

# **Análisis de Problemas de Choque e Impacto entre Sólidos Deformables por el Método de los Elementos Finitos**

J. Miquel Canet  
E. Oñate  
C. García Garino  
S. Botello  
F. Flores  
J. Rojek

# **Análisis de Problemas de Choque e Impacto entre Sólidos Deformables por el Método de los Elementos Finitos**

J. Miquel Canet  
E. Oñate  
C. García Garino  
S. Botello  
F. Flores  
J. Rojek

Monografía CIMNE N<sup>o</sup>-25, Noviembre 2004

Diseño de la cubierta: Jordi Pallí

Primera Edición, Enero 1995

@ El autor

Edita:

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería

Edificio C1, Campus Norte UPC

Gran Capitán, s/n

08034 Barcelona, España

ISBN: 84-87867-51-0

Depósito Legal: B-4749-95

# Indice

<b>1</b>	<b>INTRODUCCION</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>DESCRIPCION GENERAL DEL PROGRAMA SIMPACT</b>	<b>3</b>
2.1	INTRODUCCION	3
2.2	BIBLIOTECA DE ELEMENTOS	4
2.3	PROCESO DE CALCULO	7
2.3.1	Fase de inicialización	17
2.3.1.1	Entrada de los parámetros de control	18
2.3.1.2	Datos de entrada de la malla de elementos finitos	19
2.3.1.3	Lectura de los datos de variaciones nodales temporales, condiciones iniciales, velocidades prescritas, amortiguamiento y datos del acelerograma	21
2.3.1.4	Determinación variables correspondientes a los puntos de Gauss	21
2.3.1.5	Ensamblaje de la matriz de masa concentrada	22
2.3.1.6	Datos de cargas	22
2.3.1.7	Entrada de tensiones previas	22
2.3.1.8	Datos de contacto	22
2.3.2	Fase de solución paso a paso	23
2.3.2.1	Integración en el tiempo	23
2.3.2.2	Búsqueda de contactos con pared rígida	24
2.3.2.3	Cálculo de fuerzas internas	24
2.3.2.4	Cálculo de las fuerzas de contacto	25
2.3.2.5	Cálculo del incremento de tiempo crítico	25
2.3.2.6	Salida de resultados	26
2.3.2.7	Volcado de archivos para interrupciones temporales	26
2.3.3	Finalización de la fase de ejecución	26
2.4	RELACION DE SUBROUTINAS	26
<b>3</b>	<b>FORMULACION DE ELEMENTOS SOLIDOS PARA PROBLEMAS DE IMPACTO</b>	<b>39</b>
3.1	INTRODUCCION	39
3.2	ECUACIONES DEL MOVIMIENTO	40
3.3	DISCRETIZACION ESPACIAL	40
3.4	FORMA DISCRETA DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO	42
3.5	INTEGRACION EXPLICITA EN EL TIEMPO	44
3.6	CALCULO DE LAS TENSIONES	44
3.7	DESCOMPOSICION DEL PROBLEMA ELASTO- PLASTICO	45

3.8	PREDICTOR ELASTICO	45
3.9	PROBLEMA PLASTICO	46
<b>4</b>	<b>ANALISIS DINAMICO DE LAMINAS</b>	<b>47</b>
4.1	INTRODUCCION	47
4.2	TEORIA DE LAMINAS UTILIZADA	48
4.2.1	Descripción cinemática de la lámina	48
4.2.2	Variaciones admisibles	51
4.2.3	Definición de esfuerzos	52
4.2.4	Ecuaciones constitutivas locales	53
4.2.4.1	Respuesta tensional hiperelástica	53
4.2.4.2	Condición de fluencia, regla de flujo y ley de endurecimiento	54
4.2.5	Formulación débil. Principio de trabajos virtuales	55
4.3	FORMULACION UTILIZADA	57
4.3.1	Comportamiento de membrana	57
4.3.1.1	Modelo en desplazamientos	58
4.3.1.2	Modelos en deformaciones impuestas	59
4.3.2	Comportamiento de flexión	61
4.3.3	Tratamiento del corte transversal	61
4.3.3.1	Elementos triangulares (cuadráticos )	61
4.3.3.2	Elementos cuadriláteros ( bilineales )	65
4.4	ELEMENTOS DE LAMINA DESARROLLADOS	66
4.4.1	Elemento isoparamétrico de cuatro nodos	66
4.4.1.1	Geometría	67
4.4.1.2	Sistema local de coordenadas	69
4.4.1.4	Comportamiento membranar y flexional	70
4.4.1.5	Matriz de masa	70
4.4.2	Triángulo isoparamétrico de seis nodos	71
4.4.2.1	Geometría	71
4.4.2.2	Comportamiento membranar	72
4.4.2.3	Comportamiento flexional y corte transversal	75
4.4.2.4	Matriz de masa	75
4.4.3	Triángulo lineal no conforme	75
4.4.3.1	Geometría	75
4.4.3.2	Comportamiento flexional y tratamiento del corte	77
4.4.3.3	Matriz de masa	78
<b>5</b>	<b>ANALISIS DINAMICA DE PIEZAS PRISMATICAS</b>	<b>79</b>
5.1	CINEMATICA BASICA	79
5.1.1	Hipótesis cinemática	80
5.1.2	Derivadas de la terna móvil	81
5.2	CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL Y ANGULAR	82

5.3	ECUACIONES DE MOVIMIENTO	84
5.4	TRABAJO INTERNO Y MEDIDAS DE DEFORMACION	85
5.5	FORMULACION DEBIL. ECUACION DE TRABAJOS VIRTUALES	86
5.6	ECUACIONES CONSTITUTIVAS	88
5.6.1	Una aproximación al comportamiento plástico en vigas	89
5.7	FORMULACION DE ELEMENTOS FINITOS UTILIZADA	91
5.8	ELEMENTO DE VIGA DESARROLLADO	93
5.8.1	Generalidades	93
5.8.2	Evaluación de las curvaturas	93
5.8.3	Matriz de masa	95
5.9	UNION DE ELEMENTOS	96
5.9.1	Generalidades	96
5.9.2	Unión rígida entre dos nudos	97
5.9.3	Unión de un nudo a una arista	98
<b>6</b>	<b>ASPECTOS COMPUTACIONALES</b>	<b>101</b>
6.1	ESQUEMA DE SOLUCION EXPLICITO	101
6.2	ESTABILIDAD NUMERICA	103
<b>7</b>	<b>EJEMPLOS</b>	<b>107</b>
7.1	MENSULA SOMETIDA A CARGA SUBITA	107
7.1.1	Resultados obtenidos	108
7.2	LAMINA CILINDRICA CON VELOCIDAD INICIAL	113
7.2.1	Resultados obtenidos	114
7.3	CUPULA REBAJADA BAJO PRESION EXTERNA	120
7.3.1	Resultados	120
7.4	IMPACTO DE UNA BARRA CONTRA UNA LAMINA	121
7.4.1	Resultados obtenidos	122
7.5	IMPACTO DE UNA BARRA CILINDRICA CONTRA UNA PARED RIGIDA	125
7.5.1	Resultados obtenidos	125
7.6	EMBUTICION DE UN TUBO	135
7.6.1	Resultados obtenidos	135
7.7	IMPACTO DE DOS TUBOS	141
7.7.1	Resultados obtenidos	141
7.8	ESTRUCTURA RETICULADA EN FORMA DE ESTRELLA	146
7.8.1	Resultados obtenidos	146
7.9	IMPACTO DE UN MOTOR DE UN VEHICULO	149
7.9.1	Resultados obtenidos	150
7.10	VUELCO DE UNA CABINA DE AUTOBUS	157
7.10.1	Resultados obtenidos	157

<b>8</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>172</b>
8.1	CONCLUSIONES	172
8.2	AGRADECIMIENTOS	173
<b>9</b>	<b>REFERENCIAS</b>	<b>174</b>

## Capítulo 1

### INTRODUCCION

El análisis de problemas de impacto y choque entre sólidos deformables constituye en la actualidad uno de los retos en muchos ámbitos de la ingeniería. Las dificultades inherentes a los aspectos teóricos del problema (no linealidades, contacto, rozamiento, algoritmos temporales, etc. ), junto con los propiamente computacionales ( grandes requisitos de memoria y tiempo de cálculo, visualización gráfica, etc. ), hacen todavía inviable la solución eficiente de problemas industriales en un tiempo razonable. El trabajo que se expone a continuación ha hecho uso de los últimos avances en mecánica computacional, métodos numéricos, visualización y algoritmos de cálculo para obtener un programa de ordenador para simulación de problemas de choque e impacto de interés práctico para una amplia variedad de sectores industriales. En particular, el objetivo del proyecto SIMPACT ha sido el desarrollo de un paquete de software para análisis de problemas de dinámica rápida y análisis no lineal procesable en una amplia variedad de ordenadores, con aplicación a choques de vehículos, impacto en estructuras aeroespaciales, defensa y problemas de conformado entre otros.

El programa de cálculo resultante, denominado SIMPACT, está basado en técnicas de elementos finitos para análisis de estructuras en situación de choque con condiciones de interacción entre cuerpos deformables o entre cuerpos deformables y cuerpos rígidos. El algoritmo de solución es de tipo explícito tanto en una formulación lagrangiana total como actualizada. El programa considera asimismo no linealidad del material, a través de la condición de plastificación de Von Mises.

Al objeto de que el programa sea aplicable a una amplia variedad de tipologías estructurales que cubran la práctica totalidad de casos presentes en la industria, se ha desarrollado e incorporado una librería de elementos finitos de forma que puedan tratarse sólidos bi y tridimensionales, láminas y vigas 3D incluyendo efectos de grandes deformaciones y no linealidad del material.

El proyecto SIMPACT ha sido desarrollado por el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería con financiación del Instituto de Investigación Aplicada del Automóvil (IDIADA), a través del Departament de Industria de la Generalitat de Catalunya, y del Ministerio de Industria a través del programa PAUTA.



Por lo que respecta al contenido de esta monografía, en el capítulo 2 se describe la organización del programa. Los capítulos 3, 4 y 5 están dedicados respectivamente a la formulación del elemento sólido, lámina y viga, mientras que en el 6 se comentan los aspectos computacionales más relevantes. En el capítulo 7 se incluyen varios ejemplos de validación. Las conclusiones más importantes se resumen en el capítulo 8, mientras que el 9 está dedicado a listar las referencias más significativas en las que se detallan las bases teóricas de los métodos utilizados en este trabajo.

## Capítulo 2

### DESCRIPCION GENERAL DEL PROGRAMA SIMPACT

#### 2.1 INTRODUCCION

El programa SIMPACT es un programa desarrollado para realizar el análisis lineal y no lineal de estructuras 2D y 3D sometidas a efectos dinámicos. Utiliza el método de los elementos finitos y la integración de las ecuaciones de equilibrio dinámico se realiza de forma explícita: concretamente utiliza el método de las diferencias centrales con control automático del incremento de tiempo. Está especialmente diseñado para problemas relacionados con cargas de impacto, grandes desplazamientos y rotaciones, comportamiento no lineal del material y contacto entre las salidas impactantes teniendo en cuenta el rozamiento entre ellas.

El programa dispone de una biblioteca de elementos de sólido, viga y lámina que pueden ser combinados entre ellos para realizar el análisis. De esta forma pueden conectarse elementos sólidos con elementos tipo viga y lámina o bien elementos viga con elementos lámina. Para todos ellos, se utilizan masas concentradas, siendo posible asimismo introducir amortiguamiento estructural. Por lo que respecta a las condiciones iniciales es preciso especificar los desplazamientos y velocidades en el instante  $t = 0$ .

El programa SIMPACT permite el análisis de problemas de fricción con grandes deformaciones. En la versión actual están implementados dos algoritmos

de contacto que en lo sucesivo se denominan algoritmo 1 y 2. El algoritmo de contacto 1 permite el análisis de problemas 2D y 3D mientras que el algoritmo 2 permite inicialmente tratar problemas 3D. Ambos algoritmos están basados en el método de las penalizaciones y se admite tanto el contacto entre cuerpos deformables como entre cuerpo rígido y no deformable.

Al estar escrito el programa en FORTRAN 77 es posible la implementación del mismo en todo tipo de máquinas. Actualmente el programa funciona habitualmente en CONVEX C1 y C3, estaciones de trabajo Silicon Graphics así como IBM PC 386 y 486.

El programa dispone asimismo de interface con post-procesadores gráficos, lo cual permite una rápida visualización de los resultados.

## 2.2 BIBLIOTECA DE ELEMENTOS

El sistema estructural a analizar puede estar formado por diversas combinaciones de elementos. En la actual versión el programa contiene los siguientes tipos de elementos:

- Elemento tipo 1* : Elementos sólidos cuadrilátero 2D de 4, 8 o 9 nodos
- Elemento tipo 2* : Elementos iguales a los de tipo 1
- Elemento tipo 3* : Elemento sólido cuadrilátero 2D de 4 nodos
- Elemento tipo 4* : Elemento sólido cuadrilátero 2D de 8 nodos con integración reducida
- Elemento tipo 5* : Elemento sólido hexaédrico 3D de 8 nodos
- Elemento tipo 6* : Elemento sólido cuadrilátero de 4 nodos
- Elemento tipo 7* : Elemento de lámina triangular cuadrático de 6 nodos
- Elemento tipo 8* : Elemento de viga isoparamétrico de 2 o 3 nodos
- Elemento tipo 9* : Elemento de lámina no conforme triangular lineal de 6 nodos
- Elemento tipo 10* : Elemento ficticio para definir conexiones entre elementos

### *Elementos tipo 1*

Los elementos tipo 1 son un conjunto de elementos sólidos 2D isoparamétricos de 4, 8 o 9 nodos, utilizables para el análisis en tensión plana, deformación plana o con simetría axilsimétrica. La no linealidad del material se modeliza mediante un comportamiento elastoviscoplastico con una tensión de fluencia a definir entre los criterios de von Mises, Tresca, Mohr-Coulomb o Drucker-Prager. El endurecimiento por deformación se supone lineal. Para las no linealidades geométricas, los elementos utilizan una formulación Lagrangiana total. En cuanto a los puntos de integración de Gauss, contempla las opciones  $1 \times 1$ ,  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ .

### *Elemento tipo 3*

El elemento tipo 3 es un elemento cuadrilátero lineal de 4 nodos que permite el análisis de problemas axilsimétricos o en deformación plana con un

esquema de integración de  $2 \times 2$  puntos de Gauss y presión constante a fin de evitar el bloqueo volumétrico de la solución. El análisis elastoplástico se basa en un modelo hiperelástico con criterio de plastificación de von Mises y endurecimiento isotrópico lineal y no lineal. Para modelar las no linealidades geométricas se utiliza una formulación Lagrangiana actualizada, utilizándose la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformación cuando existen grandes deformaciones plásticas.

#### *Elemento tipo 4*

Es un elemento cuadrilátero isoparamétrico de 8 nodos para el análisis en tensión plana, deformación plana o sólidos con simetría axilsimétrica. Utiliza un esquema de integración reducida con  $2 \times 2$  puntos de Gauss. El análisis elastoplástico está basado en un modelo hiperelástico con criterio de fluencia de von Mises y endurecimiento lineal isótropo. Utiliza la formulación Lagrangiana actualizada para el estudio de las no linealidades geométricas, juntamente con la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformación cuando se consideran grandes deformaciones plásticas.

#### *Elemento tipo 5*

Está formado por un elemento 3D hexaédrico lineal de 8 nodos para el análisis de problemas con grandes desplazamientos y grandes deformaciones plásticas. A fin de evitar el bloqueo volumétrico de la solución se utiliza un esquema de integración de  $2 \times 2 \times 2$  puntos de Gauss con presión constante. El análisis elastoplástico está basado en un modelo hiperelástico con criterio de fluencia de von Mises y endurecimiento isótropo lineal y no lineal. Para el análisis de las no linealidades geométricas utiliza una formulación Lagrangiana actualizada juntamente con la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformación cuando se consideran grandes deformaciones plásticas.

#### *Elementos lámina (elementos tipo 6, 7 y 8)*

Los elementos de lámina implementados en el programa están basados en un modelo geoméricamente exacto, basado en la teoría de superficies de Cosserat. Se utiliza una descripción Lagrangiana total para el tratamiento de los grandes movimientos y las grandes rotaciones. El modelo se formula enteramente en esfuerzos (tensiones generalizadas), por lo que las ecuaciones constitutivas se expresan en términos de dichos esfuerzos y de las deformaciones conjugadas. La formulación elastoplástica está basada en el criterio de fluencia de Ilyuschin-Shapiro en esfuerzos, con endurecimiento isótropo y cinemático.

#### *Elemento tipo 6*

El elemento tipo 6 es un elemento de lámina cuadrilátero de 4 nodos. La superficie media de la lámina se interpola mediante funciones bilineales. La integración se realiza mediante un esquema de  $2 \times 2$  puntos de Gauss. Existen

dos subtipos de elementos que pueden ser utilizados de forma optional:

- En el subtipo 0 se adopta una formulación mixta a través de un cierto comportamiento de la deformación por cortante
- En el subtipo 1 se realiza una interpolación estándar de los desplazamientos. Este subtipo es susceptible de sufrir bloqueo por cortante.

#### *Elemento tipo 7*

El elemento tipo 7 es un elemento de lámina triangular isoparamétrico de 6 nodos. La superficie media se interpola mediante funciones cuadráticas. Existen cuatro subtipos de elementos que pueden ser utilizados de forma optional:

- En el subtipo 0 se adopta una formulación mixta basada en admitir un cierto comportamiento en la deformación por cortante.
- En el subtipo 1 se realiza una interpolación (vulnerable al bloqueo) estándar de los desplazamientos.
- Los subtipos 2 y 3 se basan en postular un determinado comportamiento en la deformación de membrana: En el subtipo 2 (T6 IA1) la interpolación de las deformaciones de membrana se realiza a partir de los valores nodales en las vértices del triángulo, mientras que en el subtipo 3 la interpolación está basada en los valores de la deformación en la dirección tangente a los puntos en donde se evalúa el cortante (6 puntos, 2 por lado del triángulo) y en la deformación en el centroide del triángulo.

#### *Elemento tipo 8*

El elemento tipo 8 es un elemento isoparamétrico de viga de 2 o 3 nodos basado en una formulación de viga geoméricamente exacta en esfuerzos. La curva directriz de la viga y sus desplazamientos son interpolados a partir respectivamente de las coordenadas y de los desplazamientos de los nodos. Para realizar a lo largo de la directriz la interpolación de las ejes locales se utilizan igualmente las mismas funciones de forma. Igualmente se interpolan los giros a partir de sus valores nodales. Se postula que dos de los ejes locales sean al mismo tiempo ejes principales de inercia de la sección de la viga, pero no se exige que dichos ejes sean normales a la directriz ni antes ni después de la deformación. La formulación del elemento se realiza en la configuración Lagrangiana total en esfuerzos, por lo que las ecuaciones constitutivas y el criterio de fluencia se expresan en esfuerzos y en las deformaciones generalizadas conjugadas de dichos esfuerzos admitiéndose endurecimiento isótropo. El valor máximo de los diferentes esfuerzos dentro del rango elástico es un dato que debe ser introducido en el programa en el caso de una sección arbitraria, aunque cuando se trata de una sección rectangular el programa calcula dichos valores.

#### *Elemento tipo 9*

El elemento tipo 9 es un elemento triangular de lámina de 6 nodos lineal no compatible. La superficie media de la lámina se interpola linealmente en función

de las coordenadas de las tres vértices del triángulo, aunque el vector normal se interpola mediante funciones lineales a partir de los valores en los puntos medios de los lados. Se integra mediante un solo punto situado en el centroide del triángulo.

#### *Elemento tipo 10*

El elemento tipo 10 es un elemento ficticio que se introduce para definir conexiones entre algunos nodos fundamentalmente para la visualización. Se utiliza asimismo para duplicar la definición de superficies rígidas a fin de crear definiciones de dichas superficies que faciliten la visualización.

### **2.3 PROCESO DE CALCULO**

El proceso de cálculo en el programa SIMPACT puede dividirse en tres fases distintas

- i) Fase de inicialización
- ii) Solución paso a paso
- iii) Tareas de finalización de la ejecución

Seguidamente se lista el programa principal de SIMPACT en donde se puede apreciar con más detalle cada una de las fases indicadas. El diagrama de flujo puede verse en la Figura 2.1.

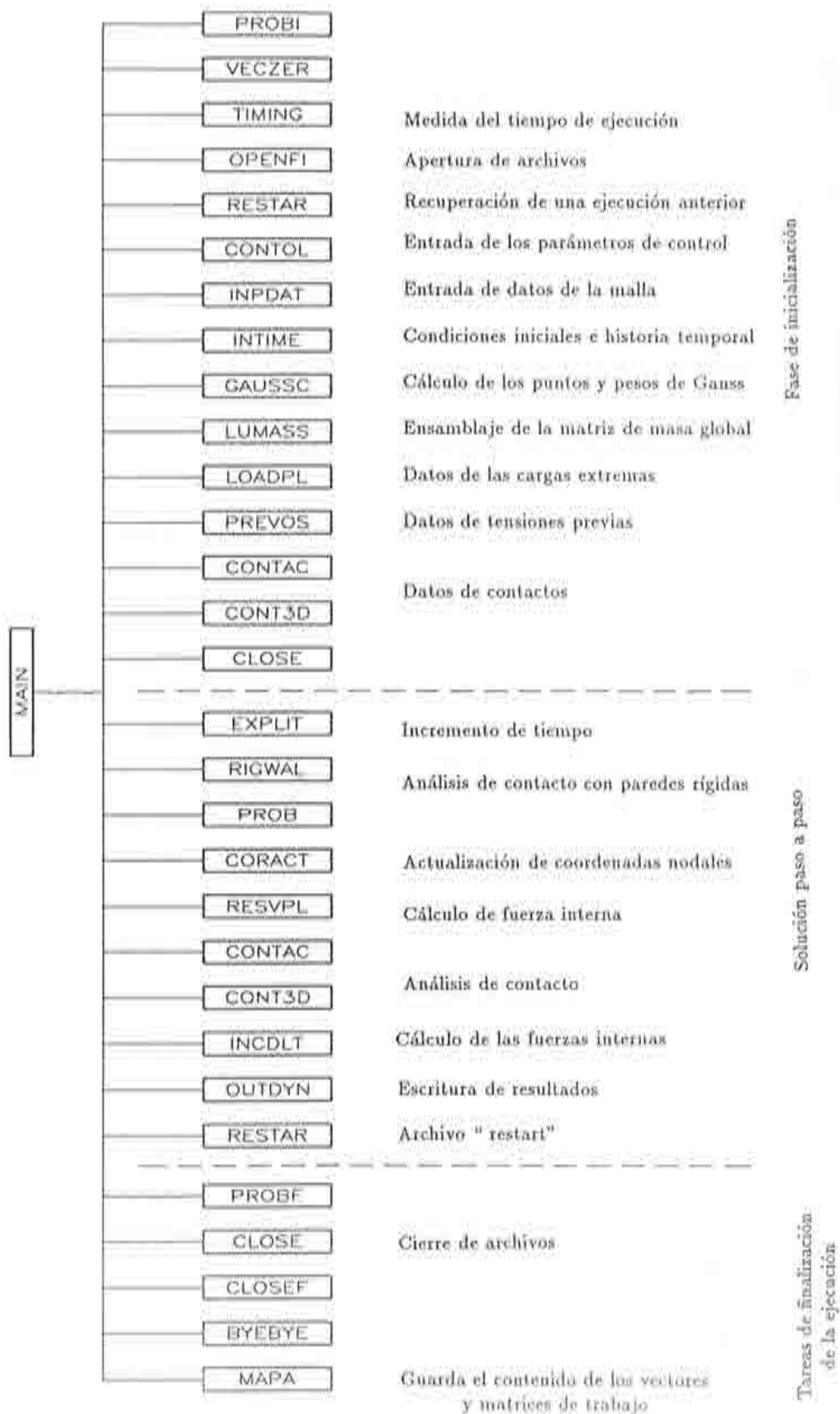


Figura 2.1 Diagrama de flujo de SIMPACT

```

1      PROGRAM SIMPACT
2      C*****
3      C
4      C          AN EXPLICIT FINITE ELEMENT PROGRAM
5      C
6      C          INTERNATIONAL CENTER FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING
7      C          BARCELONA, 1994
8      C
9      C*****
10     IMPLICIT NONE
11     INTEGER*4 IENER, IFIXD, IFUNC, IRCON, IREST, IWRIC, IWRT, NACCE,
12     &         NARIS, NCDLT, NCONM, NCONT, NDAMP, NDEPD, NDIME, NDOFN,
13     &         NESCV, NEULR, NMAPA, NPOIN, NPREV, NRADS, NREQC, NREQD,
14     &         NREQL, NREST, NRPLA, NVELR, NVFIX
15     INTEGER*4 NDIRE(10), NACCEG, NACELE, NCOORA, NCOORD, NDISPL, NDISTD,
16     &         NEFACT, NEMASS, NEULER, NFCONT, NFORCE, NIFPRE, NMWORK,
17     &         NNESSL, NNPRQC, NNPRQD, NNPRQL, NPPLAN, NRESID, NTDISP,
18     &         NTEMPE, NVELOC, NVELOD, NVELOR, NVPLAN, NXITAT, NYMASS
19     INTEGER*4 ITWO, MAXVE, NSETS
20     INTEGER*4 ISTEP, KAXDF, MAXDF, NELEM(10), NEQ, NSDOF
21     REAL*8 AALFA, AZERO, BEETA, BZERO, CPUI, DELTA, DELTC, DTEND, DTIME,
22     &         DTOLD, DTREC, ENDTM, OMEGA, SUMAT, TOLER, TOUTD, TOUTP, TTIME
23     REAL*8 TIME(40)
24     CHARACTER*10 NAMR
25     CHARACTER*20 TEXT
26
27     INTEGER*4 M(400000)
28
29     DATA ITWO/2/, MAXVE/400000/, NSETS/10/
30     C
31     C=====
32     C
33     C          INITIALIZATION PHASE
34     C
35     C=====
36     C
37
38     CALL PROBI(CPUI)
39
40     CALL VECZER(40, TIME)
41
42     CALL TIMING(19, TIME, 1)
43
44     TTIME=0.0
45
46     CALL TIMING( 1, TIME, 1)
47     CALL TIMING( 2, TIME, 1)
48
49

```



```

50     CALL OPENFI(1,' ')
51
52     READ(1,801) IREST,NREST
53     IF(NREST.EQ.0) NREST=10000
54
55     CALL OPENFI(16,' ')
56     CALL OPENFI(17,' ')
57
58     IF(IREST.EQ.1) THEN
59 C-----
60 C
61 C             RESTORING OLD PROBLEM FROM A RESTART FILE
62 C
63 C-----
64     READ(1,802) NAMR
65     CALL RESTAR(ITWO,MAXVE,NSETS,
66 &             IEENER,IFIXD,IFUNC,IRCON,IREST,IWRIC,IWRIT,NACCE,
67 &             NARIS,NCDLT,NCONM,NCONT,NDAMP,NDEPD,NDIME,NDOFN,
68 &             NESCV,NEULR,NMAPA,NPOIN,NPREV,NRADS,NREQC,NREQD,
69 &             NREQI,NREST,NRPLA,NVELR,NVFIX,
70 &             NDIRE,NACCEG,NACELE,NCOORA,NCOORD,NDISPL,NDISTD,
71 &             NEFACT,NEMASS,NEULER,NFCONT,NFORCE,NIFPRE,NMWORK,
72 &             NNESCL,NNPRQC,NNPRQD,NNPRQL,NPPLAN,NRESID,NTDISP,
73 &             NTEMPE,NVELOC,NVELOD,NVELOR,NVPLAN,NXITAT,NYMASS,
74 &             ISTEP,KAXDF,MAXDF,NELEM,NEQ,NSDOF,
75 &             AALFA,AZERO,BEETA,BZERO,CPUI,DELTA,DELTC,DTEND,DTIME,
76 &             DTOLD,DTREC,ENDTM,OMEGA,SUMAT,TOLER,TOUTD,TOUTP,TTIME,
77 &             TIME,NAMR,TEXT,M)
78     CLOSE(1,STATUS='KEEP')
79     CALL TIMING( 1,TIME,2)
80     CALL TIMING( 2,TIME,2)
81 ELSE
82 C
83 C-----
84 C
85 C             INITIALIZATION OF A NEW PROBLEM
86 C
87 C-----
88 C
89     IRCON=0
90     CLOSE(1,STATUS='KEEP')
91     CALL OPENFI(10,' ')
92
93     CALL TIMING(2,TIME,2)
94     CALL TIMING(3,TIME,1)
95 C
96 C.....
97 C
98 C             CONTROL PARAMETERS INPUT

```

```

99 C
100 C.....
101 C
102     CALL CONTOL (NPOIN, NDOFN, NVFIX, NDIME, NPREV, NCONM, NRADS, NEULR,
103     &             ENDTM, TOUTD, TOUTP, NREQD, NACCE, IFUNC, IFIXD, IENER,
104     &             IWRT, NREQL, NREQC, NVELR, TEXT, NDAMP, NESCV, NDEPD,
105     &             DTIME, DTEND, DTREC, AALFA, BEETA, DELTA, AZERO, BZERO,
106     &             OMEGA, TOLER, MAXVE, MAXDF, NCOORD, NCOORA, NEULER,
107     &             NIFPRE, NACCEG, NRESID, NNPRQD, NNPRQL, NNPRQC, NSETS,
108     &             NELEM, NCONT, NXITAT, NNESSCL, NEFACT, NDISTD, NMAPA,
109     &             IWRIC, NCDLT, NARIS, NSDOF, NRPLA, NVPLAN, NPPLAN, M)
110
111
112     CALL TIMING(3, TIME, 2)
113     CALL TIMING(6, TIME, 1)
114
115 C
116 C.....
117 C
118 C             FINITE ELEMENT MESH DATA INPUT
119 C
120 C.....
121 C
122     CALL INPDAT (NDIME, NPOIN, NDOFN, NEULR, NRADS, NELEM, NDIRE, NEQ,
123     &           NESCV, NDEPD, MAXVE, MAXDF, NVFIX, NVELR, NSETS,
124     &           M(NIFPRE), M(NCOORD), M(NEULER), M(NNESSCL),
125     &           M(NEFACT), M(NDISTD), NTDISP, NVELOC, NFORCE, NTEMPE,
126     &           NARIS, NSDOF, NYMASS, NEMASS, NDISPL, NVELOR, NMWORK,
127     &           DELTC, NVELOD, NACELE, NFACT, NRPLA, M(NVPLAN),
128     &           M(NPPLAN), IWRT, M)
129
130     CALL TIMING(6, TIME, 2)
131     CALL TIMING(7, TIME, 1)
132 C
133 C.....
134 C
135 C             INITIAL CONDITIONS AND TIME HISTORY DATA INPUT
136 C
137 C.....
138 C
139
140     CALL INTIME (NREQD, NACCE, IFIXD, IFUNC, NDOFN, NPOIN, NDIME, NEQ,
141     &           NREQL, NREQC, NVELR, NDAMP, DTIME, DTREC, M(NIFPRE),
142     &           M(NNPRQD), M(NNPRQL), M(NNPRQC), M(NACCEG),
143     &           M(NTDISP), M(NVELOC), M(NVELOR), M(NXITAT),
144     &           DELTC, IWRT, NCONT, NSDOF, M(NNESSCL), M(NEFACT))
145
146     CALL TIMING(7, TIME, 2)
147     CALL TIMING(5, TIME, 1)

```

```

148 C
149 C.....
150 C
151 C          EVALUATING GAUSS POINT VARIABLES
152 C
153 C.....
154 C
155 C          CALL GAUSSC (NSETS,NDIME,NPOIN,NELEM,NDIRE,M(NCOORD),M(NEULER),
156 C          &          M,M(NMWORK),.TRUE.)
157 C
158 C          CALL TIMING(5,TIME,2)
159 C          CALL TIMING(10,TIME,1)
160 C
161 C.....
162 C
163 C          ASSEMBLING LUMPED MASS MATRIX
164 C
165 C.....
166 C
167 C
168 C          CALL LUMASS (NSETS,NELEM,NCONM,NDOFN,NPOIN,NDIME,NDIRE,NEQ,
169 C          &          M(NIFPRE),M(NCOORD),M(NYMASS),M(NEMASS),M,
170 C          &          M(NMWORK),IWRIT,SUMAT,NSDOF,M(NNESCL),M(NEFACT))
171 C
172 C
173 C          CALL TIMING(10,TIME,2)
174 C          CALL TIMING(9,TIME,1)
175 C
176 C.....
177 C
178 C          LOAD DATA INPUT
179 C
180 C.....
181 C
182 C
183 C          CALL LOADPL (NSETS,NDIME,NDOFN,NELEM,NPOIN,NDIRE,NEQ,
184 C          &          M(NIFPRE),M(NCOORD),M(NEULER),M(NFORCE),M(NTEMPE),
185 C          &          IWRIT,M,M(NMWORK),NSDOF,M(NNESCL),M(NEFACT))
186 C
187 C          CALL TIMING(9,TIME,2)
188 C          CALL TIMING(8,TIME,1)
189 C
190 C.....
191 C
192 C          PREVIOUS STRESS DATA INPUT
193 C
194 C.....
195 C
196 C

```

```

197      IF(NPREV.NE.0)CALL PREVOS (NSETS,NELEM,NDIME,NDOFN,NPOIN,NDIRE,
198      &      NEQ,NPREV,M(NIFPRE),M(NMWORK),M(NFORCE),M )
199
200      CALL TIMING(8,TIME,2)
201      CALL TIMING(1,TIME,2)
202
203      CALL TIMING(12,TIME,1)
204      CALL TIMING(16,TIME,1)
205      C
206      C.....
207      C
208      C      CONTACT DATA INPUT
209      C
210      C.....
211      C
212      IF(NCONT.EQ.1) THEN
213      KAXDF=MAXDF
214      CALL CONTAC(NDIME,NPOIN,NDOFN,1,IWRIC,1,NCOORD,
215      &      NIFPRE,NFCONT,NYMASS,NVELOD,DTIME,KAXDF,MAXVE,
216      &      MAXDF,M)
217      CALL VECZER(NEQ+1,M(NFCONT))
218      ELSE IF(NCONT.EQ.3) THEN
219      KAXDF=MAXDF
220      CALL CONT3D(NPOIN,NDOFN,IWRIC,1,NCOORD,NIFPRE,
221      &      NFCONT,NYMASS,NVELOD,DTIME,MAXDF,MAXVE,M)
222      CALL VECZER(NEQ+1,M(NFCONT))
223      ENDIF
224      C
225      CALL TIMING(16,TIME,2)
226      CLOSE(10,STATUS='KEEP')
227      ISTEP = 0
228      CALL TIMING(12,TIME,2)
229
230      IF(NPREV.NE.0) THEN
231      CALL TIMING(12,TIME,1)
232      GOTO 20
233      END IF
234
235      END IF
236      C
237      C=====
238      C
239      C      STEP-BY-STEP SOLUTION
240      C
241      C=====
242      C
243      CALL TIMING(12,TIME,1)
244      10 ISTEP=ISTEP+1
245

```

```

246 C
247 C.....
248 C
249 C          TIME INTEGRATION
250 C
251 C.....
252 C
253       CALL TIMING(13,TIME,1)
254       CALL EXPLIT (IFIXD,IFUNC,NDIME,NDOFN,NPOIN,NEQ,NVELR,NEULR,
255       &           DTREC,AZERO,AALFA,BZERO,TTIME,DTOLD,DTIME,DTEND,
256       &           OMEGA,M(NIFPRE),M(NACCEG),NACCE,M(NFORCE),
257       &           M(NRESID),M(NTDISP),M(NCOORD),M(NEULER),M(NVELOC),
258       &           M(NYMASS),M(NEMASS),M(NVELOD),M(NACELE),NCONT,
259       &           M(NFCONT),M(NVELOR),NDAMP,M(NXITAT),NESCVC,
260       &           M(NNESCL),M(NEFACT),NDEPD,M(NDISTD),NARIS,NSDOF)
261
262       CALL TIMING(13,TIME,2)
263 C
264 C.....
265 C
266 C          CHECKING FOR CONTACT WITH RIGID WALL
267 C
268 C.....
269 C
270       IF (NRPLA.GT.0) THEN
271         CALL TIMING(16,TIME,1)
272         CALL RIGWAL(NRPLA,NDOFN,NEQ,NDIME,NPOIN,M(NIFPRE),M(NTDISP),
273         &           M(NVELOD),M(NCOORD),M(NVPLAN),M(NPPLAN))
274         CALL TIMING(16,TIME,2)
275       ENDIF
276       CALL PROB(ISTEP,DTIME,TTIME,CPUI)
277 C
278 C.....
279 C
280 C          CALCULATION OF INTERNAL NODAL FORCES
281 C
282 C.....
283 C
284       20 CALL TIMING(14,TIME,1)
285       CALL CORACT(M(NCOORD),M(NIFPRE),M(NTDISP),M(NCOORA),NDIME,NPOIN,
286       &           NDOFN,NEQ)
287
288       CALL RESVPL(NSETS,NDIME,NDOFN,NELEM,NDIRE,NPOIN,NEQ,DTIME,
289       &           M(NIFPRE),M(NCOORD),M(NEULER),M(NRESID),M(NTDISP),
290       &           M,NVELOC),M(NMWORK),M(NCOORA),M(NVELOD))
291       CALL TIMING(14,TIME,2)
292
293 C
294 C.....

```

```

295 C
296 C          CALCULATION OF CONTACT FORCES
297 C
298 C.....
299 C
300         IF(TTIME.GT.DTEND)NCONT=0
301         CALL TIMING(16,TIME,1)
302         IF(NCONT.EQ.1) THEN
303             CALL CONTAC(NDIME,NPOIN,NDOFN, 1,IWRIC, 2,
304             &             NCOORA,NIFPRE,NFCONT,NYMASS,NVELOD,DTIME,KAXDF,
305             &             MAXVE,MAXDF,M)
306         ELSEIF(NCONT.EQ.3) THEN
307             CALL CONT3D(NPOIN,NDOFN,IWRIC, 2,NCOORA,
308             &             NIFPRE,NFCONT,NYMASS,NVELOD,DTIME,MAXDF,MAXVE,M)
309         END IF
310         CALL TIMING(16,TIME,2)
311
312 C
313 C.....
314 C
315 C          CALCULATION OF CRITICAL TIME STEP
316 C
317 C.....
318 C
319         CALL TIMING(17,TIME,1)
320         IF(MOD(ISTEP,NCDLT).EQ.0)CALL INCDLT(NSETS,NDIME,NDOFN,NPOIN,
321         &             DTIME,NDIRE,NELEM,M,M(NCOORA))
322         CALL TIMING(17,TIME,2)
323
324 C
325 C.....
326 C
327 C          RESULT OUTPUT
328 C
329 C.....
330 C
331         CALL TIMING(15,TIME,1)
332         CALL OUTDYN (ISTEP,NSETS,NDOFN,NELEM,NPOIN,NDIRE,NDIME,NEQ ,
333         &             TOUTD,TOUTP,NREQD,IENER,IWRIT,NREQL,NREQC,TTIME,
334         &             DTOLD,M(NIFPRE),M(NNPRQD),M(NNPRQL),M(NNPRQC),
335         &             M(NDISPL),M(NTDISP),M(NYMASS),M,M(NEULER),
336         &             M(NMWORK),M(NVELOD),M(NACELE),M(NRESID),SUMAT,
337         &             NCONT,M(NFCONT),NSDOF,M(NNESCL),M(NEFACT))
338         CALL TIMING(15,TIME,2)
339
340 C
341 C.....
342 C
343 C          RESTART FILE DUMPING

```

```

344 C
345 C.....
346 C
347     IF(MOD(ISTEP,NREST).EQ.0) THEN
348         CALL TIMING(12,TIME,2)
349         CALL TIMING(19,TIME,2)
350         CALL TIMING(15,TIME,1)
351         CALL RESTAR(ITWO,MAXVE,NSETS,
352             &         IENER,IFIXD,IFUNC,IRCON,IREST,IWRIC,IWRIT,NACCE,
353             &         NARIS,NCDLT,NCONM,NCONT,NDAMP,NDEPD,NDIME,NDOFN,
354             &         NESCV,NEULR,NMAPA,NPOIN,NPREV,NRADS,NREQC,NREQD,
355             &         NREQI,NREST,NRPLA,NVELR,NVFIX,
356             &         NDIRE,NACCEG,NACELE,NCOORA,NCOORD,NDISPL,NDISTD,
357             &         NEFACT,NEMASS,NEULER,NFCONT,NFORCE,NIFPRE,NMWORK,
358             &         NNESCL,NNPRQC,NNPRQD,NNPRQL,NPPLAN,NRESID,NTDISP,
359             &         NTEMPE,NVELOC,NVELOD,NVELOR,NVPLAN,NXITAT,NYMASS,
360             &         ISTEP,KAXDF,MAXDF,NELEM,NEQ,NSDOF,
361             &         AALFA,AZERO,BEETA,BZERO,CPUI,DELTA,DELTC,DTEND,DTIME,
362             &         DTOLD,DTREC,ENDTM,OMEGA,SUMAT,TOLER,TOUTD,TOUTP,TTIME,
363             &         TIME,NAMR,TEXT,M)
364         CALL TIMING(15,TIME,2)
365         CALL TIMING(19,TIME,1)
366         CALL TIMING(12,TIME,1)
367     ENDIF
368
369     IF(TTIME.LT.ENDTM) GO TO 10
370
371     CALL TIMING(12,TIME,2)
372     CALL TIMING(18,TIME,1)
373 C
374 C=====
375 C
376 C         ENDING EXECUTION
377 C
378 C=====
379 C
380
381     CALL PROBF
382
383     CLOSE( 5,STATUS='KEEP')
384     CLOSE(16,STATUS='KEEP')
385     CLOSE(17,STATUS='KEEP')
386     IF(NELEM(10).GT.0) CLOSE(18,STATUS='KEEP')
387     IF(IFUNC.EQ.0) THEN
388         IF(IFIXD.EQ.0) THEN
389             CLOSE( 7,STATUS='KEEP')
390             CLOSE( 8,STATUS='KEEP')
391         END IF
392     IF(IFIXD.EQ.1)CLOSE( 8,STATUS='KEEP')

```

```

393         IF(IFIXD.EQ.2)CLOSE( 7,STATUS='KEEP')
394         END IF
395         IF(NREQD.GT.0)CLOSE(11,STATUS='KEEP')
396 C
397 C             CLOSSES ELEMENTAL FILES
398 C
399         CALL CLOSEF(NELEM)
400 C
401 C*** PARA TRABAJO EN PC (BAJO WINDOWS)
402 C
403 C         CALL TIEMPO(IHR,IMIN,ISEG,ICSE,IHR1,IMIN1,ISEG1,ICSE1)
404         CALL TIMING(18,TIME,2)
405         CALL TIMING(19,TIME,2)
406         CALL BYEBYE(TIME)
407 C         WRITE(3,902)IHR1,IMIN1,ISEG1,ICSE1
408 C         WRITE(2,902)IHR1,IMIN1,ISEG1,ICSE1
409         CLOSE(3,STATUS='KEEP')
410         CLOSE(2,STATUS='KEEP')
411         IF(NMAPA.EQ.1) THEN
412             CALL MAPA(M,M,MAXVE,ITWO)
413         END IF
414         STOP
415
416         801 FORMAT(I1,I5)
417         802 FORMAT(A10)
418         END

```

### 2.3.1 Fase de inicialización

Durante la fase de inicialización (líneas 38-235) se recuperan los datos de un proceso previamente interrumpido o se realiza la inicialización correspondiente o a un nuevo problema.

