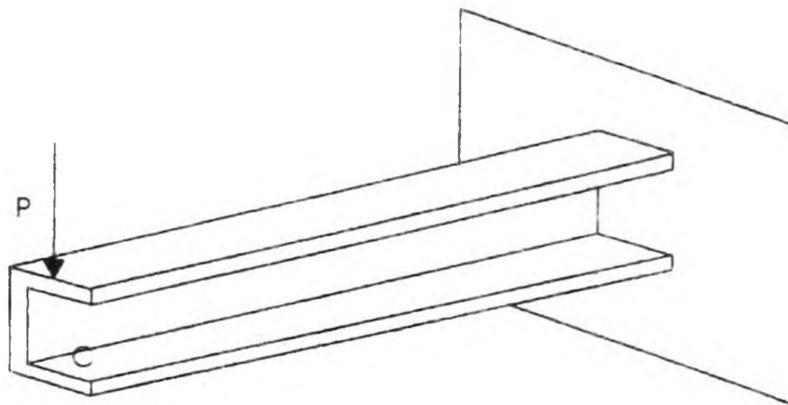
Si la sección se gira 90° , como se muestra en la figura y si se supone que la línea de acción de la fuerza P pasa aún por el centroide de la sección, se tendrá:



El vector de par M , representa el momento flector en una sección transversal dada, y estará dirigido en base a un eje que coincide con el eje neutro. Por lo anterior, la primera ecuación es aplicable al calcular los esfuerzos normales en la sección.

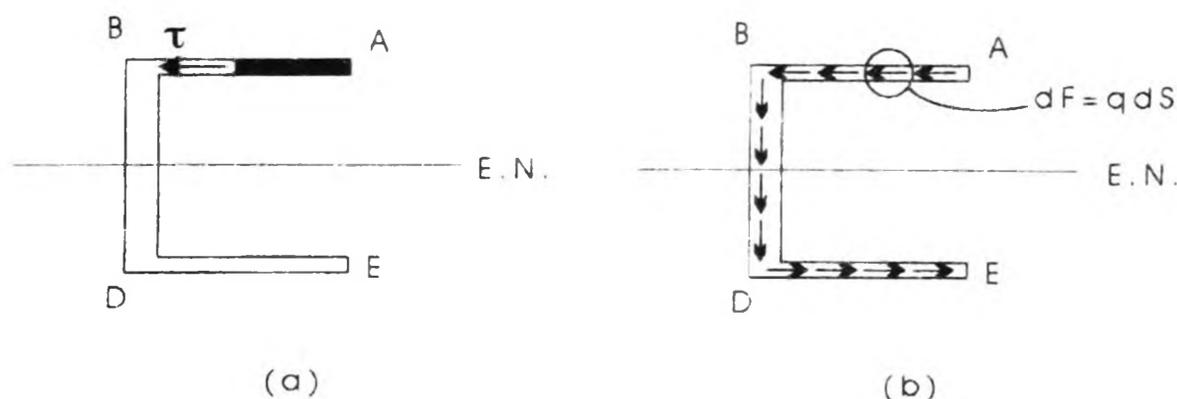
Sin embargo, la segunda ecuación no podrá aplicarse puesto que fué desarrollada para un elemento que posea un eje vertical de simetría, y el elemento en esta posición no lo posee.

Lo que sucederá con el elemento en esta posición, es que se flexará y se torcerá bajo la carga aplicada y la distribución de esfuerzos cortantes será distinta.



Se podría hacer la pregunta: ¿En qué punto deberá colocarse la carga P , de modo que el elemento se flexe sin torcerse?

Si el elemento flexa sin torcerse, entonces los esfuerzos cortantes en cualquier punto de una sección transversal dada, pueden obtenerse de la segunda ecuación, donde Q es el momento de primer orden del área sombreada con respecto al eje neutro.

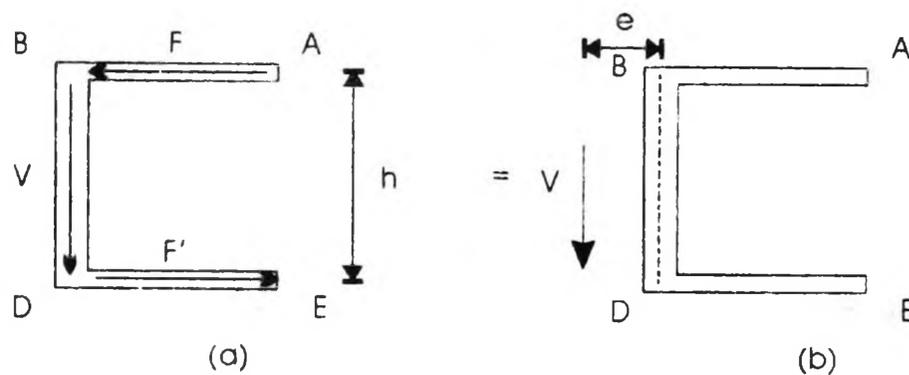


La distribución de esfuerzos será como se muestra en (b) teniendo $\tau = 0$ en los puntos A y E.

La fuerza cortante ejercida en un pequeño elemento de área de la sección transversal $d\Delta = tds$ es $dF = \tau d\Delta = \tau tds$ ó $dF = qds$ donde q es el flujo de corte, definido como:

$$q = \tau_t = \frac{VQ}{I}$$

La resultante de las fuerzas cortantes ejercidas en los elementos del ala superior AB, es una fuerza horizontal F , de magnitud:



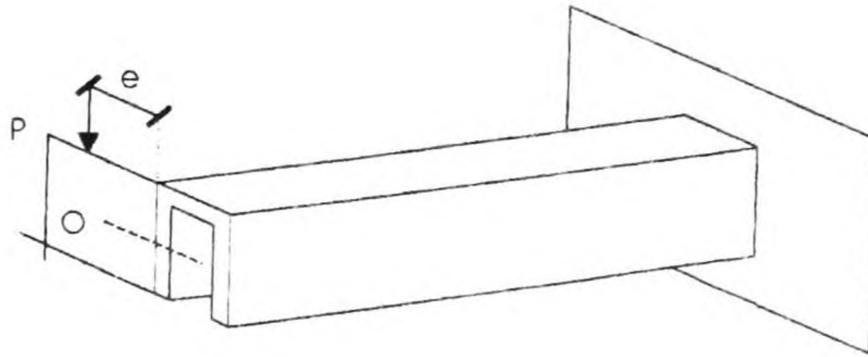
$$F = \int_A^B q ds$$

Observando la figura (a) se aprecia que la resultante de las fuerzas cortantes ejercidas en el ala inferior DE es una fuerza F' de la misma magnitud a la ejercida en el ala superior pero, de sentido opuesto. Se concluye que la resultante de las fuerzas cortantes ejercidas en el alma BD, debe ser igual a la cortante vertical de la sección.

$$V = \int_B^D q ds$$

También se observa que las fuerzas F y F' forman un par de momento Fh , donde h es la distancia entre las líneas centrales de las alas AB y DE. Este par puede eliminarse si el cortante vertical V , es desplazado hacia la izquierda a una distancia e , tal que el momento de V con respecto a B, sea igual a Fh .