#### i) Recuperación de un problema anterior

Un análisis interrumpido puede ser recuperado a partir de un archivo "restart" que ha sido creado previamente durante la anterior ejecución. Se restablecen los vectores y matrices de trabajo así como los bloques COMMON continuando el análisis con la posibilidad de modificación de alguno de los parámetros de control

#### ii) Inicialización de un nuevo proceso

En esta fase se lee la información de control cuando un problema se inicializa. Se asigna espacio de memoria para cada una de las variables, se abren los archivos, se leen todos los datos de entrada así como aquellos parámetros y propiedades que al ser constantes en el tiempo serán almacenados para ser utilizados en el proceso de solución paso a paso. Las principales tareas a desarrollar en esta fase se describen a continuación.



### 2.3.1.1 *Entrada de los parámetros de control*

Los datos de control consisten en los siguientes parámetros:

NPOIN	número de puntos nodales en el modelo
NDOFN	número de grados de libertad del modelo
NVFIX	número de puntos nodales con condiciones de contorno
NDIME	dimensiones del problema (2 si es 2D y 3 si es 3D)
NPREV	indicador para cargas y tensiones previas
NCONM	número de masas concentradas
NRADS	indicador para el tipo de sistema de coordenadas utilizado para leer las coordenadas nodales
NEULR	indicador para la utilización de grados de libertad al giro
ENDTM	tiempo final de análisis
TOUTD	intervalo de tiempo para la escritura de resultados
TOUTP	intervalo de tiempo para escribir en archivo la información completa del procesoco
NREQD	número de puntos nodales para los cuales se escribirá la historia temporal de desplazamientos
NREQL	número de puntos nodales para los cuales se escribirá la historia temporal de las fuerzas internas
NREQC	número de puntos nodales para los cuales se escribirá la historia temporal de las fuerzas de contacto
NACCE	número de puntos de los acelerogramas
IFUNC	parámetro que indica el tipo de excitación
IFIXD	indicador para la dirección de la excitación
NCONT	indicador del análisis del contacto
IENER	indicador de control para el cálculo y escritura de la energía cinética total
IWRIT	indicador de impresión
NVELR	indicador de velocidades prescritas
NMAPA	indicador para el volcado de los vectores y matrices de trabajo
IWRIC	indicador de impresión de las rutinas de contacto
NCDLT	intervalo de tiempo para un nuevo cálculo del incremento de tiempo crítico
NDAMP	número de períodos con amortiguamiento
NESCV	número de líneas de datos para restricciones dadas mediante una relación lineal
NDEPD	número de nodos unidos a otros nodos mediante una conexión rígida
NARIS	número de nodos restringidos en segmento de 2 nodos
NRPLA	número de paredes rígidas
DTIME	incremento de tiempo
DTEND	tiempo final de la acción

DTREC	incremento de tiempo en los registros de aceleraciones
AALFA	multiplicador de las aceleraciones para escalar los registros de leídos de los acelerogramas
AZERO	constante para una función temporal armónica
BZERO	constante para una función temporal armónica
OMEGA	constante para una función temporal armónica
NELEM(I),	$I=1, \dots, 10$ números de los elementos tipo I

Los parámetros descritos anteriormente sirven fundamentalmente para:

- control de la entrada de datos posterior
- se utilizan para determinar las necesidades de memoria de los vectores y matrices del programa
- definen el tamaño del modelo de elementos finitos y sus características
- definen el tipo de problema
- especifican el período de tiempo analizado así como el incremento de tiempo
- controlan la ejecución del programa
- definen la variación en el tiempo de algunos parámetros
- controlan la salida de resultados
- controlan si la información correspondiente a algún conjunto de datos, conjunto de elementos etc. ha sido introducido de forma apropiada

### 2.3.1.2 *Datos de entrada de la malla de elementos finitos*

En esta fase se lee y guarda posteriormente en memoria los datos de entrada correspondientes a la malla de elementos finitos. Los datos de entrada de esta fase consisten en:

- datos de los puntos nodales
- datos de los elementos
- condiciones cinemáticas

Los datos de los puntos nodales consisten en las coordenadas de los nodos y de los ángulos de Euler si se consideran grados de libertad de rotación. Pueden utilizarse para la definición de las coordenadas nodales sistemas cartesianos, cilíndricos o esféricos, aunque dicho sistema debe ser el mismo para todo el modelo. Las coordenadas nodales y los ángulos de Euler definen la configuración inicial del modelo de elementos finitos discretizado. A través del vector IFPRE se especifica si cada uno de los grados de libertad tiene o no condiciones de contorno o grados de libertad no activos. Después de leer estos datos, IFPRE se inicializa al valor 1.

La segunda parte de esta fase consiste en la lectura y posterior almacenaje de los datos de los diferentes tipos de elementos, desde el elemento tipo 1 al 10. Dichos datos consisten en:

- información de control
- conexiones nodales

- datos de materiales
- datos geométricos (para elementos viga)
- datos de tensiones previas.

Los datos de los elementos se utilizan asimismo en esta fase para realizar otras tareas tales como:

- activar los grados de libertad
- cálculo del incremento de tiempo crítico inicial.

Los grados de libertad activos dentro de cada elemento se activan asignando a dicho grado de libertad el código 0 en la matriz IFPRE. La tabla que se lista seguidamente indica los grados de libertad que para cada tipo de elemento están definidos.

Grados de libertad (*)						
Elemento tipo	DX	DY	DZ	RX	RY	RZ
1	x	x				
2	x	x				
3	x	x				
4	x	x				
5	x	x	x			
6	x	x	x	x	x	
7	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x
9 - vertices	x	x	x			
- nodos en lados				x	x	

(\*) x indica grado de libertad activo. Todos los grados de libertad de traslación están definidos en el sistema global de coordenadas XYZ. Los grados de libertad de giro para elementos laminares (elementos tipo 6, 7 y 9) están definidos en el sistema de coordenadas oblicuo (definido mediante ángulos de Euler). Los grados de libertad de giro para elementos viga (elementos tipo 8) se definen en el sistema de coordenadas locales de la viga. Actualmente sin embargo, las condiciones de fijación pueden imponerse igualmente en el sistema de coordenadas oblicuo.

La tercera parte de esta fase consiste en la lectura de las condiciones cinemáticas impuestas al modelo. Dichas condiciones cinemáticas vienen dadas por:

- indicadores de fijación para los grados de libertad de traslación y de giro
- coacciones cinemáticas
  - tipo I - valores de desplazamientos ligados linealmente
  - tipo II - conexiones rígidas entre dos nodos
  - tipo III - fijación de un nodo a un borde
- paredes rígidas que no pueden ser penetradas por ningún nodo

La matriz IFPRE puede modificarse coaccionando o activando grados de libertad. De esta forma pueden activarse (o viceversa) grados de libertad inicialmente inactivos. En este caso aparece un mensaje de aviso en el archivo de salida de resultados. Una vez se ha obtenido la matriz IFPRE definitiva se numeran todos los grados de libertad activos asociándolos directamente al correspondiente sistema de ecuaciones. De esta forma los ceros que inicialmente existían dentro de IFPRE son reemplazados por el número de la correspondiente ecuación, siendo el número 1 allí existente reemplazado por un cero.

Las coacciones cinemáticas establecen una relación nodo principal – nodo asociado entre algunos nodos y sus correspondientes grados de libertad. En el caso de coacciones tipo I se especifican relaciones lineales entre los desplazamientos de los grados de libertad asociados y los grados de libertad de principales. En el caso de coacciones tipo II las traslaciones y rotaciones de un nodo asociado son función de las traslaciones y rotaciones del nodo principal de acuerdo con relaciones cinemáticas de movimiento de sólido rígido.

#### **2.3.1.3 *Lectura de los datos de variaciones nodales temporales, condiciones iniciales, velocidades prescritas, amortiguamiento y datos del acelerograma***

En esta etapa se leen datos de diferentes tipos dependiendo del tipo de problema a analizar. Los datos de las variaciones nodales temporales consisten en especificar los nodos en los cuales se desea obtener la historia temporal de la respuesta de desplazamientos, fuerzas internas y fuerzas de contacto. Como condiciones iniciales se leen los datos de velocidades y desplazamientos en el instante inicial, teniendo presente que por defecto estos valores son nulos. Las condiciones iniciales correspondientes a los nodos asociados se obtienen a partir de las de los nodos principales. Dependiendo de los parámetros de control que definen el modelo, en esta fase se leen también los datos del acelerograma y de las condiciones de amortiguamiento.

#### **2.3.1.4 *Determinación variables correspondientes a los puntos de Gauss***

En esta fase se calculan determinadas variables que permanecen constantes a lo largo del proceso de cálculo, por lo que se guardan en memoria. Concretamente se está haciendo referencia a las necesarias para realizar posteriormente la integración numérica mediante la cuadratura de Gauss. Se calculan por tanto las coordenadas locales de los puntos de Gauss, los pesos de integración y el valor de las funciones de forma y sus derivadas en los correspondientes puntos de Gauss. Lógicamente al ser dependientes estas variables del tipo de elemento, los cálculos se repetirán para todos los elementos presentes en el análisis. Los valores calculados se utilizarán en el proceso de solución paso a paso, así como durante el proceso de inicialización y de cálculo de las matrices de masa y vectores de fuerzas.

### **2.3.1.5 Ensamblaje de la matriz de masa concentrada**

La matriz de masa global se obtiene ensamblando las matrices de masa de los diferentes elementos y sumando la contribución de las masas concentradas de los nodos. Al ser la matriz de masa diagonal permite la solución del sistema de ecuaciones de una forma sencilla al no ser necesaria su inversión. Dicha matriz de masa diagonal se obtiene diagonalizando las matrices de masa elementales consistentes. La matriz global de masa permanece constante a lo largo de todo el análisis.

### **2.3.1.6 Datos de cargas**

Las cargas externas que se consideran en el análisis pueden ser fuerzas concentradas aplicadas en los nodos, cargas distribuidas por unidad de superficie, cargas gravitatorias y cargas térmicas (únicamente para elementos tipo I). En esta fase se leen todos los componentes de la carga. El vector de cargas se obtiene ensamblando las contribuciones de los vectores elementales obtenidos de forma consistente en cada elemento. Posteriormente se suma la contribución de las cargas puntuales. La variación temporal de la carga se expresa mediante funciones del tiempo. En la actual versión se dispone de la función de Heaviside así como de la función seno.

### **2.3.1.7 Entrada de tensiones previas**

En esta fase se leen las fuerzas nodales y las tensiones iniciales, provenientes de cargas previas. Este tipo de condiciones iniciales se admite únicamente en elementos tipo I.

### **2.3.1.8 Datos de contacto**

Si el problema analizado incorpora contacto, en esta fase se leen los datos de definición de las interfaces de contacto y se realizan las etapas iniciales del algoritmo de contacto. Actualmente están implementados en el programa dos tipos de algoritmos de contacto, que serán llamados tipos 1 y 2. En el algoritmo de contacto 2D las superficies de la interface de contacto se discretizan mediante elementos rectos de 2 nodos, mientras que en el caso 3D, dichas superficies son discretizadas mediante elementos triangulares o cuadriláteros. Se define la superficie de contacto principal y la asociada. A los nodos que definen ambas superficies se les denomina respectivamente nodos principales y nodos asociados. Durante esta fase se realiza la asignación de memoria para el análisis del contacto y se crea la correspondiente base de datos para las interfaces de contacto.

### *Algoritmo de contacto 1*

Los datos de entrada consisten en la información de control y en la definición de cada interface de contacto. Una interface de contacto se define mediante los parámetros de control para el algoritmo de contacto, coeficientes de penalización, datos de rozamiento y definición topológica de las superficies de contacto. La topología de las superficies principal y asociada para cada interface de contacto viene dada por la relación de nodos y conectividades nodales de cada uno de los segmentos rectos en las superficies de contacto. La memoria necesaria para el análisis se asigna durante la fase de inicialización, al mismo tiempo que se crea la base de datos necesaria para cada interface de contacto. En dicha base de datos, se guarda la relación de nodos principales y asociados, así como las conectividades de los segmentos rectos de ambas superficies. Dichos datos se procesan al objeto de obtener los números de los segmentos conectados a cada nodo que también serán almacenados en la base de datos.

### *Algoritmo de contacto 2*

Los datos de entrada consisten en la información de control y en la definición de cada interface de contacto. Al igual que antes, una interface de contacto se define mediante los parámetros de control, coeficiente de penalización, datos de rozamiento y definición topológica de las superficies de contacto. En este caso los datos topológicos consisten solamente en las conectividades de los segmentos de las superficies principal y asociadas. La relación de nodos principales y asociados así como los segmentos ligados a cada nodo y las conectividades se almacenan en la base de datos.

Durante la realización, en este algoritmo, para cada uno de los nodos asociados se determinan los nodos de la superficie principal más cercanos, mediante una búsqueda global entre todos los nodos de la superficie principal. Si ha ocurrido penetración, los nodos penetrantes son colocados nuevamente sobre la superficie.

## **2.3.2 Fase de solución paso a paso**

En la fase de solución paso a paso las configuraciones deformadas se determinan de manera incremental en los instantes de tiempo  $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k, \dots$  en donde  $t_1 = \Delta t_1, \dots, t_{k-1} + \Delta t_{k-1}$  siendo  $\Delta t_{k-1}$  el incremento de tiempo utilizado en la integración de las ecuaciones del movimiento y  $k$  hace referencia a la etapa de integración.

El tiempo final de integración es dato del problema. El programa realiza la solución mediante un bucle cuyo contenido se repite para cada instante de tiempo.

### **2.3.2.1 Integración en el tiempo**

El esquema utilizado para la integración de las ecuaciones no lineales del movimiento es el de las diferencias centrales explícitas. Escribiendo las ecuaciones

del movimiento en el tiempo  $t_{k-1}$  las aceleraciones nodales se obtienen para  $t_{k-1}$  y los desplazamientos y por lo tanto la nueva configuración en el tiempo  $t_k$ . Se calculan los desplazamientos incrementales y las rotaciones (siempre que los grados de libertad al giro sean activos) y también las nuevas velocidades tanto de traslación como de rotación. Los desplazamientos incrementales se utilizan para actualizar las coordenadas de los nodos, mientras que los giros incrementales permiten a través de la matriz de rotación actualizar los giros totales y los vectores normales. El algoritmo de integración permite utilizar un tiempo de integración variable.

El tratamiento dado a los nodos asociados así como a aquellos con velocidades prescritas es diferente. La nueva posición de los nodos con velocidades prescritas no se determina mediante las ecuaciones del movimiento. La solución para los nodos asociados se realiza a partir de las ecuaciones del movimiento pero de una forma indirecta.

Las incógnitas cinemáticas correspondientes a los nodos asociados se eliminan del sistema global de ecuaciones aplicando transformaciones apropiadas. Las masas, fuerzas externas e internas, así como las fuerzas de contacto correspondientes a los nodos asociados, se transforman de modo a incluirlos en las ecuaciones del movimiento de los nodos principales. Los desplazamientos y velocidades de los nodos asociados se recuperan a partir de las de los principales aplicando la transformación inversa.

### **2.3.2.2 Búsqueda de contactos con pared rígida**

Si en el modelo existen paredes rígidas se chequean todos los nodos para determinar una posible penetración. Si tal penetración se detectara, los nodos son colocados nuevamente sobre la superficie.

### **2.3.2.3 Cálculo de fuerzas internas**

Esta tarea se realiza mediante un bucle sobre todos los elementos del modelo. A nivel elemental se realiza otro bucle sobre los puntos de Gauss. Al inicio se calculan los correspondientes tensores de deformación para cada tipo de elemento. Las componentes de la tensión (o los esfuerzos) se calculan en cada punto de Gauss a partir de las tensiones obtenidas (o de las tensiones generalizadas) a través de la ecuación constitutiva del modelo correspondiente. Una vez determinadas las tensiones (o los esfuerzos), las fuerzas internas se determinan mediante integración sobre el elemento. Por último, las fuerzas internas elementales se ensamblan para formar el vector global de fuerzas internas.

#### 2.3.2.4 *Cálculo de las fuerzas de contacto*

Esta tarea solamente se realiza si el problema requiere el análisis de contacto. Se realiza en la configuración actual una búsqueda entre los nodos candidatos a entrar en contacto. Si ha habido penetración, se introducen unas fuerzas en los nodos correspondientes al objeto de anularla. Si el modelo de contacto considera el rozamiento tangencial, será preciso introducir también unas fuerzas en esta dirección.

##### *Búsqueda de contactos en el algoritmo 1*

- (1) Para cada nodo asociado se determina el nodo principal más cercano midiendo la distancia entre el nodo asociado y todos los nodos principales.
- (2) Se determina, para cada nodo asociado, el segmento principal candidato al contacto, analizando si ha habido penetración. Solamente se chequean los segmentos conectados al nodo principal más cercano al nodo asociado.
- (3) Si ha habido penetración, se calcula el valor de ésta en el segmento principal así como la localización exacta también en el segmento principal. En este algoritmo las definiciones de superficie principal y superficie asociada son fijas.

##### *Búsqueda de contactos en el algoritmo 2*

- (1) Para cada nodo asociado, se determina el nodo principal más cercano. La búsqueda se limita al entorno del nodo más cercano durante el incremento de tiempo anterior. Solamente se chequea este nodo y los que le rodean.
- (2) Se determina, para cada nodo asociado, el segmento principal candidato al contacto, analizando si ha habido penetración. Primeramente se chequean los segmentos conectados al nodo más cercano pero en ocasiones se chequean también los de los nodos que le rodean.
- (3) Si ha habido penetración, se calcula el valor de ésta en el segmento principal así como la localización exacta también en el segmento principal. En este algoritmo pueden intercambiarse las definiciones de superficie principal y superficie asociada si el usuario elige en el algoritmo la opción simétrica.

Ambos algoritmos utilizan el método de las penalizaciones para imponer las condiciones de contacto. Las fuerzas de contacto son proporcionales a la penetración a un cierto coeficiente denominado "coeficiente de penalización".

#### 2.3.2.5 *Cálculo del incremento de tiempo crítico*

Las grandes deformaciones de los elementos influyen en el incremento de tiempo crítico, por lo que debe ser recalculado durante el análisis cada cierto número de intervalos. Su cálculo se basa en una estimación obtenida a partir del incremento



de tiempo crítico de cada uno de los elementos, concretamente se elige el mínimo de todos ellos.

#### **2.3.2.6 Salida de resultados**

En esta tarea el programa escribe los resultados en archivos de salida. Dichos archivos pueden estar o no formateados. Los resultados se escriben a intervalos especificados por el usuario. De forma muy espaciada se se escribe un conjunto completo de resultados, y de forma no tan espaciada se escriben resultados para un subconjunto seleccionado de nodos y elementos a fin de poder posteriormente dibujar variaciones temporales de ciertas variables.

#### **2.3.2.7 Volcado de archivos para interrupciones temporales**

En un conjunto de intervalos previamente seleccionados, el vector de trabajo así como los bloques COMMON se escriben en un archivo. Esto permite reiniciar posteriormente el cálculo en el punto en que éste fue interrumpido. Puesto que el espacio requerido por estos archivos es muy elevado, el programa conserva únicamente los dos últimos volcados.

#### **2.3.3 Finalización de la fase de ejecución**

En esta fase se cierran todos los archivos, se calcula el tiempo total de CPU, y se escriben los resultados. Por indicación del usuario, el programa puede escribir el vector de trabajo completo al finalizar la ejecución.

### **2.4 RELACION DE SUBROUTINAS**

ACTROT	Actualiza la matriz de rotación
ARISFI	Calcula los desplazamientos dependientes y modifica la matriz de masa para desplazamientos restringidos tipo III - fijación de un nodo a un contorno
ARISIN	Lee y genera datos para desplazamientos restringidos tipo III - fijación de un nodo a un contorno
BYEBYE	Calcula y escribe el tiempo de CPU utilizado por las principales subrutinas del programa
CAMESI	Traslada el efecto de las fuerzas internas de los nodos dependientes a los nodos independientes para todo tipo de restricciones
CAMESC	Traslada el efecto de las masas, fuerzas externas y fuerzas de contacto de los nodos dependientes a los nodos independientes, recupera los desplazamientos incrementales dependientes, velocidades y aceleraciones para coacciones tipo I (relación lineal entre diferentes desplazamientos)

CLOSEF	Subrutina principal para el cierre de archivos
CODELT	Calcula el incremento de tiempo crítico para elementos sólidos
CONTOL	Lee los datos de control y asigna espacio en el vector de trabajo
CORACT	Actualiza las coordenadas nodales
DAMPIN	Modifica las velocidades nodales para incorporar el amortiguamiento
DIRECT	Coloca punteros en el vector de trabajo, reserva espacio en dicho vector y chequea la memoria disponible
DPDFIN	Recupera los desplazamientos dependientes y transforma el vector de masas para restricciones tipo II (conexiones rígidas)
DPDINT	Lee y genera la matriz de transformación para restricciones tipo II (conexiones rígidas)
EXPLIT	Realiza la integración explícita
FUNCTA	Interpola la aceleración
FUNCTS	Calcula el factor de escala como una función del tiempo
GAUSSC	Subrutina principal para determinar los parámetros de los puntos de integración de Gauss
GAUSSQ	Calcula la situación de los puntos y el valor de los pesos para la cuadratura de Gauss
INCDLT	Subrutina principal para determinar el incremento de tiempo crítico
INPDAT	Subrutina de entrada de datos: lee coordenadas nodales, datos de la malla, indicadores de condiciones de contorno y datos de restricciones cinemáticas
INROTM	calcula la matriz de rotación en función de los ángulos de Euler
INTIME	Subrutina de entrada de datos: lee los datos para la salida de resultados de variaciones temporales de variables, condiciones iniciales, velocidades impuestas, datos de amortiguamiento y acelerogramas
LOADPL	Lee los datos correspondientes a las cargas externas y genera el vector de cargas de referencia
LUMASS	Calcula la matriz de masas concentradas para cada elemento, ensambla dichas matrices dentro de la matriz de masa global y lee los valores de las masas concentradas si las hubiere
MAPA	Volcado del vector de trabajo al final de la ejecución
OPENFI	Apertura de archivos
OUTDYN	Subrutina de escritura: escribe los resultados completos y la variación temporal de las variables
PREVOS	Lee las fuerzas y tensiones iniciales
PROB	Imprime un mensaje de control indicando el incremento de tiempo objeto del análisis
PROBF	Imprime un mensaje de control indicando el final de la ejecución
PROBI	Imprime un mensaje de control indicando el inicio del cálculo

PROBR	Imprime un mensaje de control indicando el reinicio de un problema a partir de ejecuciones anteriores
RESCOR	Escribe la variación temporal de los datos durante un reinicio
RESTAR	Vuelca en archivo para posibles reinicios. Asimismo reinicia los cálculos a partir de archivos de reinicio previamente volcados
RESTDA	Lee la entrada de datos para reinicio
RETEL	Restituye las variables COMMON
RESVPL	Subrutina principal para determinar tensiones y fuerzas internas
TIMING	Subrutina de control del tiempo de CPU
TIMUSE	Tiempo de CPU

*Elemento tipo 1*

BLARGE	Calcula la matriz B para grandes desplazamientos
CLOSE1	Cierra los archivos de salida con la variación temporal de las tensiones
ELEMT1	Subrutina principal para el elemento tipo 1
ELMDA1	Lee los datos elementales
FLOWVP	Calcula la tasa de deformación viscoplástica
GAUSS1	Evalúa los parámetros de los puntos de Gauss
GAUSV1	Recupera las variables de Gauss
GAUSV2	Almacena las variables de Gauss
GAUSVR	Subrutina de control para almacenar y recuperar el valor de las variables de Gauss
INPDA1	Lee los datos de control, asigna memoria a los vectores elementales y lee los datos elementales
INVAR	Calcula los invariantes de tensiones
JACOBI	Calcula las coordenadas de los puntos de Gauss, la matriz jacobiana, su determinante y su matriz inversa
JACOB1	Calcula la matriz gradiente de deformación
LINGNL	Calcula las tensiones lineales para pequeñas y grandes deformaciones
LOADP1	Lee los datos de cargas elementales y genera el vector consistente de cargas
LUMAS1	Calcula la matriz de masas concentradas
MASEL1	Escribe en un archivo los datos elementales para posibles reinicios
MODPS	Calcula la matriz de deformación elástica
NODXY1	Interpola las coordenadas de los nodos centrales a partir de los valores de los de esquina
OUTDY1	Escribe los resultados elementales
POINT1	Asigna memoria para los vectores elementales
PREVO1	Lee el estado de tensiones debido a cargas iniciales
REL001	Asigna y guarda los valores de las variables COMMON

RESVP1    Calcula las tensiones y las fuerzas internas  
 SFR1      Calcula las funciones de interpolación y sus derivadas  
 YELDF    Calcula el vector de flujo

*Elemento tipo 2*

ELEMT2    Subrutina principal para el elemento tipo 2  
 INPDA2    Lee los datos de control, asigna los vectores elementales y lee los  
 datos del elemento  
 MASEL2    Lee del disco durante un reinicio los datos elementales  
 REL002    Asigna y guarda los valores de las variables COMMON

*Elemento tipo 3*

BMATX3    Calcula la matriz B  
 CORECN3    Fuerza a que las tensiones estén sobre la superficie de fluencia  
 mediante un algoritmo de retorno radial para el flujo de von Mises  
 con endurecimiento constante e isótropo  
 CORREC3    Fuerza a que las tensiones estén sobre la superficie de fluencia  
 mediante un algoritmo de retorno mapeado para un flujo de von  
 Mises con endurecimiento no lineal isótropo  
 ELEMT3    Subrutina principal para el elemento tipo 3  
 ELMDA3    Lee los datos elementales  
 GAUSE3    Calcula los parámetros de Gauss  
 INISTR    Inicializa las variables internas  
 INPDA3    Lee los datos de control, asigna los vectores elementales y lee  
 los datos del elemento  
 JACOB3    Calcula la matriz jacobiana así como las derivadas de las  
 funciones de interpolación  
 LOADE3    Lee los datos elementales de carga y genera el vector consistente  
 de carga  
 LUMAE3    Calcula la matriz de masa concentrada  
 MASEL3    Escribe durante un reinicio los datos elementales  
 OUTDE3    Escribe los resultados elementales  
 POINT3    Asigna memoria para los archivos elementales  
 PREDIC3    Calcula las tensiones y deformaciones suponiendo comportamiento  
 elástico lineal  
 REL003    Asigna y guarda los valores de las variables COMMON  
 RESEP3    Calcula las tensiones y las fuerzas internas  
 SFRE3    Calcula las funciones de forma y sus derivadas  
 UPFIN    Actualiza el tensor elástico de Finger

*Elemento tipo 4*

BMATX4    Calcula la matriz B  
 CORREC4    Fuerza a que las tensiones estén sobre la superficie de fluencia

mediante un algoritmo de retorno mapeado para un flujo de von Mises con endurecimiento no lineal isótropo

ELEMT4 Subrutina principal para el elemento tipo 4  
 ELMDA4 Lee los datos elementales  
 GAUSE4 Calcula los parámetros de los puntos de Gauss  
 INPDA4 Lee datos de control, asigna memoria a los vectores elementales y lee los datos elementales

JACOB4 Calcula la matriz jacobiana y las derivadas de las funciones de forma  
 LOADE4 Lee los datos elementales de carga y genera el vector consistente de carga

LUMAE4 Calcula la matriz de masa concentrada  
 MASEL4 Escribe los datos elementales durante un reinicio  
 OUTDE4 Salida de resultados elementales  
 POINT4 Asigna memoria para los vectores elementales  
 PREDIC4 Calcula las tensiones y deformaciones suponiendo comportamiento elástico lineal

REL004 Asigna y guarda los valores de las variables COMMON  
 RESEP4 Calcula las tensiones y las fuerzas internas  
 SFRE4 Calcula las funciones de forma y sus derivadas

*Elemento tipo 5*

BMATX5 Evalúa la matriz B  
 CORECN5 Fuerza a que las tensiones estén sobre la superficie de fluencia mediante un algoritmo de retorno radial para un flujo de von Mises con endurecimiento lineal isótropo

CORREC5 Fuerza a que las tensiones estén sobre la superficie de fluencia mediante un algoritmo de retorno mapeado para un flujo de von Mises con endurecimiento no lineal isótropo

ELEMT5 Subrutina principal para el elemento número 5  
 ELMDA5 Lee los datos del elemento  
 GAUSE5 Calcula los parámetros de Gauss  
 INPDA5 Lee los datos de control, asigna los vectores elementales y lee los datos del elemento

INSTR5 Inicializa las variables internas  
 JACOB5 Calcula la matriz jacobiana y las derivadas de las funciones de forma  
 LOADE5 Lee los datos de carga elementales y genera el vector consistente de cargas

LUMAE5 Calcula la masa concentrada  
 MASEL5 Escribe en disco los datos elementales durante un reinicio  
 OUTDE5 Salida de los resultados elementales  
 POINT5 Asigna memoria para los vectores elementales  
 PREDIC5 Cálculo de las tensiones y deformaciones suponiendo comportamiento

elástico lineal  
REL005 Asigna y guarda los valores de las variables RESEP5  
Calcula las tensiones y las fuerzas internas  
SFRE5 Calcula las funciones de forma y sus derivadas  
UPFIN3D Actualiza el tensor elástico de Finger

*Elemento lámina tipo 6*

ASSTR6 Calcula las deformaciones tangenciales en los puntos de deformación tangencial supuesta para el elemento tipo 6  
BMATX6 Calcula la matriz de deformación tangencial para el elemento tipo 6  
BSHEM6 Calcula la matriz tangente de deformación para el elemento 6 en los puntos de deformación tangencial supuesta  
ELEM6 Subrutina principal para el elemento tipo 6  
ELMDA6 Lee los datos elementales para los elementos tipos 6 y 7  
GAUSS6 Calcula los parámetros de Gauss para el elemento tipo 6  
INPDA6 Lee los datos de control, asigna los vectores elementales y lee los datos elementales para el elemento tipo 6  
INTRF6 Calcula deformaciones, tensiones y fuerzas nodales equivalentes para el elemento tipo 6  
ISTGP6 Calcula los esfuerzos en la lámina para material elástico lineal  
J2SSTR Realiza el retorno de las tensiones sobre la superficie de fluencia mediante el algoritmo de retorno mapeado para el elemento lámina  
LCASY6 Crea el sistema de coordenadas locales para el elemento tipo 6  
LOADP6 Lee las cargas elementales y forma el vector consistente de cargas para el elemento tipo 6  
LUMAS6 Calcula la matriz de masa concentrada para elementos de lámina tipo 6 y 7  
MASEL6 Escribe en disco durante un reinicio los datos elementales  
MATPM6 Calcula los parámetros del material para elementos lámina  
OUTDY6 Salida de resultados elementales  
POINT6 Asigna memoria para los vectores elementales para el elemento tipo 6  
QSDEL6 Calcula el incremento de tiempo crítico para elementos de lámina tipo 6 y 7  
REL006 Asigna y almacena los valores de las variables COMMON  
RESVP6 Subrutina de control para calcular deformaciones, tensiones, y fuerzas nodales equivalentes para el elemento tipo 6  
SETGA6 Define algunos parámetros para el elemento tipo 6  
STRAN6 Calcula la primera y segunda formas fundamentales para el elemento tipo 6

*Elemento de lámina tipo 7*

AP1TM7 Calcula las deformaciones tangenciales en los puntos de Gauss a partir a partir de la de los de deformación tangencial

	supuesta para el elemento tipo 7
ASSTR7	Calcula las deformaciones tangenciales en los puntos de deformación tangencial supuesta para el elemento tipo 7
BMATX7	Calcula la matriz de deformación tangente del elemento tipo 7 para las componentes de membrana y flexión
BMMT27	Calcula la parte de membrana de la matriz de deformación tangente para el elemento 7 con la deformación supuesta del modelo 1
BMMT37	Calcula la parte de membrana de la matriz de deformación tangente para el elemento 7 con la deformación supuesta del modelo 2
BSHEM7	Calcula la parte de cortante en la matriz de deformación tangente para el elemento 7 en los puntos de deformación tangencial supuesta
CONCAR	Transforma un tensor del coordenadas convectivas a coordenadas cartesianas y viceversa
ELEMT7	Subrutina principal para el elemento tipo 7
GAUSS7	Calcula los parámetros de los puntos de Gauss para el elemento tipo 7
INPDA7	Lee datos de control, asigna los vectores elementales y lee los datos elementales para el elemento tipo 7
INTEM7	Interpola las deformaciones nodales de membrana para el elemento tipo 7 (para la formulación con deformaciones de membrana supuestas)
INTRF7	Calcula deformaciones, tensiones y fuerzas nodales equivalentes para el elemento tipo 7
J2SSTR *	Ejecuta el algoritmo de retorno mapeado para el elemento de lámina
LOADP7	Lee las cargas del elemento y calcula el vector consistente de cargas para el elemento tipo 7
NODXY7	Interpola las coordenadas de los nodos centrales a partir de los nodos de esquina
POINT7	Asigna memoria para los vectores elementales del elemento tipo 7
QSDELT	Calcula el incremento de tiempo crítico para los elementos tipos 6 y 7
REL007	Asigna y guarda los valores de las variables en un COMMON para el elemento tipo 7
RESVP7	Subrutina de control para calcular deformaciones, tensiones y fuerzas nodales equivalentes para el elemento tipo 7
SETGA7	Datos de constantes para el elemento tipo 7
SHAPE7	Calcula funciones de forma y sus derivadas para el elemento tipo 7
STRAN7	Calcula la primera y segunda formas para el elemento tipo 7

*Elemento de lámina tipo 9*

BMATX9	Calcula la matriz de deformación tangente para los componentes de membrana y flexión
BSHEM9	Calcula la matriz de deformación tangente para la componente de cortante en los puntos de deformación supuesta

ELEMT9 Subrutina principal para el elemento tipo 9  
 ELMDA9 Lee los datos elementales  
 GAUSS9 Evalúa los parámetros en los puntos de Gauss  
 INPDA9 Lee los datos de control, asigna las variables a los vectores y lee los datos de los elementos  
 INTRF9 Calcula deformaciones, tensiones y fuerzas nodales equivalentes  
 LOADP9 Lee las cargas elementales y forma el vector consistente de cargas  
 LUMAS9 Calcula las masas concentradas  
 POINT9 Asigna memoria a los vectores elementales  
 REL009 Asigna y guarda los valores de las variables en un COMMON  
 RESVP9 Subrutina de control para calcular deformaciones, tensiones y fuerzas nodales equivalentes  
 SETGA9 Datos de constantes para el elemento lámina  
 STRAN9 Calcula las distorsiones y la primera y segunda formas fundamentales

*Elemento viga tipo 8*

CUATE8 A partir de una matriz ortogonal extrae el cuaternio (algoritmo de Spurrier) y calcula los vectores naturales de rotación  
 DELTC8 Estima el incremento de tiempo crítico para elementos viga  
 ELEMT8 Subrutina principal para el elemento tipo 8  
 ELMDA8 Lee los datos elementales  
 EXPOT8 Calcula la matriz de rotación a partir del vector de rotación  
 GAUSS8 Evalúa los parámetros de los puntos de Gauss  
 INPDA8 Lee los datos de control, asigna vectores elementales y lee los datos del elemento  
 INTRF8 Calcula deformaciones, tensiones y fuerzas nodales equivalentes  
 ISTG18 Calcula tensiones incrementales  
 LOADP8 Lee las cargas del elemento y evalúa el vector de carga consistente  
 LOCLA8 Lee los datos del sistema local para elementos viga  
 LUMAS8 Calcula las masas concentradas  
 MASEL8 Lee de disco los datos elementales durante un reinicio  
 NODXY8 Interpola las coordenadas de los nodos intermedios  
 OUTDY8 Salida de resultados elementales  
 POINT8 Asigna memoria para los vectores elementales  
 RARE18 Ejecuta el algoritmo de retorno mapeado de acuerdo con el esquema de integración de Euler hacia atrás  
 REL008 Asigna y guarda los valores de las variables en un COMMON  
 RESVP8 Subrutina de control para calcular deformaciones, tensiones y fuerzas nodales equivalentes  
 SETGA8 Valores de algunas constantes para el elemento viga  
 STRAN8 Calcula estimadores de la deformación para el elemento viga



*Subrutinas auxiliares*

PROMA1	Multiplica dos matrices
PROMA2	Multiplica una matriz por la transpuesta de otra
PROMA3	Multiplica una matriz por un vector
PROMA4	Multiplica la transpuesta de una matriz por otra matriz
VECADD	Suma dos vectores
VECAFI	Asigna componentes de un vector a otro vector
VECDIF	Resta dos vectores
VECDOT	Calcula el producto escalar de dos vectores
VECPRO	Calcula el producto vectorial de dos vectores
VECSA	Multiplica un vector por un escalar
VECUNI	Calcula la longitud de un vector y lo normaliza
VEZER	Puesta a cero de un vector

*Subrutinas de contacto - Algoritmo de contacto 1*

ADDRHS	Suma las fuerzas de contacto al vector global de fuerzas de contacto
CELM2D	Subrutina de contacto bidimensional
CELM3D	Subrutina de contacto tridimensional
CELMLIB	Biblioteca de elementos
CELMNT	Subrutina principal de contacto
CLEAR	Puesta a cero de un vector
COMMAS	Asigna valores a las variables COMMON y guarda estas variables en el vector de trabajo
CONTAC	Subrutina principal para el análisis de contacto
CROSS	Calcula el producto vectorial de dos vectores
CSCARD	Lee datos de control de la superficie
CSDAT1	Lee los números de los nodos y las conectividades de los segmentos
CSDATA	Lee los datos de las superficies de contacto para todas las superficies de contacto
CSINP	Entrada y generación de los datos de las superficies de contacto
CSP2D	Ejecuta el algoritmo de búsqueda para un par dado de superficies (principal y asociada) 2D
CSP3DQ	Ejecuta el algoritmo de búsqueda para un par dado de superficies (principal y asociada) 3D si la superficie principal está definida por segmentos de cuatro nodos
CSP3DT	Ejecuta el algoritmo de búsqueda para un par dado de superficies (principal y asociada) 3D si la superficie principal está definida por segmentos de tres nodos
CSPAIR2D	Ejecuta el algoritmo de búsqueda para un par dado de superficies (principal y asociada) 2D
CSPAIR3D	Ejecuta el algoritmo de búsqueda para un par dado de superficies (principal y asociada) 3D

CSPINP	Lee datos de pares de superficies de contacto
CSRCH2D	Ejecuta el algoritmo de búsqueda para superficies 2D
CSRCH3D	Ejecuta el algoritmo de búsqueda para superficies 3D
CSU2D	Subrutina de contacto elemental 2D
CSU3D	Subrutina de contacto elemental 3D
CTO2D	Calcula las fuerzas de contacto para segmentos superficiales 2D de dos nodos en la superficie principal
CTO2D2	Calcula las fuerzas de contacto para elementos de contacto 2D de dos nodos
CTO2D3	Calcula las fuerzas de contacto para elementos de contacto 2D de tres nodos
CTO3D	Calcula las fuerzas de contacto para segmentos superficiales 3D de tres y cuatro nodos en la superficie principal
CTO3D2	Calcula las fuerzas de contacto para elementos de contacto 3D de dos nodos
CTO3D3	Calcula las fuerzas de contacto para elementos de contacto 3D de tres nodos
CTO3D4	Calcula las fuerzas de contacto para elementos de contacto 3D de cuatro nodos
CTO3D5	Calcula las fuerzas de contacto para elementos de contacto 3D de cinco nodos
DCTNRY	Guarda la información del puntero
DOT	Calcula el producto escalar de dos vectores
ECTO2D	Calcula las fuerzas de contacto para un elemento de contacto 2D
ECTO3D	Calcula las fuerzas de contacto para un elemento de contacto 3D
EGRPMP	Punteros de memoria para los direccionamientos de los grupos de elementos
ELCARD	Lee la tarjeta de control para el grupo de elementos
ELEMNT	Subrutina de control para los elementos de contacto
ELMLIB	Subrutina de contacto principal
ELMTASK	Identifica el número de tarea
FORMLM1	Forma la matriz LM para un elemento dado 2D
FORMLM2	Forma la matriz LM para un elemento dado 3D
INIDRIV	Controla el análisis de contacto
MASTDB	Forma el segmento principal de conectividades para cada nodo principal para una superficie de contacto (principal) específica
MPOINT	Calcula las necesidades de memoria en los punteros
NEAREST	busca el nodo principal más cercano utilizando un algoritmo de búsqueda global
PERRAR	Imprime un mensaje de error y para el programa
PRINTC	Imprime información para el elemento de contacto
PROJ2D	Proyecta un nodo asociado en un segmento de dos nodos de una

	superficie principal 2D
PROJ3DQ	Proyecta un nodo asociado en un segmento de cuatro nodos de una superficie principal 3D
PROJ3DT	Proyecta un nodo asociado en un segmento de tres nodos de una superficie principal 3D
PROJQUAD	Proyecta un nodo asociado en un segmento de cuatro nodos de una superficie principal 3D
PRTPAR03	Imprime parámetros elementales para análisis de contacto 2D
PRTPAR04	Imprime parámetros elementales para análisis de contacto 3D

*Subrutinas de contacto - algoritmo 2*

AREACK	Calcula el área de un segmento
CONT3D	Subrutina principal, para el análisis de contacto
COUNTN	Inicializa un vector de nodos principales
COUNTS	Cuenta el número de segmentos que contienen cada nodo de una superficie
CROSS3D	Calcula el producto vectorial de dos vectores
DYNAI	Subrutina principal para entrada de datos de contacto
EXPANDM	Asigna memoria a un vector
FEM3D	Subrutina principal para el algoritmo de contacto en la fase de solución paso a paso
INITIAL	Subrutina de llamada para subrutina de contacto durante la fase de inicialización
INITLZ	Subrutina principal para inicializar el análisis de contacto
MEMORY	Chequea la memoria disponible en el vector de trabajo
NODESM	Crea los vectores con nodos principales y asociados
NSEGMNT	Crea la base de datos de los segmentos que contienen cada nodo de interfase
PTIME	Calcula las componentes de tres vectores y calcula el producto mixto
READSEG	Lee datos de segmentos
SALVEX	Chequea los segmentos conectados a los nodos que rodean al nodo principal más cercano
SAVCOM	Guarda para un reinicio y recupera durante un reinicio los vectores COMMON para subrutinas de contacto
SLAVE0	Inicializa la búsqueda de contacto
SLAVE1	Búsqueda del nodos principal más cercano mediante chequeo del nodo más cercano obtenido en la etapa de tiempo anterior y de los nodos que le rodean
SLAVE2	Proyecta el nodo asociado en el segmento principal y calcula las fuerzas de contacto
SLAVI2	Chequea la penetración de un nodo asociado en un segmento principal en la fase de inicialización. Si ha habido penetración, el nodo se restituye sobre la superficie

SLAVIN	Lee los datos de segmentos e inicializa la base de datos para análisis de contacto
SLLIN	Lee parámetros de control para el contacto
SOLTN	Llamada a la subrutina de contacto durante la etapa de solución paso a paso
SORTND	Ordena un vector en orden ascendente
STEX	Halla la proyección de un nodo asociado en un segmento principal y la penetración



## Capítulo 3

### FORMULACION DE ELEMENTOS SOLIDOS PARA PROBLEMAS DE IMPACTO

Escrito por Carlos García Garino

#### 3.1 INTRODUCCION

En el caso de impacto entre dos o más cuerpos, o bien entre un cuerpo y un obstáculo rígido, como por ejemplo en el choque entre vehículos, es común observar grandes daños en los cuerpos que impactan. En la práctica es necesario cuantificar dichos daños y una de las formas de hacerlo es recurrir a la simulación numérica de estos problemas mediante programas de elementos finitos.

Para ello deben tenerse en cuenta varios aspectos: modelado del comportamiento del material (en general altamente no lineal), inclusión de los efectos de inercia, discretización espacial (tipo y cantidad de elementos finitos que se utilizan), entre otros. Por otra parte resta un problema no menos importante cual es la implementación numérica de estos aspectos.

De todas estas cuestiones, en este apartado nos referimos a la implementación numérica de elementos sólidos 2D/3D capaces de tratar problemas de choques con grandes deformaciones. El material se supondrá que tiene un comportamiento elasto-plástico standard y en este apartado se discuten tanto la discretización espacial (aproximación por elementos finitos), cuanto la implementación numérica del modelo del material o ecuación constitutiva utilizada.

### 3.2 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

El equilibrio dinámico de un cuerpo en movimiento puede describirse mediante el Principio de los Trabajos Virtuales:

$$\int_{\Omega} [\delta \epsilon]^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} [\delta \mathbf{u}]^T [\mathbf{b} - \rho_n \ddot{\mathbf{u}} - c_n \dot{\mathbf{u}}] d\Omega - \int_{\Gamma_t} [\delta \mathbf{u}]^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (3.1)$$

donde  $\epsilon$  son las deformaciones,  $\sigma$  son las tensiones,  $\delta \mathbf{u}$  son los desplazamientos virtuales,  $\mathbf{b}$  es el vector de fuerzas de volumen,  $\mathbf{t}_n$  es el vector de tracciones en el contorno,  $\rho$  es la densidad del sólido, y  $c$  es el parámetro de amortiguamiento. Como es usual  $\dot{\mathbf{u}}$  y  $\ddot{\mathbf{u}}$  son las velocidades y aceleraciones del sólido respectivamente. Para la implementación en un programa de elementos finitos estas ecuaciones deben reescribirse en forma discreta, y para ello a continuación se discute la discretización por elementos finitos o *discretización espacial*.

### 3.3 DISCRETIZACION ESPACIAL

La discretización por elementos finitos se basa en aproximar el campo de desplazamientos del sólido (exacto), en función de los desplazamientos nodales (discretos). Para cada elemento finito se verifican las siguientes relaciones:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m N_i [\mathbf{a}_i] \quad (3.2a)$$

$$\delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^m N_i [\delta \mathbf{a}_i] \quad (3.2b)$$

$$\delta \epsilon = \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i [\delta \mathbf{a}_i] \quad (3.2c)$$

donde  $\mathbf{a}$  es el vector de desplazamientos nodales,  $\delta \mathbf{a}$  es el vector de los desplazamientos virtuales nodales, y  $\delta \epsilon$  es el vector de deformaciones virtuales. El número total de nodos es  $m$ .

En el caso de elementos 2D, utilizados en el caso de deformación plana y/o simetría de revolución, se emplean elementos cuadriláteros de cuatro nodos como se observa en la Figura 3.1.

Para este elemento las funciones de forma resultan en coordenadas naturales según Oñate [6]:

$$N_i(\xi, \eta) = l_i^x(\xi) l_j^y(\eta) \quad (3.3)$$

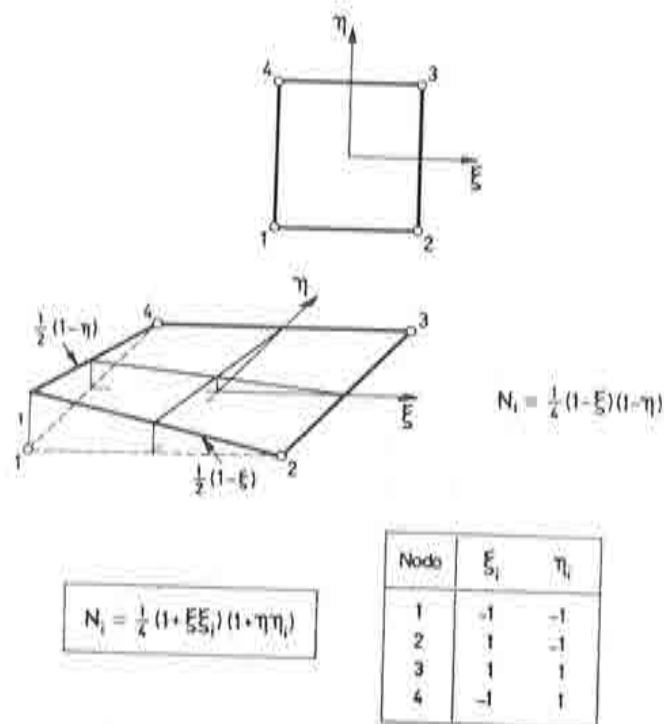


Figura 3.1 Elemento rectangular de 4 nodos

Para el cuadrilátero lineal, para un nodo  $i$ , los polinomios de Lagrange unidimensionales en cada dirección  $\xi$  y  $\eta$  resultan:

$$l_1^i(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi \xi_i) ; \quad l_1^i(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta \eta_i) \quad (3.4)$$

donde  $\xi_i$  y  $\eta_i$  toman los valores de la tabla de la Figura 3.1. Por consiguiente, la función de forma del nodo  $i$  es

$$N_i(\xi, \eta) = l_1^i(\xi) l_1^i(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i) \quad (3.5)$$

En el caso de elementos 3D, se emplean elementos hexahédricos de ocho nodos como se observa en la Figura 3.2:

Los elementos hexaédricos rectos Lagrangianos en tres dimensiones son análogos a los rectangulares Lagrangianos analizados anteriormente. Por consiguiente, sus funciones de forma se obtienen como producto de tres polinomios de Lagrange en las tres coordenadas naturales  $\xi, \eta, \zeta$ . Así,



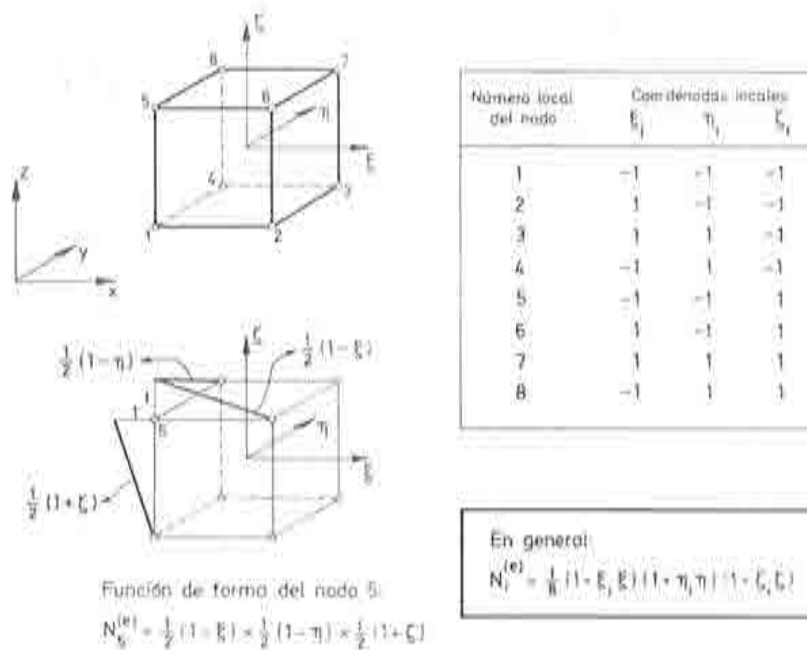


Figura 3.2 Elemento hexaédrico de 8 nodos

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = l_i^{\xi}(\xi) l_i^{\eta}(\eta) l_i^{\zeta}(\zeta) \quad (3.6)$$

En el programa se emplea el elemento hexaédrico recto más sencillo, común a las familias Lagrangianas y Serendípitas de clase  $C_0$ , de 8 nodos, que se muestra en la Figura 3.2. Para este elemento las funciones de forma resultan (polinomios lineales):

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta) \quad (3.7)$$

La expresión de la matriz  $B$  puede consultarse en el texto de Oñate [6].

### 3.4 FORMA DISCRETA DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

Teniendo en cuenta las ecuaciones 3.1 y 3.2 la expresión continua del principio de trabajos virtuales se reescribe como:

$$[p_i] - [f_{Bi}] + [f_{Ii}] + [f_{Di}] - [f_{Ti}] = 0 \quad (3.8)$$

donde resultan:

- fuerzas interiores:  $[p_i]_n = \int_{\Omega} [B_i]^T \sigma_n d\Omega$
- fuerzas de volumen  $[f_{Bi}]_n = \int_{\Omega} [N_i]^T b_n d\Omega$
- fuerzas inercia:  $[f_{Ii}^{(e)}] = \sum_{j=1}^r [M_{ij}^{(e)}] [\ddot{a}_j^{(e)}]$
- fuerzas de amortiguamiento  $[f_{Di}^{(e)}] = \sum_{j=1}^r [C_{ij}^{(e)}] [\dot{a}_j^{(e)}]$
- fuerzas de contorno  $[f_{Ti}^{(e)}] = \int_{\Gamma_i^{(e)}} [N_i^{(e)}]^T t^{(e)} d\Gamma$

donde  $M_{ij}^{(e)}$  es la matriz de masa del elemento y viene definida por:

$$[M_{ij}^{(e)}] = \int_{\Omega} [N_i]^T \rho [N_i, N_2, \dots, N_m] d\Omega \quad (3.9)$$

A su vez la matriz de amortiguamiento elemental  $C_{ij}^{(e)}$  queda definida por:

$$[C_{ij}^{(e)}] = \int_{\Omega} [N_i]^T c [N_i, N_2, \dots, N_m] d\Omega \quad (3.10)$$

donde  $\rho$  es la densidad del sólido,  $c$  es el parámetro de amortiguamiento y  $d\Omega^e$  es el diferencial de volumen discretizado del sólido expresado mediante

$$d\Omega^{(e)} = h^{(e)} \det J^{(e)} d\xi d\eta$$

donde  $J^{(e)}$  es el determinante de la transformación isoparamétrica,  $d\xi$  y  $d\eta$  los diferenciales en coordenadas naturales y  $h^{(e)}$  depende de la regla de integración utilizada y del tipo de elemento empleado.

Las matrices elementales se ensamblan para obtener las siguientes ecuaciones globales, que expresan las ecuaciones del movimiento en forma discreta:

$$M\ddot{a} + C\dot{a} = p(a) - f \quad (3.11)$$

donde  $M$  y  $C$  son las matrices globales de masa y amortiguamiento respectivamente. Los vectores  $\ddot{a}$ ,  $\dot{a}$  y  $a$  son las aceleraciones, velocidades y desplazamientos nodales respectivamente. La contribución de las fuerzas nodales se ensambla el vector de fuerzas internas  $p(a)$ , y las fuerzas externas en el vector  $f$ .

En la práctica es usual despreciar el amortiguamiento y aproximar la matriz de masa mediante una matriz diagonal [7]. De esta forma las ecuaciones del movimiento resultan:

$$p(\mathbf{a}) - M\ddot{\mathbf{a}} - \mathbf{f} = 0 \quad (3.12)$$

Esta ecuación no lineal se resuelve mediante un esquema explícito en diferencias centrales como se indica en el apartado siguiente

### 3.5 INTEGRACION EXPLICITA EN EL TIEMPO

En este apartado se detalla el método empleado para integrar las ecuaciones del movimiento, expresadas por la ecuación (3.12) del punto anterior

$$M\ddot{\mathbf{a}} = \mathbf{f} - p(\mathbf{a}) \quad (3.13)$$

Para ello, en el contexto de un código explícito, se emplea el algoritmo de diferencias centrales [8]. Este algoritmo supone conocidos los desplazamientos  $\mathbf{a}$  en el instante  $t_n$  y velocidades  $\dot{\mathbf{a}}$  en  $t_{n-1/2}$ , así como las fuerzas internas  $p(\mathbf{a})$  y las externas  $\mathbf{f}$ . Luego se resuelven los siguientes pasos:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{a}} &= \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{f} - p(\mathbf{a})] \\ \dot{\mathbf{a}}^{n+1/2} &= \dot{\mathbf{a}}^{n-1/2} + \ddot{\mathbf{a}}^n \Delta t^n \\ \mathbf{a}^{n+1} &= \mathbf{a}^n + \dot{\mathbf{a}}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} \\ \Delta t^{n+1/2} &= \frac{1}{2}(\Delta t^n + \Delta t^{n+1}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde  $\Delta t^n$  y  $\Delta t^{n+1}$  son dos intervalos de tiempo sucesivos, entre los instantes  $t^{n-1}$  y  $t^n$  y  $t^n$  y  $t^{n+1}$ , respectivamente.

### 3.6 CALCULO DE LAS TENSIONES

Una vez integrada la ecuación del movimiento (ecuación 3.12), tarea que se realiza en la rutina EXPLIT, se conocen los desplazamientos nodales  $\mathbf{a}$ , y mediante las funciones de forma se pueden calcular los desplazamientos (discretos) en los puntos de gauss que denominaremos  $\mathbf{u}$ . En base a estos desplazamientos es que procede a implementar numericamente el modelo de material, tarea que se realiza a nivel de cada punto de gauss, en las rutinas PREDIC Y CORREC, que se llaman desde la subrutina RESEL4.

### 3.7 DESCOMPOSICION DEL PROBLEMA ELASTO- PLASTICO

Dada una configuración conocida  ${}^t\Omega$ , definida por el tensor gradiente de la deformación  ${}^tF$ , y las variables  ${}^te^e$  y  ${}^tq$ . Ante un incremento de desplazamientos  $\Delta u$  que definen el tensor gradiente de deformación incremental  $F_u = (I + \text{Grad } u)$  resulta una configuración deformada  ${}^{t+\Delta t}\Omega$ , que se caracteriza mediante el tensor gradiente de la deformación  ${}^{t+\Delta t}F = F_u {}^tF$ . El problema consiste en actualizar las variables del problemas, verificando el modelo constitutivo, para la nueva configuración  ${}^{t+\Delta t}\Omega$ . Para ello se emplea un algoritmo predictor corrector como se muestra en la Tabla 3.1 [9]:

Tabla 3.1: Descomposición del problema elastoplástico

Problema Básico	=	Predictor Elástico	+	Corrector Plástico
$L_v(e) = d$	=	$L_v(e) = d$	+	$L_v(e) = 0$
$L_v(e^p) = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma}$	=	$L_v(e^p) = 0$	+	$L_v(e^p) = d^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma}$
$L_v(q) = \dot{\lambda} H \frac{\partial f}{\partial \sigma}$	=	$L_v(q) = 0$	+	$L_v(q) = \dot{\lambda} H \frac{\partial f}{\partial \sigma}$

### 3.8 PREDICTOR ELASTICO

Para este problema las variables plásticas no cambian ( ${}^{t+\Delta t}F^p{}^{TR} = {}^tF^p$ ). La componente elástica (*predictora*) del tensor gradiente de la deformación se calcula mediante:

$${}^{t+\Delta t}F^e{}^{TR} = {}^{t+\Delta t}F ({}^{t+\Delta t}F^p{}^{TR})^{-1} = F_u {}^tF ({}^tF^p)^{-1} = F_u {}^tF^e \quad (3.15)$$

El predictor del tensor elástico de Finger  ${}^{t+\Delta t}b^{e-1}{}^{TR}$  resulta:

$${}^{t+\Delta t}b^{e-1}{}^{TR} = {}^{t+\Delta t}F^{e-T} {}^{t+\Delta t}F^{e-1} = F_u^{-T} {}^tb^{e-1} F_u^{-1} \quad (3.16)$$

Luego las tensiones predictoras  $\sigma^{TR}$  se calculan en función del predictor del tensor elástico de Almansi  ${}^{t+\Delta t}e^e{}^{TR} = \frac{1}{2}({}^{t+\Delta t}g - {}^{t+\Delta t}b^{e-1}{}^{TR})$ .

Es importante destacar que el problema elástico se basa en el cálculo de una expresión exacta (definición del tensor de Almansi), con lo que se evitan costosas integraciones numéricas típicas de los modelos hipoeelásticos.

### 3.9 PROBLEMA PLASTICO

En este caso la configuración deformada permanece fija y las variables internas se actualizan para satisfacer la ecuación constitutiva. Para este problema Simo [10] ha propuesto integrar el flujo plástico en la configuración original:

$$\dot{C}^p = 2 \phi^* d^p = 2 \dot{\lambda} \phi^* \mathbf{n} = 2 \dot{\lambda} N \quad (3.17)$$

donde  $\phi^*$  indica el operador pull-back [11] y  $\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ . Integrando la ecuación (3.17) mediante un esquema de Euler implícito resulta:

$${}^{t+\Delta t}C^p - {}^tC^p = 2 \lambda^{t+\Delta t} N \quad (3.18)$$

Calculando el push-forward de esta expresión se obtiene [12]:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1TR} + 2 \lambda^{t+\Delta t} \mathbf{n} \quad (3.19)$$

El factor  $2 \lambda^{t+\Delta t} \mathbf{n}$  se obtiene mediante el uso del algoritmo de retorno radial.

En las referencias [ 12 ] y [ 34 ] pueden encontrarse más detalles sobre la implementación computacional del algoritmo anterior.

## Capítulo 4

### ANALISIS DINAMICO DE LAMINAS

Escrito por Fernando Flores y Eugenio Oñate

#### 4.1 INTRODUCCION

En este capítulo se presenta un resumen de la teoría de láminas utilizada que se basa esencialmente en el trabajo desarrollado por Simo y colaboradores [15-19, 25-28]. Luego se presentan un elemento cuadrilátero y cuatro elementos triangulares adecuados para el análisis no lineal geométrico y material de láminas en régimen dinámico. Se propone también un criterio de fluencia en esfuerzos generalizados. Se muestran algunos ejemplos del comportamiento de los elementos y la teoría subyacente, incluyendo problemas de contacto entre cuerpos deformables.

El objetivo es presentar la formulación desarrollada para el análisis dinámico de láminas. Se han utilizado formulaciones que permiten modelar grandes desplazamientos y grandes rotaciones de forma tal que las deformaciones (y esfuerzos) sean independientes de traslaciones y giros de cuerpo rígido. Esta objetividad de las formulaciones es indispensable para el tratamiento del tipo de problemas que se quiere estudiar, que se refieren principalmente a modelizaciones de impacto entre diferentes elementos estructurales, lo que conduce a grandes deformaciones y comportamiento anelástico del material.

La formulación de láminas utilizada se enmarca dentro de las aproximaciones clásicas en cuanto a que se trabaja con esfuerzos y momentos integrados en el espesor o la sección transversal, en contraste con aproximaciones del tipo de "sólido degenerado". De tal forma que se trabaja con magnitudes sobre la superficie media de la lámina, sin necesidad de utilizar costosas integraciones numéricas en el espesor o la sección transversal. Esto último, por otra parte representa una limitación en cuanto a la generalidad del tipo de relaciones constitutivas que se pueden considerar. En ambos casos se consideran deformaciones de corte transversal, para lo cual se parametriza en forma independiente la posición de la superficie media y el campo director en las láminas, y la línea de centroides y la terna local en las vigas. La formulación de elementos finitos requiere entonces de elementos con continuidad  $C^0$ .

La discretización numérica de las ecuaciones a resolver se realiza usando el método de elementos finitos en lo que se refiere a la parte espacial. El avance en el tiempo se realiza mediante un esquema el tipo explícito para lo cual se usa una aproximación en diferencias centrales y matriz de masa diagonalizada. El código de ordenador desarrollado a tal efecto (SIMPACT) dispone además de elementos exahédricos para la discretización de elementos estructurales continuos y de rutinas para contacto tridimensional usando el método de penalización.

Un bosquejo del resto de este trabajo es el siguiente: en los apartados 4.2 y 4.3 se resumen los elementos esenciales de las teorías de láminas y vigas en que se basan los elementos finitos que se presentan en las secciones 4.4 y 4.5. En el apartado 4.6 se explica qué tipo de aproximación se ha utilizado para compatibilizar la unión entre distintos tipos de elementos. En la sección 4.7 se presentan algunos ejemplos numéricos con objeto de comparar con resultados existentes en la literatura. Finalmente en el apartado 4.8 se agrupan algunas conclusiones de este trabajo.

## 4.2 TEORIA DE LAMINAS UTILIZADA

La aproximación al comportamiento de láminas utilizada se inscribe dentro de las teorías de láminas (en contraste con la denominada aproximación de sólido degenerado [14]), en cuanto a que está formulada en términos de deformaciones generalizadas y esfuerzos. En los apartados siguientes se presenta un resumen de los conceptos esenciales de la formulación, para más detalles se recomienda consultar las referencias [15-19].

### 4.2.1 Descripción cinemática de la lámina

Cualquier configuración de la lámina en  $\mathbb{R}^3$  queda definida en términos de:

- i) Superficie media de la lámina, definida por una transformación  $\varphi : \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{R}^3$

ii) El campo director, definido por la transformación  $\mathbf{t} : \bar{\mathcal{A}} \rightarrow S^2$ .

Dicho campo define en cada punto de la superficie media la dirección de la fibra que se mantiene recta independientemente de la deformación (la normal a la superficie media en las teorías de láminas clásicas).

El dominio  $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathbb{R}^2$  se supone compacto con contorno suave  $\partial\mathcal{A}$  y puntos caracterizados por  $(\xi^1, \xi^2) \in \bar{\mathcal{A}}$ . Llamaremos  $\partial\varphi\mathcal{A} \subset \partial\mathcal{A}$  y  $\partial\mathbf{t}\mathcal{A} \subset \partial\mathcal{A}$  las partes de  $\partial\mathcal{A}$  donde están prescritos  $\varphi$  y  $\mathbf{t}$  respectivamente.  $S^2$  es la esfera de radio unitario y el hecho de que  $\mathbf{t}$  pertenezca a ella implica la inextensibilidad del campo director.

Con esta notación, usando una hipótesis de Kirchhoff generalizada, toda configuración de la lámina se describe por

$$S := \{x \in \mathbb{R}^3 / x = \varphi + \xi \mathbf{t} \quad , \quad \xi \in [h^-, h^+]\} \quad (4.1)$$

donde  $[h^-, h^+]$  define el espesor de la lámina. Agregaremos un supraíndice '0' a las variables geométricas asociadas con la configuración de referencia  $S^0$ .

Usando una base estándar  $\{e_1, e_2, e_3\}$  en  $\mathbb{R}^3$  podemos escribir

$$\varphi = \varphi^i e_i \quad \varphi'_{\alpha} = \varphi'_{\alpha} e_i \quad \mathbf{t} = t^i e_i \quad (4.2)$$

donde hemos introducido la notación  $(\cdot)'_{\alpha} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi^{\alpha}}$ .

Las medidas de la superficie media en las configuraciones original y actual son respectivamente

$$d\mu^0 = \bar{j}^0 d\xi^1 d\xi^2 \quad d\mu = \bar{j} d\xi^1 d\xi^2 \quad (4.3)$$

con

$$\bar{j}^0 = (\varphi'_{i_1}{}^0 \times \varphi'_{i_2}{}^0) \cdot \mathbf{t}^0 \quad \bar{j} = (\varphi'_{i_1} \times \varphi'_{i_2}) \cdot \mathbf{t} \quad (4.4)$$

también definiremos

$$\bar{J} = \bar{j} / \bar{j}^0 \quad (4.5)$$

Tanto en la superficie media deformada como en la indeformada es posible definir un sistema coordenado convectivo de la forma

$$\{\varphi'_{\alpha}, \mathbf{t}\} \equiv \{\mathbf{a}_{\alpha}, \mathbf{a}_3\} \quad \text{y} \quad \{\varphi'_{\alpha}{}^0, \mathbf{t}^0\} \equiv \{\mathbf{a}_{\alpha}{}^0, \mathbf{a}_3{}^0\}$$

El gradiente de deformación relativo (para  $\xi = 0$ ) en  $x^0 = \varphi(\xi_1, \xi_2)$  es una aplicación lineal



$$\tilde{F} := a_\alpha \otimes a^{0\alpha} + t \otimes a^{03} \equiv a_i \otimes a^{0i} \quad (4.6)$$

$$\tilde{F} = \nabla\Phi(\nabla\Phi_0)^{-1} \quad (4.7)$$

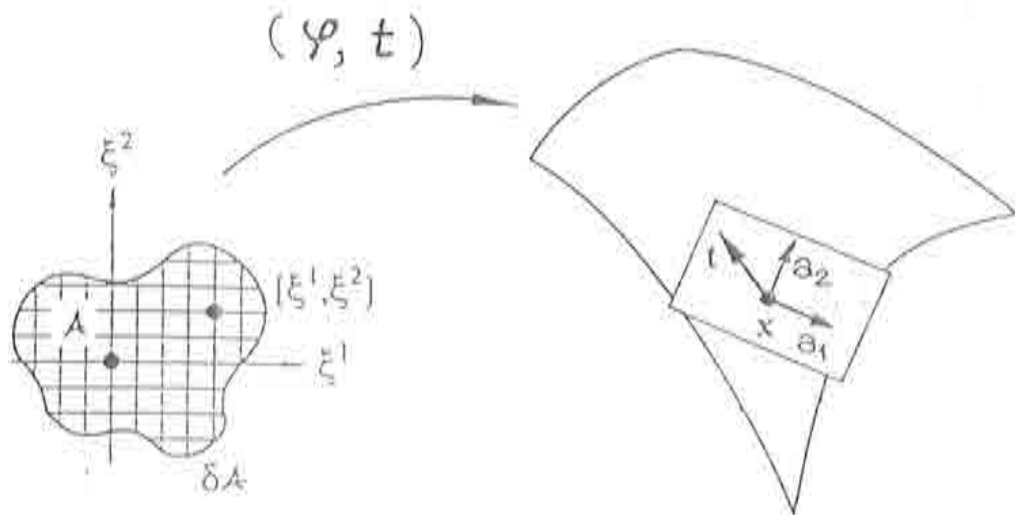


Figura 4.1 Cinemática de la lámina

En la configuración presente podemos definir los tensores que definen la métrica del sistema:

- a) 1ra. forma fundamental

$$a_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot a_\beta \quad (4.8)$$

- b) ángulo entre el campo director y la superficie media

$$\gamma_\alpha = \varphi'_\alpha \cdot t \quad (4.9)$$

- c) pseudo 2da. forma fundamental

$$\kappa_{\alpha\beta} = \varphi'_\alpha \cdot t_{,\beta} \quad (4.10)$$

Usando idénticas definiciones para la configuración de referencia  $S^0$  podemos definir medidas de deformación Lagrangianas generalizadas, que en forma matricial son

a) deformaciones de la superficie media

$$\varepsilon(\Phi) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} - a_{11}^0 \\ a_{22} - a_{22}^0 \\ 2(a_{12} - a_{12}^0) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

b) deformaciones de corte transversal

$$\delta(\Phi) = \begin{bmatrix} \gamma_1 - \gamma_1^0 \\ \gamma_2 - \gamma_2^0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

c) cambios de curvatura de la superficie media

$$\chi(\Phi) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \kappa_{11} - \kappa_{11}^0 \\ \kappa_{22} - \kappa_{22}^0 \\ 2(\kappa_{12} - \kappa_{12}^0) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

#### 4.2.2 Variaciones admisibles

Sea

$$\mathcal{C} := \{\Phi := (\varphi, \mathbf{t}) : \mathcal{A} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2\} \quad (4.14)$$

el espacio de transformaciones y  $\Phi \in \mathcal{C}$  la configuración presente. Supongamos además que  $\varepsilon \longrightarrow \Phi_\varepsilon \in \mathcal{C}$  sea la curva de configuraciones con origen en  $\Phi$ , esto es  $\Phi_\varepsilon|_{\varepsilon=0} = \Phi$ . Por definición el campo tangente a una curva de este tipo en  $\varepsilon = 0$  se denomina una variación admisible. Así,

$$T_\Phi \mathcal{C} = \{\delta\Phi := (\delta\varphi, \delta\mathbf{t}) : \dot{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times T_t S^2 / \delta\varphi|_{\delta\varphi\mathcal{A}} = 0 \text{ y } \delta\mathbf{t}|_{\delta\mathbf{t}\mathcal{A}} = 0\} \quad (4.15)$$

donde

$$T_t S^2 := \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{w} \cdot \mathbf{t} = 0\} \quad (4.16)$$

es el espacio tangente a  $S^2$ . Debido a esta última condición  $\delta\mathbf{t}$  puede reescribirse como

$$\begin{matrix} \delta \mathbf{t} \\ (3 \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} \bar{\Lambda} \\ (3 \times 2) \end{matrix} \begin{matrix} \delta T \\ (2 \times 1) \end{matrix} \quad (4.17)$$

Siendo  $\Lambda_{3 \times 3}$  la matriz ortogonal que transforma el vector  $\mathbf{e}_3$  del sistema coordenado global a la posición actual de  $\mathbf{t}$  y  $\bar{\Lambda}_{3 \times 2}$  es las dos primeras columnas de  $\Lambda$ . Resulta de mucha utilidad definir

$$\delta \mathbf{t} = \delta \theta \times \mathbf{t} \quad (4.18)$$

cumpliéndose

$$\delta \theta \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (4.19)$$

### 4.2.3 Definición de esfuerzos

El problema tridimensional se reduce a uno bidimensional en la forma usual de la teoría de láminas, esto se logra integrando las tensiones en el espesor y definiendo esfuerzos resultantes a lo largo de las líneas coordenadas de la superficie media. Estos esfuerzos se pueden escribir en términos de medidas de tensión referidas a la configuración deformada o a la de referencia

$$\mathbf{n}^\alpha = \frac{1}{j} \int_{h^-}^{h^+} \sigma \mathbf{g}^\alpha j d\xi = \frac{1}{j} \int_{h^-}^{h^+} P \mathbf{g}_0^\alpha j^0 d\xi \quad (4.20)$$

$$\mathbf{m}^\alpha = \mathbf{t} \times \frac{1}{j} \int_{h^-}^{h^+} \xi \sigma \mathbf{g}^\alpha j d\xi = \mathbf{t} \times \frac{1}{j} \int_{h^-}^{h^+} \xi P \mathbf{g}_0^\alpha j^0 d\xi = \mathbf{t} \times \bar{\mathbf{m}}^\alpha \quad (4.21)$$

$$\mathbf{t} = \frac{1}{j} \int_{h^-}^{h^+} \sigma \mathbf{g}^3 j d\xi = \frac{1}{j} \int_{h^-}^{h^+} P \mathbf{g}_0^3 j^0 d\xi \quad (4.22)$$

donde  $P$  y  $\sigma$  son los tensores de tensiones de Cauchy y primero de Piola-Kirchhoff respectivamente y  $\mathbf{g}^i = \nabla \Phi^{-T} \mathbf{e}^i$ . Por otra parte  $\mathbf{n}^\alpha$  y  $\mathbf{m}^\alpha$  se definen como los esfuerzos y momentos resultantes a lo largo de una línea como  $\xi^\alpha$  constante y  $\mathbf{t}$  es el esfuerzo resultante a través del espesor. Finalmente  $\bar{\mathbf{m}}^\alpha$  es una definición conveniente que denominaremos momento director. Expresando

$$t_{i\alpha} = \lambda_{\alpha\mu}^\mu \varphi_{i\mu} + \lambda^3 t \quad (4.23)$$

podemos definir los esfuerzos resultantes 'efectivos' como:

$$\bar{n}^{\beta\alpha} := n^{\beta\alpha} - \lambda_{\mu}^{\beta} \bar{m}^{\alpha\mu} \quad (4.24)$$

$$\bar{q}^{\alpha} := q^{\alpha} - \lambda_{\mu}^3 \bar{m}^{\alpha\mu} \quad (4.25)$$

#### 4.2.4 Ecuaciones constitutivas locales

La potencia desarrollada por las tensiones en la teoría tridimensional se expresa en la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &:= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV \\ &= \int_{\mathcal{A}} [\mathbf{n}^{\alpha} \cdot \dot{\varphi}'_{\alpha} + \bar{\mathbf{m}}^{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{t}}_{\alpha} + \mathbf{l} \cdot \dot{\mathbf{t}}] d\mu \\ &= \int_{\mathcal{A}} \left[ \bar{n}^{\beta\alpha} \frac{1}{2} \dot{a}_{\beta\alpha} + \bar{q}^{\alpha} \dot{\gamma}_{\alpha} + \bar{m}^{\alpha\beta} \dot{\kappa}_{\beta\alpha} \right] d\mu \\ &= \int_{\mathcal{A}} [\bar{\mathbf{n}} : L_u \varepsilon + \bar{q} : L_u \delta + \bar{\mathbf{m}} : L_u \chi] d\mu \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde hemos introducido consecutivamente, la integración en el espesor de la lámina y con ella los esfuerzos resultantes, la definición de la métrica y los esfuerzos efectivos, y finalmente las derivadas respecto del tiempo de las medidas de deformación.

Definiendo una función de energía interna  $\psi$  y usando la desigualdad de Clausius-Duhem en la forma usual se obtiene

$$\bar{n}^{\beta\alpha} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{\beta\alpha}} \quad \bar{q}^{\alpha} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \delta_{\alpha}} \quad \bar{m}^{\beta\alpha} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \chi_{\beta\alpha}} \quad (4.27)$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{j} \int_{h^-}^{h^+} \rho j d\xi \quad (4.28)$$

a partir de la cual queda claro el por qué de la definición de los esfuerzos efectivos que resultan conjugados de las medidas de deformación Lagrangiana.

##### 4.2.4.1 Respuesta tensional hiperelástica

Por razones de simplicidad, supondremos una respuesta hiperelástica lineal del material, de tal forma que las ecuaciones constitutivas resultan

$$\bar{J}\bar{n}^{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} H^{\alpha\beta\gamma\delta} (\varepsilon_{\gamma\delta} - \varepsilon_{\gamma\delta}^p) \quad (4.29a)$$

$$\bar{J}\bar{q}^\alpha = Gh\kappa a^{(0)\alpha\beta} (\delta_\beta - \delta_\beta^p) \quad (4.29b)$$

$$\bar{J}\bar{m}^{\alpha\beta} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} H^{\alpha\beta\gamma\delta} (\chi_{\gamma\delta} - \chi_{\gamma\delta}^p) \quad (4.29c)$$

donde  $h = h^+ - h^-$  es el espesor de la lámina,  $E$  y  $G$  son los módulos elásticos longitudinal y de corte respectivamente,  $\nu$  es la relación de Poisson,  $\kappa = \frac{5}{6}$  y  $H^{\alpha\beta\gamma\delta}$  está dado por

$$H^{\alpha\beta\gamma\delta} = \nu a^{(0)\alpha\beta} a^{(0)\gamma\delta} + \frac{1}{2}(1-\nu) [a^{(0)\alpha\gamma} a^{(0)\beta\delta} + a^{(0)\beta\gamma} a^{(0)\alpha\delta}] \quad (4.30)$$

En (4.29) hemos supuesto descomposición aditiva del tensor de deformaciones en una parte elástica (que denotaremos con un índice  $e$ ) y una parte plástica (índice  $p$ ).

Para el caso de un sistema cartesiano local el tensor métrico covariante en la geometría inicial  $a_{ij}^{(0)} = \varphi_{\xi_i}^0 - \varphi_{\xi_j}^0$  es la identidad e igualmente  $a^{(0)\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$  entonces el tensor de cuarto orden  $H^{\alpha\beta\gamma\delta}$  resulta muy sencillo y permite escribir la expresión (4.29a) matricialmente en la forma

$$\bar{J}\bar{n} = \begin{bmatrix} \bar{n}^{11} \\ \bar{n}^{22} \\ \bar{n}^{33} \end{bmatrix} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^e \\ \varepsilon_{22}^e \\ 2\varepsilon_{12}^e \end{bmatrix} = C\varepsilon^e \quad (4.31)$$

#### 4.2.4.2 Condición de fluencia, regla de flujo y ley de endurecimiento

Se utiliza el modelo de plasticidad propuesto en la referencia [5] que está expresado en términos de los esfuerzos resultantes  $\tau$ . El modelo es equivalente al de von Mises (basado en la energía de corte), admite endurecimiento isotrópico y cinemático (ambos lineales) y la ley de flujo es asociada. La superficie de fluencia está formada por dos superficies suaves definidas por:

$$\Phi_\mu(\tau - p) = f_\mu(\tau - p) - \frac{\kappa^2(\varepsilon^p)}{\kappa_0^2} \leq 0 \quad \mu = 1, 2 \quad (4.32)$$

donde  $f_\mu$  es la energía de distorsión (por unidad de superficie de la lámina) normalizada respecto a  $\frac{2}{3}\kappa_0^2 h$  y puede escribirse como

$$f_\mu = (\mathbf{r} - \mathbf{p})^T A_\mu (\mathbf{r} - \mathbf{p}) \quad (4.33)$$

siendo  $\kappa$  la tensión de fluencia uniaxial,  $e^p$  la deformación plástica efectiva,  $\mathbf{p}$  la tensión de retorno y

$$\mathbf{r} = J[\bar{n}^{11}, \bar{n}^{22}, \bar{n}^{12}, \bar{m}^{11}, \bar{m}^{22}, \bar{m}^{12}, \bar{q}^1, \bar{q}^2]$$

$$A_\mu = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_0^2} \mathbf{P} & \frac{\text{sign}(\mu)}{2\sqrt{3}n_0 m_0} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \frac{\text{sign}(\mu)}{2\sqrt{3}n_0 m_0} \mathbf{P} & \frac{1}{m_0^2} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{q_0^2} \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

donde

$$\text{sign}(\mu) = \begin{cases} 1 & \mu = 1 \\ -1 & \mu = 2 \end{cases} \quad n_0 = \kappa_0 h \quad m_0 = \frac{\kappa_0 h^2}{4} \quad q_0 = \frac{\kappa_0 h}{\sqrt{3}} \quad (4.35)$$

Para la integración de la ecuación constitutiva se utiliza el algoritmo de retorno radial que en el caso más general conduce a un sistema no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas que debe resolverse en forma iterativa. los detalles del mismo pueden verse en la referencia [18].

#### 4.2.5 Formulación débil. Principio de trabajos virtuales

A partir de la hipótesis cinemática básica y usando las definiciones de esfuerzos y momentos resultantes, las ecuaciones de equilibrio espacial derivadas de las ecuaciones generales de equilibrio de un sólido tridimensional son (ver Apéndice de la referencia [15])

$$\frac{1}{J} (\bar{j} \mathbf{n}^\alpha)_{,\alpha} + \bar{\mathbf{n}} = \bar{\rho} \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \quad (4.36)$$

$$\frac{1}{J} (\bar{j} \mathbf{m}^\alpha)_{,\alpha} + \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha} \times \mathbf{n}^\alpha + \bar{\mathbf{m}} = I_\rho \dot{\boldsymbol{\omega}}^T \quad (4.37)$$

donde  $\bar{\mathbf{n}}$  y  $\bar{\mathbf{m}}$  son la fuerza aplicada y el momento resultante aplicado por unidad de superficie

$$\bar{\mathbf{n}} = \frac{1}{j} \left[ j \sigma g^3 \Big|_{\xi=h^-}^{\xi=h^+} + \int_{h^-}^{h^+} j \rho B d\xi \right] \quad (4.38)$$

$$\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{j} \mathbf{t} \times \left[ \xi j \sigma g^3 \Big|_{\xi=h^-}^{\xi=h^+} + \int_{h^-}^{h^+} \xi j \rho B d\xi \right] \quad (4.39)$$

con  $B$  la fuerza másica,  $I_p$  es el momento de inercia de la sección por unidad de longitud respecto a la superficie media y  $\dot{\mathbf{w}}$  es la derivada temporal del vector velocidad del campo director  $\mathbf{t}$  definido por

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \dot{\mathbf{t}} = \mathbf{w} \times \mathbf{t} \quad \text{o} \quad \mathbf{w} = \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{t}} \quad (4.40)$$

Multiplicando las ecuaciones de equilibrio por las variaciones admisibles, integrando por partes en el área, usando las definiciones de los esfuerzos efectivos y de sus deformaciones conjugadas se llega a (ver referencia [15])

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{A}} \left[ \bar{n}^{\alpha\beta} \rho \varepsilon_{\alpha\beta} + \bar{m}^{\alpha\beta} \delta \chi_{\alpha\beta} + \bar{q}^{\alpha} \delta \gamma_{\alpha} \right] dA = \\ & = \int_{\mathcal{A}} [\bar{\mathbf{n}} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} + (\bar{\mathbf{m}} \times \mathbf{t}) \cdot \delta \mathbf{t}] dA + \int_{\partial_n \mathcal{A}} \bar{\mathbf{n}} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_j ds + \\ & + \int_{\partial_m \mathcal{A}} \bar{\mathbf{m}} \cdot \delta \mathbf{t}_j ds + \int_{\mathcal{A}} [\bar{\rho} \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} + I_p \dot{\mathbf{w}} \cdot \delta \mathbf{t}] dA \end{aligned} \quad (4.41)$$

En la cual  $\bar{\mathbf{n}}$  y  $\bar{\mathbf{m}}$  son la fuerza y el momento prescritos sobre el contorno de la superficie media de la lámina.

$$\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{n}^{\alpha} \nu_{\alpha} \quad \text{sobre} \quad \delta_n \mathcal{A} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{m}} = \bar{\mathbf{n}}^{\alpha} \nu_{\alpha} \quad \text{sobre} \quad \delta_m \mathcal{A}$$

donde  $\boldsymbol{\nu} = \nu_0 \mathbf{a}^{\alpha}$  es el campo normal al contorno de la superficie media  $\boldsymbol{\varphi}$  ( $\partial \mathcal{A}$ ). Por supuesto que debe satisfacerse que  $\partial_n \mathcal{A} \cap \partial_{\varphi} \mathcal{A} = \partial_m \mathcal{A} \cap \partial_t \mathcal{A} = \emptyset$ .