$$Ve = Fh \quad \text{ó} \quad e = \frac{Fh}{V}$$



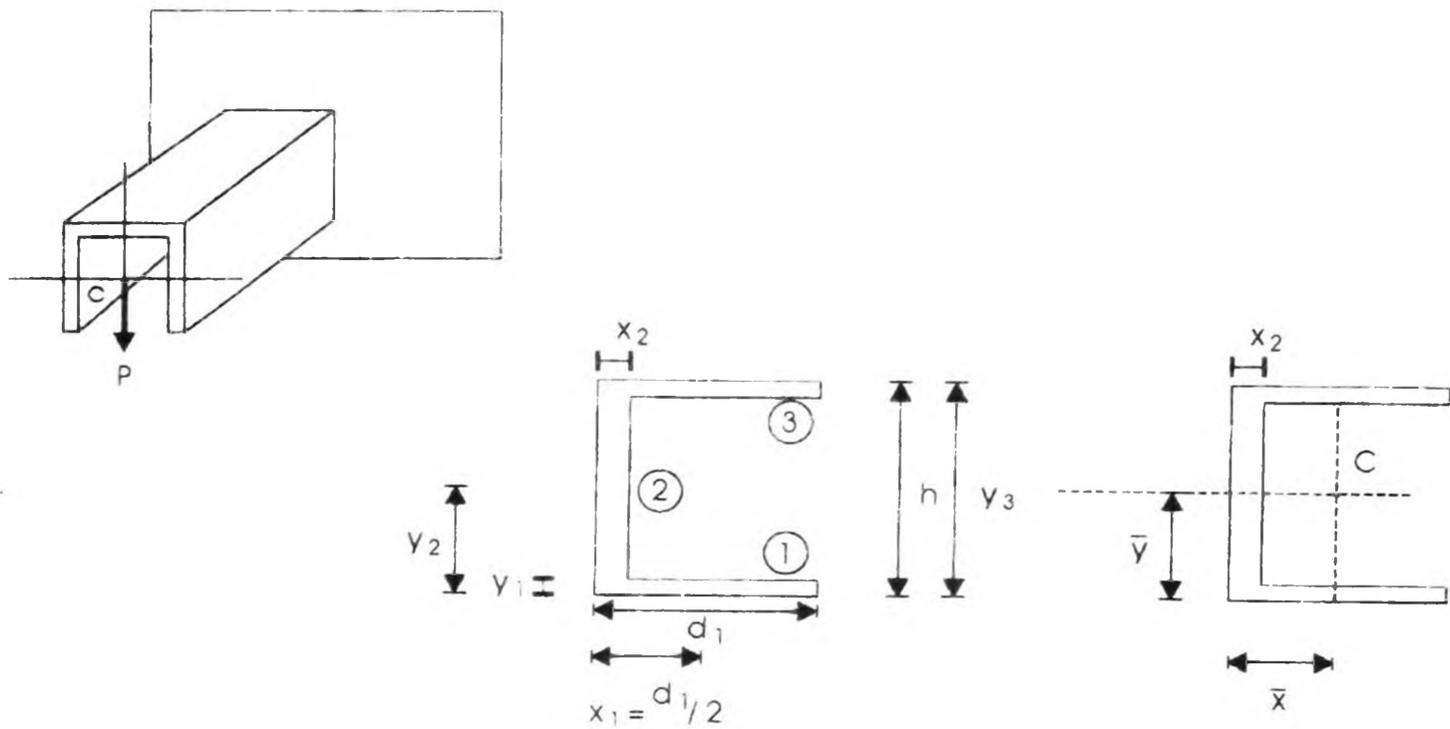
De todo lo anterior se deduce que cuando la fuerza P se aplica a una distancia "e" a la izquierda de la línea central del alma BD, el elemento se flexa en un plano vertical sin torcerse.

El punto O, donde la línea de acción de P , intersecta al eje de la sección extrema, se llama el CENTRO DE CORTE de dicha sección.

Ejercicios de aplicación experimental en Laboratorio.

Ejercicio 1

-Tómese la sección C o canal y colóquese en cantiliver como se muestra:



- Determínese la posición del centroide, llenando la siguiente tabla.

	x(mm)	y(mm)	A(mm ²)	xA(mm ³)	yA(mm ³)
①					
②					
③					
Σ					

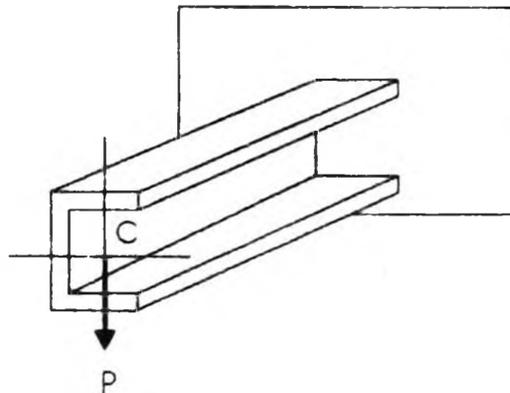
$$\bar{x} = \frac{\sum xA}{\sum A} =$$

$$; \bar{y} = \frac{\sum yA}{\sum A} =$$

- En la posición mostrada en la figura de la sección C, cárguese al elemento colocando en su extremo y sobre la línea que pasa por su centroide diversas pesas, observar si el elemento además de flexionarse, se tuerce o no.

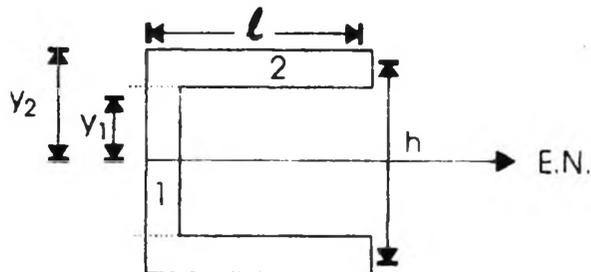
Ejercicio 2

a) Colóquese ahora el mismo elemento en cantiliver pero rotado 90° como se muestra:



b) Colóquense cargas en su extremo, sobre la línea que pasa por el centroide y obsérvese lo que ocurre al elemento.

c) Selecciónese una pesa, que se colocará en el extremo del elemento, calculándose el flujo de cortante máximo.



$$q = \frac{VQ}{I}$$

$$F = \int_0^l q \, ds = q \, l$$

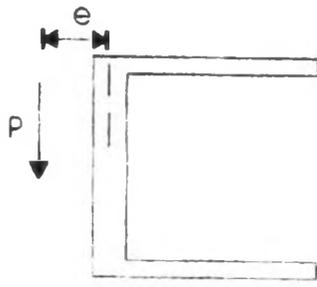
figuras	y (mm)	A (mm ²)	yA (mm ³)
①			
②			

$$I_c = \quad \text{mm}^4$$

$$Q = \sum yA$$

- Calcúlese la distancia "e" a la que deberá colocarse cualquier carga para que el elemento no se tuerza.

$$e = \frac{Fh}{V}$$

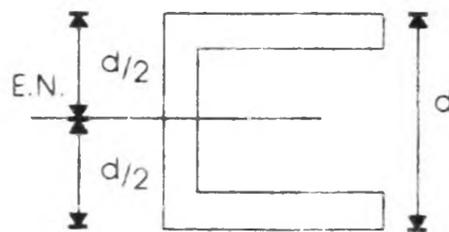


-Colóquense ahora pesas en el CENTRO DE CORTE obtenido, obsevándose los resultados.

Conclusiones de la experimentación:

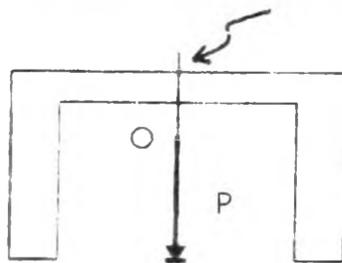
Ejercicio 1

- En el sentido del eje "y", el centroide se encontrará a $d/2$, como se muestra, pues la sección es simétrica con respecto a ese eje horizontal.



- El elemento se flexionará con respecto al eje que pasa por el centroide pero no se torcerá puesto que en esta posición, el elemento cuenta con un eje vertical de simetría y sobre éste se aplican las cargas.

eje vertical de simetría



Ejercicio 2

- Al cargar el elemento sobre la línea que pasa por el centroide, éste se torcerá pues no cuenta en esta posición, con un eje vertical de simetría.

- Al cargar al elemento sobre la línea que pasa por el CENTRO DE CORTE, éste se flexionará pero no llegará a torcerse.