### 4.3 FORMULACION UTILIZADA

Describiremos brevemente las formulaciones variacionales utilizadas en los diferentes elementos que se describen en el apartado 4.4. Resulta necesario distinguir las diferentes contribuciones a la energía interna y a las ecuaciones de equilibrio. Como es usual analizaremos separadamente las contribuciones provenientes de los esfuerzos de membrana, de flexión y la debida al corte transversal.

Supondremos una aproximación de elementos finitos estandar de la forma

$$\varphi = \varphi^0 + \mathbf{u} = \sum_{I=1}^{NN} N^I \left[ (\varphi^{(0)})^I + \mathbf{u}^I \right] \quad (4.42)$$

$$\mathbf{t}^{(0)} = \sum_{I=1}^{NN} N^I \mathbf{t}^{(0)I} \quad \|\mathbf{t}^{(0)I}\| = 1 \quad (4.43)$$

$$\mathbf{t} = \sum_{I=1}^{NN} N^I \mathbf{t}^I \quad \|\mathbf{t}^I\| = 1 \quad (4.44)$$

$$\Delta \mathbf{T} = \sum_{I=1}^{NN} N^I \Delta \mathbf{T}^I \quad (4.45)$$

donde  $N^I$  son las funciones de forma típicas de elementos bidimensionales de clase  $C_0$  (referencia [23]). En cada paso de tiempo la actualización del director en los nodos se realiza mediante la expresión

$$\mathbf{t}^{(k+1)} = \exp_{\mathbf{t}^k} \left[ \Delta \mathbf{t}^k \right] := \cos \|\Delta \mathbf{t}^k\| \mathbf{t}^k + \frac{\text{sen} \|\Delta \mathbf{t}^k\|}{\|\Delta \mathbf{t}^k\|} \Delta \mathbf{t}^k \quad (4.46)$$

#### 4.3.1 Comportamiento de membrana

Se han utilizado tres modelos para representar el comportamiento membranar: un modelo en desplazamientos estandar y dos modelos en deformaciones impuestas.



#### 4.3.1.1 Modelo en desplazamientos

El modelo en desplazamientos es estandar. Las deformaciones membranales pueden escribirse agrupadas en un vector de la forma

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi}'_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_1 - \boldsymbol{\varphi}^0_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}^0_1) \\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi}'_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_2 - \boldsymbol{\varphi}^0_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}^0_2) \\ (\boldsymbol{\varphi}'_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_2 - \boldsymbol{\varphi}^0_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}^0_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi}'_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_1 - 1) \\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi}'_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_2 - 1) \\ \boldsymbol{\varphi}'_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_2 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

La contribución al principio de trabajos virtuales asociada a la parte membranal se escribe

$$\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} = \int_{\mathcal{A}} \bar{\mathbf{n}}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dA - \int_{\mathcal{A}} q \delta u dA \quad (4.48)$$

Reescribiendo esta expresión en la forma habitual del método de elementos finitos, la contribución de los términos de membrana a las ecuaciones de equilibrio (fuerzas residuales) se expresa

$$\mathbf{F}_m^I = \int_{\mathcal{A}} (\mathbf{B}_m^I)^T \bar{\mathbf{n}} dA - \mathbf{f}^I \quad (4.49)$$

donde

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_m \delta \mathbf{u} \quad (4.50)$$

$$\mathbf{B}_m^I = \begin{bmatrix} N_{i_1}^I \boldsymbol{\varphi}'_1 \\ N_{i_2}^I \boldsymbol{\varphi}'_2 \\ N_{i_1}^I \boldsymbol{\varphi}'_2 + N_{i_2}^I \boldsymbol{\varphi}'_1 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$\mathbf{f}^I = \int_{\mathcal{A}} N^I q dA \quad (4.52)$$

#### 4.3.1.2 Modelos en deformaciones impuestas

En los modelos de deformaciones impuestas, se interpolan las deformaciones en el dominio del elemento a partir de un conjunto de parámetros, que se ligán a las deformaciones consistentes con el campo de desplazamientos en un conjunto elegido de puntos. Resulta conveniente interpolar las deformaciones en el sistema natural de coordenadas del elemento (identificaremos con  $(\ )'$  las magnitudes expresadas en el sistema natural de coordenadas). Las deformaciones en este sistema convectivo se expresan como

$$\boldsymbol{\varepsilon}'(u) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi} \\ \varepsilon_{\eta\eta} \\ 2\varepsilon_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi}'_{i\xi} \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{i\xi} - \boldsymbol{\varphi}^0_{i\xi} \cdot \boldsymbol{\varphi}^0_{i\xi}) \\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi}'_{i\eta} \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{i\eta} - \boldsymbol{\varphi}^0_{i\eta} \cdot \boldsymbol{\varphi}^0_{i\eta}) \\ (\boldsymbol{\varphi}'_{i\xi} \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{i\eta} - \boldsymbol{\varphi}^0_{i\xi} \cdot \boldsymbol{\varphi}^0_{i\eta}) \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

que se relaciona con las deformaciones en un sistema cartesiano local  $(x_1, x_2)$  (elegido arbitrariamente) mediante

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{J}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{J}^{-T}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (J_{11}^{-1})^2 & (J_{12}^{-1})^2 & J_{11}^{-1} J_{12}^{-1} \\ (J_{21}^{-1})^2 & (J_{22}^{-1})^2 & J_{21}^{-1} J_{22}^{-1} \\ 2J_{21}^{-1} J_{11}^{-1} & 2J_{22}^{-1} J_{12}^{-1} & J_{11}^{-1} J_{22}^{-1} + J_{12}^{-1} J_{21}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi} \\ \varepsilon_{\eta\eta} \\ 2\varepsilon_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\varepsilon}' \quad (4.54)$$

donde  $\mathbf{J}$  es la matriz jacobiana de la transformación en cada punto.

$$J_{\alpha a} = \frac{\partial x_a}{\partial \xi_\alpha} \quad \text{y} \quad J_{a\alpha}^{-1} = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_a} \quad (4.55)$$

Se propone una variación lineal en ambas coordenadas naturales para las tres componentes del tensor de deformación en el plano  $(\varepsilon_{\xi\xi}, \varepsilon_{\eta\eta}, 2\varepsilon_{\xi\eta})$

$$\boldsymbol{\varepsilon}'(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{\xi\xi} \\ \bar{\varepsilon}_{\eta\eta} \\ 2\bar{\varepsilon}_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & & & \\ & & & 1 & \xi & \eta \\ & & & & & & 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\xi, \eta) \boldsymbol{\alpha} \quad (4.56)$$

donde los coeficientes  $\alpha_i$  se eliminan evaluando componentes del tensor de deformación en puntos elegidos

$$\hat{\varepsilon} = Q\alpha \quad (4.57)$$

de donde

$$\alpha = Q^{-1}\hat{\varepsilon} \quad (4.58)$$

y finalmente

$$\bar{\varepsilon}' = A(\xi, \eta)Q^{-1}\hat{\varepsilon} = P(\xi, \eta)\hat{\varepsilon} \quad (4.59)$$

Conocido entonces el campo de deformaciones impuestas en el sistema natural, se tienen las deformaciones en el sistema cartesiano a través de (4.54). Con éstas se pueden evaluar los esfuerzos membranales  $\bar{\mathbf{n}}$ . Finalmente la contribución a la ecuación de equilibrio es

$$\int_{\mathcal{A}} \delta \bar{\varepsilon}^T \bar{\mathbf{n}} dA = \int_{\mathcal{A}} [\mathbf{J}_2(\xi, \eta) \mathbf{P}(\xi, \eta) \bar{\mathbf{B}}_m \delta \mathbf{u}]^T \bar{\mathbf{n}} dA = \quad (4.60)$$

$$= \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{B}}_m^T \int_{\mathcal{A}} \mathbf{P}^T(\xi, \eta) \mathbf{J}_2^T(\xi, \eta) \bar{\mathbf{n}} dA$$

donde hemos introducido

$$\delta \hat{\varepsilon} = \sum_{I=1}^{NN} \bar{\mathbf{B}}_m^I \delta \mathbf{u}^I = \bar{\mathbf{B}}_m \delta \mathbf{u} \quad (4.61)$$

Llamando

$$\beta = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{P}(\xi, \eta) \mathbf{J}_2^T(\xi, \eta) \bar{\mathbf{n}} dA \quad (4.62)$$

resulta

$$\mathbf{F}_b^T \delta \mathbf{u} = \beta^T \bar{\mathbf{B}}_m \delta \mathbf{u} \quad (4.63)$$

### 4.3.2 Comportamiento de flexión

El comportamiento de flexión está formulado exclusivamente en desplazamientos en la forma estandar. Para el caso de coordenadas cartesianas la contribución de los momentos a las ecuaciones de equilibrio es

$$F_b^T \delta U = \int_{\mathcal{A}} \bar{m}^T \delta \chi dA \quad (4.64)$$

Explicitando la ecuación (2.13) y expresándola en forma de vector

$$\kappa(U) = \begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \\ \mathbf{t}_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \\ (\mathbf{t}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 + \mathbf{t}_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}_1) \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

La contribución a las ecuaciones de equilibrio se escribe

$$\delta U^T F_b = \delta U^T \int_{\mathcal{A}} B_B^T \bar{m} dA \quad (4.66)$$

donde

$$B_b^I \delta U^I = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 N_{i_1}^I \\ \mathbf{t}_2 N_{i_2}^I \\ \mathbf{t}_2 N_{i_1}^I + \mathbf{t}_1 N_{i_2}^I \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}^I + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1 N_{i_1}^I \\ \boldsymbol{\varphi}_2 N_{i_2}^I \\ \boldsymbol{\varphi}_2 N_{i_2}^I + \boldsymbol{\varphi}_1 N_{i_1}^I \end{bmatrix} \bar{\Lambda}^I \delta T^I \quad (4.67)$$

### 4.3.3 Tratamiento del corte transversal

Para el tratamiento del corte transversal se usa un método de deformaciones impuestas basado en la utilización de un funcional del tipo Hu-Washizu. La metodología utilizada sigue los razonamientos del procedimiento general descrito en la referencia [21].

#### 4.3.3.1. Elementos triangulares (cuadráticos)

Las deformaciones se expresan en coordenadas naturales y se interpolan bilinealmente en coordenadas naturales en el elemento.

$$\boldsymbol{\gamma}' = \begin{bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_6 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} \quad (4.68)$$

Interesa relacionar los coeficientes de  $\alpha_i$  con deformaciones de corte en los lados del triángulo. Exigiremos que la deformación de corte tangente al lado varíe linealmente a lo largo del mismo. Elegiremos para ello dos puntos en cada lado, correspondientes a los puntos de Gauss de un elemento unidimensional  $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ .

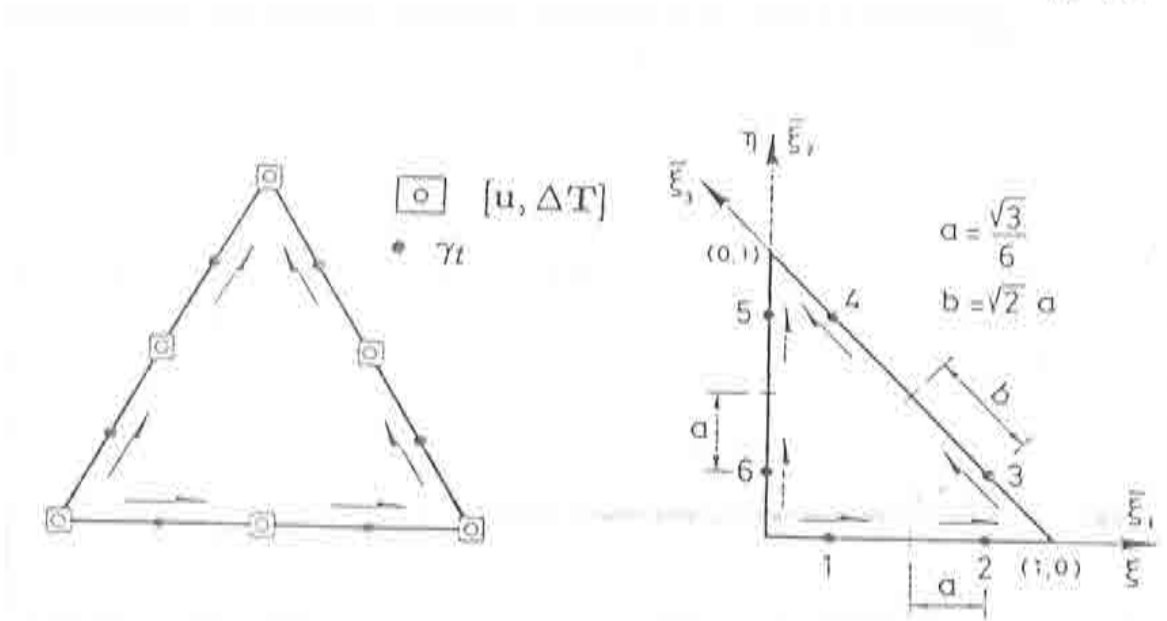


Figura 4.2 Elemento triangular de 6 nodos

Evaluando  $A$  en los puntos elegidos y proyectando en la dirección tangente en cada lado

$$\begin{bmatrix} \gamma_t^1 \\ \gamma_t^2 \\ \gamma_t^3 \\ \gamma_t^4 \\ \gamma_t^5 \\ \gamma_t^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & 0 & 0 & 0 \\ -a & -a\xi_3 & -a\eta_3 & a & a\xi_3 & a\eta_3 \\ -a & -a\xi_4 & -a\eta_4 & a & a\xi_4 & a\eta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_5 & \eta_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_6 & \eta_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

$$\bar{\gamma}_t^1 = P\alpha \quad (4.70)$$





con componentes

$$B_{s\xi}^I \delta U^I = \left[ N_{\xi}^I \mathbf{t} \ , \ N^I \varphi'_{\xi} \bar{\Lambda}^I \right] \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^I \\ \delta T^I \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

$$B_{s\eta}^I \delta U^I = \left[ N_{\eta}^I \mathbf{t} \ , \ N^I \varphi'_{\eta} \bar{\Lambda}^I \right] \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^I \\ \delta T^I \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

Para el caso de elementos triangulares, se considera un valor de la deformación tangente al lado constante en cada lado, dicho valor se toma como el promedio de los valores usados para muestreo. Bajo esta condición algunas operaciones pueden realizarse en forma explícita como veremos con detalle al discutir los distintos elementos.

#### 4.3.3.2 Elementos cuadriláteros (bilineales)

Para evitar el bloqueo por cortante se trabaja con deformaciones de corte impuestas al igual que en los elementos triangulares. La formulación sigue los razonamientos del apartado anterior y puede encontrarse en las referencias [3,8]. En este caso las deformaciones de corte tangentes al lado, que coinciden con una coordenada local, se suponen constantes en el lado, lo que implica a su vez una variación lineal en la otra coordenada natural. Se utilizan entonces cuatro puntos de muestreo que se eligen en la mitad de cada lado. Esto puede resumirse de la forma:

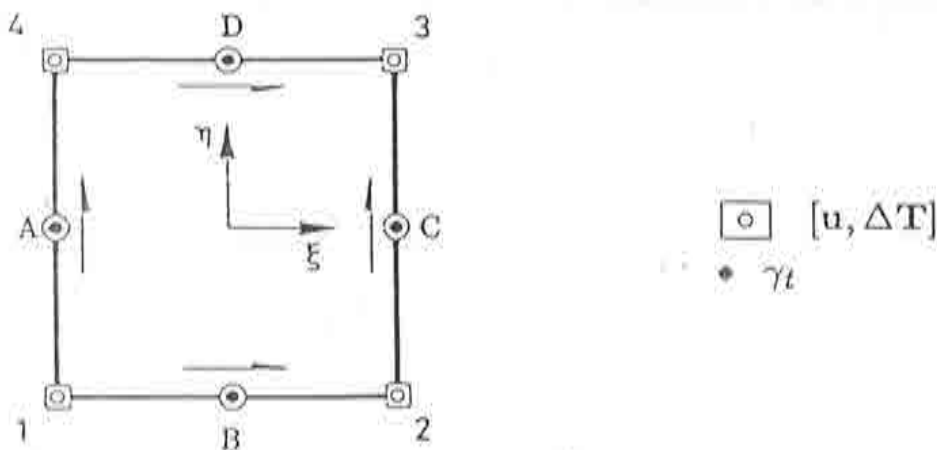


Figura 4.3 Elemento cuadrilátero de cuatro nodos



$$\gamma' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & \frac{1}{2}(1-\eta) & \frac{1}{2}(1+\xi) & \frac{1}{2}(1+\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{\eta}^A \\ \gamma_{\xi}^B \\ \gamma_{\eta}^C \\ \gamma_{\xi}^D \end{bmatrix} = P\bar{\gamma}' \quad (4.88)$$

donde  $(\xi, \eta)$  son las coordenadas locales del elemento cuadrilátero

$$\gamma = J^{-1}\gamma' = J^{-1}P\bar{\gamma}' \quad (4.89)$$

sustituyendo en (4.80) e integrando resulta

$$\delta U^T F_s = \int_{\mathcal{A}} \delta [J^{-1}P\bar{\gamma}']^T \bar{q} dA = \delta U^T \bar{B}_s^T \int_{\mathcal{A}} P^t J^{-t} \bar{q} dA \quad (4.90)$$

El vector de esfuerzos de corte generalizados en el elemento se define ahora como

$$\bar{q} = \int_{\mathcal{A}} P^T J^{-T} \bar{q} dA \quad (4.91)$$

en tanto que la matriz  $\bar{B}_s$  tiene por componentes

$$\bar{B}_s^T = \begin{bmatrix} B_{s\eta}^A & B_{s\xi}^B & B_{s\eta}^C & B_{s\xi}^D \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

usando (4.86) y (4.92) podemos a partir de (4.90)-(4.92) evaluar las contribuciones del corte transversal a las ecuaciones de equilibrio.

#### 4.4 ELEMENTOS DE LAMINA DESARROLLADOS

A continuación se presentan las características de los elementos de lámina desarrollados e implementados en el programa de elementos finitos SIMPACT.

##### 4.4.1 Elemento isoparamétrico de cuatro nodos

#### 4.4.1.1 Geometría

La geometría del elemento está definida por funciones de forma bilineales, tanto para la posición de la superficie media como para la descripción del campo director.

$$\varphi^{(0)} = \sum_{I=1}^4 N^I(\xi, \eta) \varphi_I^{(0)} \quad (4.93)$$

$$\mathbf{t}^{(0)} = \sum_{I=1}^4 N^I(\xi, \eta) \mathbf{t}_I^{(0)} \quad (4.94)$$

donde  $\varphi_I^{(0)}$  y  $\mathbf{t}_I^{(0)}$  son respectivamente la posición de la superficie media y el director en los nodos del cuadrilátero, y las  $N^I(\xi, \eta)$  son las funciones de forma que para cada nodo (de coordenadas  $(\xi^I, \eta^I)$ ) se escriben

$$N^I(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi^I)(1 + \eta\eta^I) \quad (4.95)$$

Observar que no se normaliza el campo director, por lo que sólo en los nodos se satisface la condición de que éste tenga módulo unitario. Los desplazamientos de la superficie media y los incrementos en el director se interpolan usando las mismas funciones bilineales (en la Figura 4.3 se muestran los grados de libertad utilizados).

$$\mathbf{u} = \sum_{I=1}^4 N^I(\xi, \eta) \mathbf{u}^I \quad (4.96)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \sum_{I=1}^4 N^I(\xi, \eta) \Delta \mathbf{u}^I \quad (4.97)$$

La geometría actualizada de la superficie media resulta

$$\varphi^{k+1} = \sum_{I=1}^4 N^I(\xi, \eta) (\varphi_I^{(0)} + \mathbf{u}_I^{k+1}) \quad (4.98)$$

Similarmente el campo director se interpola bilinealmente

$$\mathbf{t}^{k+1} = \sum_{I=1}^4 N^I(\xi, \eta) \mathbf{t}_I^{k+1} \quad (4.99)$$

para la actualización del campo director en los nodos se recurre a la expresión (4.46) como se discute a continuación.

Uno de los problemas a resolver es la determinación de  $\delta \mathbf{t}$  y de sus derivadas respecto a las coordenadas naturales. En cada punto debe satisfacerse que  $\mathbf{t} \cdot \Delta \mathbf{t} = 0$ . Esta condición puede ser relajada y es suficiente con satisfacerla en los nodos, lo que permite utilizar (4.97) y una expresión idéntica para la variación  $\delta \mathbf{t}$

$$\delta \mathbf{t} = \sum_{I=1}^4 N^I \delta \mathbf{t}^I \quad (4.100)$$

que también puede expresarse como

$$\delta \mathbf{t} = \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t} \quad (4.101)$$

donde  $\delta \boldsymbol{\theta}$  queda definido unívocamente por (4.101) y por la condición adicional

$$\delta \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (4.102)$$

por lo que  $\delta \mathbf{t}$ ,  $\delta \boldsymbol{\theta}$ ,  $\mathbf{t}$  son mutuamente ortogonales. Siendo  $\mathbf{t}$  un campo vectorial de longitud unitaria, en cada punto la variación del director queda restringida al plano normal al mismo, por lo que basta con dos variables para definirla. Estas variables pueden asociarse con el plano 1-2 mediante la transformación (referencias [15,16]).

$$\begin{matrix} \delta \mathbf{t} \\ (3 \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} \bar{\mathbf{A}} \\ (3 \times 2) \end{matrix} \begin{matrix} \delta \mathbf{T} \\ (2 \times 1) \end{matrix} \quad (4.103)$$

donde  $\bar{\mathbf{A}}$  son las dos primeras columnas de la matriz de transformación del sistema de coordenadas local al sistema de coordenadas global. Esta matriz de transformación ha de calcularse en cada instante ya que es función de la dirección del director  $\mathbf{t}$  en la posición deformada.

La geometría actualizada en función de esta descripción de los incrementos en el campo director se obtiene en el instante  $k + 1$  mediante la exponenciación de un vector según se indica en la expresión (4.46). Adviértase que  $\Delta \mathbf{t}^k$  mide la variación desde el incremento  $k$  al  $k + 1$ . La posición de un punto cualquiera fuera de la superficie media queda definida por su distancia  $\zeta$  a la misma ( $-\frac{h}{2} \leq \zeta \leq \frac{h}{2}$ ) medida sobre el director (no necesariamente normal a la superficie media, aún en la geometría inicial), siendo  $h$  el espesor de la lámina

$$\mathbf{X}(\zeta, \xi, \eta) = \boldsymbol{\varphi}(\xi, \eta) + \zeta \mathbf{t}(\xi, \eta) \quad (4.104)$$

#### 4.4.1.2 Sistema local de coordenadas

En principio cualquier sistema de coordenadas locales es válido, sin embargo para una correcta visualización de los resultados es necesario que la dirección de acción de los esfuerzos sea fácilmente identificable e independiente de las conectividades del elemento, y que en lo posible los sistemas de coordenadas elementales y nodales sean lo más parecidos posible, para que haya correspondencia entre los valores gaussianos y los nodales obtenidos mediante suavizado.

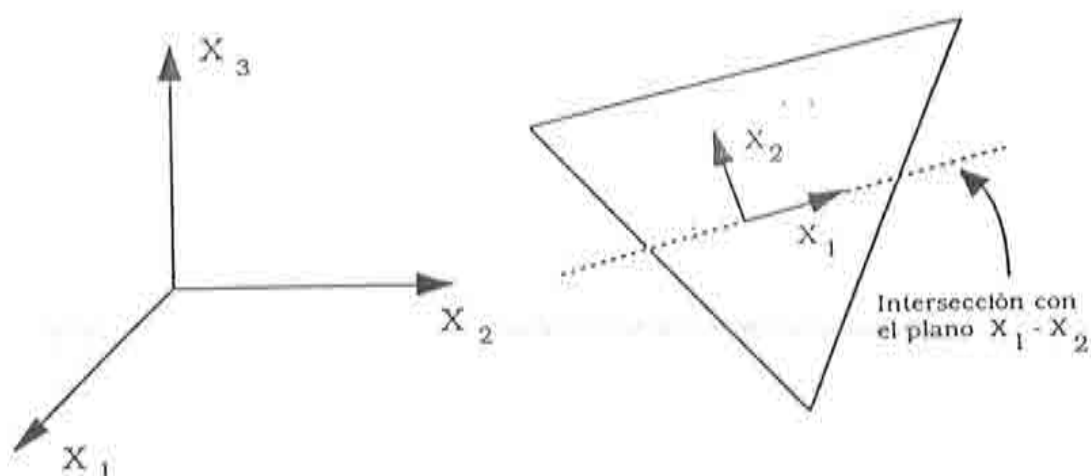


Figura 4.4 Sistema local en triángulos

Se ha optado por el siguiente sistema: definir el eje  $x_1$  local como la intersección del plano tangente a la lámina con el plano  $X_1 - X_2$  global, y la orientación del mismo se fija obligando al eje  $x_3$  local a tener proyección positiva sobre el eje  $X_3$  global (Figura 4.4). En el caso particular de que el plano del tangente coincida con el eje  $X_1 - X_2$  global, las direcciones locales y globales se harán coincidir.

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \sum_{I=1}^4 N_{i\xi}^I \varphi_I^{(0)} \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \sum_{I=1}^4 N_{i\eta}^I \varphi_I^{(0)} \quad (4.105)$$

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2 \quad \mathbf{x}_3 = \frac{\mathbf{g}_3}{\|\mathbf{g}_3\|} \quad (4.106)$$

$$\mathbf{x}_1 = (-(x_3)_2, -(x_3)_1, 0) \quad \text{normalizado} \quad (4.107)$$

$$\mathbf{x}_2 = \left( -(x_3)_1(x_3)_3, -(x_3)_2(x_3)_3, \left( (x_3)_1^2 + (x_3)_2^2 \right) \right) \text{ normalizado} \quad (4.108)$$

la matriz jacobiana  $\mathbf{J}$  resulta

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{x}_1 & \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{x}_1 & \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

#### 4.4.1.4 Comportamiento membranar y flexional

El comportamiento flexional y membranar está formulado en forma estandar en base a los campos de desplazamientos impuestos (ver subapartados 4.3.1 y 4.3.2), en tanto que la formulación del corte transversal en base a deformaciones supuestas ha sido detallada en el subapartado 4.3.3.2. Las deformaciones y esfuerzos generalizados se evalúan en el sistema de coordenadas local definido en el subapartado anterior. Esta formulación membranar presenta alguna desventaja respecto a la formulación mixta de la referencia [16] (especialmente con mallas gruesas) como se indica en la referencia [20].

Debido a la simplificación introducida en (4.97) y (4.98) las derivadas del campo director se expresan directamente por

$$t_{\alpha} = \sum_{I=1}^4 N_{\alpha}^I t^I \quad (4.110)$$

#### 4.4.1.5 Matriz de masa

La matriz de masa surge de la discretización de la derivada temporal del momentum. Usando para las aceleraciones dentro del elemento aproximaciones consistentes con (4.96) y (4.97), y teniendo en cuenta que  $\dot{\mathbf{w}}^I = \bar{\Lambda}^I \dot{\omega}^I$  y  $\dot{\mathbf{t}}^I = \bar{\Lambda}^I \dot{\theta}^I$  resulta

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{A}} [\bar{\rho} \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} + I_p \dot{\mathbf{w}} \cdot \delta \mathbf{t}] dA = \\ & = \int_{\mathcal{A}} \left[ \bar{\rho} \sum_{I=1}^4 \sum_{J=1}^4 N^I N^J \mathbf{1}_3 \ddot{\boldsymbol{\varphi}}^I \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}^J + \bar{I}_p \sum_{I=1}^4 \sum_{J=1}^4 N^I N^J \mathbf{1}_2 \dot{\omega}^I \cdot \delta \theta^J \right] dA = \quad (4.111) \\ & = M_u^{IJ} \ddot{\boldsymbol{\varphi}}^I \mathbf{1}_3 \delta \boldsymbol{\varphi}^J + M_t^{IJ} \dot{\omega}^I \mathbf{1}_2 \delta \theta^J \end{aligned}$$

Debido a la naturaleza del método de avance en el tiempo se recurre a una aproximación diagonal de la matriz de masa para lo cual se suman los elementos de cada fila

$$M_u^{IJ} = \int_{\mathcal{A}} \bar{\rho} N^I dA \delta^{IJ} \quad (4.112)$$

$$M_t^{IJ} = \int_{\mathcal{A}} \bar{I}_\rho N^I dA \delta^{IJ} \quad (4.113)$$

#### 4.4.2 Triángulo isoparamétrico de seis nodos

##### 4.4.2.1 Geometría

La superficie media de la lámina y el campo director quedan definidos inicialmente por

$$\varphi^0 = \sum_{I=1}^6 N^I(\xi, \eta) \varphi_I^0 \quad (4.114)$$

$$t^0 = \sum_{I=1}^6 N^I t_I^0 \quad (4.115)$$

donde  $\varphi_I^0$  y  $t_I^0$  son las coordenadas y directores en los nudos, las  $N^I$  son las funciones de forma cuadráticas y  $\varphi$  es la posición de la superficie media. Los desplazamientos e incrementos en el campo director se interpolan de la misma forma

$$u = \sum_{I=1}^6 N^I u^I \quad (4.116)$$

$$\Delta t = \sum_{I=1}^6 N^I(\xi, \eta) \Delta t^I \quad (4.117)$$

#### 4.4.2.2 Comportamiento membranal

Se han desarrollado tres variantes de este elemento. El primero corresponde al usual de desplazamientos impuestos (apartado 4.3.1.1) y se le ha denominado T6ID (Triángulo de seis nodos Isoparamétricos en Desplazamientos). Por otro lado es sabido que los elementos de geometría inicial curva formulados en desplazamientos presentan problemas de bloqueo membranal en mallas gruesas. Con el objeto de aliviar este problema y mejorar el comportamiento del elemento se han intentado otras variantes las cuales se basan en formulaciones de deformaciones impuestas (sección 4.3.1.2). En lo referente a estas últimas, es necesario definir qué deformaciones (puntos de muestreo) han de utilizarse para determinar los coeficientes  $\alpha_i$  (ecuación 4.57). Se han intentado dos variantes en la elección de los puntos de muestreo.

(i) T6IA1, evaluar las tres componentes en los nudos vértices del triángulo. En tal caso puede escribirse directamente

$$\bar{\epsilon}' = \begin{bmatrix} \epsilon_{\xi\xi} \\ \epsilon_{\eta\eta} \\ 2\epsilon_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta & \xi & \eta & & & \\ & \zeta & \xi & \eta & & \\ & & \zeta & \xi & \eta & \\ & & & \zeta & \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{\xi\xi}^1 \\ \epsilon_{\xi\xi}^2 \\ \epsilon_{\xi\xi}^3 \\ \epsilon_{\eta\eta}^1 \\ \epsilon_{\eta\eta}^2 \\ \epsilon_{\eta\eta}^3 \\ 2\epsilon_{\xi\eta}^1 \\ 2\epsilon_{\xi\eta}^2 \\ 2\epsilon_{\xi\eta}^3 \end{bmatrix} = \quad (4.118)$$

$$P(\xi, \eta) \bar{\epsilon}$$

(ii) T6IA2, evaluar la deformación en la dirección tangente al lado en los mismos puntos que se evalúa la deformación de corte transversal (seis medidas de deformación), más las tres componentes evaluadas en el centro del elemento. Utilizando la expresión (2.56) podemos escribir

$$\hat{\epsilon} \begin{bmatrix} \epsilon_l^1 \\ \epsilon_l^2 \\ \epsilon_l^3 \\ \epsilon_l^4 \\ \epsilon_l^5 \\ \epsilon_l^6 \\ \epsilon_{\xi\xi}^c \\ \epsilon_{\eta\eta}^c \\ 2\epsilon_{\xi\eta}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & A & & & & & & & & & \\ & 1 & B & & & & & & & & \\ & \frac{1}{2} & \frac{B}{2} & \frac{A}{2} & \frac{1}{2} & \frac{B}{2} & \frac{A}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-B}{2} & \frac{-A}{2} & \\ & \frac{1}{2} & \frac{A}{2} & \frac{B}{2} & \frac{1}{2} & \frac{A}{2} & \frac{B}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-A}{2} & \frac{-B}{2} & \\ & & & & 1 & 0 & B & & & & \\ & & & & 1 & 0 & A & & & & \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & & & & & & \\ & & & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & & & \\ & & & & & & & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_9 \end{bmatrix} = Q\alpha \quad (4.119)$$

con  $A = (1 - 1/\sqrt{3})/2$  y  $B = (1 + 1/\sqrt{3})/2$ . De aquí podemos eliminar los coeficientes  $\alpha_i$  y expresar las deformaciones en términos de las deformaciones en los puntos de muestreo.

$$\bar{\epsilon}' = AQ^{-1}\beta = P(\xi, \eta)\hat{\epsilon} \quad (4.120)$$

siendo por ejemplo para el caso (i)



$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} (a_{11}^1 - a_{11}^{1(0)})/2 \\ (a_{11}^2 - a_{11}^{2(0)})/2 \\ (a_{11}^3 - a_{11}^{3(0)})/2 \\ (a_{22}^1 - a_{22}^{1(0)})/2 \\ (a_{22}^2 - a_{22}^{2(0)})/2 \\ (a_{22}^3 - a_{22}^{3(0)})/2 \\ (a_{12}^1 - a_{12}^{1(0)}) \\ (a_{12}^2 - a_{12}^{3(0)}) \\ (a_{12}^3 - a_{12}^{3(0)}) \end{bmatrix} \quad (4.121)$$

entonces  $\delta(\hat{\epsilon})$  resulta

$$\delta(\hat{\epsilon}) = \sum_{I=1}^6 \begin{bmatrix} \varphi_{i_1}^1 N_{i_1}^{I1} \\ \varphi_{i_1}^2 N_{i_1}^{I2} \\ \varphi_{i_1}^3 N_{i_1}^{I3} \\ \varphi_{i_2}^1 N_{i_2}^{I1} \\ \varphi_{i_2}^2 N_{i_2}^{I2} \\ \varphi_{i_2}^3 N_{i_2}^{I3} \\ \varphi_{i_1}^1 N_{i_2}^{I1} + \varphi_{i_2}^1 N_{i_1}^{I1} \\ \varphi_{i_1}^2 N_{i_2}^{I2} + \varphi_{i_2}^2 N_{i_1}^{I2} \\ \varphi_{i_1}^3 N_{i_2}^{I3} + \varphi_{i_2}^3 N_{i_1}^{I3} \end{bmatrix} \delta u^I = \sum_{I=1}^6 \bar{B}^I \delta u^I = \bar{B} \delta u \quad (4.122)$$

#### 4.4.2.3 Comportamiento flexional y corte transversal

En cuanto al comportamiento flexional y de corte corresponde exactamente al explicado en los apartados (4.3.2) y (4.3.3.1) respectivamente.

#### 4.4.2.4 Matriz de masa

En este caso, la aproximación diagonal de la matriz de masa no puede realizarse con las expresiones (4.112)-(4.113) ya que en tal caso los nudos vértices resultan sin masa asociada. Para los elementos cuadráticos suele usarse la siguiente aproximación (referencia [10])

$$\bar{M}^{II} = \int_{\mathcal{A}} \bar{\rho} (N^I)^2 dA \quad (4.123)$$

$$M^{II} = \int_{\mathcal{A}} \bar{\rho} dA \frac{\bar{M}^{II}}{\sum_{J=1}^{NN} \bar{M}^{II}} \quad (4.124)$$

Otra posibilidad resulta de dividir el triángulo cuadrático en cuatro triángulos lineales sólo a los efectos de calcular la matriz de masa (resulta conveniente además usar la misma aproximación para las fuerzas de superficie) de tal manera que cada subtriángulo ( $J$ ) tendrá una matriz de masa

$${}^J M_u^{II} = \int_{\mathcal{A}_J} \bar{\rho} \xi^I dA \quad {}^J M_t^{II} = \int_{\mathcal{A}_J} \bar{I}_\rho \xi^I dA \quad (4.125)$$

donde las  $\xi^I$  son las coordenadas de área de cada subtriángulo.

### 4.4.3 Triángulo lineal no conforme

#### 4.4.3.1 Geometría

La posición de la superficie media está definida por las coordenadas espaciales de los tres vértices del triángulo, por lo que el elemento resulta plano y su comportamiento membranar idéntico al triángulo de deformación constante.

$$\varphi^{(0)} = \sum_{I=1}^3 \xi^I \varphi^{(0)I} \quad (4.126)$$

$${}^T \varphi = \sum_{I=1}^3 \xi^I {}^T \varphi^I = \sum_{I=1}^3 \xi^I (\varphi^{(0)I} + {}^T \mathbf{u}^I) \quad (4.127)$$

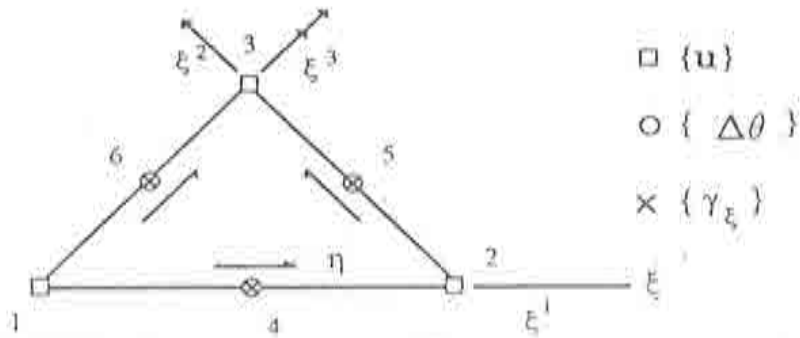


Figura 4.5 Triángulo de 3 nodos lineal no conforme

El campo director se interpola linealmente a partir de los directores a la mitad de cada lado (ver Figura 4.5)

$$t = \sum_{K=4}^6 \bar{N}^K t^K \quad (4.128)$$

siendo las funciones de interpolación

$$\begin{aligned} \bar{N}^4 &= 1 - 2\xi^3 \\ \bar{N}^5 &= 1 - 2\xi^1 \\ \bar{N}^6 &= 1 - 2\xi^2 \end{aligned} \quad (4.129)$$

Definido el campo director de esta forma, es fácil ver que no satisface continuidad a lo largo de todo el contorno entre elementos sino sólo en la mitad de cada lado por lo que el elemento es no conforme.

La variación del campo director es simplemente

$$\delta t = \sum_{K=4}^6 \bar{N}^K \delta t^K = \sum_{K=4}^6 \bar{N}^K \bar{\Lambda}^K \delta T^K \quad (4.130)$$

Las derivadas de esta última expresión son sencillamente

$$\delta t_{,\alpha} = \sum_{K=4}^6 \bar{N}_{,\alpha}^K \bar{\Lambda}^K \delta T^K \quad (4.131)$$

#### 4.4.3.2 Comportamiento flexional y tratamiento del corte

Dada la linealidad de la interpolación del campo director, el elemento resulta de curvatura constante. Las contribuciones de la parte flexional a las fuerzas residuales y a la matriz de rigidez se obtienen reemplazando las expresiones (4.130)-(4.131) en las del apartado 4.3.2. Siendo las curvaturas (y los esfuerzos) constantes es suficiente utilizar un único punto de integración para la correcta evaluación de las fuerzas residuales y la matriz de rigidez, lo mismo que para las contribuciones membranales.

En cuanto al corte transversal, siguiendo los razonamientos del apartado 4.3.1 pero exigiendo ahora que las deformaciones de corte transversal tangentes al lado sean constantes, es posible expresar las deformaciones de corte transversal en la forma:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} 1 - \eta & \eta & \eta \\ \xi & -\xi & 1 - \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^4 \\ \gamma^5 \\ \gamma^6 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \quad (4.132)$$

donde

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{bmatrix} \gamma^4 \\ \gamma^5 \\ \gamma^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi'_{i\xi} \cdot t^4 \\ (\varphi'_{i\xi} - \varphi'_{i\eta}) \cdot t^5 \\ \varphi'_{i\eta} \cdot t^6 \end{bmatrix} \quad (4.133)$$

La contribución a la ecuación de trabajos virtuales resulta

$$\mathbf{F}_s = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B}_s^T \mathbf{q} d\mathcal{A} = \bar{\mathbf{B}}_s^T \int_{\mathcal{A}} \mathbf{A}^T \mathbf{J}^{-T} \mathbf{q} d\mathcal{A} = \bar{\mathbf{B}}_s^T \bar{\mathbf{q}} \quad (4.134)$$

donde

$$\bar{\mathbf{B}}_s \delta \mathbf{U} = \begin{bmatrix} N_{i\xi}^I t^4 \delta \mathbf{u}^I & , & \varphi_{i\xi} \bar{\Lambda}^4 \delta T^4 \\ (N_{i\xi}^I - N_{i\eta}^I) t^5 \delta \mathbf{u}^I & , & (\varphi_{i\xi} - \varphi_{i\eta}) \bar{\Lambda}^5 \delta T^5 \\ N_{i\eta}^I t^6 \delta \mathbf{u}^I & , & \varphi_{i\eta} \bar{\Lambda}^6 \delta T^6 \end{bmatrix} \quad (4.135)$$

$$\bar{\mathbf{q}} = \int_{\mathcal{A}} \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{J}^{-T} \mathbf{q} d\mathcal{A} \quad (4.136)$$

En el caso elástico, la última integral puede integrarse en forma explícita si se reemplaza

$$\mathbf{q} = \mathbf{D}_s \mathbf{J}^{-1} \mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \quad (4.137)$$

#### 4.4.3.3 *Matriz de masa*

En este caso sí es posible obtener la matriz de masa diagonalizada con expresiones similares a las (4.112) y (4.113)

$$M_u^{II} = \int_{\mathcal{A}} \bar{\rho} \xi^I dA \quad (4.138)$$

$$M_t^{II} = \int_{\mathcal{A}} \bar{I}_\rho \bar{N}^I dA \quad (4.139)$$

## Capítulo 5

### ANÁLISIS DINAMICO DE PIEZAS PRISMATICAS

Escrito por Fernando Flores

#### 5.1 CINEMATICA BASICA

Este capítulo se dedica en primer lugar a presentar la teoría de piezas prismática utilizada, que se basa en la extensión al caso dinámico de la formulación desarrollada por Simo y colaboradores [15-19]. Se incluye asimismo una propuesta de modelo elastoplástico para piezas prismáticas, así como detalles de la formulación de los elementos de pieza de dos y tres nodos desarrollados. Finalmente se presenta una metodología para el tratamiento conjunto de elementos de viga, lámina y sólido, basada en el método de compatibilidad de desplazamientos, que permita el análisis de estructuras en que sea necesario utilizar diferentes tipologías de elementos sin necesidad de emplear elementos de transición.

En este apartado se resume la teoría de vigas en la que se apoyan los elementos finitos implementados en el código de análisis. Un desarrollo más detallado de la misma, incluyendo las expresiones para el análisis implícito puede verse en las referencias [26-28]. Aquí se hace hincapié, por otra parte, en las ecuaciones expresadas en términos de rotaciones alrededor de los ejes locales, esto es en componentes materiales, pero manteniendo los desplazamientos en componentes globales.