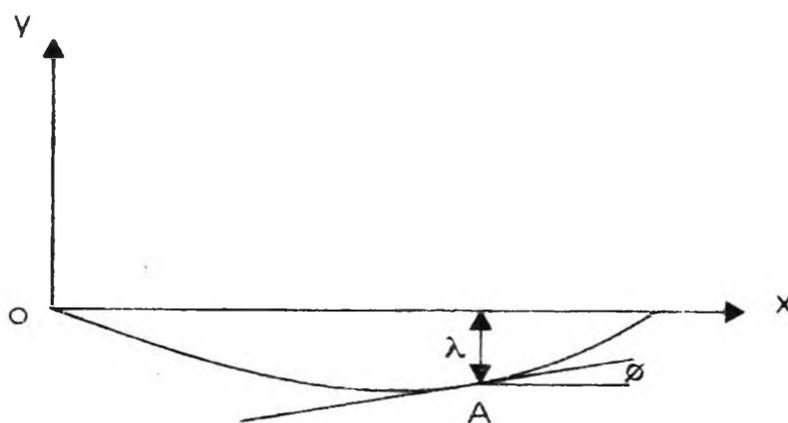
IV. VIGAS CONTINUAS

Objetivos:

- * Conocer los efectos cualitativos que las diferentes condiciones de apoyo en vigas, inducen para la pendiente y la flecha ó deflexión.
- * Definir el concepto de punto de inflexión; saber localizar éste visualmente (con aproximación) en vigas continuas.
- * Conocer cualitativamente el comportamiento de los marcos.

1. Pendientes y Flechas

En la figura siguiente se puede observar la curva elástica de una viga, representándose en un punto específico de ella, la pendiente y la deflexión.



A θ se le conoce como pendiente en el punto A de la viga, y es el ángulo medido en radianes, que la tangente en A a la curva elástica forma con respecto a la horizontal.

A " λ " se le conoce como flecha o deflexión en el punto A y es la distancia vertical que existe entre un punto de la elástica y el correspondiente punto de la viga sin deformar (generalmente horizontal).

La siguiente ecuación, dá el giro o pendiente en cualquier punto de la viga, basándose en el diagrama de momentos

$$EI \theta (x) = \frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x)$$

A continuación se expresa la ecuación que dá la flecha o pendiente en cualquier punto de la viga. Teniendo como referencia a la ecuación diferencial de la elástica en una viga.

Teniendo como referencia a la ecuación diferencial de la elástica en una viga:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$$p = \frac{EI}{M} \quad \text{radio de curvatura de la elástica}$$

y, considerando que los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante nos pueden ayudar a establecer las condiciones de origen y frontera.

Las condiciones de frontera se establecen según la situación de las cargas.

La ecuación de la Elástica desarrollada en serie es (referencia: García Malo, F. Carlos. Deformación en vigas UAM 1988 p 23, 24, 25)

En viga con carga concentrada en L/2

$$Y = Y_0 + \theta_0 x - \frac{M_0}{2EI} x^2 - \frac{V_0}{6EI} x^3 + \frac{w_0}{24EI} x^4 + \frac{w_0 l}{120EI} x^5 + \frac{w_0 n}{nEI} x^n + \dots$$

De acuerdo a las condiciones de origen y frontera se sustituyen los valores en la ecuación anterior para $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$

$$y = \theta_0 x - \frac{F/2}{6EI} x^3 \dots\dots\dots(1)$$

para $L/2 \leq x \leq L$

$$y = \theta_0 x - \frac{F/2}{6EI} x^3 - \frac{-F}{6EI} \left(x - \frac{L}{2}\right)^3 \dots\dots\dots(2)$$

Se calcula la pendiente máxima con la ecuación (2) incluyendo la fuerza cortante debida a F

$$y(x) = \theta_0 x - \frac{F/2}{6EI} x^3 - \frac{-F}{6EI} \left(x - \frac{L}{2}\right)^3$$

de donde

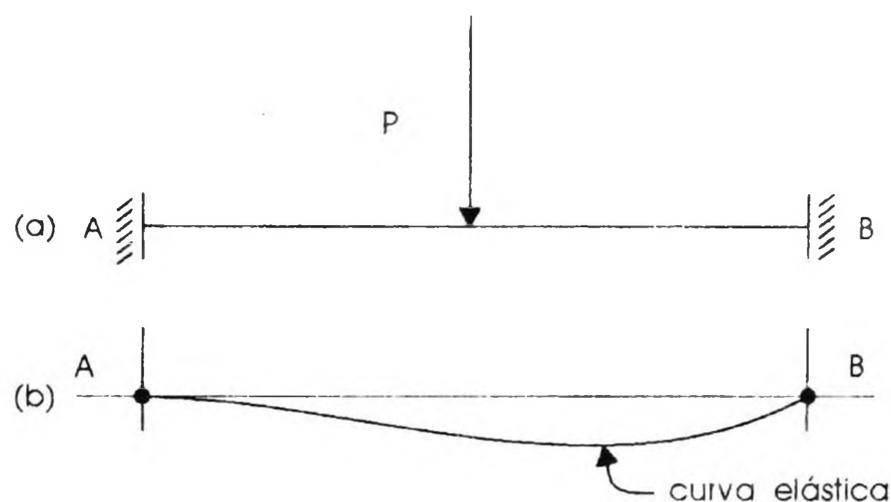
$$\theta_0 = \frac{FL^2}{16EI} \quad \text{pendiente máxima}$$

Para obtener el valor de la flecha máxima se sustituye el valor de la θ máx y se obtiene

$$Y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL^3}{48EI} \quad \text{flecha máxima}$$

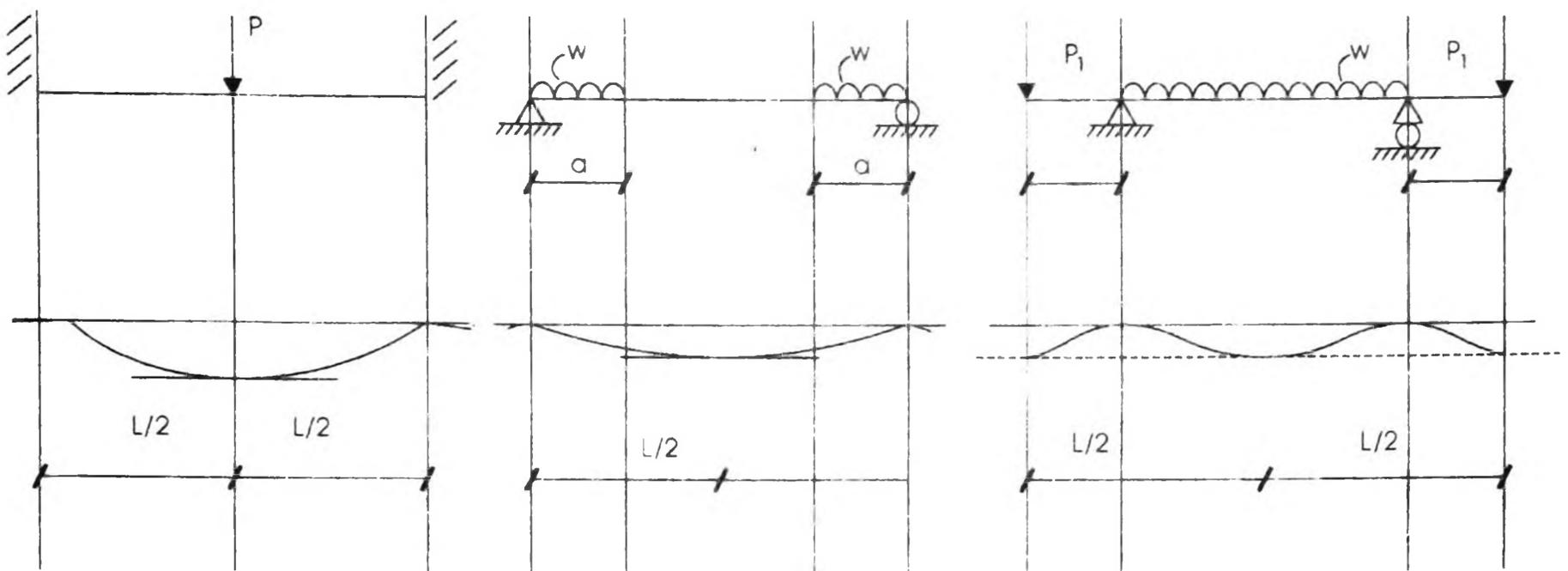
- De esta manera, dependiendo de las diferentes cargas en vigas a partir de la ecuación de la curva elástica, se pueden obtener la flecha y las pendientes máximas para cada una de ellas.