### 5.1.1 Hipótesis cinemática

La posición del eje (curvo) o centroide de la viga queda definida por la aplicación

$$S \in I \longmapsto \varphi_0(S) \in \mathbb{R}^3 \quad (5.1)$$

donde  $I$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$  y  $S$  en general define la longitud de arco sobre la viga en la configuración de referencia. En cada punto de la línea de centroides definimos una sección transversal a través de su normal

$$S \in I \longmapsto \mathbf{t}^1(S) \in S^2 \quad (5.2)$$

que en general no coincidirá con la tangente a la línea de centroides, aún en la geometría indeformada, en forma similar al apartado anterior donde el director no necesariamente coincide con la normal a la lámina.

Dentro de la sección transversal definimos una dirección arbitraria a la que denominaremos  $\mathbf{t}^2 \in S^2$ , que por razones de simplicidad y sin pérdida de generalidad haremos coincidir con uno de los ejes principales de inercia de la sección. Una segunda dirección en la sección queda definida naturalmente por

$$\mathbf{t}^3 = \mathbf{t}^1 \times \mathbf{t}^2 \quad (5.3)$$

Esta terna espacial define una matriz de transformación  $\Lambda$  en el grupo ortogonal especial ( $SO(3)$ )

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{t}^1 & \mathbf{t}^2 & \mathbf{t}^3 \end{bmatrix} \in SO(3) \quad (5.4)$$

que transforma la base canónica de  $\mathbb{R}^3\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  en la posición espacial actual de la terna móvil.

La hipótesis cinemática básica supone que la posición de cada punto de la viga está dada por:

$$\begin{aligned} \varphi : I \times A &\longmapsto \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} = \varphi(S, \xi^2, \xi^3) &= \varphi_0(S) + \sum_{\alpha=2}^3 \xi^\alpha \mathbf{t}^\alpha(S) \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde  $A \in \mathbb{R}^2$  es compacta y define la sección transversal, en tanto que  $\xi^\alpha$  mide la distancia sobre el eje  $\mathbf{t}^\alpha$  de un punto de  $A$  a la línea de centroides  $\varphi_0(S)$ . Esta hipótesis conduce entonces a la indeformabilidad de la sección transversal y no permite el alabeo de la misma.

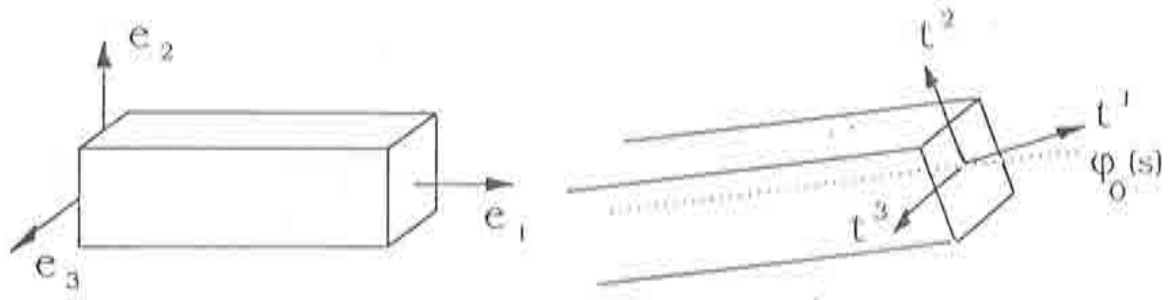


Figura 5.1 Ilustración de la geometría que define la cinemática del modelo de la viga

La relación entre este sistema coordenado ( $\Lambda$ ) y la base convectiva se encuentra usando el gradiente de deformación  $F(\xi)$  (Reemplazaremos algunas veces  $S$  por  $\xi^1$  y más generalmente  $(S, \xi^2, \xi^3)$  por  $\xi$  )

$$F(\xi) = \left[ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^3} \right] \quad (5.6)$$

definiendo

$$\begin{aligned} F_0(S) &= \left. F(S, \xi^2, \xi^3) \right|_{\xi^2=\xi^3=0} \\ &= \frac{d}{dS} \varphi_0(S) \otimes \mathbf{e}_1 + \sum_{\alpha=2}^3 \mathbf{t}^\alpha(S) \otimes \mathbf{e}_\alpha \end{aligned} \quad (5.7)$$

entonces la base convectiva puede definirse como:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_I &= F_0(S) \mathbf{e}_I \\ \mathbf{a}_1 &= \frac{d}{dS} \varphi_0(S) \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{t}^2 \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{t}^3 \end{aligned} \quad (5.8)$$

la diferencia entre la terna móvil  $\Lambda$  y la base convectiva está en que en general  $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{t}^1$ .

### 5.1.2 Derivadas de la terna móvil

Las derivadas de cada vector componente de la terna respecto a la longitud de arco  $S$  resulta de

$$\mathbf{t}^I(S) = \Lambda(S) \mathbf{e}_I$$



$$\mathbf{e}_I = \Lambda^T(S) \mathbf{t}^I(S) \quad (5.9)$$

$$\frac{d}{dS} \mathbf{t}^I = \left[ \frac{d}{dS} \Lambda(S) \right] \mathbf{e}^I$$

premultiplicando por  $\Lambda^T$  para obtener las componentes materiales, esto es respecto al sistema local

$$\Lambda^T(S) \frac{d}{dS} \mathbf{t}^I(S) = \Lambda^T(S) \left[ \frac{d}{dS} \Lambda(S) \right] \mathbf{e}_I = \mathbf{K}(S) \mathbf{e}_I \quad (5.10)$$

donde

$$\mathbf{K}(S) = \Lambda(S) \left[ \frac{d}{dS} \Lambda(S) \right] \quad (5.11)$$

es un campo tensorial antisimétrico, lo cual puede comprobarse fácilmente. Escribiremos

$$\mathbf{K}(S) = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa_3(S) & \kappa_2(S) \\ \kappa_3(S) & 0 & -\kappa_1(S) \\ -\kappa_2(S) & \kappa_1(S) & 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Al vector axial de este tensor antisimétrico lo llamaremos

$$\boldsymbol{\kappa}(S) = [\kappa_1(S), \kappa_2(S), \kappa_3(S)] \quad (5.13)$$

tal que para todo vector  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  se satisface

$$\mathbf{K}(S) \mathbf{y} = \boldsymbol{\kappa}(S) \times \mathbf{y} \quad (5.14)$$

## 5.2 CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL Y ANGULAR

Parametrizando el movimiento con el tiempo  $t$

$$t \mapsto \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}, t) = \boldsymbol{\varphi}_0(S, t) + \sum_{\alpha=2}^3 \xi^\alpha \mathbf{t}^\alpha(S, t) \quad (5.15)$$

denotando con un punto la derivada material respecto del tiempo, la derivada temporal de la terna móvil resulta

$$\dot{i}^I(S, t) = \frac{d}{dt} [\Lambda(S, t)] e_I = \dot{\Lambda}(S, t) e_I \quad (5.16)$$

premultiplicando por  $\Lambda^T$  para obtener las componentes materiales obtenemos

$$\Lambda^T(S, t) \dot{i}^I(S, t) = \Lambda^T(S, t) \dot{\Lambda}(S, t) e_I = \Omega(S, t) e_I \quad (5.17)$$

donde  $\Omega(S, t)$  es un tensor antisimétrico y denominaremos con  $\omega$  al vector axial asociado.

La cantidad de movimiento (Momentum) lineal por unidad de longitud de arco  $S$  se calcula como

$$L_t = \int_A \rho_0(\xi) \dot{\varphi}(\xi, t) dA \quad (5.18)$$

llamando

$$A_\rho(S) = \int_A \rho_0(\xi) dA \quad (5.19)$$

siendo  $\varphi_0(S)$  la línea de centroides está implícita la condición

$$\int_A \rho_0(\xi) \xi^\alpha dA = 0 \quad (5.20)$$

por lo que el momentun lineal resulta

$$L_t(S) = A_\rho(S) \dot{\varphi}_0(S) \quad (3.21)$$

El momentun angular, por otra parte, se define como la integral

$$H_t = \int_A \rho_0(\xi) [\varphi(\xi, t) - \varphi_0(S, t)] \times \dot{\varphi}(\xi, t) dA \quad (5.22)$$

donde a partir de (5.5) y (5.17)

$$\dot{\varphi}(\xi, t) = \varphi_0(S, t) + \sum_{\alpha=2}^3 \xi^\alpha \dot{i}^\alpha \equiv \varphi_0(S, t) + (\Lambda \omega) \times [\varphi(\xi, t) - \varphi_0(S, t)] \quad (5.23)$$

Reemplazando esta expresión en la anterior premultiplicando  $H_t$  por  $\Lambda^T$  para expresarlo en las componentes materiales e integrando, resulta

$$\Lambda^T \dot{H}_t = \dot{H}_t^M = I_\rho \omega \quad (5.24)$$

donde  $I_\rho$  es el tensor de inercia de la sección en componentes materiales

$$I_\rho = \sum_{\alpha=2}^3 \sum_{\beta=2}^3 \int_A \rho_0(\xi) \xi^\alpha \xi^\beta [\delta_{\alpha\beta} \mathbf{1} - \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta] \quad (5.25)$$

que, como hemos elegido  $\mathbf{t}^2$  y  $\mathbf{t}^3$  en las direcciones principales de la sección, si denominamos

$$I_2(S) = \int_A \rho_0(\xi) (\xi^3)^2 dA \quad I_3(S) = \int_A \rho_0(\xi) (\xi^2)^2 dA \quad (5.26)$$

$$I_1(S) = I_2(S) + I_3(S)$$

resulta

$$I_\rho = \begin{bmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

La derivada temporal del momento angular  $\dot{H}_t$  expresada en la configuración material puede demostrarse que es

$$\Lambda^T \dot{H}_t = I_\rho \dot{\omega} + \omega \times \dot{H}_t^M \quad (5.28)$$

### 5.3 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Consideremos una sección transversal  $A_t = \varphi_t|_{S=fijo}$ . Sea  $P(\xi)$  el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, que podemos escribir como

$$P(\xi) = T_1(\xi) \otimes \mathbf{e}_1 + T_2(\xi) \otimes \mathbf{e}_2 + T_3(\xi) \otimes \mathbf{e}_3 \quad (5.29)$$

Claramente  $T_1(\xi) = P(\xi)\mathbf{e}_1$  es el vector tensión sobre la sección transversal  $A_t \in \mathbb{R}^2$ . Premultiplicando por  $\Lambda^T$  e integrando sobre la sección obtenemos la fuerza resultante por unidad de longitud de arco (de referencia)

$$N(S, t) = \Lambda^T \int_A T_1(\xi) dA \equiv \Lambda^T \int_A P(\xi) \mathbf{e}_1 dA \quad (5.30)$$

Similarmente el momento resultante sobre la sección transversal por unidad de longitud de arco de referencia está dado por la integral

$$M(S, t) = \Lambda^T \int_A [\mathbf{x}(\xi, t) - \varphi_0(S, t)] \times T_1(\xi) dA \quad (5.31)$$

Las ecuaciones de equilibrio dinámico en la configuración espacial toman la forma (ver apéndice de la referencia [12])

$$\frac{\partial}{\partial S}(\Lambda N) + \bar{q} = A_\rho \ddot{\varphi}_0 \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial S}(\Lambda M) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} \times (\Lambda N) + \Lambda \bar{M} = \dot{H}_t \quad (5.33)$$

donde  $\bar{q}$  es la resultante de las acciones externas por unidad de longitud de arco de referencia y  $\bar{M}$  es el momento exterior medido en el sistema local.

Premultiplicando la segunda por  $\Lambda^T$  y desarrollando obtenemos

$$\kappa \times M + \frac{\partial M}{\partial S} + \left( \Lambda^T \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} \right) \times N + \bar{M} = I_\rho \dot{\omega} + \omega \times H_t^M \quad (5.34)$$

#### 5.4 TRABAJO INTERNO Y MEDIDAS DE DEFORMACION

La potencia interna  $\mathcal{W}$  se puede expresar como

$$\mathcal{W} = \int_{A \times I} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dA dS = \int_{A \times I} (\Lambda^T \mathbf{P}) : (\Lambda^T \dot{\mathbf{F}}) dA dS \quad (5.35)$$

siendo

$$\Lambda^T \dot{\mathbf{F}} = \left\{ \Lambda^T \frac{\partial \dot{\varphi}_0}{\partial S} + (\omega \times \kappa + \dot{\kappa}) \times \left( \sum_{\alpha=2}^3 \xi^\alpha e_\alpha \right) + \kappa \times \left[ \omega \times \left( \sum_{\alpha=2}^3 \xi^\alpha e_\alpha \right) \right] \right\} \otimes e_1 + \quad (5.36)$$

$$+ \sum_{\alpha=2}^3 (\omega \times e_\alpha) \otimes e_\alpha$$

reemplazando esta última expresión en la anterior, integrando en la sección y operando se llega a que

$$\mathcal{W} = \int_i \left\{ N \cdot \Lambda^T \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\varphi}_0}{\partial S} \right) - (\Lambda \omega) \times \frac{\partial \dot{\varphi}_0}{\partial S} \right] + M \cdot \dot{\kappa} \right\} dS \quad (5.37)$$

Definamos como medida de deformación de la línea de centroides a

$$\Gamma = \Lambda^T \left[ \frac{\partial \dot{\varphi}_0}{\partial S} - t^1 \right] = \Lambda^T \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} - e_1 \quad (5.38)$$

la derivada temporal de la cual resulta

$$\dot{\Gamma} = \dot{\Lambda}^T \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} + \Lambda^T \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} = \Lambda^T \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} - (\Lambda \omega) \times \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} \right] \quad (5.39)$$

lo que nos permite escribir la potencia interna como

$$\mathcal{W} = \int_I (N : \dot{\Gamma} + M : \dot{\kappa}) dS \quad (5.40)$$

De esta forma quedan definidas las medidas de deformación  $(\Gamma, \kappa)$  en la configuración material conjugadas de los esfuerzos resultantes  $N$  y  $M$ .

## 5.5 FORMULACION DEBIL. ECUACION DE TRABAJOS VIRTUALES

Para la obtención de la ecuación de trabajos virtuales es necesario definir primero el campo de variaciones admisibles consistente con el grupo ortogonal  $SO(3)$ . Para ello, sea  $\Phi(S) = (\varphi_0(S), \Lambda(S))$  una configuración arbitraria. Construimos una configuración perturbada relativa a  $\Phi(S)$  y la denotamos por  $\Phi_\varepsilon(S) = (\varphi_{0_\varepsilon}(S), \Lambda_\varepsilon(S))$  definida de la forma

$$\varphi_{0_\varepsilon}(S) = \varphi_0(S) + \varepsilon \eta_0(S) \quad \Lambda_\varepsilon(S) = \Lambda(S) \exp(\varepsilon \Theta(S)) \quad (5.41)$$

donde  $\varepsilon > 0$ ,  $\eta_0(S)$  es un desplazamiento infinitesimal admisible con las condiciones de contorno y  $\Theta(S)$  es un campo tensorial antisimétrico que se interpreta como una rotación infinitesimal superpuesta a  $\Lambda(S)$  cuyo vector axial asociado llamaremos  $\theta$ . La exponenciación de un tensor antisimétrico nos provee de un elemento de  $SO(3)$  (ver referencias [14], [15], [27], [28] para una discusión más detallada). Existe una forma cerrada acreditada a Rodríguez

$$\exp(\Theta) = \mathbf{1} + \frac{\text{sen}(\|\theta\|)}{\|\theta\|} \Theta + 2 \frac{\text{sen}^2(\|\theta\|/2)}{\|\theta\|^2} \Theta^2 \quad (3.42)$$

La definición de  $\Phi_\epsilon(S)$  satisface que

$$\Phi_\epsilon(S)|_{\epsilon=0} = (\phi_0(S), \Lambda(S)) \quad (5.43)$$

$$\left. \frac{d\Phi_\epsilon(S)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = (\eta_0(S), \Lambda(S)\Theta(S)) \quad (5.44)$$

Esta última derivada nos provee del campo de variaciones admisibles. Por otro lado consideraremos la componente material del campo de rotaciones por lo que finalmente la variación admisible toma la forma  $(\eta_0(S), \theta(S))$ .

Multiplicando las ecuaciones de equilibrio (5.32) y (5.34) por el campo de variaciones admisibles e integrando en la longitud de arco

$$\int_I \left[ \frac{\partial}{\partial S} (\Lambda N) + \bar{q} - A_\rho \ddot{\varphi}_0 \right] \cdot \eta_0 + \quad (5.45)$$

$$\left[ \kappa \times M + \frac{\partial M}{\partial S} + \left( \Lambda^T \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} \right) \times N + \bar{M} - I_\rho \dot{\omega} - \omega \times H_t^M \right] \cdot \theta \, dS = 0$$

Integrando por partes los términos  $\left[ \frac{\partial}{\partial S} (\Lambda N) \cdot \eta_0 \right]$  y  $\left[ \frac{\partial}{\partial S} M \cdot \theta \right]$  y recordando que la variación  $(\eta_0, \theta)$  se anula en el contorno, obtenemos

$$\int_I \left\{ N \cdot \left[ \lambda^T \frac{\partial \eta_0}{\partial S} + \left( \lambda^T \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} \right) \times \theta \right] + M \cdot \left[ \frac{\partial \theta}{\partial S} + \kappa \times \theta \right] \right\} dS = \quad (5.46)$$

$$\int_I \left[ (\bar{q} - A_\rho \ddot{\varphi}_0) \cdot \eta_0 + (\bar{M} - I_\rho \dot{\omega} - \omega \times H_t^M) \theta \right] dS$$

Denotando por  $( \ )' = \frac{\partial}{\partial S} ( \ )$  es posible escribir la ecuación anterior en la forma

$$\int_I \left\{ [N, M] \begin{bmatrix} \Lambda^T \frac{\partial}{\partial S} \mathbf{1} & (\Lambda^T \varphi_0) \times \\ 0 & \frac{\partial}{\partial S} \mathbf{1} + \kappa \times \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\bar{q} + A_\rho \ddot{\varphi}_0 \\ -\bar{M} + I_\rho \dot{\omega} + \omega \times H_t^M \end{bmatrix}^T \right\} \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \theta \end{bmatrix} dS = 0 \quad (5.47)$$

que nos provee la ecuación de trabajos virtuales que puede ser directamente utilizada para la discretización por elementos finitos.

## 5.6 ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Los esfuerzos y momentos resultantes en sus componentes materiales se pueden expresar en la forma

$$\begin{aligned} N &= [N, Q^2, Q^3] \\ M &= [M_t, M^2, M^3] \end{aligned} \quad (5.48)$$

en tanto que las deformaciones generalizadas conjugadas de las anteriores medidas de tensión se pueden escribir

$$\begin{aligned} \Gamma &= [\varepsilon, \gamma_2, \gamma_3] \\ \kappa &= [\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3] \end{aligned} \quad (5.49)$$

Definiendo una energía objetiva interna  $\psi$  a partir de (5.36), derivando respecto al tiempo y usando la desigualdad de Clasius-Duhem en la forma usual se obtiene

$$\begin{aligned} N &= \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} & Q^2 &= \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_2} & Q^3 &= \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_3} \\ M_t &= \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \kappa_1} & M^2 &= \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \kappa_2} & M^3 &= \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \kappa_3} \end{aligned} \quad (5.50)$$

Supondremos por razones de simplicidad una respuesta hiperelástica del material, de tal forma que suponiendo la descomposición aditiva del tensor de deformaciones las ecuaciones constitutivas resultan

$$\begin{bmatrix} N \\ Q^2 \\ Q^3 \\ M_t \\ M^2 \\ M^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & & & & & \\ & GA_2 & & & & \\ & & GA_3 & & & \\ & & & GJ_1 & & \\ & & & & EJ_2 & \\ & & & & & EJ_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon - \varepsilon^p \\ \gamma_2 - \gamma_2^p \\ \gamma_3 - \gamma_3^p \\ \kappa_1 - \kappa_1^p \\ \kappa_2 - \kappa_2^p \\ \kappa_3 - \kappa_3^p \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

donde  $(A, A_2, A_3)$  son el área transversal y las áreas de corte que se consideren como efectivas, en tanto que  $(J_1, J_2, J_3)$  son los momentos de inercia polar y respecto a los ejes principales de la sección (definiciones similares a la expresión (5.26) pero sin incluir la masa  $\rho$ ).

### 5.6.1 Una aproximación al comportamiento plástico en vigas

Resulta sumamente complejo expresar una superficie de fluencia de una viga de sección arbitraria, en términos de los esfuerzos resultantes sobre la sección. Existen algunos estudios sobre el comportamiento de algunas secciones a problemas de flexión pura, flexión compuesta (plana) y bajo torsión. Estas aproximaciones, sin embargo, no permiten realizar extrapolaciones a estados de sollicitación general (flexión + esfuerzo axial + torsión). Para el caso de flexión sobre ambos ejes principales de inercia, los estudios están restringidos a secciones rectangulares, en tanto que para el comportamiento torsional se han concentrado principalmente en secciones circulares o anulares y existen algunos resultados para secciones rectangulares.

El tensor de tensiones en un punto cualquiera de la sección de una viga tiene la forma (en componentes materiales)

$$\sigma(\xi) = \begin{bmatrix} \sigma^{11}(N, M^2, M^3) & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{21}(Q^2, M_t) & 0 & 0 \\ \sigma^{31}(Q^3, M_t) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

Usando un criterio de fluencia basado en la energía de deformación por corte (von Mises) obtenemos que el segundo invariante del tensor desviador integrado en la sección es

$$J_2 = \int_A \left[ \frac{1}{3} \sigma^{11^2}(N, M^2, M^3) + \sigma^{12^2}(Q^2, M_t) + \sigma^{13^2}(Q^3, M_t) \right] dA \quad (5.53)$$

Como es usual normalizaremos los esfuerzos y momentos respecto de los esfuerzos y momentos últimos que individualmente hacen que la sección plastifique ( $N_u, Q_u^2, Q_u^3, M_{tu}, M_u^2, M_u^3$ ); llamaremos

$$\begin{aligned} n &= \frac{N}{N_u} & q^2 &= \frac{Q^2}{Q_u^2} & q^3 &= \frac{Q^3}{Q_u^3} \\ m_t &= \frac{M_t}{M_{tu}} & m^2 &= \frac{M^2}{M_u^2} & m^3 &= \frac{M^3}{M_u^3} \end{aligned} \quad (5.54)$$

de esta forma un criterio de fluencia en esfuerzos toma la forma

$$\int_A \left[ \frac{1}{3} \sigma^{11^2}(n, m^2, m^3) + \sigma^{12^2}(q^2, m_t) + \sigma^{13^2}(q^3, m_t) \right] dA - \frac{A}{3} \kappa^2 \leq 0 \quad (5.55)$$

Recordemos algunos resultados publicados en la literatura (ver referencia [5]). En una sección rectangular para el caso de flexión plana más esfuerzo axial, el criterio de von Mises (y el de Tresca) conduce a



$$n^2 + m = 1 \quad (5.56)$$

Con el objeto de facilitar su utilización se puede aproximar esta expresión mediante una forma cuadrática

$$n^2 \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}nm + m^2 = 1 \quad (5.57)$$

En el caso de flexión con componentes sobre ambos ejes principales de la sección se ha encontrado como una buena aproximación para algunas secciones (ver referencia [5])

$$|m^2| + \frac{3}{4}(m^3)^2 = 1 \quad |m^2| \geq |m^3| \quad (5.58)$$

Similarmente al caso anterior podemos utilizar una forma cuadrática que aproxime la expresión (5.58)

$$(m^2)^2 \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}m^2m^3 + (m^3)^2 = 1 \quad (5.59)$$

En las Figuras 5.2a y 5.2b se puede apreciar la relación que existe entre las expresiones originales y las aproximaciones cuadráticas.

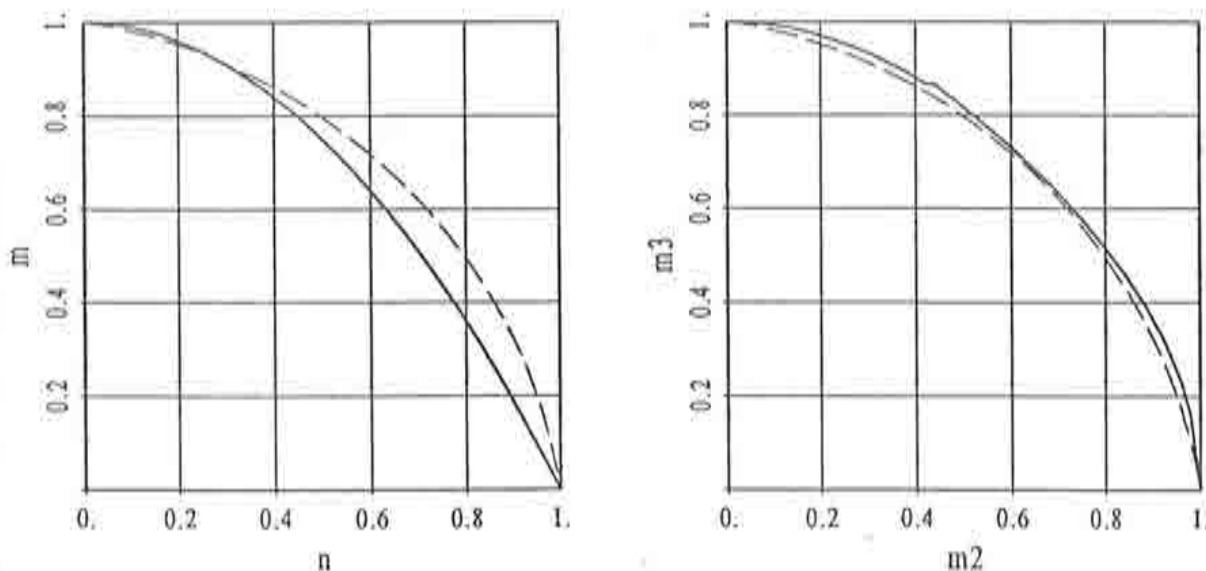


Figura 5.2 Relación entre las expresiones analíticas correctas (—) y las aproximaciones cuadráticas utilizadas (- - -).

De acuerdo a la expresión (5.53) la energía de distorsión se puede desacoplar en función de esfuerzos que producen tensiones axiales ( $N, M^2, M^3$ ) y que producen esfuerzos de corte ( $M_t, Q^2, Q^3$ ). La energía de corte debida a estos últimos puede aproximarse por

$$m_t^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2 \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}m_tq^2 \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}m_tq^3 \quad (5.60)$$

Finalmente podría aceptarse como una aproximación el siguiente criterio de fluencia basado en la energía de distorsión

$$n^2 + (m^e)^2 \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}nm^e + m_t^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2 \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}m_tq^2 \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}m_tq^3 - 1 \leq 0 \quad (5.61)$$

donde  $m^e = [(m^2)^2 + (m^3)^2 \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}m^2m^3]^{\frac{1}{2}}$ .

La función de fluencia definida de esta forma debe cotejarse con resultados obtenidos con aproximaciones tridimensionales. Además para secciones particulares resulta necesario validar las hipótesis sobre las que se apoya.

Aceptada la función de fluencia propuesta, no resulta difícil suponer un endurecimiento isotrópico, para lo cual debe definirse una medida de deformación plástica efectiva.

Para la integración temporal de la ecuación constitutiva se propone usar el método de Euler hacia atrás ("backward Euler"), dado que la superficie de fluencia resulta definida por la intersección de dieciseis superficies y que una aplicación directa del método de retorno radial no resulta sencilla.

## 5.7 FORMULACION DE ELEMENTOS FINITOS UTILIZADA

La formulación utilizada responde a la estandar en desplazamientos impuestos. Resulta conveniente una aproximación del tipo isoparamétrico; la geometría de la línea de centroides queda definida por

$$\begin{aligned} \varphi_0(S, t) &= \varphi_0^0(S) + \mathbf{u}(S, t) \\ &= \sum_{I=1}^{NN} N^I(S) (\varphi_0^{0I} + \mathbf{u}^I(t)) \end{aligned} \quad (5.62)$$

donde los  $N^I(S)$  son las funciones usuales (polinomios de Lagrange) de los elementos unidimensionales de clase  $C^0$ .

Para la parametrización de la terna se recurre al vector rotación  $\psi(S, t)$ , cuyas componentes se interpolan en el elemento en la misma forma que la línea de centroides

$$\psi(S, t) = \sum_{I=1}^{NN} N^I(S) \psi^I(t) \quad (5.63)$$

de manera que la terna  $\Lambda(S, t)$  se obtiene de

$$\Lambda(S, t) = \exp(\Psi(S, t)) \quad (5.64)$$

La actualización de la terna entre el paso de tiempo  $k$  y el  $k + 1$  se realiza mediante la expresión

$$\Lambda_{k+1}^I = \Lambda_k^I \exp(\Theta_k^I) \quad (5.65)$$

donde  $\Theta_k^I$  es la rotación incremental entre el paso  $k$  y el paso  $k + 1$ . Conocida la nueva terna, para extraer de ella el vector rotación  $\psi_{k+1}^I$  se recurre al algoritmo de Spurrier (ver Apéndice de la referencia [27]).

La discretización del principio de trabajos virtuales (5.47) se obtiene de reemplazar una aproximación discreta de las variaciones admisibles consistente con la aproximación isoparamétrica, esto es

$$\eta_0(S) = \sum_{I=1}^{NN} N^I(S) \eta^I \quad (5.66)$$

$$\theta_0(S) = \sum_{I=1}^{NN} N^I(S) \theta^I \quad (5.67)$$

en tal caso resulta

$$\int_I \left\{ [N, M] \begin{bmatrix} \Lambda^T \frac{\partial}{\partial S} N^I & N^I(\Gamma + \epsilon_1) \times \\ \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial S} N^I + N^I \kappa \times \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N^I \boldsymbol{\omega} \times (I_\rho \boldsymbol{\omega}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \right\} dS - \quad (5.68)$$

$$- \begin{bmatrix} \bar{q}^I \\ \bar{M}^I \end{bmatrix}^T + \sum_{J=1}^{NN} [\bar{\varphi}_0^J, \bar{\omega}^J] \int_I \begin{bmatrix} N^I N^J A_\rho \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N^I N^J I_\rho \end{bmatrix} dS = 0$$

agrupando las medidas de tensión en  $R^T = [N, M]$  y las aceleraciones en  $a^J = [\ddot{\varphi}_0^J, \dot{\omega}^J]$ , definiendo la matriz de masa que relaciona los nodos  $I$  y  $J$

$$M^{IJ} = \int_I \begin{bmatrix} N^I N^J A_\rho \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N^I N^J I_\rho \end{bmatrix} dS \quad (5.69)$$

y la matriz  $B^I$

$$B^I = \begin{bmatrix} \Lambda^T \frac{\partial}{\partial S} N^I & N^I (\Gamma + \mathbf{e}_1) \times \\ \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial S} N^I + N^I \kappa \times \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

podemos escribir.

$$\left\{ \int_I \left\{ R^T B^I + [\mathbf{0}, N^I \omega \times (I_\rho \omega)] \right\} dS - [\bar{q}^I, \bar{M}^I] + \sum_{J=1}^{NN} a^{JT} M^{IJ} \right\} = 0 \quad (5.71)$$

## 5.8 ELEMENTO DE VIGA DESARROLLADO

### 5.8.1 Generalidades

Los elementos de viga implementados en el código numérico son del tipo isoparamétrico. La geometría de la línea de centroides y la terna local se interpolan y actualizan usando las expresiones (5.62)–(5.65). Se han considerado elementos de dos y tres nodos según se muestra en la Figura 5.3. La geometría inicial puede ser curva y la tangente a la línea de centroides puede no coincidir con el primer vector de la terna local. La formulación utilizada es la usual en desplazamientos impuestos (ver apartado 5.7) y para evitar que el elemento bloquee por corte transversal o por membrana, se utiliza integración reducida uniforme en el cálculo de las fuerzas residuales (un punto de integración para el elemento de dos nodos y dos para el de tres nodos). Es importante señalar que a diferencia del comportamiento de los elementos de lámina, los elementos de viga no presentan modos espúreos de deformación sin energía asociada cuando se utiliza integración incompleta.

### 5.8.2 Evaluación de las curvaturas

Recordemos que las curvaturas de la viga se obtenían al derivar la terna local respecto a la longitud de arco  $S$

$$\begin{aligned} K(S) &= \Lambda^T(S) \frac{d\Lambda(s)}{dS} \\ &= \exp(-\Psi(S)) \frac{d}{dS} \exp(\Psi(S)) \end{aligned} \quad (5.72)$$

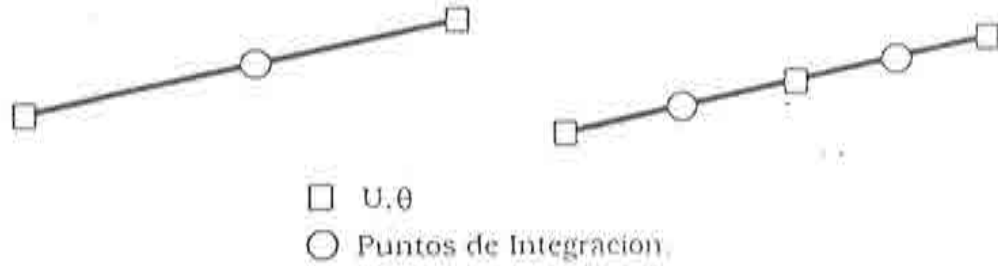


Figura 5.3 Elementos de viga implementados

Para encontrar una expresión sencilla de la derivada de  $\exp(-\Psi(S))$  conviene recordar que el mapeamiento exponencial puede escribirse en forma cerrada en función del pseudo vector rotación  $\bar{\psi}$ .

$$\exp(-\Psi) = \mathbf{1}_3 + \frac{2}{1 + \|\bar{\psi}\|^2} (\bar{\Psi} + \bar{\Psi}^2) \quad (5.73)$$

donde el pseudo vector rotación se relaciona con el vector rotación según la expresión

$$\bar{\psi} = \frac{\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\|\psi\|)}{\|\psi\|} \psi \quad (5.74)$$

Derivando la expresión (5.73) se obtiene

$$\frac{d}{dS} \exp(\Psi(S)) = \frac{2}{1 + \|\bar{\psi}\|^2} \left[ \bar{\Psi}' + \bar{\Psi}'\bar{\Psi} + \bar{\Psi}\bar{\Psi}' - \frac{2\bar{\psi} \cdot \bar{\psi}' (\bar{\Psi} + \bar{\Psi}^2)}{1 + \|\bar{\psi}\|^2} \right] \quad (5.75)$$

premultiplicando por  $\exp(-\Psi)$  y operando se puede demostrar que el tensor de curvaturas resulta

$$K(S) = \frac{2}{1 + \|\bar{\psi}\|^2} \left[ \bar{\Psi}' + \bar{\Psi}\bar{\Psi}' - \bar{\Psi}'\bar{\Psi} \right] \quad (5.76)$$

que tiene por vector axial asociado a

$$\mathbf{k}(S) = \frac{2}{1 + \|\bar{\psi}\|^2} \left[ \bar{\psi}' + (\bar{\psi} \times \bar{\psi}') \right] \quad (5.77)$$

La derivada del pseudo vector rotación se obtiene simplemente derivando la expresión (5.74)

$$\bar{\psi}' = \frac{\text{tg}(\frac{1}{2}\|\psi\|)}{\|\psi\|} \left[ \psi' - \left( 1 - \frac{\|\psi\|}{\text{sen}(\|\psi\|)} \right) \left( \frac{\psi \cdot \psi'}{\|\psi\|} \right) \frac{\psi}{\|\psi\|} \right] \quad (5.78)$$

Notar que para valores pequeños de  $\|\psi\|$  resulta  $\kappa = \Psi'$  y que para valores de  $\|\psi\|$  muy cercanos a  $\pi$  no es posible evaluar las expresiones (5.73) y (5.78). Una posibilidad para evitar este tipo de singularidades, es calcular las curvaturas rotando previamente los sistemas locales de forma que las rotaciones sean siempre moderadas y no alcancen valores cercanos a  $\pi$ . Esto último puede lograrse premultiplicando las ternas locales de los nudos  $\Lambda^I$  por la del primer nudo del elemento  $\Lambda^1$  o por la del nudo central en el caso de elementos de tres nodos. Aún en este caso es necesario notar que no es admisible una rotación relativa entre nodos de un mismo elemento mayor a  $\pi$ ; esto es debido a que el algoritmo que extrae  $\psi$  de la terna  $\Lambda$  obtiene siempre vectores con módulo menor que  $\pi$ .

### 5.8.3 Matriz de masa

La matriz de masa resulta de realizar la integral (5.69), que luego es necesario diagonalizar. Notar que en los elementos cuadráticos es posible realizar suma sobre la fila a diferencia de los elementos bidimensionales. En consecuencia la matriz de masa resulta

$$\begin{aligned} M_u^{II} &= \int_I N^I(S) A_\rho \mathbf{1}_3 dS \\ M_t^{II} &= \int_I N^I(S) I_\rho dS \end{aligned} \quad (5.79)$$

## 5.9 UNION DE ELEMENTOS

### 5.9.1 Generalidades

En el análisis de estructuras complejas es muchas veces necesario compatibilizar desplazamientos (grados de libertad en general) a nivel nodal, ya sea porque provienen de diferentes tipos de elementos o porque son diferentes los sistemas locales en que se miden las diferentes contribuciones. En otros casos los desplazamientos nodales son los mismos pero las aproximaciones a lo largo del contorno interelemento son diferentes (por ejemplo unión de elementos lineales y cuadráticos). Existe un buen número de variantes que se pueden presentar; aquí nos concentraremos en las siguientes

- i) Uniones excéntricas entre elementos de lámina y viga (la línea de centroides de la viga no coincide con la superficie media de la lámina).
- ii) Quiebros importantes en las láminas o ramificaciones (arista compartida por tres elementos de lámina).
- iii) Unión de láminas con sólidos (unión de un nudo de una lámina con una arista de un elemento de sólido).

En general este tipo de uniones conducen a una dependencia de los grados de libertad de un nodo con los grados de libertad de otros nodos. Más generalmente, podemos decir que darán lugar a relaciones (en general no lineales) del tipo

$$u^S = f(u_1^M, u_2^M, \dots) \quad (5.80)$$

donde  $u^S$  es el grado de libertad dependiente (asociado) y los  $u_i^M$  son los grados de libertad independientes (maestros). En base a los campos de desplazamientos admisibles de los grados de libertad independientes es posible expresar

$$\delta u^s = \sum a_i \delta u_i^M \quad (5.81)$$

los coeficientes  $a_i$  podrán ser constantes o dependientes de la configuración actual de acuerdo con la relación (5.80).

Teniendo en cuenta que se trabaja con una matriz de masa diagonal, las modificaciones que deben realizarse sobre los elementos de la matriz de masa, fuerzas nodales y fuerzas residuales de los grados de libertad maestros son respectivamente

$$\begin{aligned} \bar{m}_i^M &= m_i^M + a_i^2 m^S \\ \bar{f}_i^M &= f_i^M + a_i f^S \\ \bar{g}_i^M &= g_i^M + a_i g^S \end{aligned} \quad (5.82)$$

donde con una tilde indicamos los valores modificados que entran en el algoritmo de integración en el tiempo. Conocidos los desplazamientos (configuración espacial y ternas locales), velocidades y aceleraciones de los grados de libertad independientes se calculan mediante (5.80) más

$$\begin{aligned}\dot{u}^S &= \sum a_i \dot{u}_i^M \\ \ddot{u}^S &= \sum a_i \ddot{u}_i^M\end{aligned}\tag{5.83}$$

Veamos en detalle cómo son las relaciones (5.80) y (5.81) en función del tipo de unión a considerar.

### 5.9.2 Unión rígida entre dos nudos

Llamaremos unión rígida entre dos nudos cuando la posición espacial y la terna local asociada de uno de ellos (nudo asociado) depende de la posición espacial y la terna local del otro nudo (maestro) según las expresiones

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^S &= \mathbf{x}^M + \mathbf{\Lambda}^M \hat{\mathbf{d}} \\ \mathbf{\Lambda}^S &= \mathbf{\Lambda}^M \hat{\mathbf{\Lambda}}\end{aligned}\tag{5.84}$$

con (un subíndice 0 indica aquí la configuración de referencia)

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{d}} &= (\mathbf{\Lambda}_0^M)^T (\mathbf{x}_0^S - \mathbf{x}_0^M) \\ \hat{\mathbf{\Lambda}} &= (\mathbf{\Lambda}_0^M)^T \mathbf{\Lambda}_0^S\end{aligned}\tag{5.85}$$

Notar que  $\hat{\mathbf{d}}$  es la posición del nudo asociado asociado al nudo maestro y  $\hat{\mathbf{\Lambda}}$  son las componentes de la terna inicial del nudo asociado expresada en el sistema del nudo maestro. Como suponemos que ambos nudos están rígidamente unidos  $\hat{\mathbf{d}}$  y  $\hat{\mathbf{\Lambda}}$  son independientes del tiempo.

Las variaciones admisibles resultan (trabajando siempre con componentes materiales de los giros)

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{x}^S &= \delta \mathbf{U}^S = \delta \mathbf{u}^M - \mathbf{\Lambda}^M (\hat{\mathbf{d}} \times \delta \boldsymbol{\theta}^M) \\ \delta \boldsymbol{\theta}^S &= \hat{\mathbf{\Lambda}}^T \boldsymbol{\theta}^M\end{aligned}\tag{5.86}$$

Notar que los coeficientes que relacionan  $\delta \mathbf{u}^S$  con  $\delta \boldsymbol{\theta}^M$  son dependientes de la configuración ( $\mathbf{\Lambda}^M$ ) por lo que la matriz de masa (y el vector de fuerzas nodales si existieran fuerzas sobre los grados de libertad asociados) asociada a los nudos independientes debe recalcularse en cada paso de tiempo.



Esta unión rígida entre nudos ha sido pensada para resolver el problema i) de unión excéntrica entre viga y lámina, sin embargo también es capaz de resolver el problema ii) que tiene por restricciones

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^S &= \mathbf{x}^M \\ \mathbf{\Lambda}^S &= \mathbf{\Lambda}^M \hat{\mathbf{\Lambda}} \end{aligned} \quad (5.87)$$

que es un caso particular de (5.84) cuando la posición de los nudos coincide y que conduce a una relación incremental independiente de la configuración

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}^S &= \delta \mathbf{u}^M \\ \delta \boldsymbol{\theta}^S &= \hat{\mathbf{\Lambda}}^T \delta \boldsymbol{\theta}^M \end{aligned} \quad (5.88)$$

En general debe elegirse como nudo maestro aquel que tenga el mayor número de grados de libertad (el nudo de la viga en el primer caso) o establecer (liberar) como grado de libertad del problema en estudio a la rotación alrededor de la normal en el nudo de la lámina ii).

### 5.9.3 Unión de un nudo a una arista

En este caso exigimos que un nudo asociado  $\mathbf{x}^S$  se mantenga sobre una línea definida por otros dos nudos maestros  $\mathbf{x}^1$ ,  $\mathbf{x}^2$  de forma tal que las distancias del nodo asociado a los nudos maestros se mantengan proporcionales y que la dirección  $\mathbf{t}^3$  de la terna local del nodo asociado se mantenga paralela a la arista, esto es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^S &= \alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2 \\ \alpha_1 &= \frac{(\mathbf{x}_0^S - \mathbf{x}_0^1) \cdot (\mathbf{x}_0^2 - \mathbf{x}_0^1)}{\|\mathbf{x}_0^2 - \mathbf{x}_0^1\|^2} & \alpha_2 &= 1 - \alpha_1 \\ \mathbf{t}^3 &= \frac{\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1}{\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\|} \end{aligned} \quad (5.89)$$

Las relaciones que ligan las variaciones admisibles de los grados de libertad son

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}^S &= \alpha_1 \delta \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \delta \mathbf{x}^2 \\ \delta T^S &= \frac{1}{\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\|} (\hat{\mathbf{\Lambda}}^S)^T [\delta \mathbf{x}^2 - \delta \mathbf{x}^1] \end{aligned} \quad (5.90)$$

donde  $\hat{\mathbf{\Lambda}}^S$  son las dos primeras columnas de la terna local (no hay restricción al giro alrededor de  $\mathbf{t}^3$ ). Notar que en este caso la relación que liga  $\delta T^S$  con los  $\delta \mathbf{x}^i$  es dependiente de la configuración.

Este modelo de restricción permite compatibilizar los desplazamientos de una arista de un sólido con los de un nodo de una lámina (problema iii) y es adecuado como transición entre elementos estructurales discretizados con elementos de lámina y aquellos discretizados con elementos de sólido.

Es importante destacar que los modelos aquí presentados son adecuados para grandes desplazamientos y rotaciones.



## Capítulo 6

### ASPECTOS COMPUTACIONALES

#### 6.1 ESQUEMA DE SOLUCION EXPLICITO

El método de solución para un programa de elementos finitos explícito está basado en la resolución de las ecuaciones dinámicas del movimiento, las cuales para el tiempo  $t$  se escriben en forma discretizada

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}^t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}^t = \mathbf{R}^t - \mathbf{F}^t + \mathbf{F}^{(c)t} \quad (6.1)$$

en donde  $\mathbf{M}^t$  es la matriz de masa,  $\mathbf{C}^t$  es la matriz de amortiguamiento,  $\ddot{\mathbf{r}}^t$  es el vector de aceleraciones nodales que contiene las aceleraciones tanto de traslación, como de giro ( $\ddot{\mathbf{u}}^t$  y  $\ddot{\boldsymbol{\omega}}^t$  respectivamente),  $\dot{\mathbf{r}}^t$ , es el vector de velocidades tanto de traslación, como de giro ( $\dot{\mathbf{u}}^t$  y  $\dot{\boldsymbol{\omega}}^t$  respectivamente),  $\mathbf{R}^t$  es el vector de cargas externas,  $\mathbf{F}^t$  es el vector de fuerzas internas y  $\mathbf{F}^{(c)}$  contiene las fuerzas de contacto.

Las ecuaciones del movimiento (6.1) se integran en el dominio temporal utilizando el método de las diferencias centrales. Dicho algoritmo de integración se ha implementado de forma que permita incrementos de tiempo variables. La ecuación de equilibrio dinámico escrita para una cierta configuración conocida en el tiempo  $t$  permite obtener la configuración en el tiempo  $t + \Delta^{(n)}t$ . La configuración deformada para un cierto tiempo  $t$  se define mediante los vectores desplazamiento  $\mathbf{u}^t$  en todos los puntos nodales y las matrices de rotación  $\boldsymbol{\Lambda}^t$  asociadas a los giros en dichos puntos nodales (lógicamente si los grados de rotación están activos).

El algoritmo para los grados de libertad de traslación se escribe

$$\ddot{\mathbf{u}}^t = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{R}^t - \mathbf{F}^t + \mathbf{F}^{(c)t} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^t) \quad (6.2)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta^{(n)t}/2} = \dot{\mathbf{u}}^{t-\Delta^{(o)t}/2} + 0.5\ddot{\mathbf{u}}^t(\Delta^{(o)t} + \Delta^{(n)t}) \quad (6.3)$$

$$\mathbf{u}^{t+\Delta^{(n)t}} = \mathbf{u}^t + \dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta^{(n)t}/2}\Delta^{(n)t} \quad (6.4)$$

donde  $\Delta^{(o)t}$  es el incremento de tiempo en la etapa anterior y  $\Delta^{(n)t}$  el incremento de tiempo la etapa actual.

Para los grados de libertad de giro, las ecuaciones (6.2), (6.3) y (6.4) no pueden utilizarse directamente, pues la velocidad angular no puede ser integrada al no ser la derivada de ningún vector. La configuración angular se actualiza mediante el siguiente algoritmo aplicado a las ecuaciones del movimiento de rotación.

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^t = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{R}^t - \mathbf{F}^t + \mathbf{F}^{(c)t} - \mathbf{C}\boldsymbol{\omega}^t) \quad (6.5)$$

$$\boldsymbol{\omega}^{t+\Delta^{(n)t}/2} = \boldsymbol{\omega}^{t-\Delta^{(o)t}/2} + 0.5\dot{\boldsymbol{\omega}}^t(\Delta^{(o)t} + \Delta^{(n)t}) \quad (6)$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}^{t+\Delta^{(n)t}/2}\Delta^{(n)t} \quad (6.7)$$

$$\Delta\boldsymbol{\Lambda} = \cos\|\Delta\boldsymbol{\theta}\|\mathbf{1} + \frac{\sin\|\Delta\boldsymbol{\theta}\|}{\|\Delta\boldsymbol{\theta}\|}\widetilde{\Delta\boldsymbol{\theta}} + \frac{1 - \cos\|\Delta\boldsymbol{\theta}\|}{\|\Delta\boldsymbol{\theta}\|^2}\Delta\boldsymbol{\theta}\Delta\boldsymbol{\theta}^T \quad (6.8)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^{t+\Delta^{(n)t}} = \Delta\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^t \quad (6.9)$$

siendo  $\Delta\boldsymbol{\theta}$  el vector incremento de rotación (los incrementos de rotación se suponen pequeños y son tratados como un vector),  $\Delta\boldsymbol{\Lambda}$  es la matriz incremental de rotación,  $\mathbf{1}$  es la matriz unidad,  $\widetilde{\Delta\boldsymbol{\theta}}$  es la matriz antisimétrica asociada con el vector  $\Delta\boldsymbol{\theta}$  y  $\|\Delta\boldsymbol{\theta}\|$  es el módulo del vector  $\Delta\boldsymbol{\theta}$ .

La efectividad computacional del método explícito está basada en la utilización de matrices de masa diagonales. Ello lleva consigo menores necesidades de almacenamiento y permite obtener la solución sin necesitar de resolver ningún sistema de ecuaciones.

## 6.2 Estabilidad numérica

La estabilidad condicional del método de las diferencias centrales requiere que el incremento de tiempo  $\Delta t$  no exceda un valor crítico  $\Delta t_{cr}$

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} \quad (6.10)$$

en donde el incremento de tiempo crítico para un algoritmo de diferencias centrales aplicado a una estructura lineal y sin amortiguamiento viene dado por

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{max}} \quad (6.11)$$

siendo  $\omega_{max}$  la frecuencia más elevada del sistema. Si existiera amortiguamiento, el incremento de tiempo vendría dado por

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{max}} \left( \sqrt{1 + \mu^2} - \mu \right) \quad (6.12)$$

en donde  $\mu$  es la fracción del amortiguamiento crítico correspondiente a la frecuencia más elevada.

En el análisis no lineal, la frecuencia más elevada cambia a lo largo del tiempo, por lo que también varía el incremento del tiempo crítico. Debe por tanto ser recalculada cada varios intervalos temporales. Las ecuaciones (6.11) y (6.12) pueden utilizarse para un análisis linealizado de estabilidad, pues la experiencia demuestra que proporcionan buenos estimadores del incremento de tiempo crítico en análisis no lineal. Los efectos de las no linealidades se tienen en cuenta reduciendo el incremento de tiempo en un 10-25 % por debajo del límite de estabilidad lineal, aunque esta reducción no asegura siempre la estabilidad, la cual debe comprobarse al final del análisis realizando un balance energético.

El programa no calcula el valor de la frecuencia más elevada. Esta se estima mediante el teorema que establece que la máxima frecuencia de una estructura discretizada en elementos finitos es inferior a la mayor frecuencia de los elementos, es decir

$$\omega_{max} \leq \max \left( \omega_{max}^1, \dots, \omega_{max}^{NE} \right) \quad (6.13)$$

en donde  $\omega_{max}^n$  es la máxima frecuencia del elemento  $n$  y  $NE$  es el número de elementos finitos del modelo.

Para evitar tener que calcular exactamente la mayor frecuencia de los elementos, se utilizan expresiones aproximadas. La velocidad de transmisión de onda  $c$  es igual a la velocidad de transmisión del sonido en el material

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (6.14)$$

en donde  $\rho$  es la densidad y  $E$  el módulo de Young. Por tanto, el incremento de tiempo crítico para un elemento lineal unidimensional con masa concentrada y su amortiguamiento puede ser obtenido fácilmente

$$\Delta t_{cr} = \frac{L}{c} \quad (6.15)$$

en donde  $L$  es la longitud del elemento. Para un elemento en deformación plana el incremento de tiempo crítico se obtiene utilizando la velocidad de transmisión de las ondas planas

$$\Delta t \leq L \sqrt{\frac{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}} \quad (6.16)$$

en donde  $L$  es la menor distancia entre dos nodos. El incremento de tiempo crítico para elementos 3D se determina utilizando la expresión (6.15) para el lado menor del elemento.

Para el caso de elementos lámina el incremento de tiempo crítico se calcula considerando de forma separada las frecuencias de cortante, flexión y membrana. El primer incremento de tiempo crítico debido a la flexión fue considerablemente menor que el debido a los efectos de membrana. Al objeto de incrementarlo, los términos de inercia a la rotación se escalan de acuerdo con [1, 120].

El avance en el tiempo mediante incrementos de tiempo estable se basa en las fórmulas propuestas por Belytschko [1]. Las frecuencias de cortante, flexión y membrana,  $\omega_{max,S}^n$ ,  $W_{max,B}^n$ ,  $\omega_{max,S}^n$  respectivamente, tienen dadas por las siguientes expresiones para elementos cuadriláteros de lámina

$$\omega_{max,S}^2 = \frac{1}{M} \left( \frac{c_s a_1}{A} + \frac{c_s A}{4\alpha} \right) \quad (6.17)$$

$$\omega_{max,B}^2 = \frac{D}{4\alpha M A} \left( R_1 + \sqrt{R_1^2 - 4(1-\nu^2)R_2^2} \right) \quad (6.18)$$

$$\omega_{max,M}^2 = \frac{12\alpha\omega_{max,B}^2}{h^2} \quad (6.19)$$

donde

$$M = \frac{1}{4}\rho Ah \quad (6.20)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (6.21)$$

$$c_s = \kappa Gh \quad (6.22)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6.23)$$

$$R_1 = y_{24}^2 + y_{31}^2 + x_{24}^2 + x_{31}^2 \quad (6.24)$$

$$R_2 = y_{31}x_{24} - y_{24}x_{31} = 2A \quad (6.25)$$

$$R_3 = \sqrt{R_1^2 - 4R_2^2} \quad (6.26)$$

$$a_1 = \frac{1}{4}(R_1 + R_3) \quad (6.27)$$

siendo  $D$  la rigidez a flexión,  $M$  la masa modal,  $A$  el área del elemento,  $h$  el espesor,  $\kappa$  el factor de corrección a cortante y

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j \quad (6.28)$$

en donde  $x_i, y_i$  son las coordenadas  $x$  e  $y$  del nodo  $i$  del elemento,  $i = 1, 2, 3, 4$  en el sistema de coordenadas locales  $xy$  colocadas de forma arbitraria en el elemento plano.

El coeficiente  $\alpha$  en el factor de escalado de la inercia al giro

$$\alpha = \frac{h^2 + A}{12} \quad (6.29)$$

Las respectivas frecuencias para un elemento triangular vienen dadas por

$$\omega_{\max,S}^2 = \frac{1}{M} \left( \frac{c_s a_1}{A} + \frac{c_s A}{3\alpha} \right) \quad (6.30)$$



$$\omega_{\max,B}^2 = \frac{D}{8\alpha MA} \left( R_1 + \sqrt{R_1^2 - 4(1 - \nu^2)R_2^2} \right) \quad (6.31)$$

$$\omega_{\max,M}^2 = \frac{12\alpha\omega_{\max,B}^2}{h^2} \quad (32)$$

donde

$$M = \frac{1}{3}\rho Ah \quad (6.33)$$

$$R_1 = y_{23}^2 + y_{31}^2 + y_{12}^2 + x_{32}^2 + x_{31}^2 + x_{21}^2 \quad (6.34)$$

$$R_2 = (y_{23}^2 + y_{31}^2 + y_{12}^2) + (x_{23}^2 + x_{31}^2 + x_{12}^2) - (y_{23}x_{32} + y_{31}x_{13} + y_{12}x_{21})^2 \quad (6.35)$$

$$R_3 = \sqrt{R_1^2 - 4R_2^2} \quad (6.36)$$

$$a_1 = \frac{1}{8}(R_1 + R_3) \quad (6.37)$$

Si los elementos triangulares son cuadriláteros, es decir con funciones de forma cuadráticas (total 6 nodos, 3 en los vértices y 3 en los puntos medios de los lados) el elemento se divide en cuatro subtriángulos si se aplican en las fórmulas (6.30) - (6.37) para cada uno de ellos.

## Capítulo 7

### EJEMPLOS

#### 7.1 MENSULA SOMETIDA A CARGA SUBITA

La ménsula de la Fig. 7.1 se somete a la carga súbita que también se señala en la misma figura.

Las características de la viga son las siguientes

$$L = 10 \text{ in}$$

$$b = 1 \text{ in}$$

$$\rho = 0.1024 \cdot 10^{-5} \text{ lb} \times \text{s}^2/\text{in}^4$$

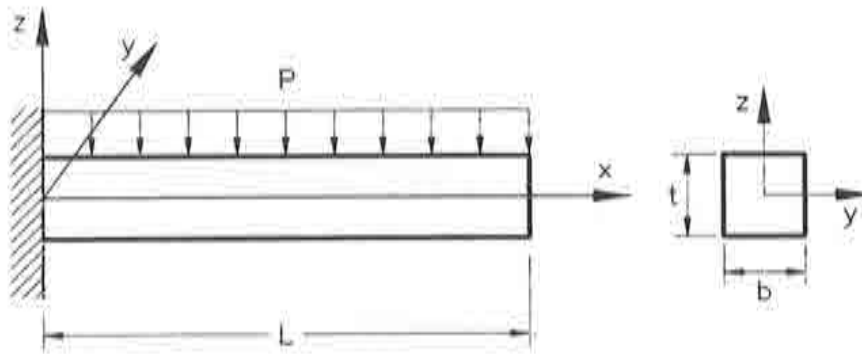
$$E = 12000 \text{ lb/in}^2$$

$$\nu = 0.2$$

Los momentos de inercia son los siguientes

$$I_1 = \frac{bt^3}{12} = \frac{1}{12} \text{ in}^4$$

$$I_2 = \frac{tb^3}{12} = \frac{1}{12} \text{ in}^4$$



a) DEFINICION DEL PROBLEMA



b) CARGA

Figura 7.1 Viga sometida a carga súbita

Módulo de torsión  $I_t = I_1 + I_2$   
 Área de la sección recta  $A = bt = 1 \text{ in}^2$

Se considera la viga elástica.

La viga se ha analizado utilizando elementos lámina de 4 nodos. Se ha utilizado un total de 5 elementos y 12 nodos.

Por lo que respecta al valor de las cargas  $P(t)$  se han adoptado los siguientes valores

- Análisis lineal  $P(t) = 0.01 \text{ psi}$
- Análisis no lineal  $P(t) = 2.85 \text{ psi}$

### 7.1.1 Resultados obtenidos

En la Fig. 7.2 puede verse el movimiento vertical del extremo de la ménsula en función del tiempo para un análisis lineal, mientras que la Fig. 7.3 muestra los mismos resultados teniendo en cuenta los grandes movimientos.

En la Fig. 7.4 puede verse la deformada de toda la viga. Por otra parte, en las tablas 7.1 y 7.2 puede verse la comparación de la resolución del problema utilizando

diferentes formulaciones con elementos de viga y de placa.

	Nodos	El.	$\Delta t$ (s)	Nºincr. de tiempo	Max(in) defl.	Periodo (s)
Elemento[1] viga	6	5	$6.0 \cdot 10^{-6}$	1000	0.02534	$5.81 \cdot 10^{-3}$
Elemento[1] placa	12	20	$6.0 \cdot 10^{-6}$	1000	0.02408	$5.66 \cdot 10^{-3}$
Analítico	-	-	-	-	0.0250	$5.72 \cdot 10^{-3}$
SIMPACT	12	5	$\approx 3.5 \cdot 10^{-6}$	1733	0.02536	$5.79 \cdot 10^{-3}$

TABLA 7.1 Pequeños desplazamientos  $P = 0.01$  psi

SIMPACT y otros códigos.

	Nodos	El.	$\Delta t$ (s)	Nºincr. de tiempo	Max(in) defl.	Periodo (s)
Elemento[1] viga	6	5	$6.0 \cdot 10^{-6}$	1000	6.321	$5.58 \cdot 10^{-3}$
Elemento[1] placa	12	20	$6.0 \cdot 10^{-6}$	1000	6.076	$5.59 \cdot 10^{-3}$
Shantran et al.(1976)[2]	-	-	-	-	$\approx 6.00$	$\approx 5.6 \cdot 10^{-3}$
SIMPACT	12	5	$3.46 \cdot 10^{-6}$	1733	6.025	$5.46 \cdot 10^{-3}$

TABLA 7.2 Grandes desplazamientos  $P = 2,85$  psi

whams - ex. 1, linear response history

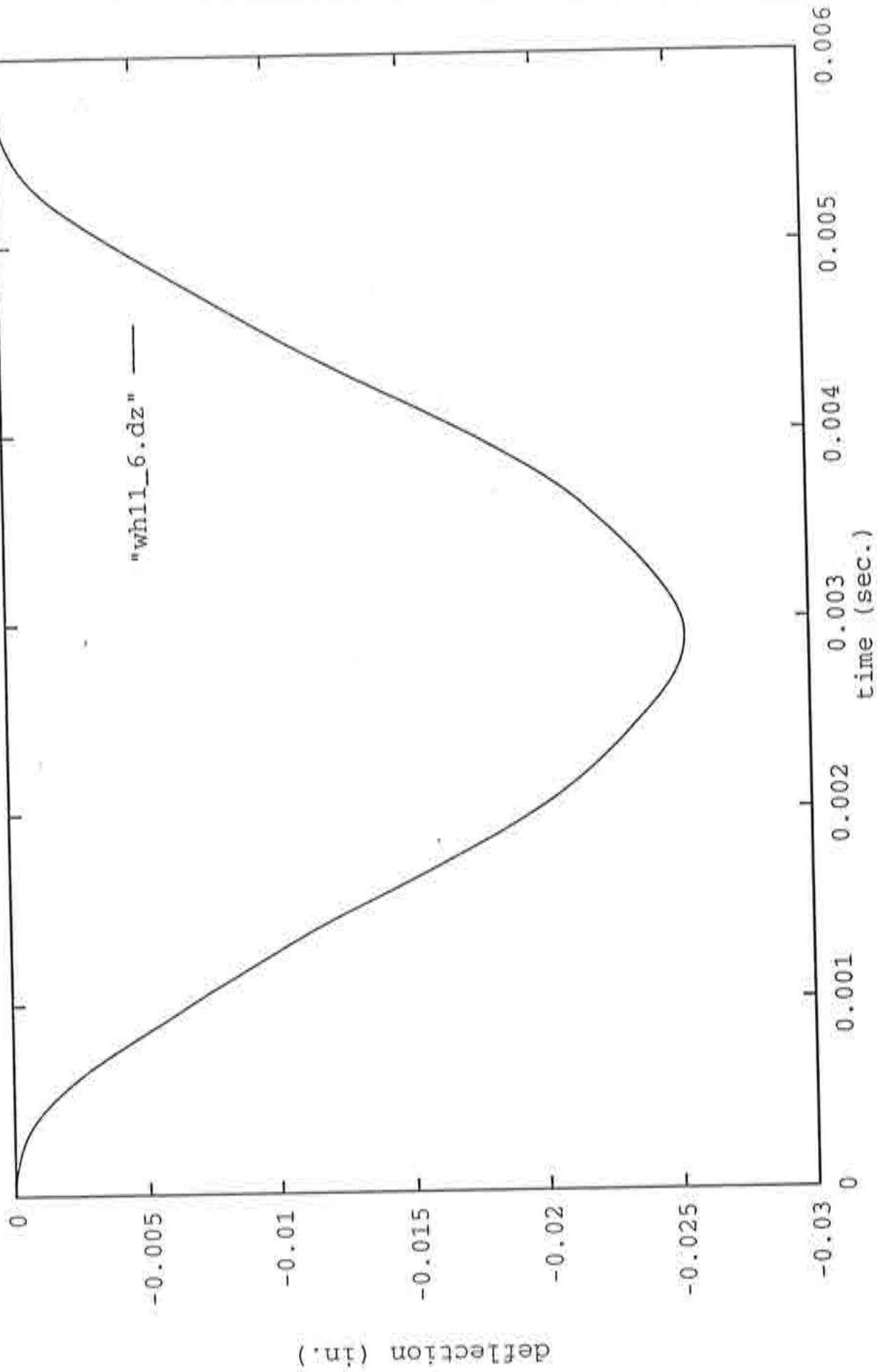


Figura 7.2 Movimiento vertical del extremo de la ménsula (análisis lineal)

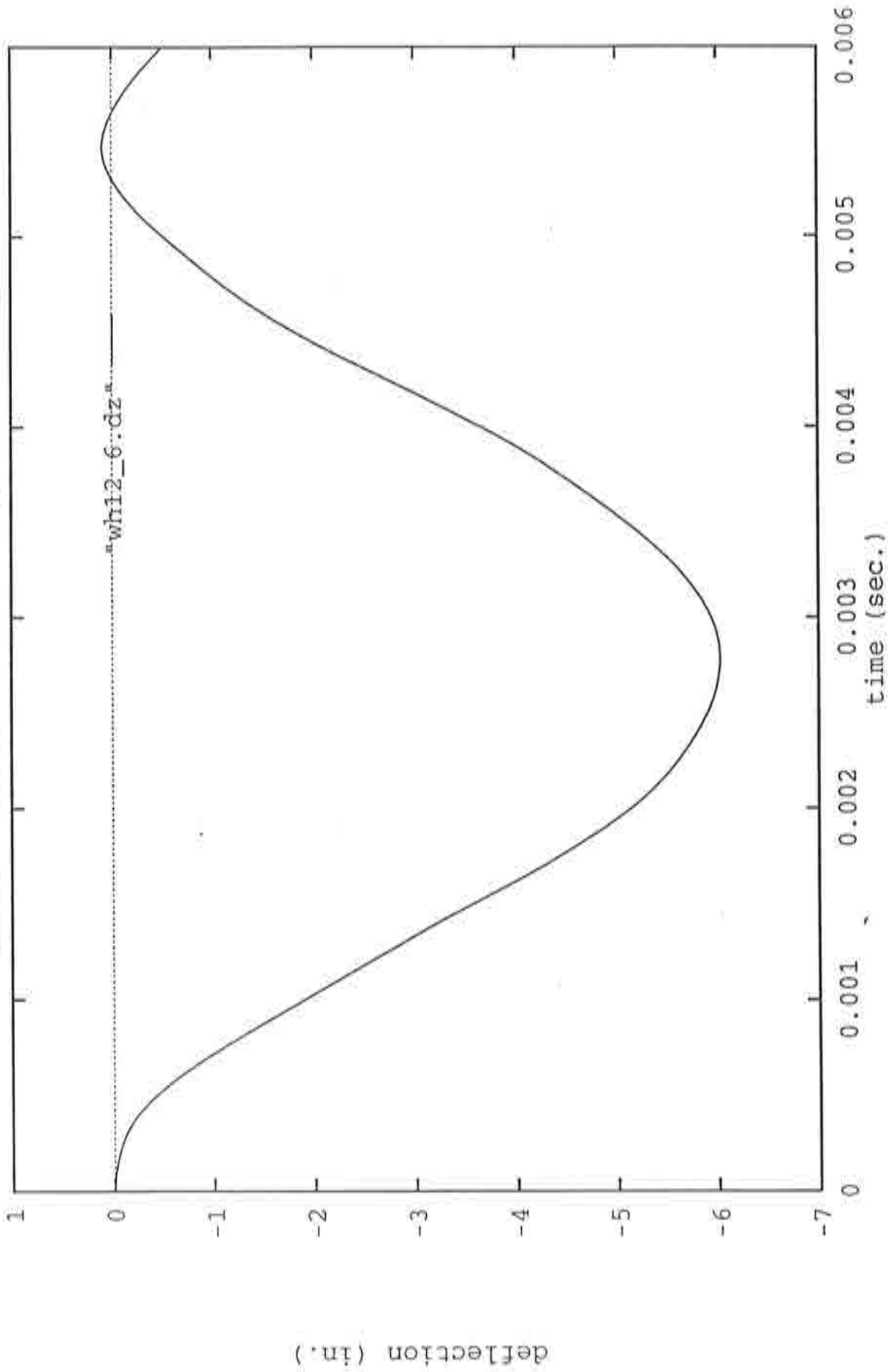
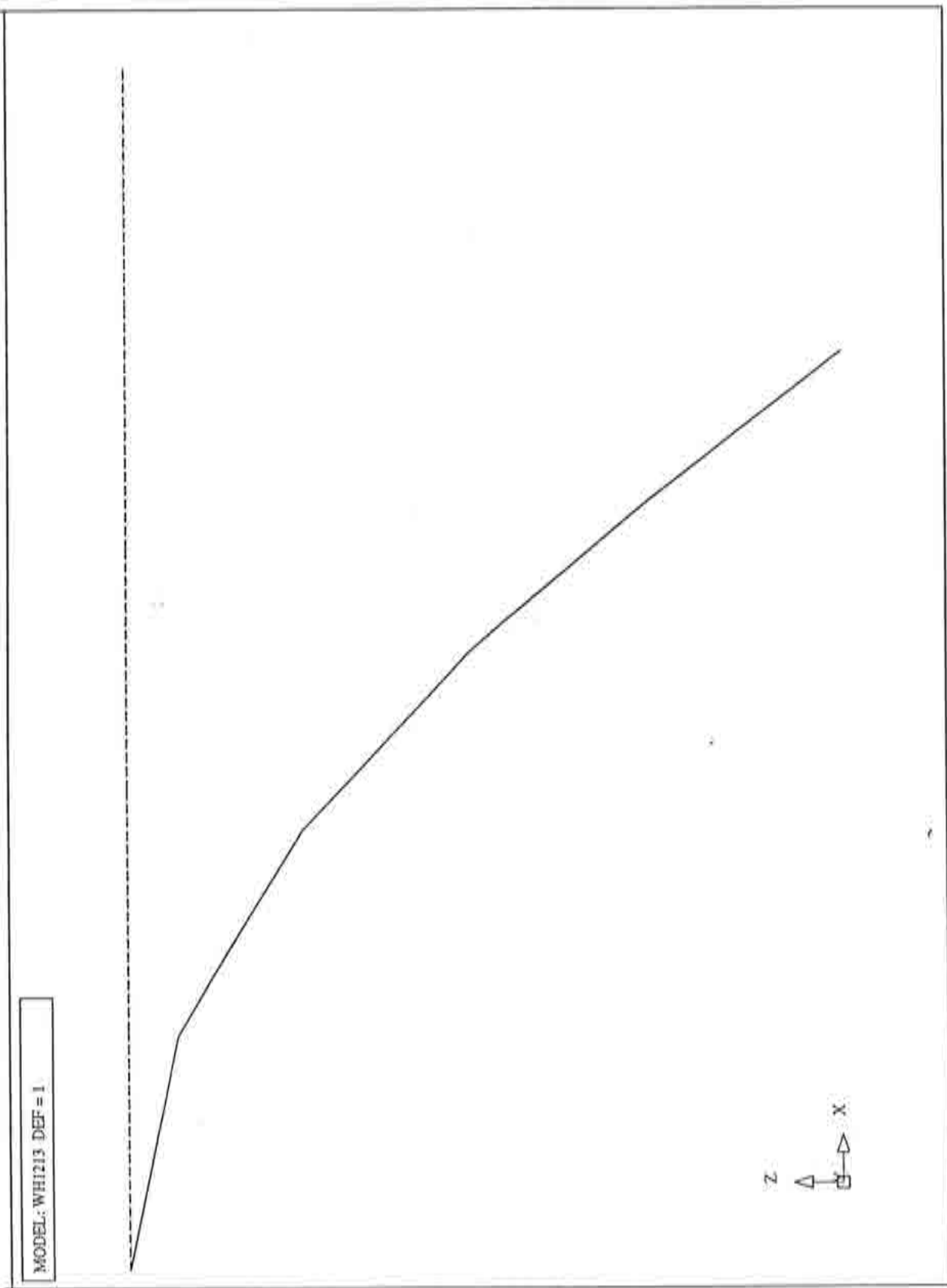


Figura 7.3 Movimiento vertical del extremo de la ménsula (análisis no lineal)



nonlinear deformation for cantilever beam - whams - ct.1 - shell model

Figura 7.4 Deformada de la viga

## 7.2 LAMINA CILINDRICA CON VELOCIDAD INICIAL

Un panel cilíndrico de 120 grados de apertura (Fig. 7.5) se carga impulsivamente con una velocidad inicial en parte de la estructura. Debido a la simetría se ha modelado la mitad de la estructura donde se han usado 429 nodos y 384 elementos de 4 nodos. Se ha supuesto que el panel está articulado en sus extremos longitudinales y empotrado en los laterales.

Las propiedades del material y la velocidad inicial son las siguientes

Densidad	$\rho = 2.5 \times 10^{-4} \text{ lb} \times \text{s}^2/\text{in}^4$
Módulo de elasticidad	$E = 1.05 \times 10^7 \text{ psi}$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0.33$
Tensión de fluencia	$\sigma_y = 4.4 \times 10^4 \text{ psi}$
Módulo plástico	$E_p = 0$
Velocidad inicial	$V_0 = 5650 \text{ in/s}$

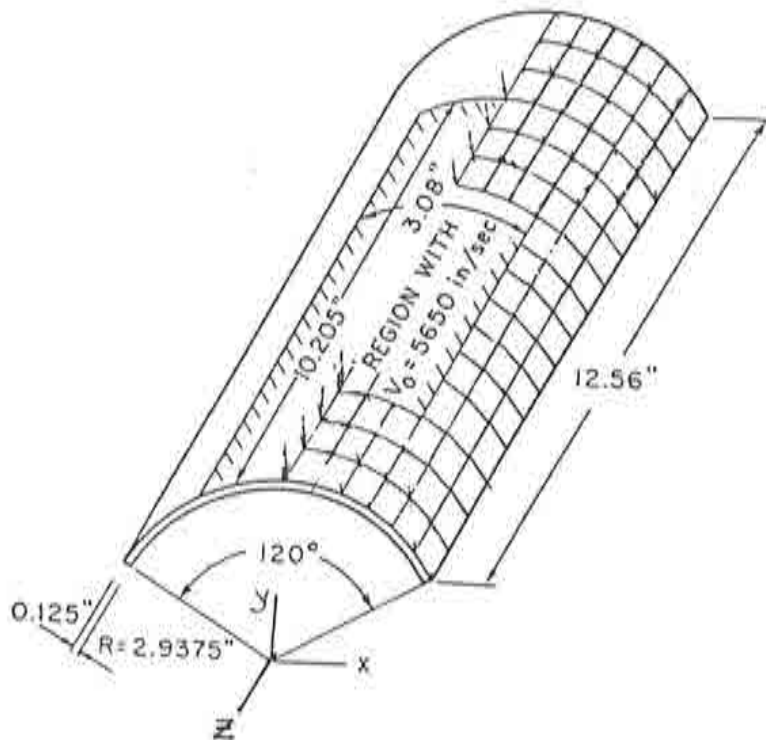


Figura 7.5 Panel cilíndrico sometido a carga impulsiva



### 7.2.1 Resultados obtenidos

Por razones de simetría se analiza exclusivamente media lámina. En la Fig. 7.6 puede verse la discretización realizada de la mitad de la estructura. En la Fig. 7.7 puede verse la deformada para diferentes instantes de tiempo. En la Fig. 7.8 puede verse el desplazamiento vertical en la coronación de las secciones  $y = 6,28$  e  $y = 9,42$  así como los resultados proporcionados por WHAMS [1] y por la experimentación [3].

Asimismo, en la Fig. 7.9 se representa la deformada de la sección media para un tiempo  $t=1$  ms. Por último, en la Fig. 7.10 se representa la deformada de la línea de coronación en el instante tiempo  $t=1$  ms.

Como puede comprobarse, los resultados obtenidos por SIMPACT son plenamente satisfactorios.

MODEL.: WH13

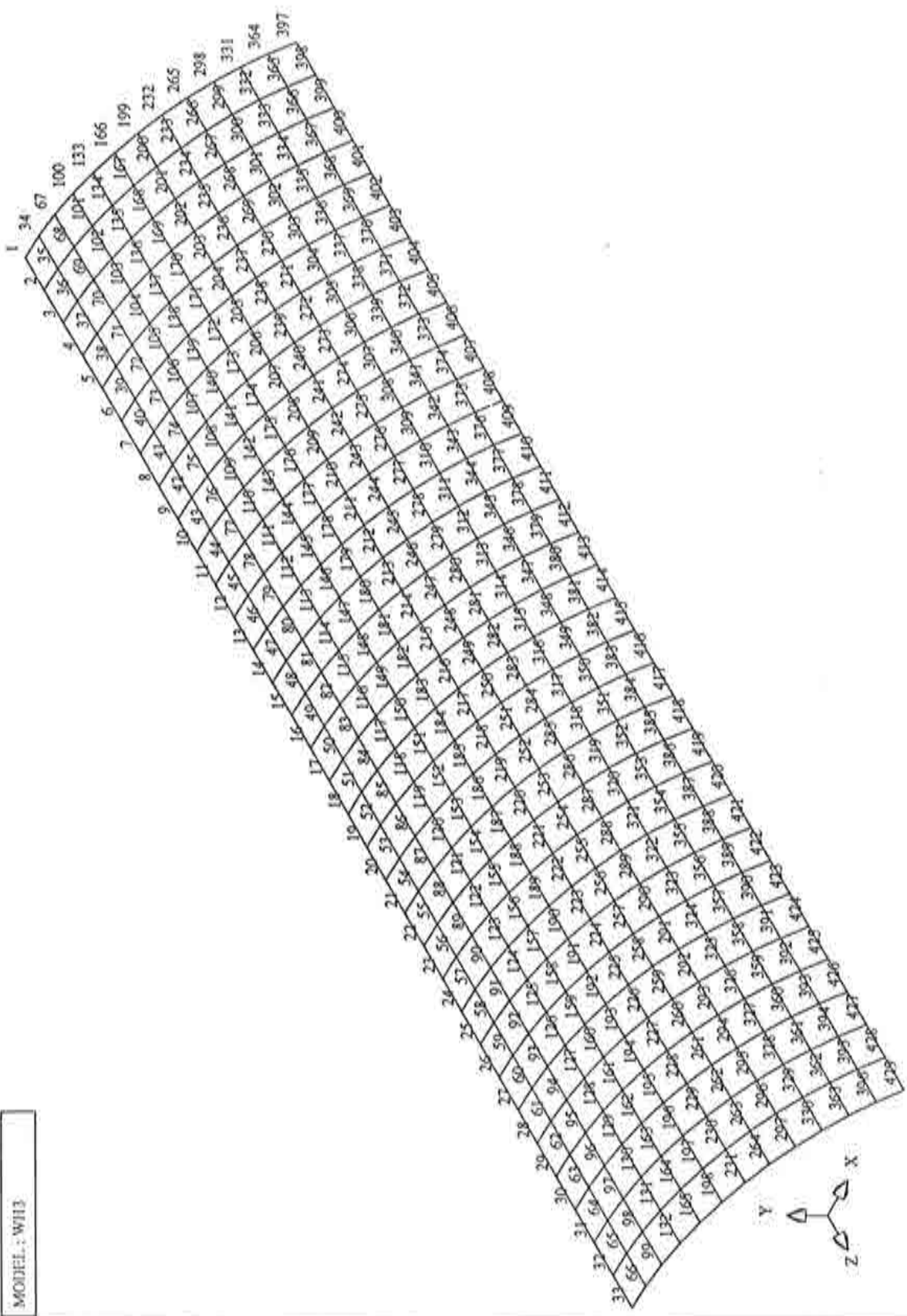
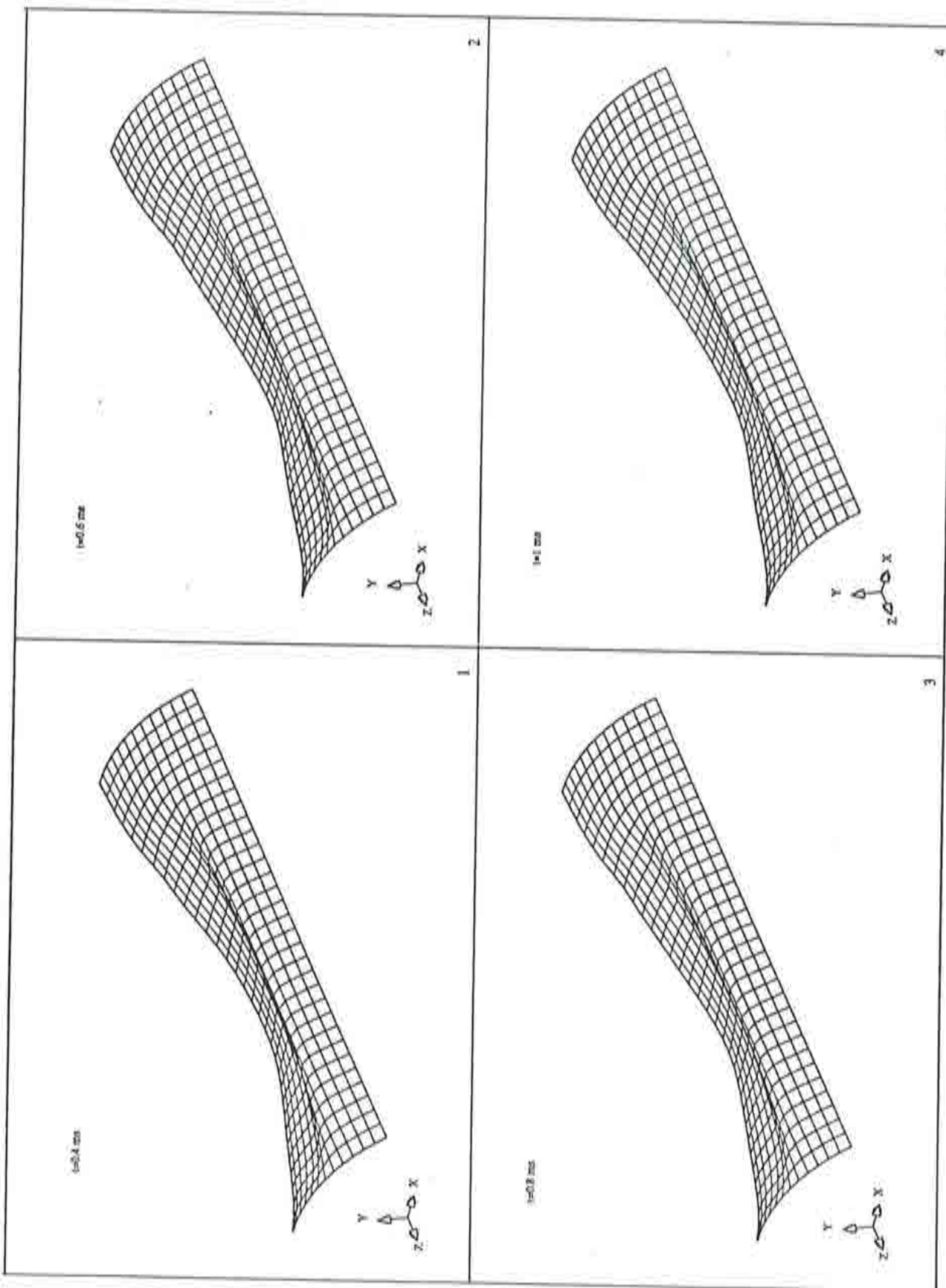