En una viga empotrada, esta condición de apoyo restringe el giro, de modo que la tangente en el punto de apoyo, coincidirá con la horizontal. La figura representa este hecho en una viga doblemente empotrada.



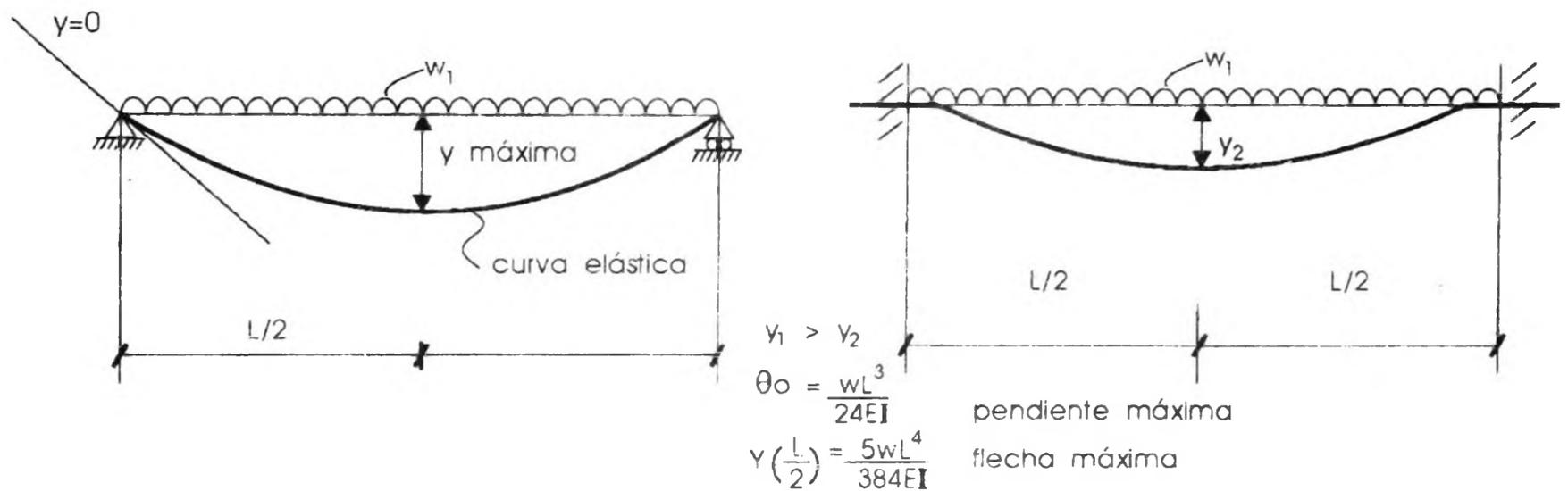
En b se hace notar que la pendiente tanto en el empotre A como en el empotre B, es cero.

En una viga cualquiera, con condiciones de apoyo iguales, de sección constante, con simetría tanto en cargas como en su forma; sucede que en el punto medio de la viga (eje de simetría), la pendiente es cero. En la figura siguiente se muestran algunos ejemplos:



Los empotres además de restringir las pendientes en los apoyos, disminuyen en gran medida las deflexiones a todo lo largo de la viga, en comparación con las flechas existentes en una viga simplemente apoyada, bajo las mismas cargas.

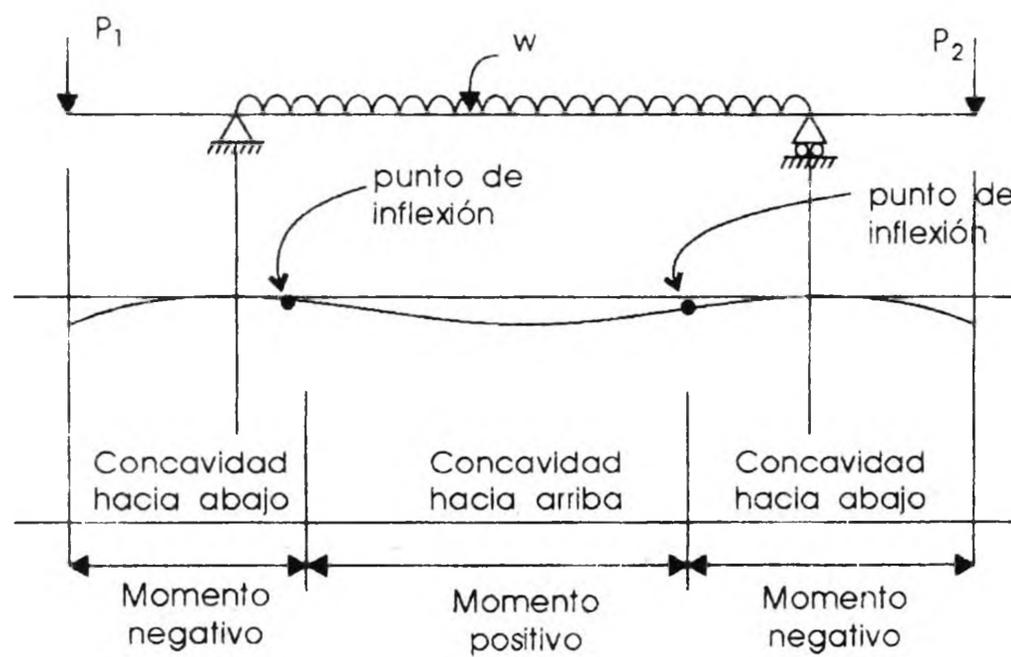
Ejemplos:



2. Puntos de Inflexión

A lo largo de una viga cualquiera, existen tramos de la misma, que se encuentran sujetos a momento positivo (concavidad hacia arriba), y algunos otros que se encuentran sometidos a momento negativo (concavidad hacia abajo). En la interfase entre dos tramos consecutivos sujetos, uno a momento positivo y el siguiente a momento negativo, existe un punto, el cual no está sujeto a momento alguno. Este es el punto de inflexión.

Ejemplo:



Como anteriormente se mencionó el punto de inflexión supone una ausencia de momento flexionante, por lo tanto, teniendo la ecuación del momento para una viga o para un tramo de ésta, se puede fácilmente averiguar el o los puntos en donde el momento es nulo.

$$M(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ \text{etc.} \end{cases} \quad \text{punto de inflexión}$$

3. Marcos Rígidos

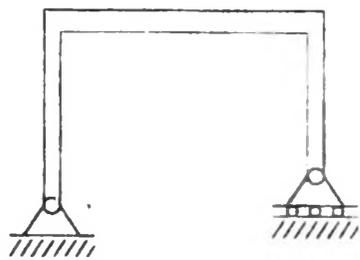
Definiciones y Suposiciones Fundamentales

Los marcos son elementos estructurales, formados de al menos un elemento horizontal y dos elementos de apoyo, generalmente verticales.

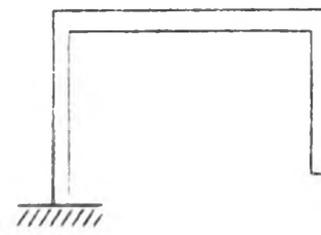
Un marco rígido, en el sentido más general, es una estructura tridimensional donde los miembros constituyentes concurren en nudos rígidos, tipificados como nudos soldados en acero estructural o nudos colados monolíticamente en concreto reforzado. Sin embargo, trataremos sólo de

marcos rígidos planos los cuales están compuestos de miembros rectos prismáticos y sujetos a cargas en el plano del marco mismo.