Figura 7.6 Discretización de media estructura



wh.34 (whams - example 3) deformed configuration at different time instants

Figura 7.7 Deformada para diferentes instantes de tiempo

whams - ex. 3, response histories, 384 elements

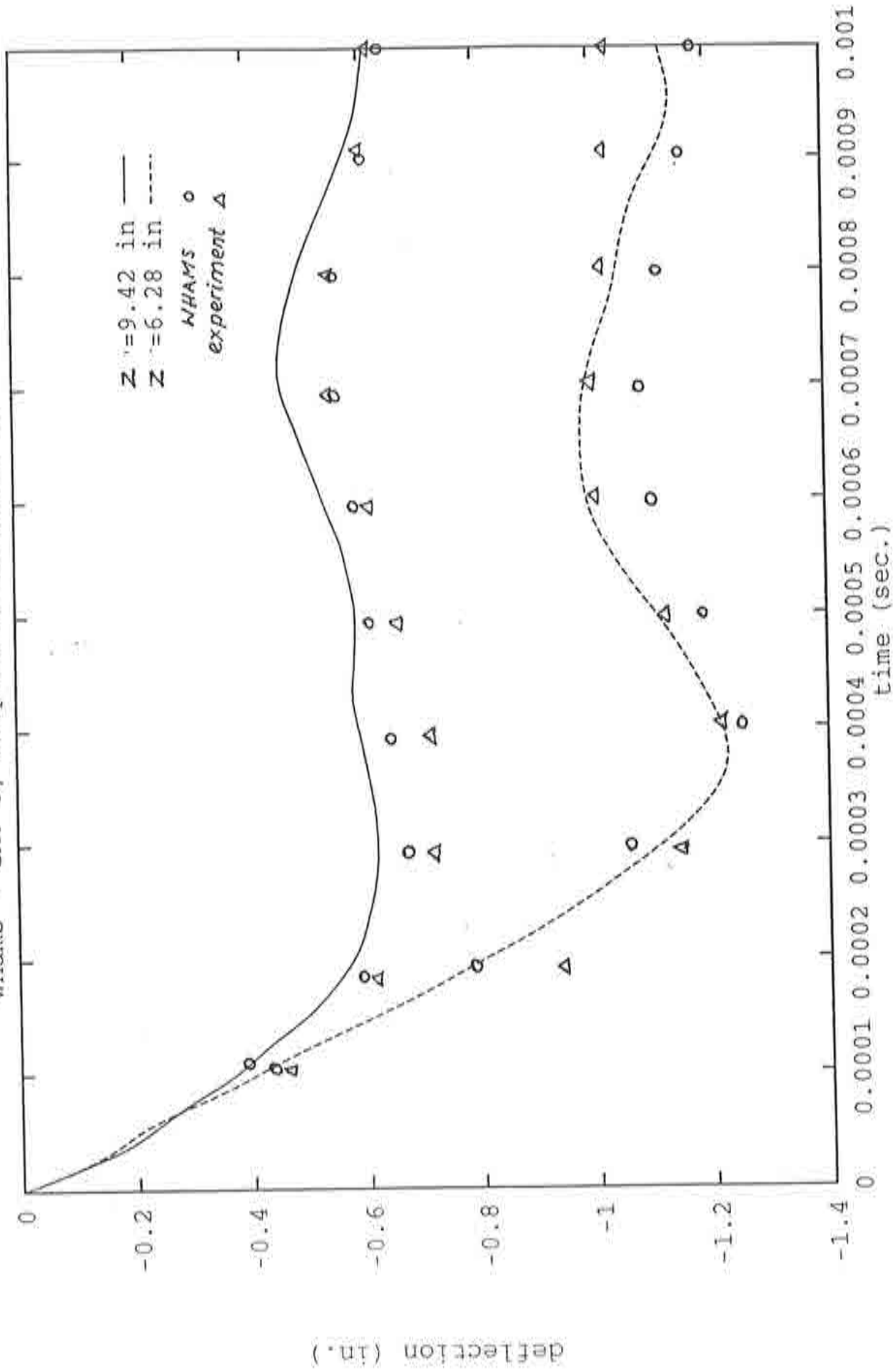


Figura 7.8 Desplazamiento vertical en la coronación de las secciones  $y = 6.38$  e  $y = 9.42$

whams - ex. 3, final deform. at the middle cross-section

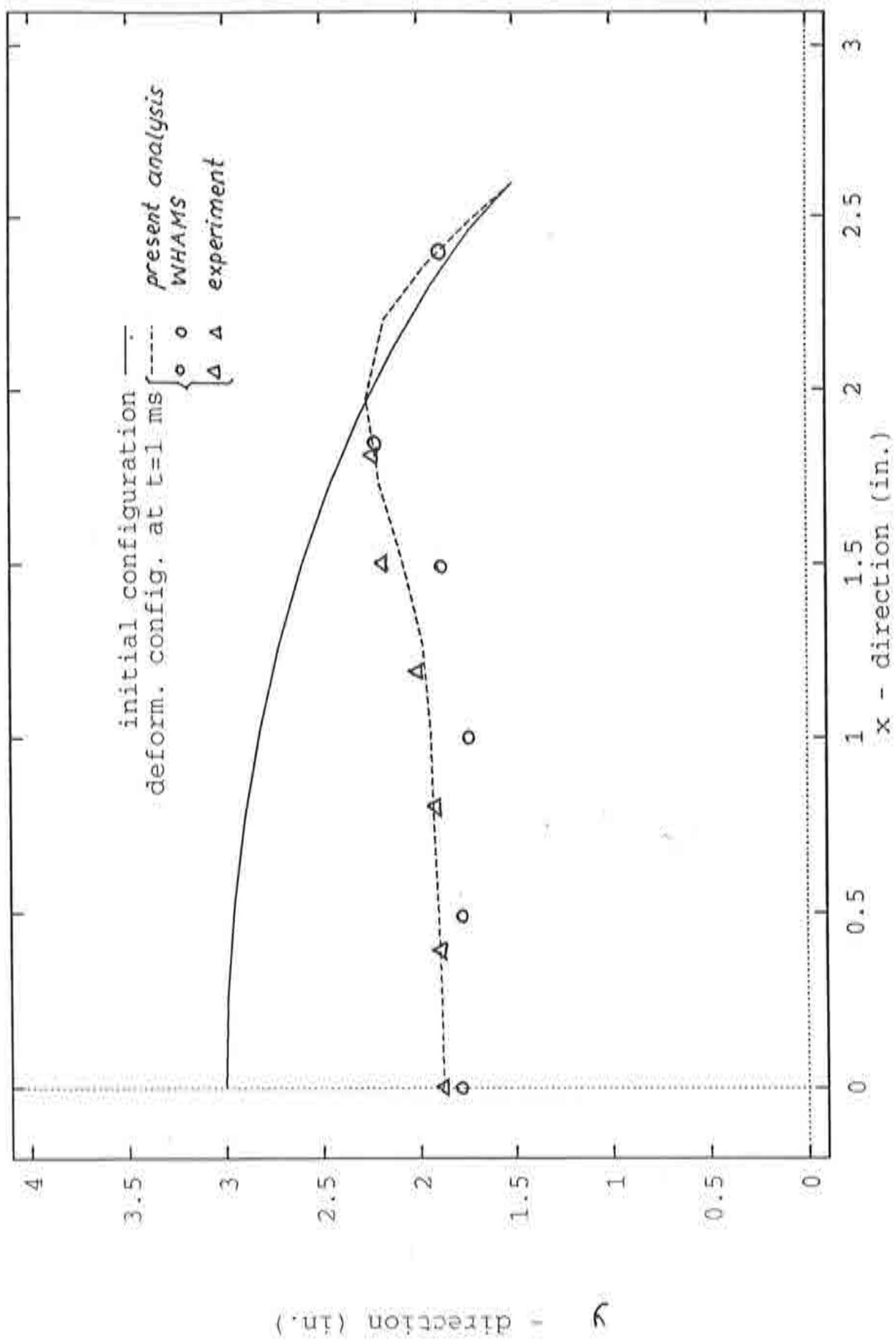
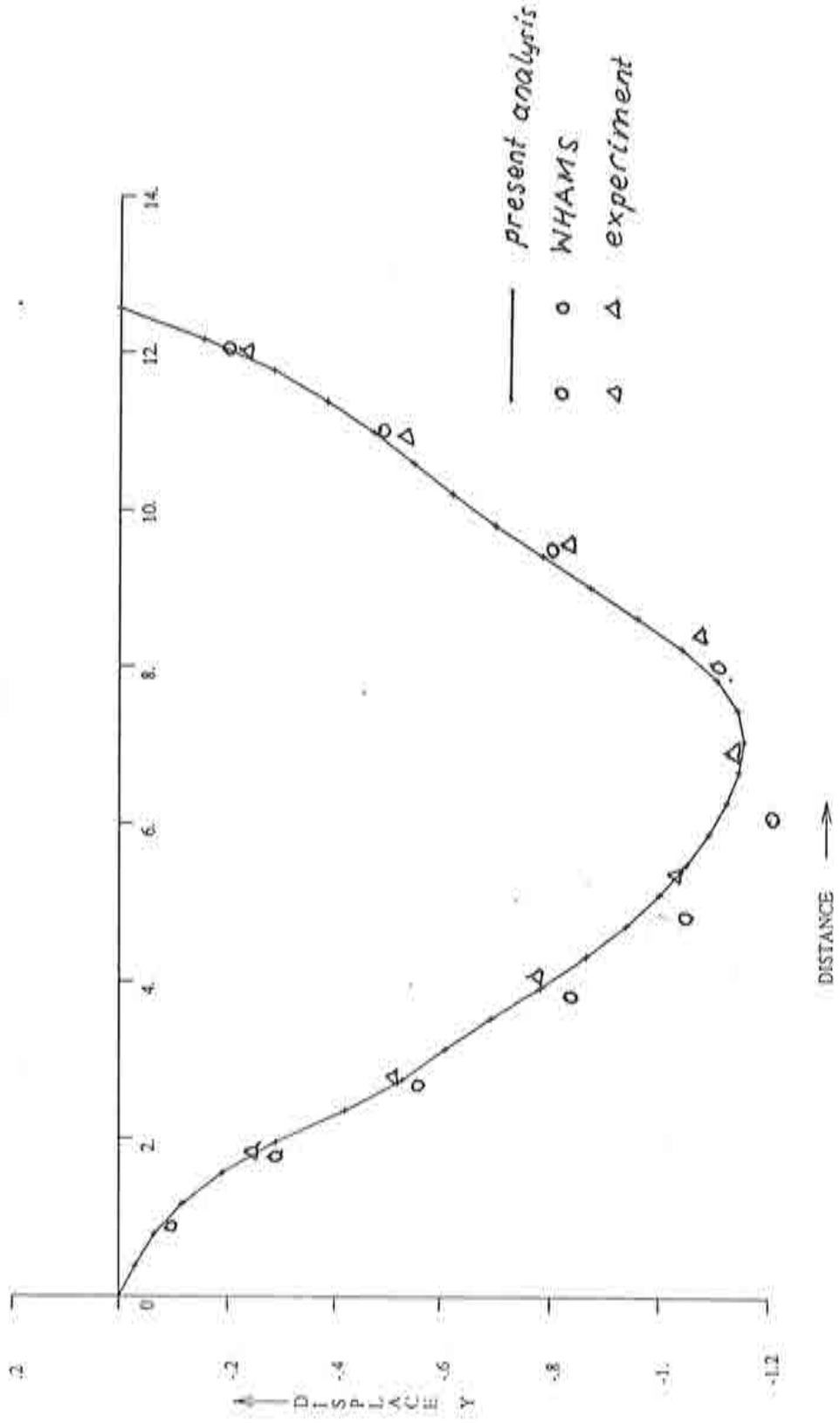


Figura 7.9 Deformada de la sección media para t = 1 ms

MODEL: WH3513  
 L005: whams-3: cylindrical  
 STEP: 2094 TIME: .001  
 NODAL DISPLACE Y  
 VARIATION ALONG A LINE



whams\_2 example 3 - deflection of the crown line at  $t = 1$  ms

Figura 7.10 Deformada de la línea de coronación para  $t = 1$  ms

### 7.3 CÚPULA REBAJADA BAJO PRESION EXTERNA

Este ejemplo ha sido muy utilizado en la literatura especializada para comprobar diferentes elementos finitos y formulaciones elastoplásticas en régimen dinámico. Debido a que es un problema axisimétrico, la forma más sencilla de analizarlo es con elementos de láminas o sólidos de revolución, como fue hecho originalmente [ 4 ]. Aquí sin embargo, lo haremos con elementos de lámina. En la Fig. 7.11 se muestra la geometría de la cúpula y las características del material constitutivo. Se han utilizado elementos triangulares de 6 nodos, con un total de 81 nodos y 32 elementos.

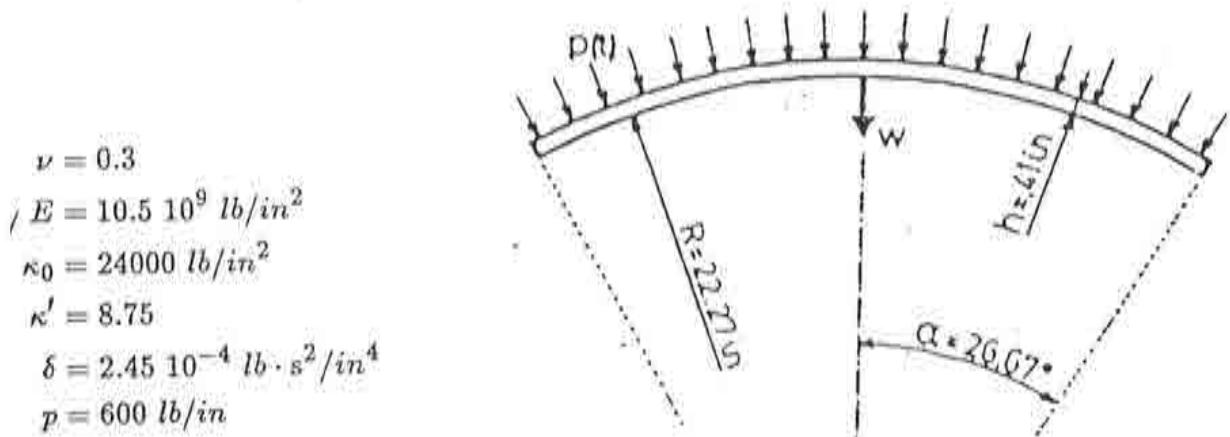


Figura 7.11 Cúpula esférica bajo presión uniforme ( carga escalón )

#### 7.3.1 Resultados

En la Fig. 7.12 puede verse los movimientos del punto más elevado de la lámina en función del tiempo. Los resultados concuerdan con los proporcionados por el programa WHAMS [ 1 ].

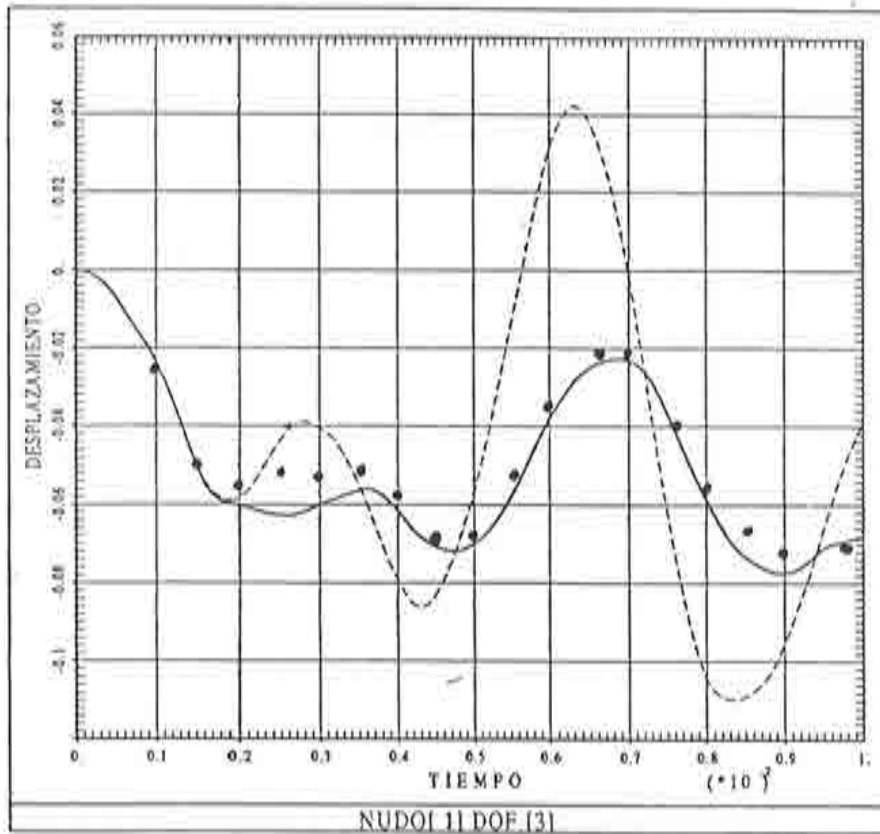


Figura 7.12 Malla 81 nodos (triángulos); carga uniformemente distribuida. Desplazamientos

#### 7.4 IMPACTO DE UNA BARRA CONTRA UNA LAMINA

Como cuarto ejemplo se ha modelado un problema del cual se tienen resultados experimentales [52]. Se ha analizado el impacto de un proyectil de baja velocidad ( $V_0=6.97$  m/s) contra una lámina delgada. La lámina es cuadrada de 600 mm de lado y espesor 5.111 mm. El proyectil tiene un diámetro de 40 mm y una masa de 40.5 kg. Se supone deformable y ha sido modelado con elementos sólidos de ocho nodos. Para la lámina se han utilizado 48 elementos en la discretización (ver Fig. 7.13) de un cuarto de la estructura y 6 elementos de sólido de 8 nodos para la barra.

Las propiedades de los materiales son las siguientes



Módulo de elasticidad	$E = 2.11 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0.3$
Densidad	$\rho = 7840 \text{ kg/m}^3$
Tensión de fluencia	$\sigma_y = 1.2 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$
Módulo de endurecimiento	$= 10^6 \text{ N/m}^2$

#### 7.4.1 Resultados obtenidos

En la Fig. 7.13 se muestran los contornos de desplazamiento vertical sobre la geometría deformada para el instante de máximo desplazamiento. Se ha graficado además en la Fig. 7.14 el desplazamiento del centro de la placa en función del tiempo, desde el instante en que entra en contacto con el proyectil hasta la definitiva separación de los mismos. El máximo desplazamiento calculado en la lámina es de 27.5 mm y ocurre para un tiempo igual a 0.0063 s. El resultado experimental <sup>[53]</sup> es de 27.6 mm para un tiempo de 0.0055 s lo que representa un error de -0,4 % y 14.5 %, respectivamente.

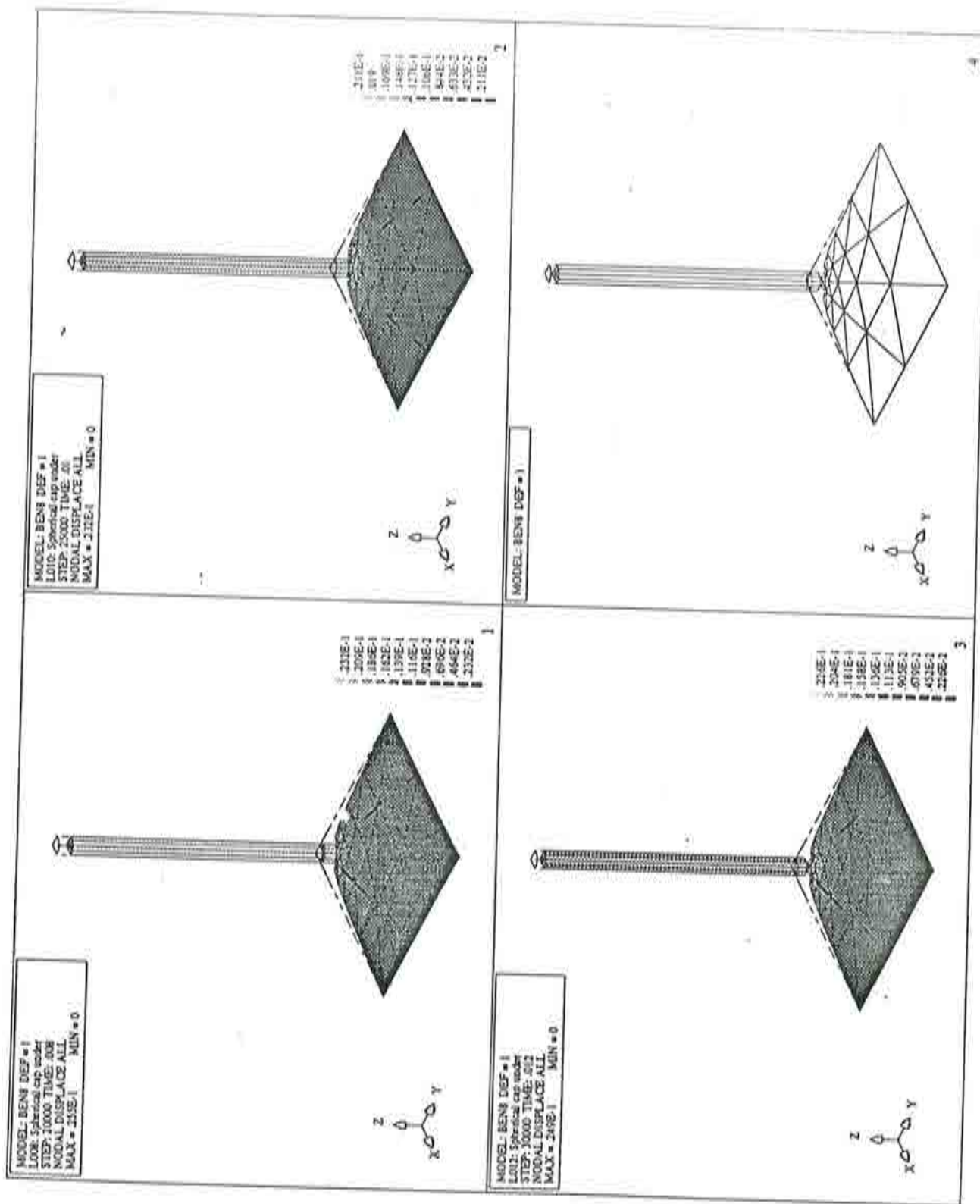


Figura 7.13 Impacto de una barra contra una lámina: geometría deformada

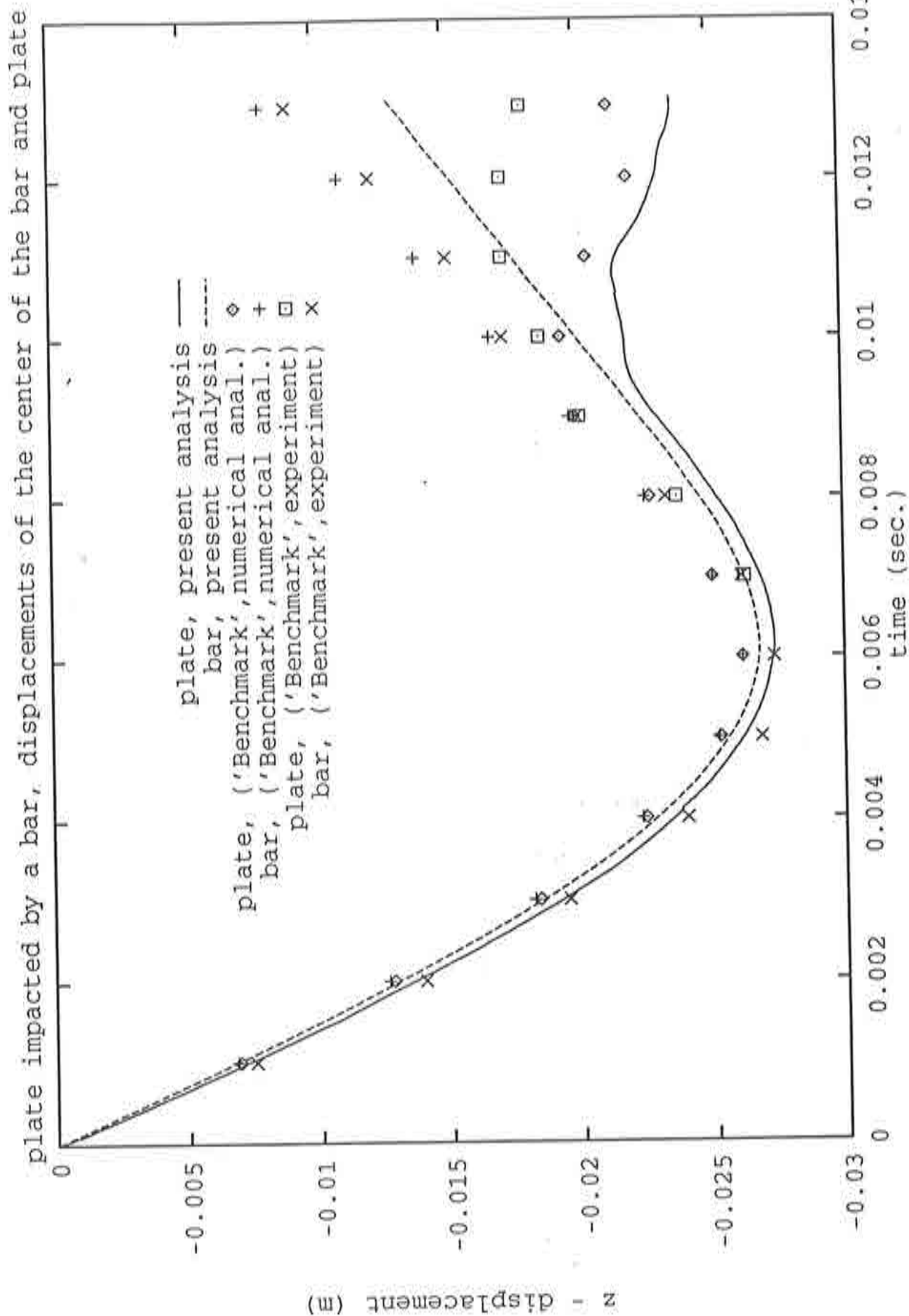


Figura 7.14 Impacto de una barra contra una lámina: desplazamiento del centro de la placa en función del tiempo

## 7.5 IMPACTO DE UNA BARRA CILINDRICA CONTRA UNA PARED RIGIDA

En este caso se estudia el impacto de una barra circular sometida a una velocidad inicial de 227 m/s contra una pared rígida. La barra posee una longitud y radio iniciales de 32.4 y 3.2 mm, respectivamente. Las propiedades del material son las del cobre;  $E = 117$  GPa,  $\nu = 0.35$ ,  $\sigma_y = 0.4$  GPa y  $H = 0.1$  GPa. La barra ha sido modelada con 216 elementos de 8 nodos, 6 en sentido radial y 36 en sentido longitudinal. Las condiciones de contorno en la pared rígida se han simulado mediante el empleo de apoyos deslizantes. El transitorio que se estudia transcurre en 80  $\mu$ s, momento en que la barra se despega. Para modelar el transitorio se han empleado 8000 incrementos de tiempo de igual duración.

### 7.5.1 Resultados obtenidos

Por simetría se ha representado un cuarto de la barra (Fig. 7.15). En las Fig. 7.16 a 7.23 puede verse la deformada en diferentes instantes de tiempo.

El radio final en la zona de contacto es de 7.11 mm siendo la longitud final de la barra de 21,47 mm. Mediante la utilización del código DYNA3D, los valores obtenidos son 7.03 mm y 21.47 mm, respectivamente.

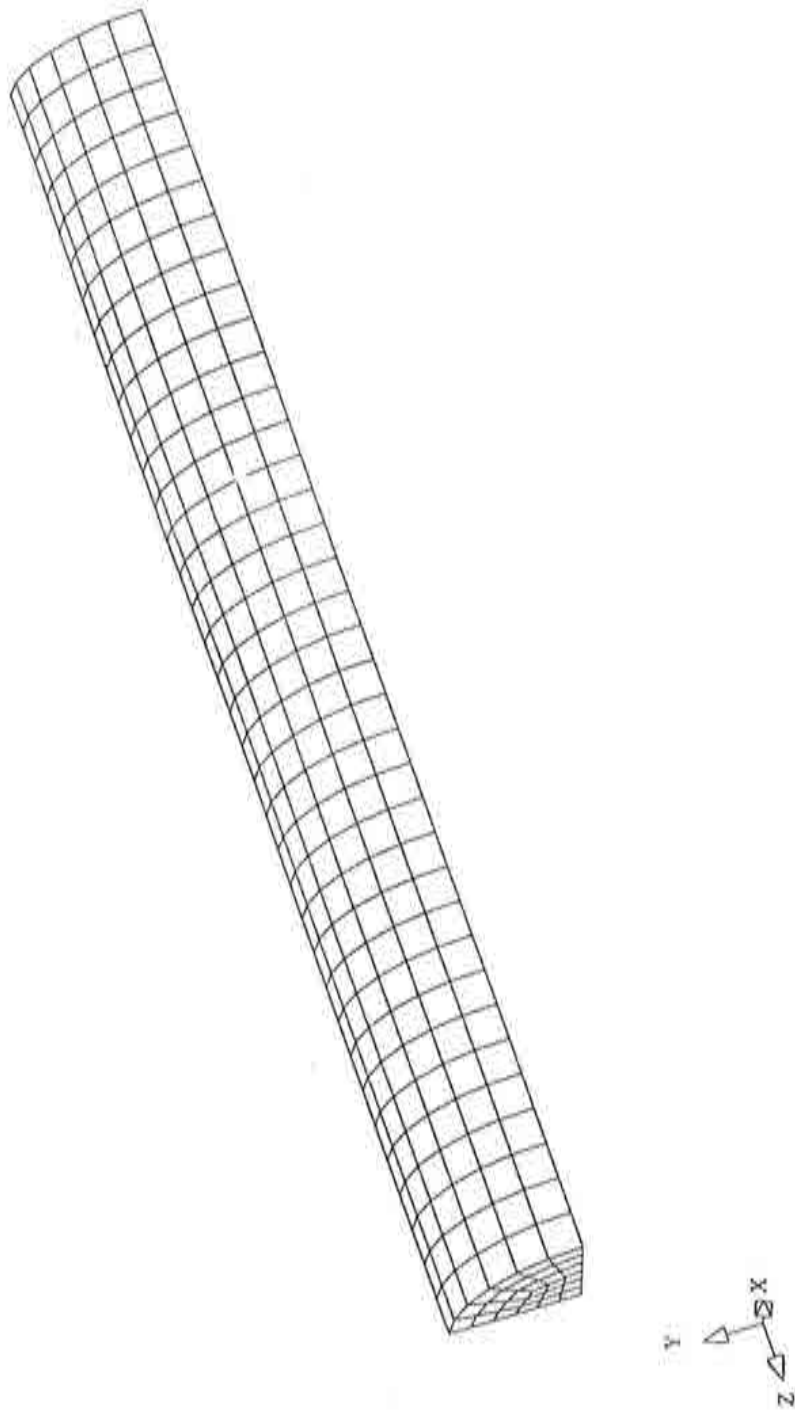


Figura 7.15 Impacto de una barra cilíndrica contra una pared rígida: geometría inicial y malla de cálculo

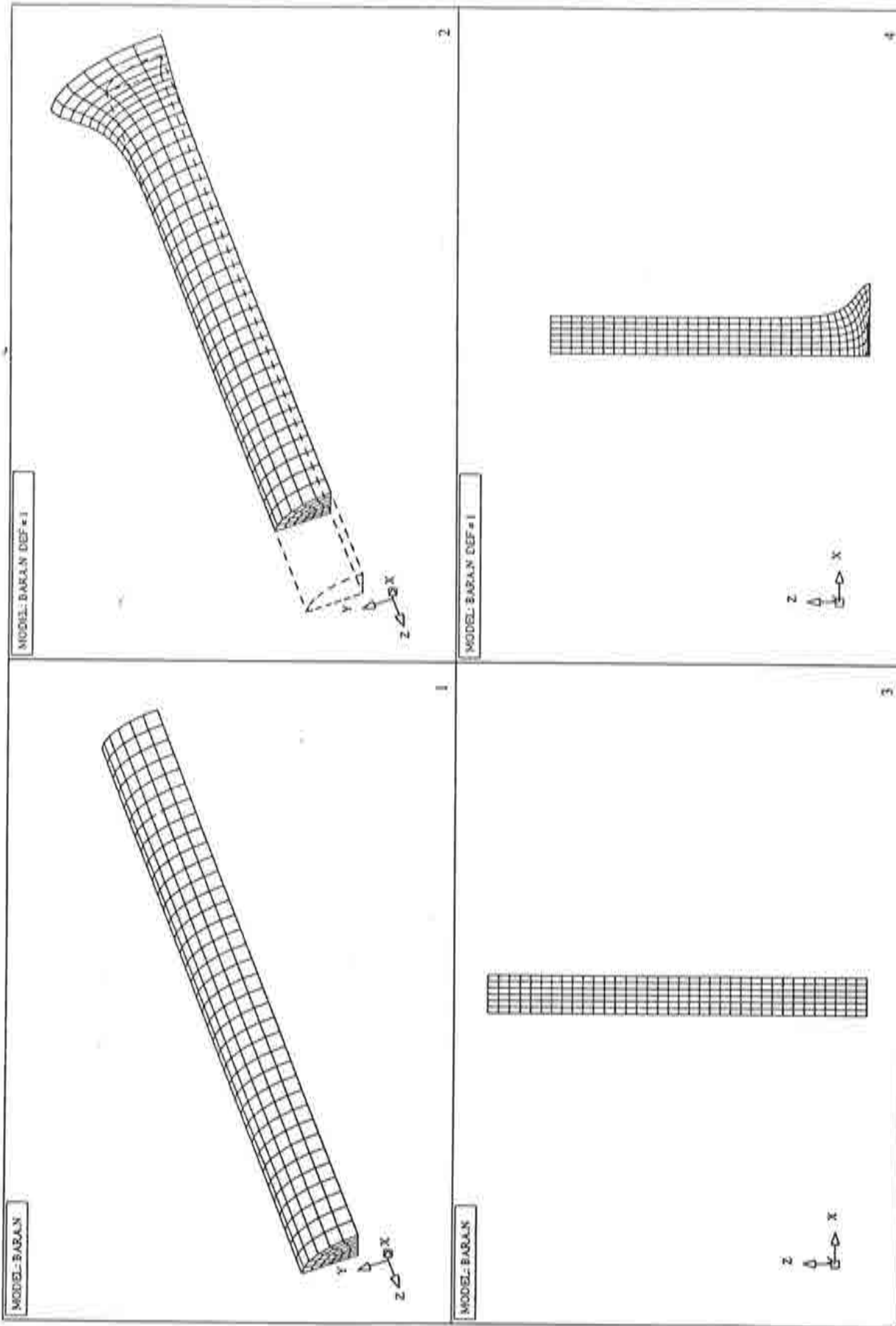


Figura 7.16 Impacto de una barra cilíndrica contra una pared rígida: geometría inicial y deformada

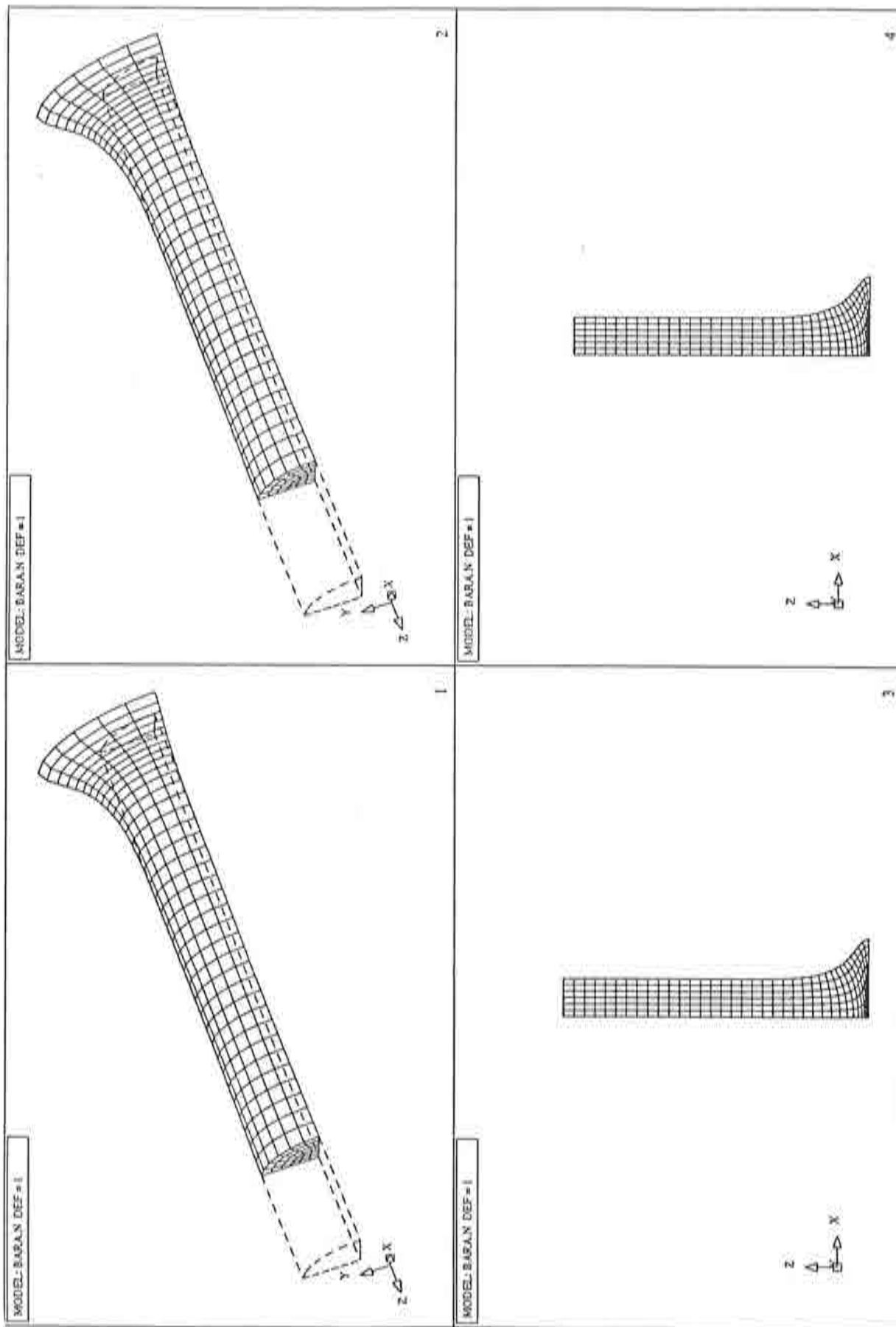


Figura 7.17 Impacto de una barra cilíndrica contra una pared rígida: deformada durante el impacto

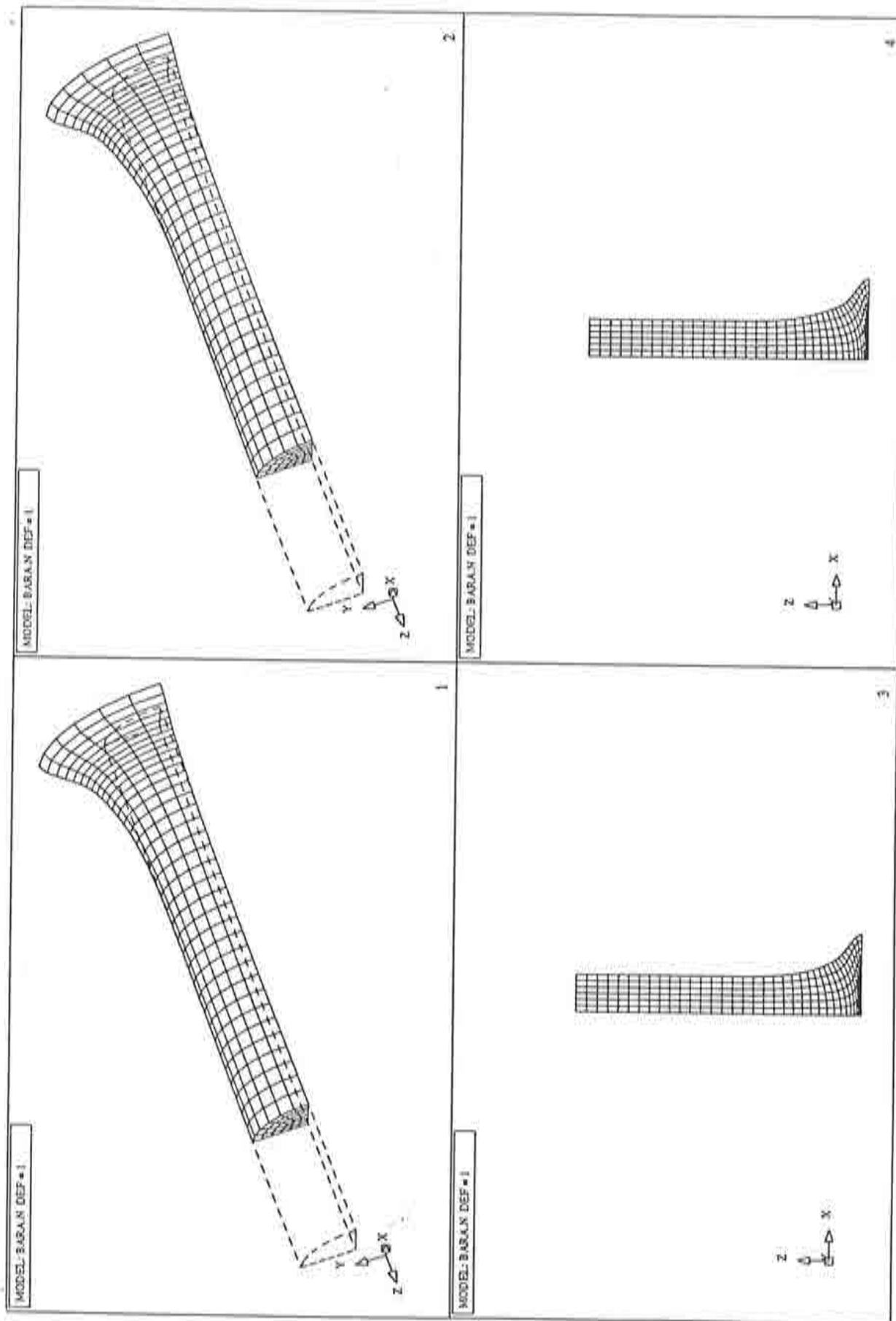


Figura 7.18 Impacto de una barra cilíndrica contra una pared rígida: deformada durante el impacto



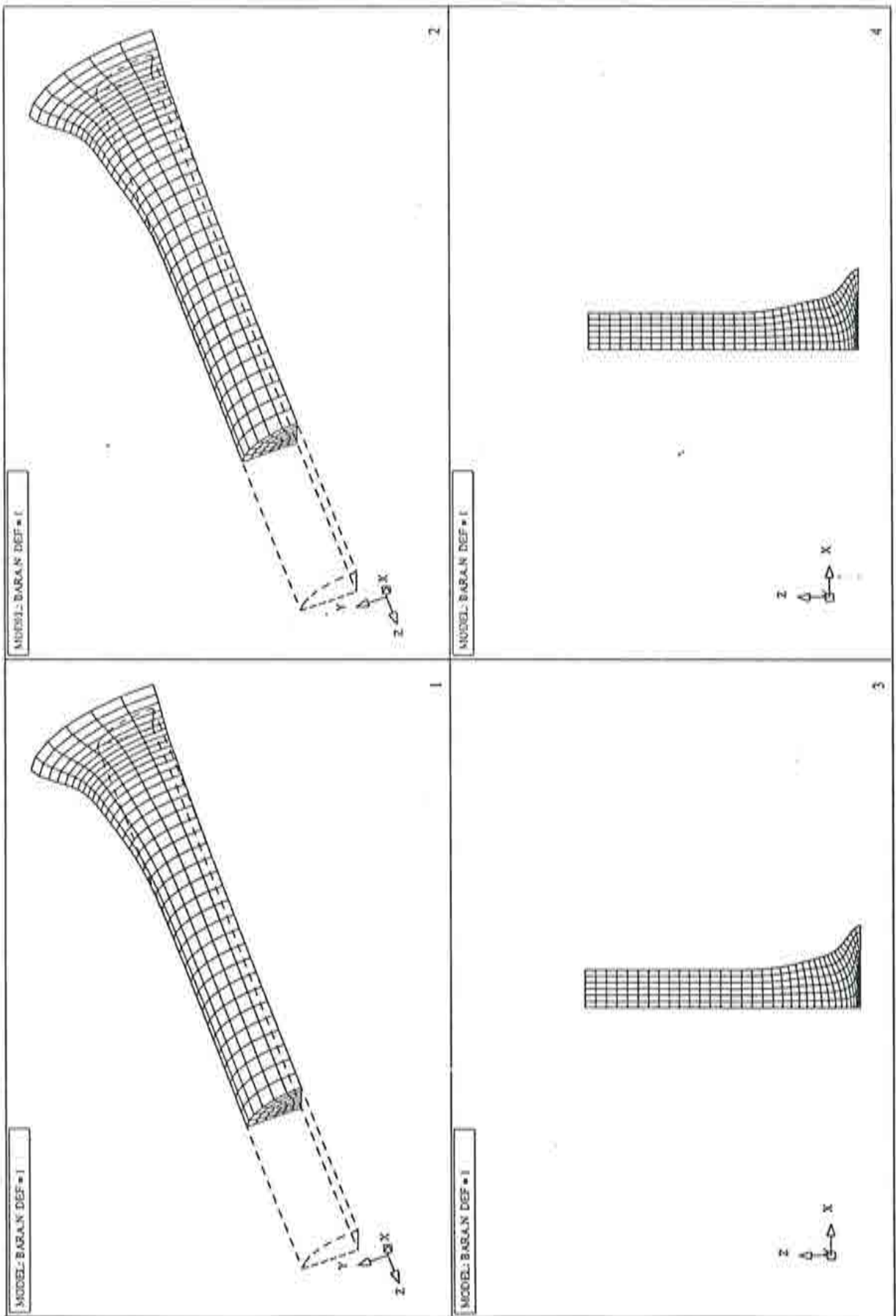


Figura 7.19 Impacto de una barra cilíndrica contra una pared rígida: deformada durante el impacto