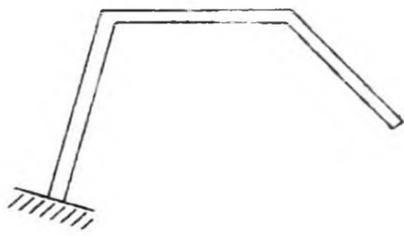
Muy a menudo, dos marcos rígidos, uno a cada lado de un puente de una carretera, se diseñan para soportar las vigas de piso transversal a la dirección del tráfico. Se pueden utilizar marcos rígidos uniformemente separados para soportar las vigas de piso de un edificio o los polines bajo una cubierta. Ensamblajes de marcos rígidos espaciales complejos pueden involucrarse en estructuras comunes como puentes, edificios o en alguna estructura especial como vehículos voladores o buques.



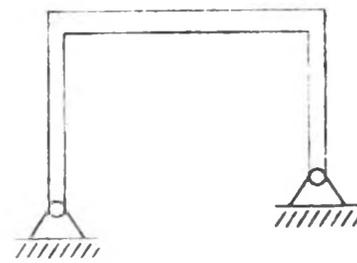
(a)



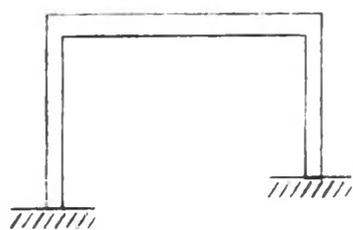
(b)



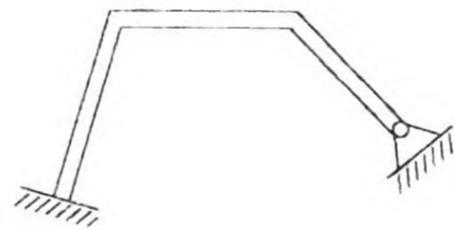
(c)



(d)



(e)



(f)

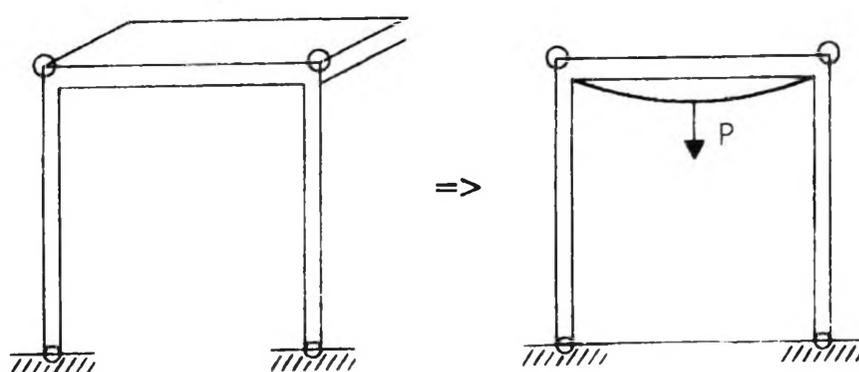
Los marcos rígidos planos, tratados como tales, pueden ser estáticamente determinados o indeterminados. Si bien, los marcos rígidos estáticamente determinados, como se muestran en a, b y c, con frecuencia no pueden ser contruídos como tales, en la práctica, su análisis es un requisito previo común en el método de las fuerzas para analizar marcos rígidos indeterminados. En realidad, los marcos rígidos a, b y c son las estructuras degradadas de las mostradas en d, e y f respectivamente.

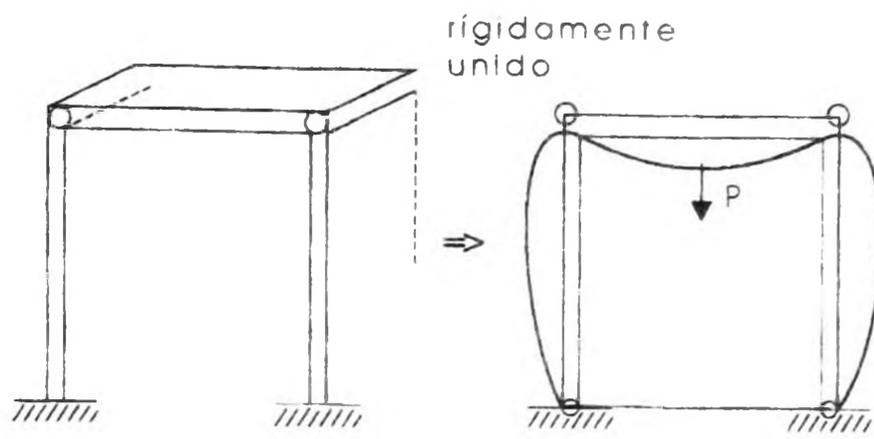
Un miembro recto en un marco rígido, como cualquiera de los mostrados en las figuras anteriores, puede estar sujeto a fuerza axial, corte y momento flector a lo largo de su longitud. El tratamiento de la deformación debida al corte ha sido diferido dado que por lo general es un efecto muy pequeño en los miembros en flexión de proporciones ordinarias. La deformación axial es el único efecto que existe en los miembros de una armadura. Este efecto sin embargo, en la rotaciones y deflexiones de los nudos en un marco rígido, se empequeñece por el del momento flector; en realidad, su efecto en las magnitudes de las fuerzas redundantes en un marco rígido indeterminado es de un orden reducido. Entonces el estudio se confinará a la suposición de que las fuerzas axiales en los miembros de un marco rígido no causan cambios en la longitud de los miembros.

En el análisis de primer orden, los desplazamientos transversales de cualquier extremo de un miembro de una estructura se supone que no cambian la longitud del elemento. Cuando la longitud de un miembro no cambia, las componentes longitudinales de los desplazamientos extremos, deber ser iguales. De esta manera, la nueva longitud $A'B'$ del miembro debe considerarse igual a la longitud original AB .

Las dos suposiciones fundamentales: que las longitudes de los miembros no cambian por fuerzas axiales ni por desplazamientos transversales, deben tenerse *continuamente* en cuenta durante el estudio de marcos.

Cuando el elemento horizontal únicamente se apoya en los elementos verticales, solo les transmite fuerzas; sin embargo, si este elemento está rígidamente unido a los verticales, les transmitirá además de fuerza un momento. Como se ilustra:



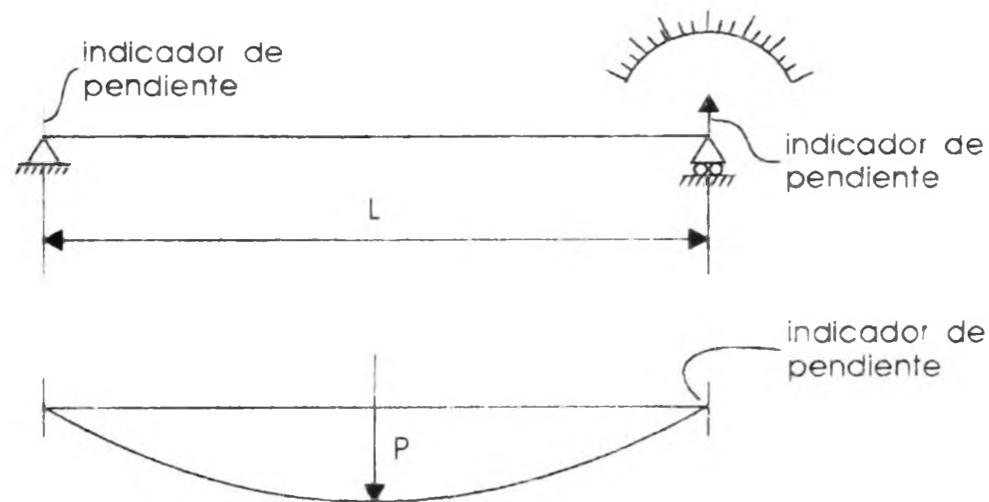


En un marco con viga simplemente apoyada, las deflexiones de ésta son mayores que en un marco de uniones rígidas, sin embargo, no se inducen deformaciones por momento en las columnas.

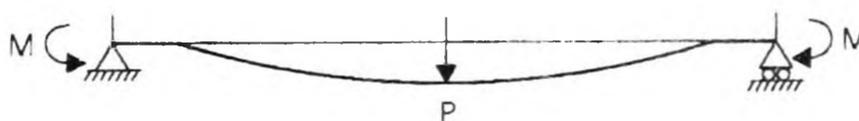
Ejercicios de Aplicación Experimental en Laboratorio

Ejercicio 1

a) Montar la viga simplemente apoyada, utilizando indicadores de pendiente, midiendo la flecha en el centro de la viga, cuando ésta se carga puntualmente en el centro.



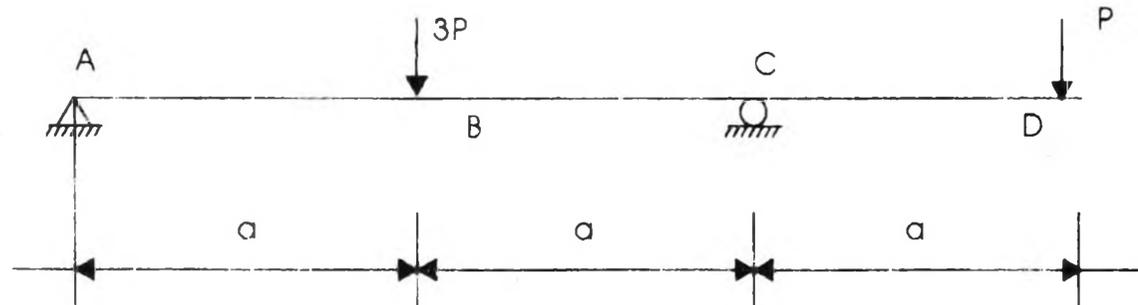
b) Introducir giros en los apoyos, de modo que la pendiente en ellos sea nula, es decir teniendo el efecto de doble empotramiento.



c) Medir nuevamente la deflexión en el centro y comparar con la obtenida anteriormente.

Ejercicio 2

Montar la viga como se indica:



- Medir la deflexión que existe bajo las cargas de $3P$ y de P , siguiendo el siguiente formato.

Deflexión experimental en B = _____ mm.

Deflexión experimental en D = _____ mm.

E =

I =

Punto B

M (x) =

$$Y_B = y(a) = \frac{1}{EI} \int_0^{x=a} M(x) dx + C_1 x =$$

Punto D

M (x) =

$$Y_D = y(3a) = \frac{1}{EI} \int_0^{x=3a} M(x) dx + C_1 x =$$

- Dibujar a mano, la curva elástica de la viga, y localizar visualmente el punto de inflexión.

- Establecer la ecuación del momento flexionante, válida entre los puntos B y C, y obtener la posición del punto de inflexión igualando a cero tal ecuación.

Conclusiones de la experimentación:

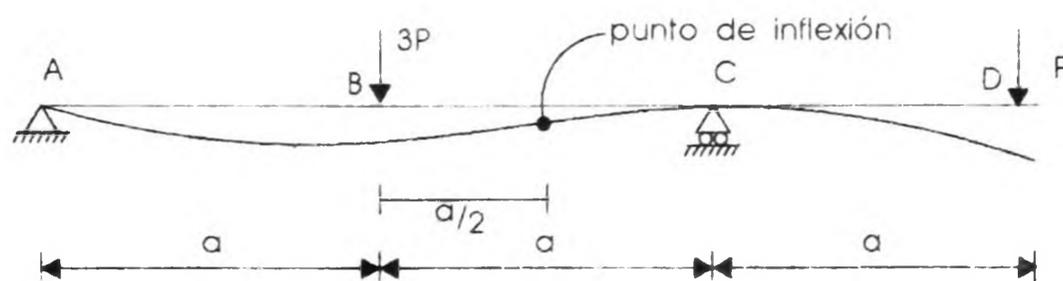
Ejercicio 1

- La deflexión de una viga simplemente apoyada es siempre mayor que la correspondiente a una viga doblemente empotrada, puesto que al restringir el giro en los apoyos, se restringe así mismo las deflexiones a todo lo largo de la viga.

Ejercicio 2

- La deflexión experimental en los puntos B y D de la viga, muy posiblemente no coincida con la deflexión obtenida teóricamente pues además de la imprecisión al medir tal deflexión, se tiene imprecisión al aplicar las cargas y al simular las condiciones de apoyo debidas.

El punto de inflexión de la viga, debió de encontrarse a una distancia $a/2$ a la derecha del punto B.



4. Deflexión en Vigas al Aplicar las Areas de momentos

Este método de cálculo de pendiente y deflexiones es sencillo y de fácil aplicación.

Teniendo la ecuación de la pendiente.

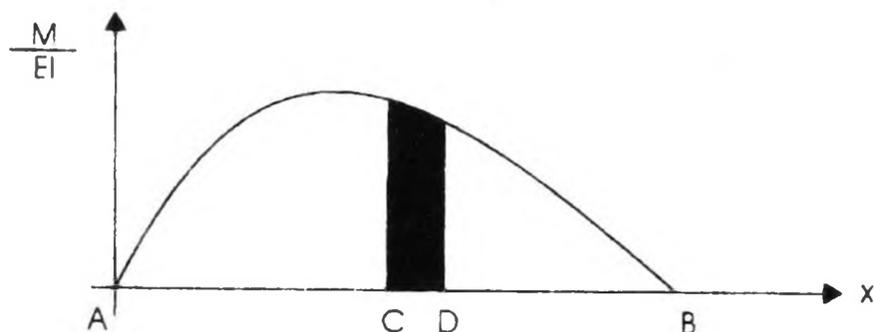
$$EI \theta(x) = \frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x)$$

Derivando nuevamente, se tiene.

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2 EI} = \frac{M}{EI}$$

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx$$

Considerando un diagrama de M/EI cualquiera.



Integrando entre dos puntos arbitrarios C y D, se tendrá:

$$\int_{\varnothing_C}^{\varnothing_D} d\varnothing = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI} dx$$

\varnothing_C : pendiente en el punto C
 \varnothing_D : pendiente en el punto D

$$\varnothing_D - \varnothing_C = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI} dx$$

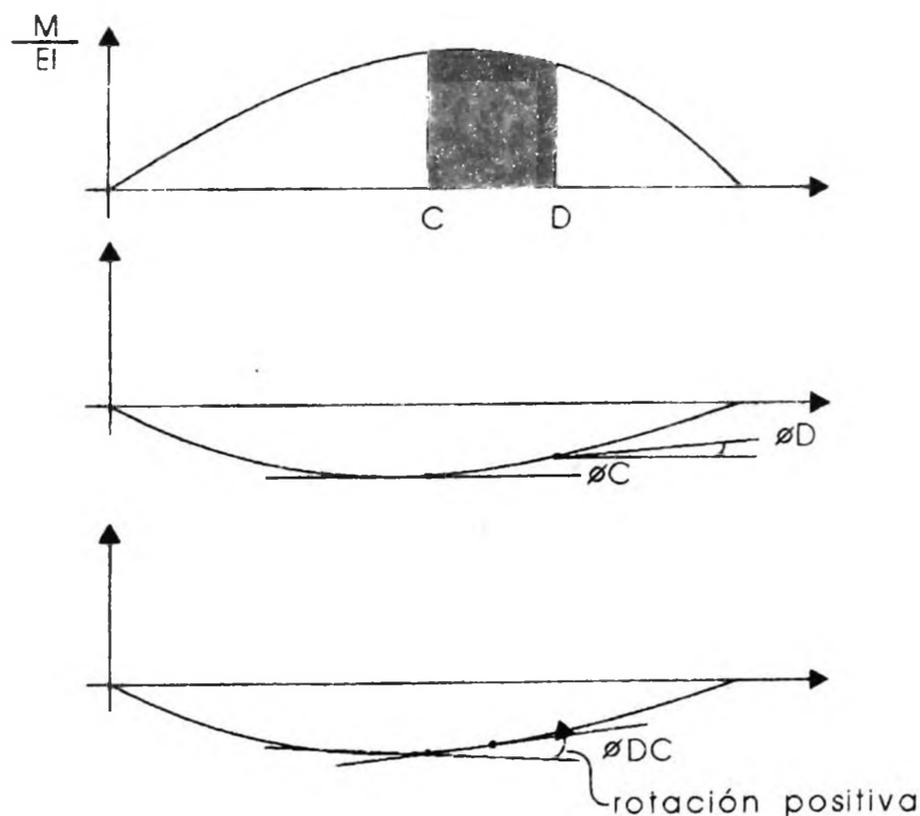
$\int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI} dx$: Area bajo el diagrama $\frac{M}{EI}$ entre C y D

$\varnothing_D - \varnothing_C = \varnothing_{D/C}$: ángulo entre las tangentes a la curva elástica en C y D

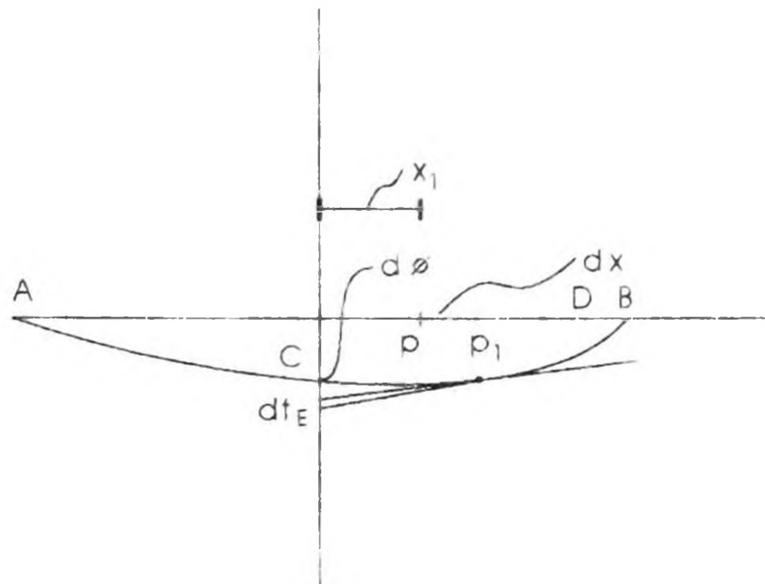
$\varnothing_{D/C} = \text{Area bajo el diagrama } \frac{M}{EI} \text{ entre C y D}$

A ésta última ecuación se le conoce con el nombre de primer teorema de las áreas de momentos.

Un área positiva, es decir, un área por encima del eje, en el diagrama M/EI , corresponde a una rotación en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, al moverse de D a C, lo que se considera positivo.



Si consideramos los puntos P y P' localizados entre C y D, a una distancia dx el uno del otro, como se muestra:



Las tangentes a la curva elástica trazadas en P y P', intersectan un segmento de longitud "dt" en la vertical que pasa por C. Como la pendiente en P y el ángulo dθ formado por las tangentes en P y P' son muy pequeños, se puede suponer que "dt" es igual al arco de círculo, de radio x₁ que subtiende el ángulo dθ .

Por lo tanto:

$$dt = x_1 d\theta$$

$$\text{pero } d\theta = \frac{M}{EI} dx$$

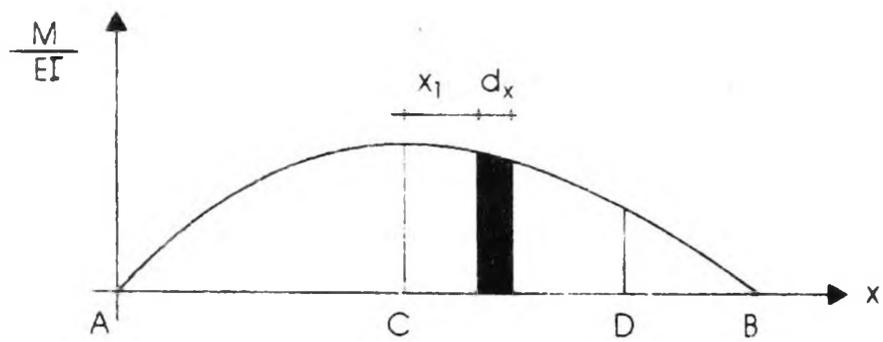
$$\Rightarrow dt = x_1 \frac{M}{EI} dx$$

Integrando desde C a D

$$t_{C/D} = \int_C^D x_1 \frac{M}{EI} dx$$

A medida que el punto P se corre por la elástica desde C hasta D, la tangente en P barre la vertical pasada por C, desde C hasta E. Por lo tanto el miembro izquierdo de la ecuación, es la distancia vertical entre C y la tangente en D (t_{C/D}). Se acostumbra llamar a t_{C/D} como la desviación tangencial de C con respecto a D.

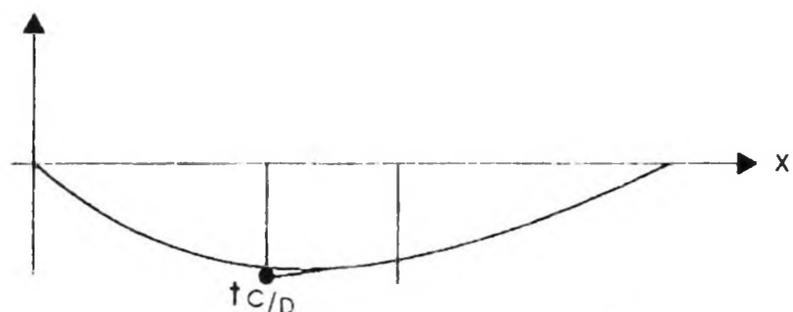
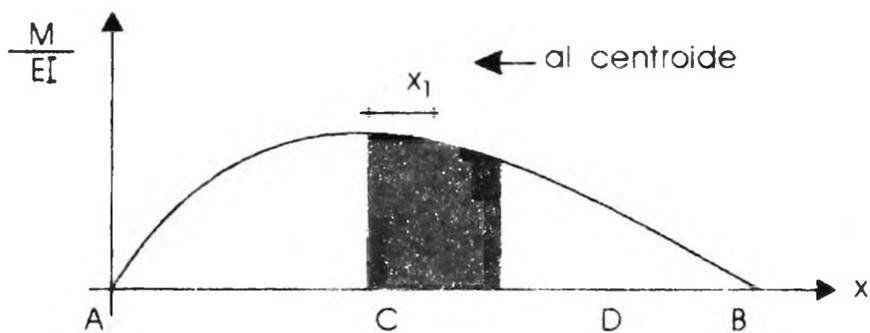
Del lado derecho de la igualdad, se tiene que (M/EI)dx es un elemento de área bajo el diagrama (M/EI). Además x₁ (M/EI)dx, es el momento de primer orden de ese elemento con respecto al eje vertical que pasa por C.



Así pues, el segundo teorema del área de momentos es:

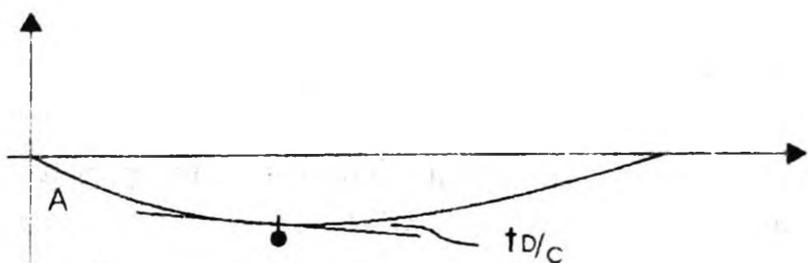
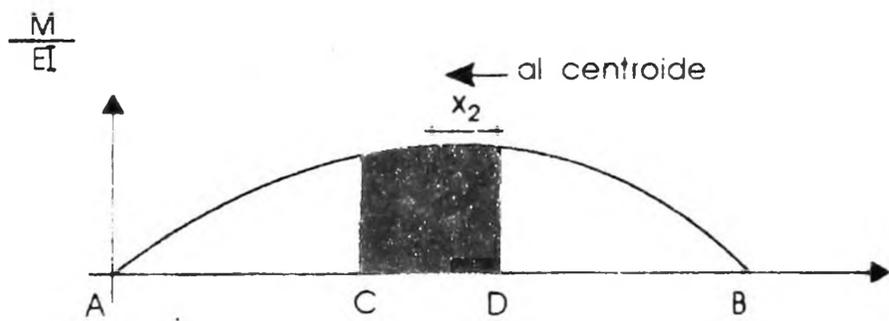
"La desviación tangencial $t_{C/D}$ de C con respecto a D es igual al momento de primer orden del área bajo la curva M/EI , entre los puntos C y D, con respecto al eje vertical que pasa por C.

El momento de primer orden de un área con respecto a un eje, es igual al producto de dicha área, por la distancia de su centroide a dicho eje.



$$t_{C/D} = (\text{área entre C y D}) \cdot \bar{x}$$

De la misma forma:

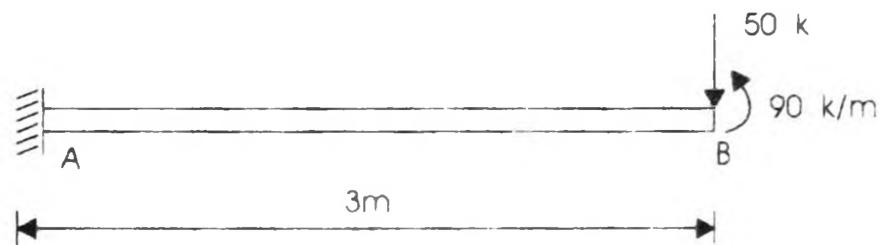


Si el área del diagrama de M/EI es positiva (se encuentra por encima del eje), y su primer momento será positivo también.

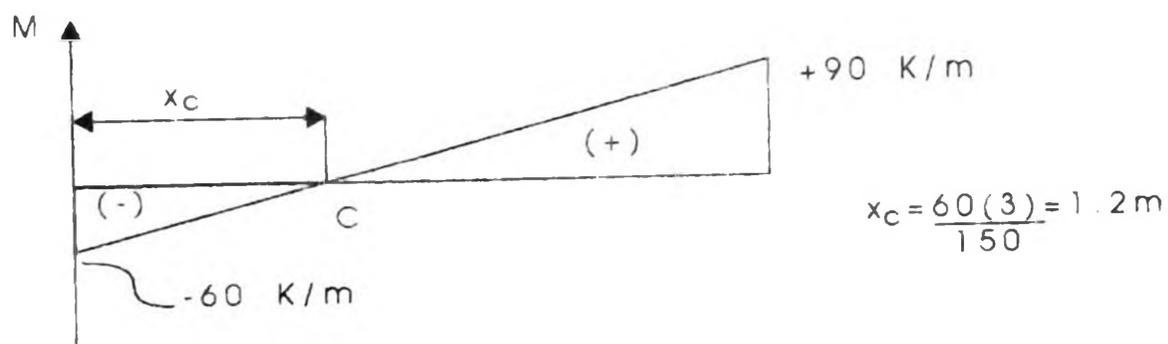
Al tener un primer momento positivo, esto será indicador de una desviación tangencial positiva, es decir, que el punto de referencia estará por encima de la tangente. Por ejemplo, en la figura anterior, el primer momento del área entre C y D será positivo, por lo tanto el punto D se encuentra por encima de la tangente que pasa por C.

Ejemplo

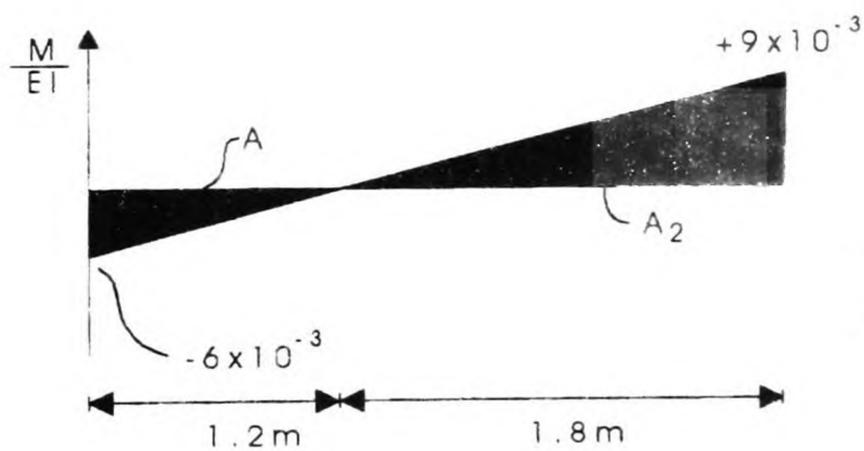
Determinar la pendiente y la deflexión del extremo B de la viga AB. El producto EI es: $EI = 10 \text{ MNm}^2$



El diagrama de momentos, será.



Dividiendo el diagrama M entre EI, se tiene:



$$A_1 = \frac{1}{2}(1.2)(6 \times 10^{-3}) = -3.6 \times 10^{-3}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(1.8)(9 \times 10^{-3}) = -8.1 \times 10^{-3}$$

En un empotramiento la pendiente es cero $\theta_a = 0$ por lo tanto:

$$\theta_{\frac{B}{A}} = \theta_B - \theta_A = A_1 + A_2 = (-3.6 + 8.) 10^{-3} = 4.5 \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

como $\theta_A = 0$

$$\Rightarrow \theta_{\frac{B}{A}} = \theta_B = 4.5 \times 10^{-3} \text{ rad (sentido } \curvearrowright \text{)}$$

Usando ahora el segundo teorema:

$t_{B/A}$ es el momento de primer orden con respecto al eje vertical que pasa por B del área total entre A y B.

$$\begin{aligned} T_{B/A} &= A_1 \left(1.8 + 1.2 \left(\frac{2}{3} \right) \right) + A_2 \left(\frac{1.8}{3} \right) \\ &= (-3.6 \times 10^{-3}) (2.6) + (8.1 \times 10^{-3}) (0.6) = -4.5 \text{ mm} \end{aligned}$$

(la tangente quedó por encima del punto B)

Ahora bien, como la tangente de referencias en A es horizontal:



BIBLIOGRAFIA.

BEER, Ferdinand. Johnston Russell.
Mecánica de Materiales.
Ed. McGraw-Hill. 1982.

WERNER, R. H.
La Estructura
Ed. Blume, 1975.

BEER, Ferdinand. Johnston Russell.
Mecánica Vectorial para Ingenieros.
Ed. McGraw-Hill. 1982.

SALVADORI, Mario. Heller, Robert.
Estructuras para Arquitectos
Ed. La Isla, 1966.

PESCHARD, Eugenio
Resistencia de Materiales.
Ed. UNAM, 1963.

POPOV, Egor.
Introducción a la Mecánica de Materiales.
Edit. Limusa. 1982.

FITZGERALD, Robert.
Resistencia de Materiales.
Fondo Educativo Interamericano. 1983.

GARCIA MALO, F. Carlos.
Deformaciones en Vigas Isostáticas e Hiperestáticas
Ed. U.A.M. Azcapotzalco CYAD 1988.