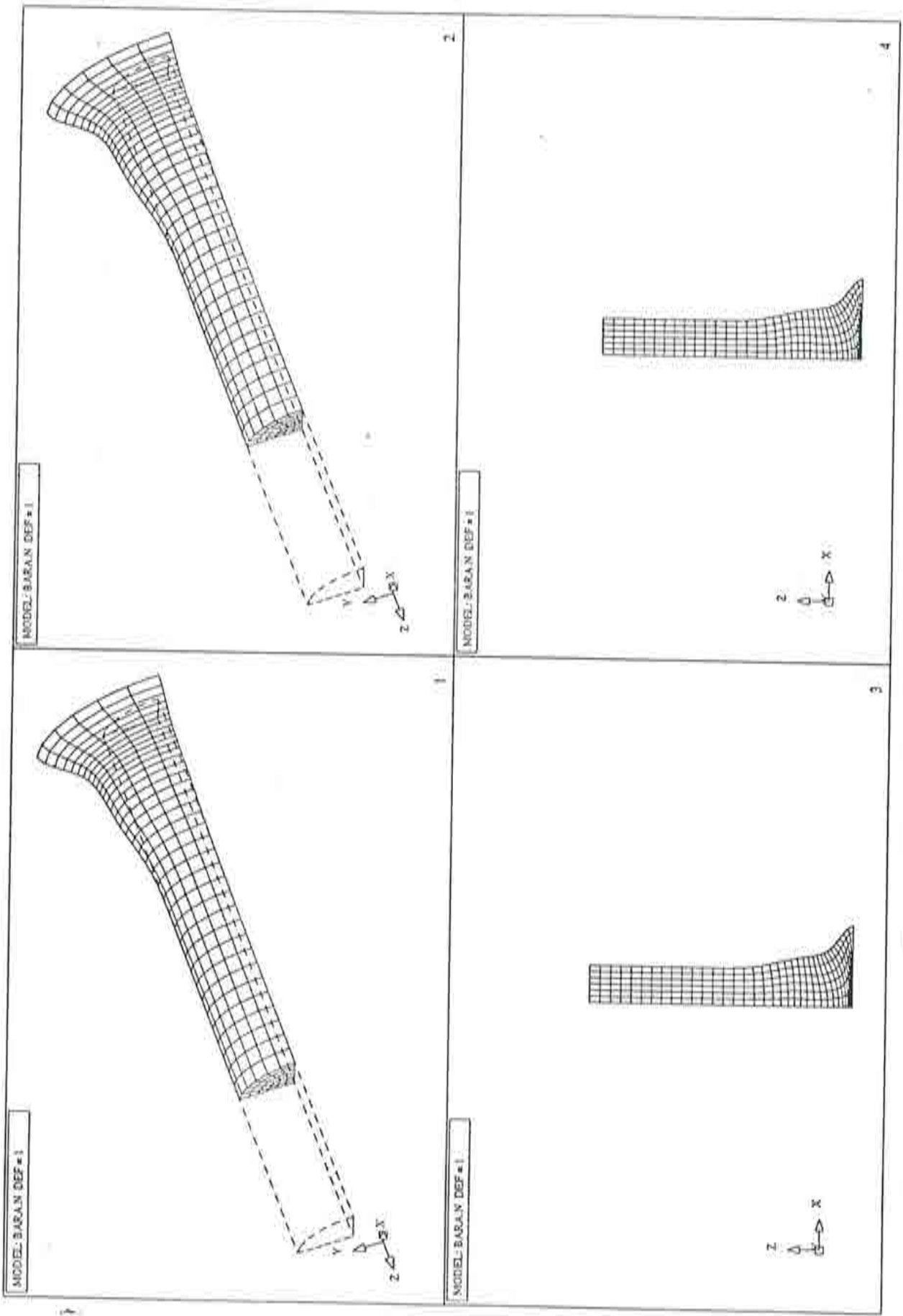


Figura 7.20 Impacto de una barra cilíndrica contra una pared rígida: deformada durante el impacto

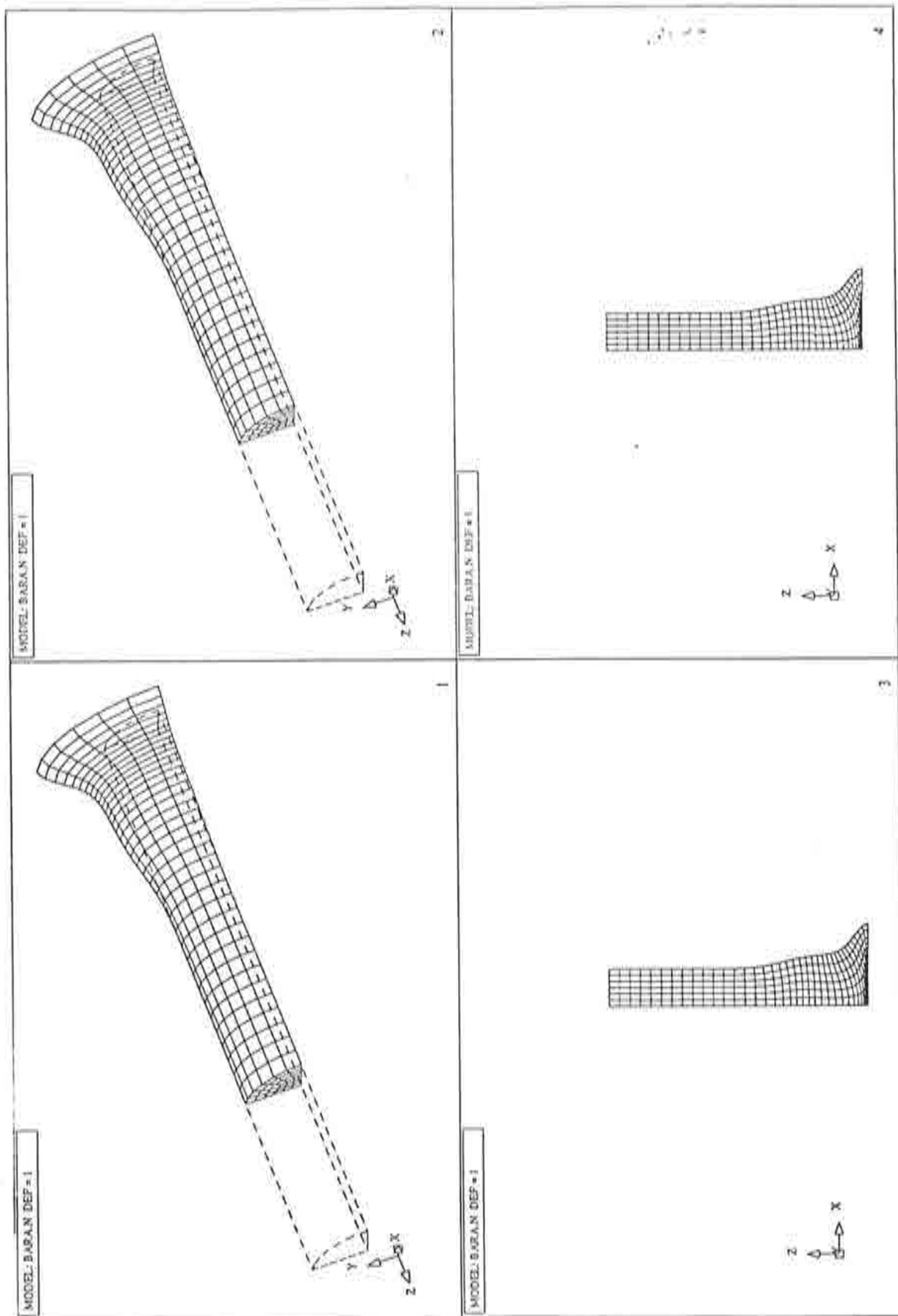


Figura 7.21 Impacto de una barra cilíndrica contra una pared rígida: deformada durante el impacto

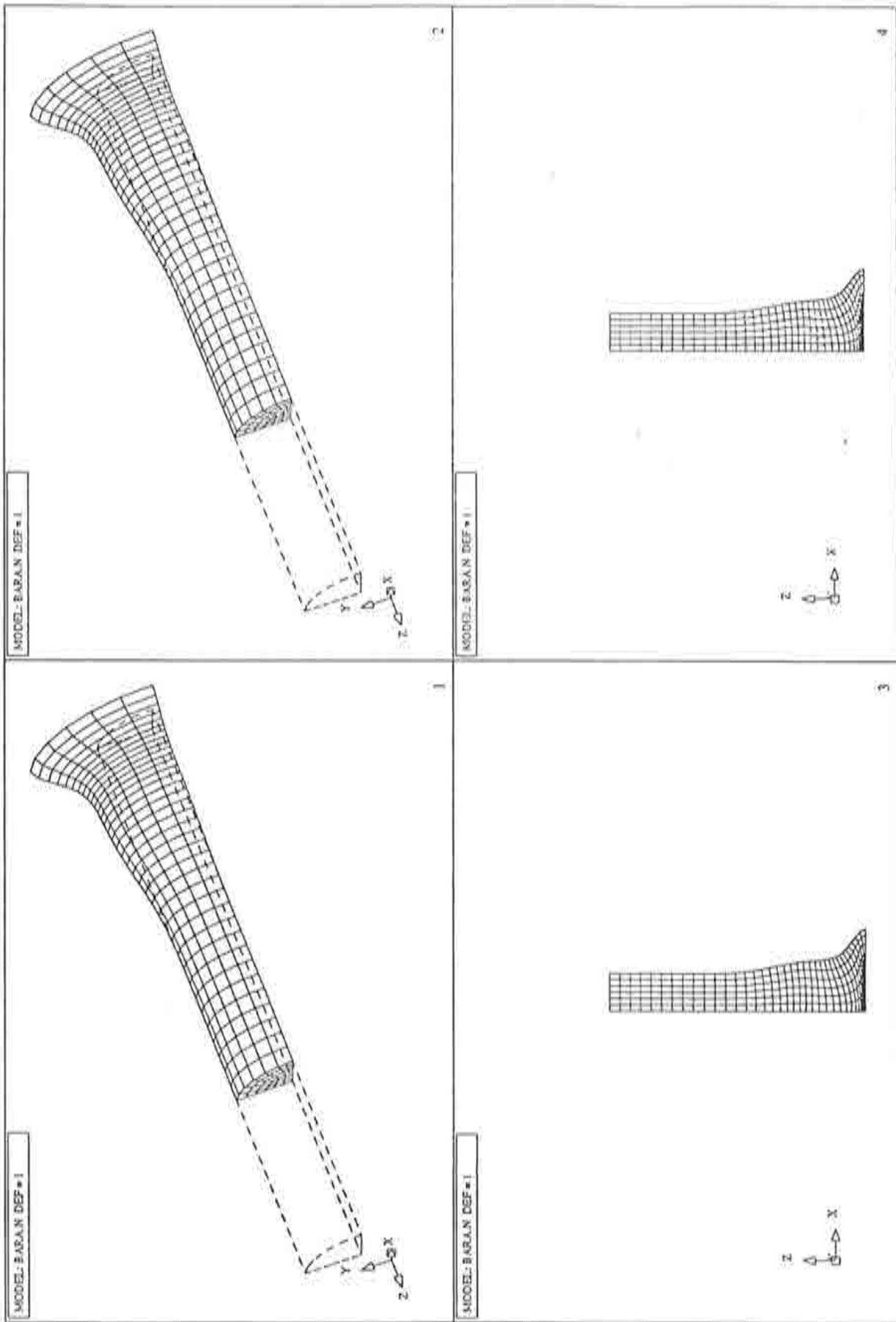


Figura 7.22 Impacto de una barra cilíndrica contra una pared rígida: deformada durante el impacto

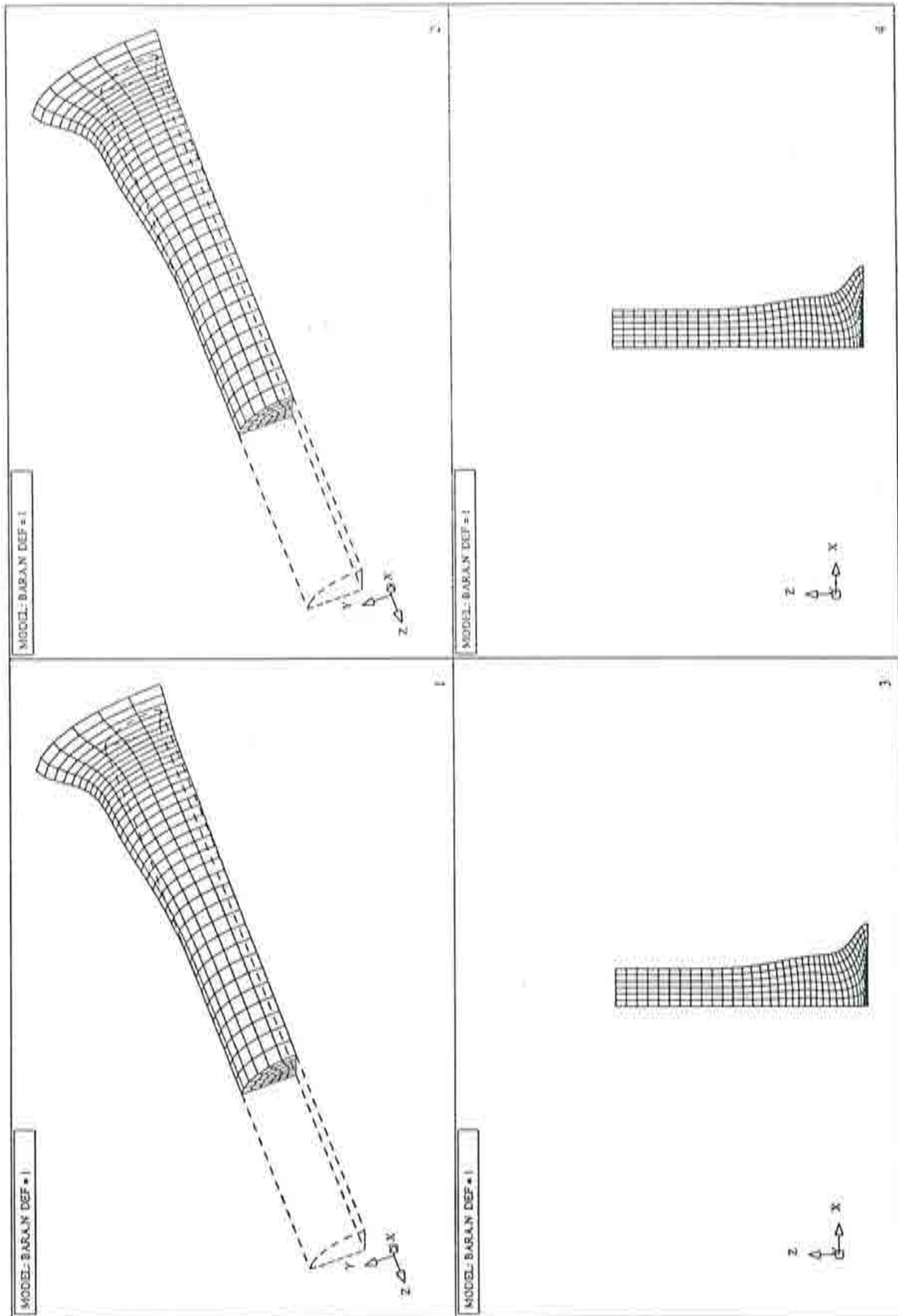


Figura 7.23 Impacto de una barra cilíndrica contra una pared rígida: deformada final

## 7.6 EMBUTICION DE UN TUBO

Este ejemplo estudia el problema del impacto de un tubo cilíndrico contra una superficie rígida como se observa en la Fig. 7.24, y que ha sido analizado por Beltran y Goicolea [54]. Se ha utilizado la misma malla empleada por estos autores, consistente en 756 nodos y 580 elementos axilsimétricos de 4 nodos. Las propiedades del material, que corresponden a un aluminio con endurecimiento isótropo lineal, también se indican en la misma figura.

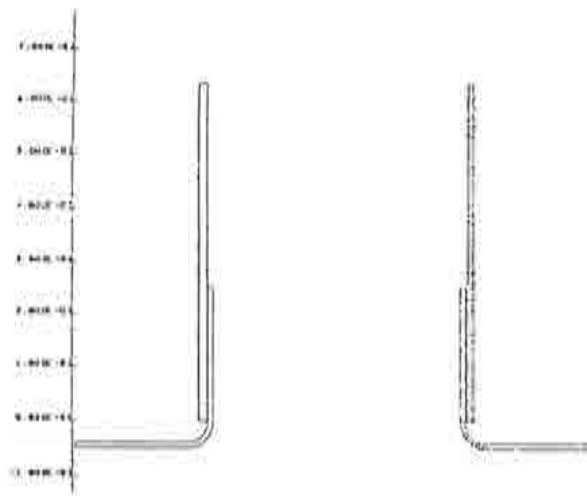


Figura 7.24 Conformado de un tubo metálico: geometría y datos del material

El tubo está sometido a una velocidad constante impuesta en la cara superior de 40 m/s.

### 7.6.1 Resultados obtenidos

El transitorio transcurre en un tiempo de  $1.25 \times 10^{-3}$  s hasta alcanzar un desplazamiento final de la cara superior del tubo de 50 mm. En la Fig. 7.25 se observan diferentes estados del transitorio. En la misma figura puede verse como se aplastan los elementos del extremo cuando impactan contra el molde y posteriormente despegan, enviándose el tubo hacia el exterior.

Asimismo en las Fig. 7.26 a 7.29 y siguientes pueden verse diferentes estados de la deformación.

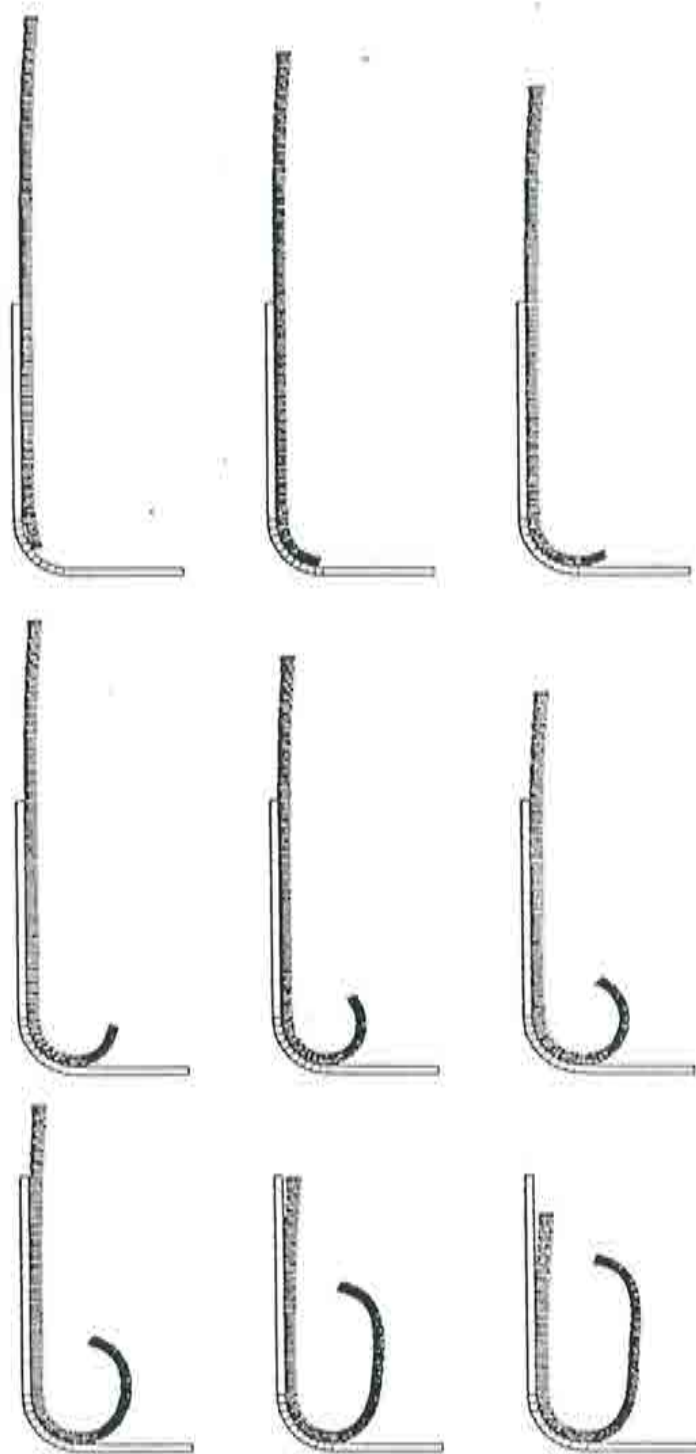


Figura 7.25 Diferentes estados del transitorio

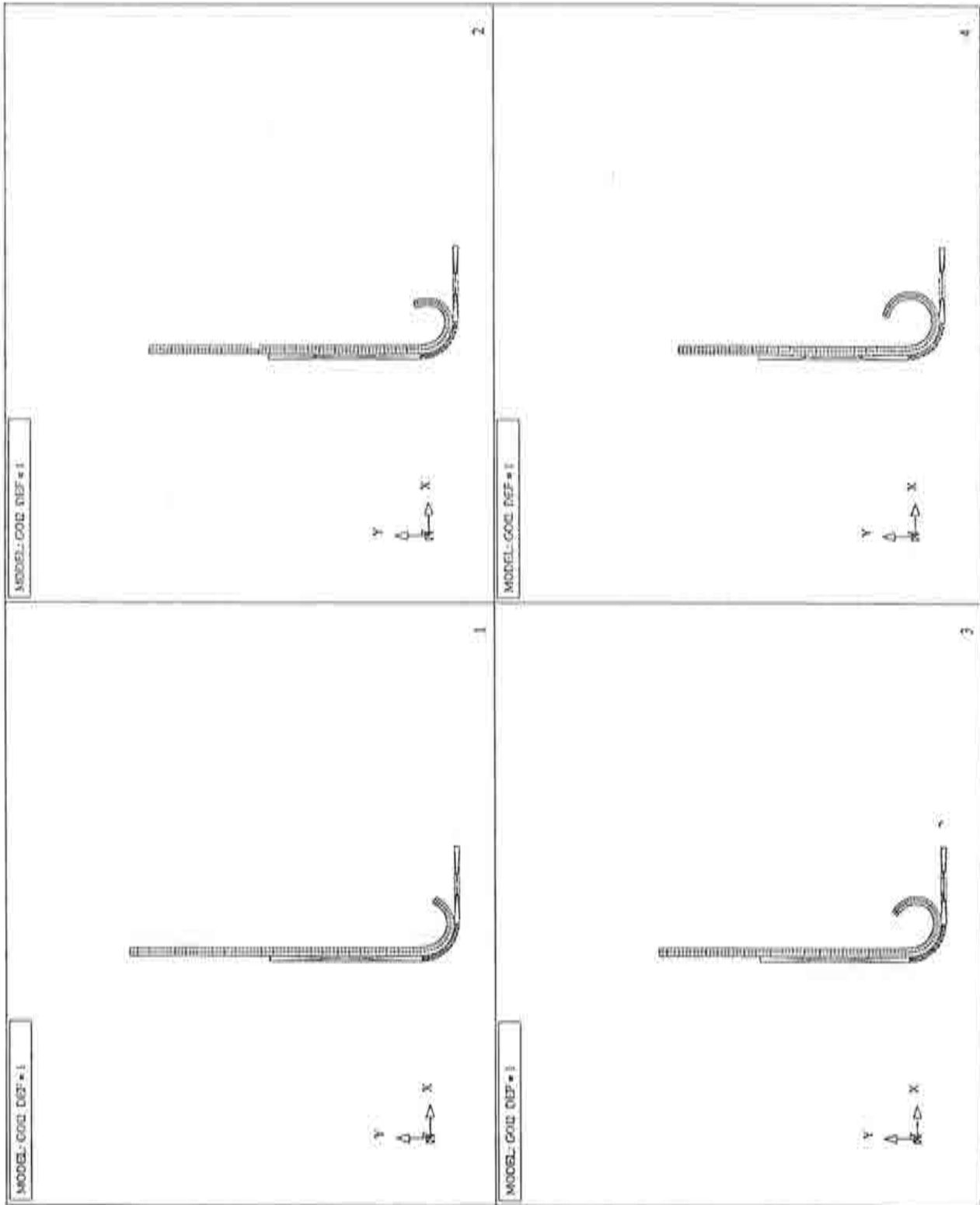


Figura 7.26 Conformado de un tubo: deformación durante el conformado



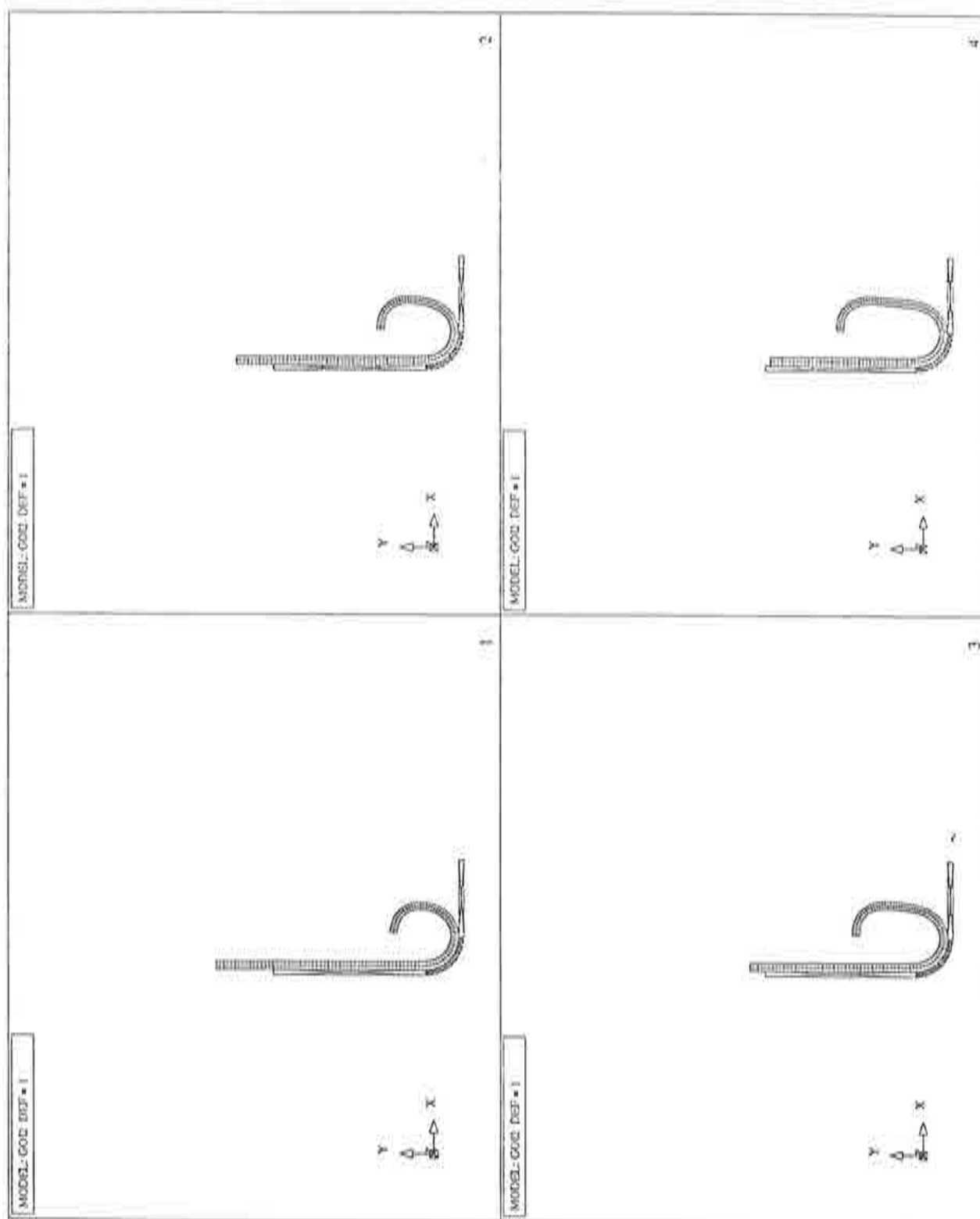


Figura 7.27 Conformado de un tubo: deformación durante el conformado

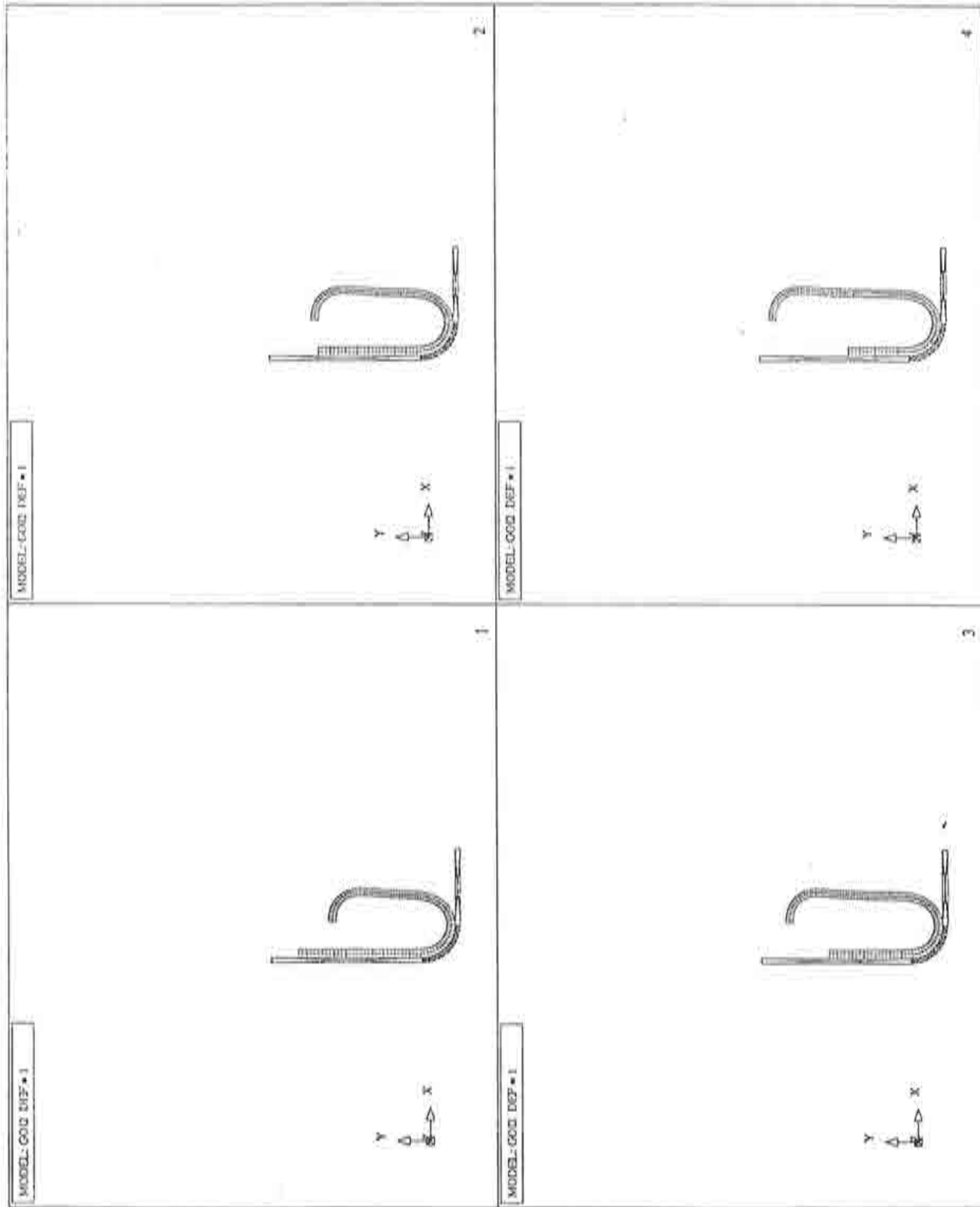


Figura 7.28 Conformado de un tubo: deformación durante el conformado

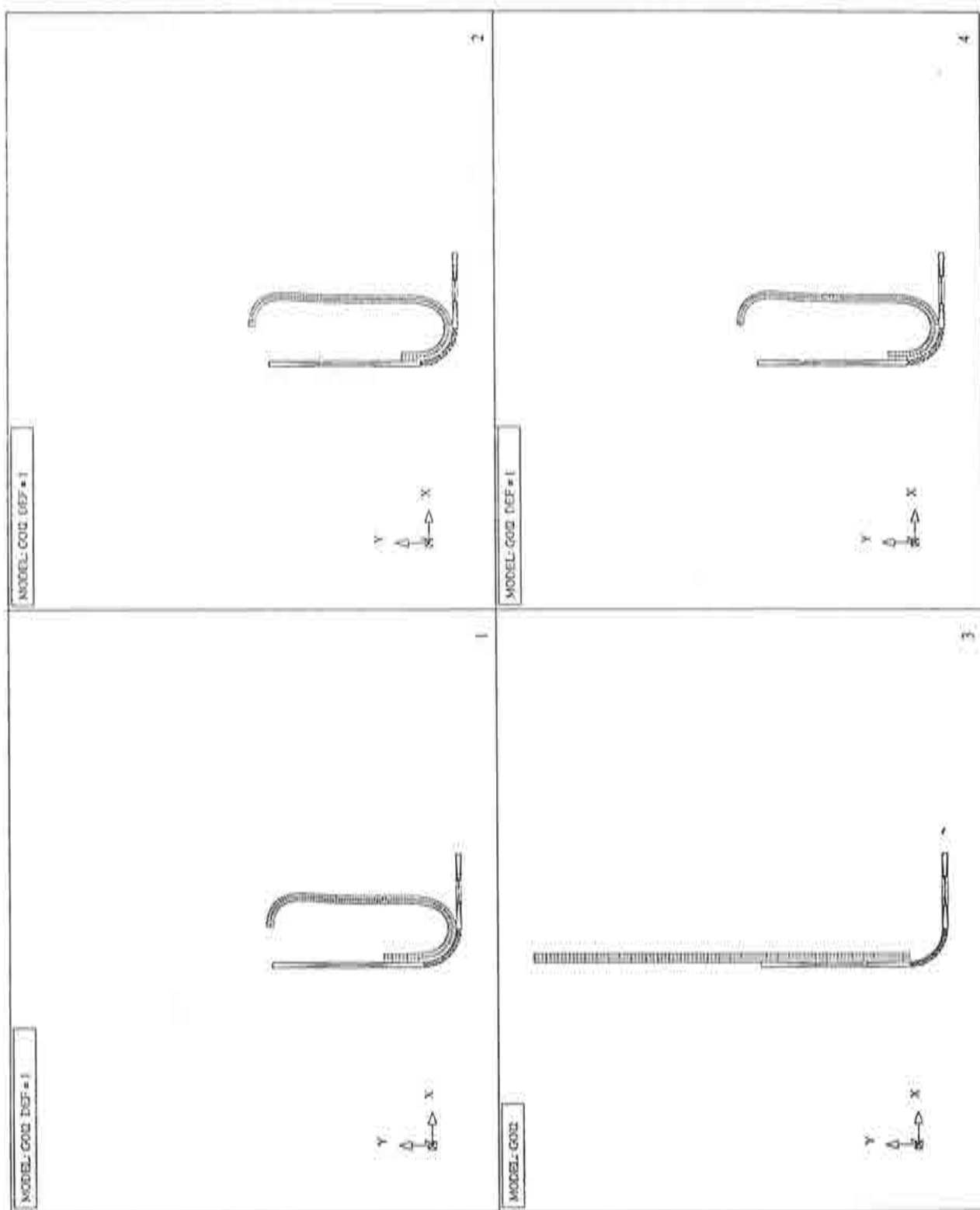


Figura 7.29 Conformado de un tubo: deformación durante el conformado

## 7.7 IMPACTO DE DOS TUBOS

Se estudia la deformación de dos cilindros impactando uno contra otro. La geometría y características del material se muestran en la Fig. 7.30 Se ha discretizado la estructura usando 1218 nodos y 1160 elementos de 4 nodos.

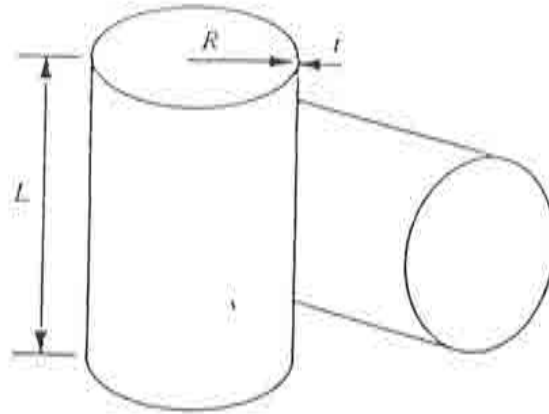


Figura 7.30 Impacto entre dos tubos. Geometría y discretización.  $R = 0.1$  m,  $L = 0.46$  m,  $t = 0.003$  m,  $E = 200$  GPa,  $\nu = 0.3$ ,  $\kappa = 200$  MPa,  $\rho = 7840$  kg/m<sup>-3</sup>,  $V_0 = 30.0$  m/s

### 7.7.1 Resultados obtenidos

En las Fig. 7.31 y 7.32 puede verse la discretización de los dos tubos y su geometría antes del impacto. En la Fig. 7.33 se representan diferentes estados de la deformación. Finalmente en la Fig. 7.34 puede verse el desplazamiento del nodo diametralmente opuesto al nodo de contacto inicial entre los dos tubos, comparándolo con los resultados obtenidos por Zhong [55].

MODEL: TUB617

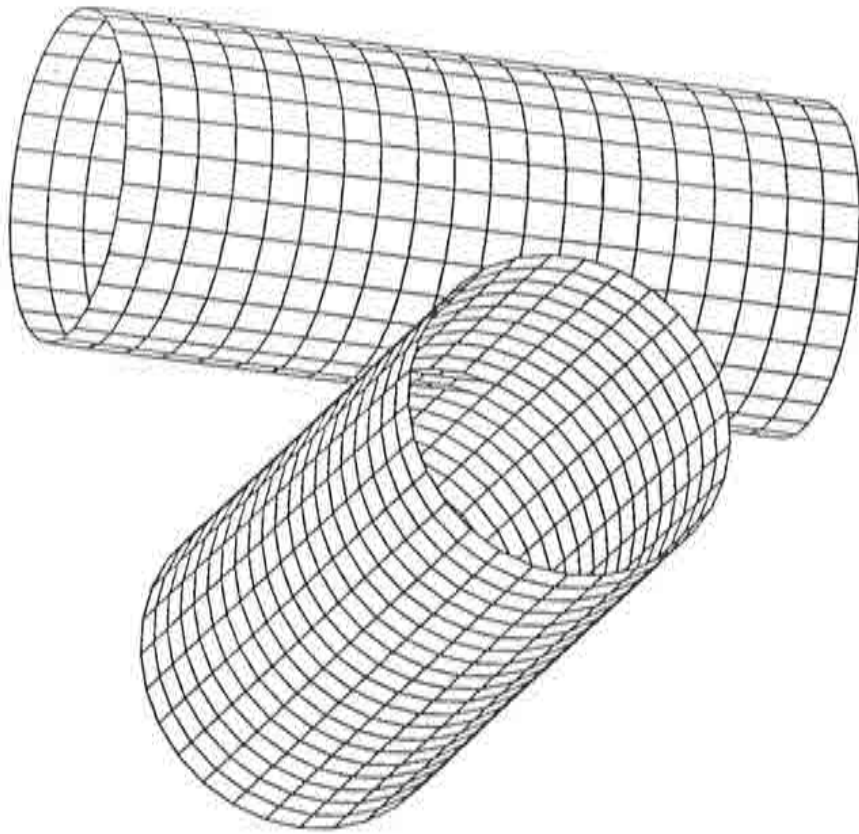


Figura 7.31 Impacto entre dos tubos: geometría y discretización antes del impacto

MODEL: TUB617

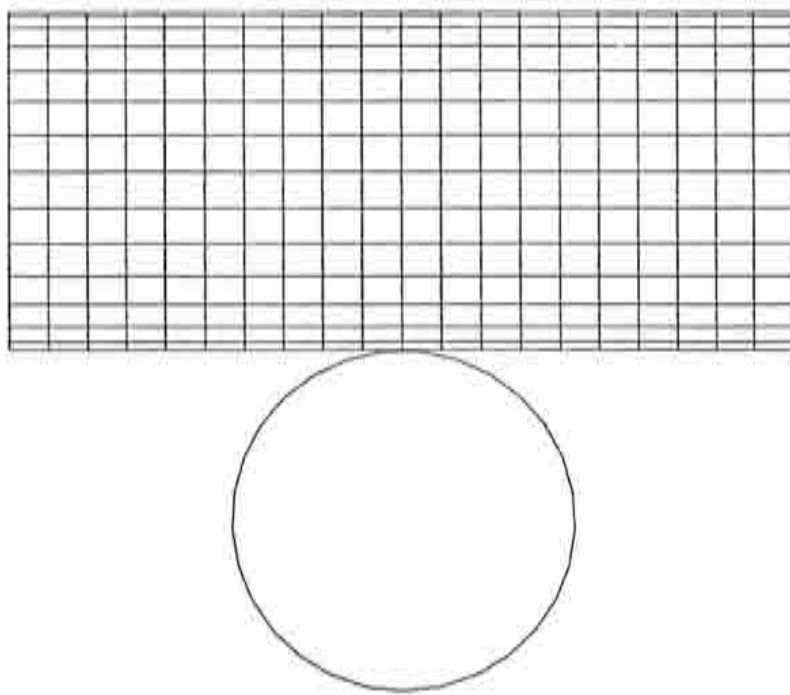


Figura 7.32 Impacto entre dos tubos: geometría y discretización antes del impacto

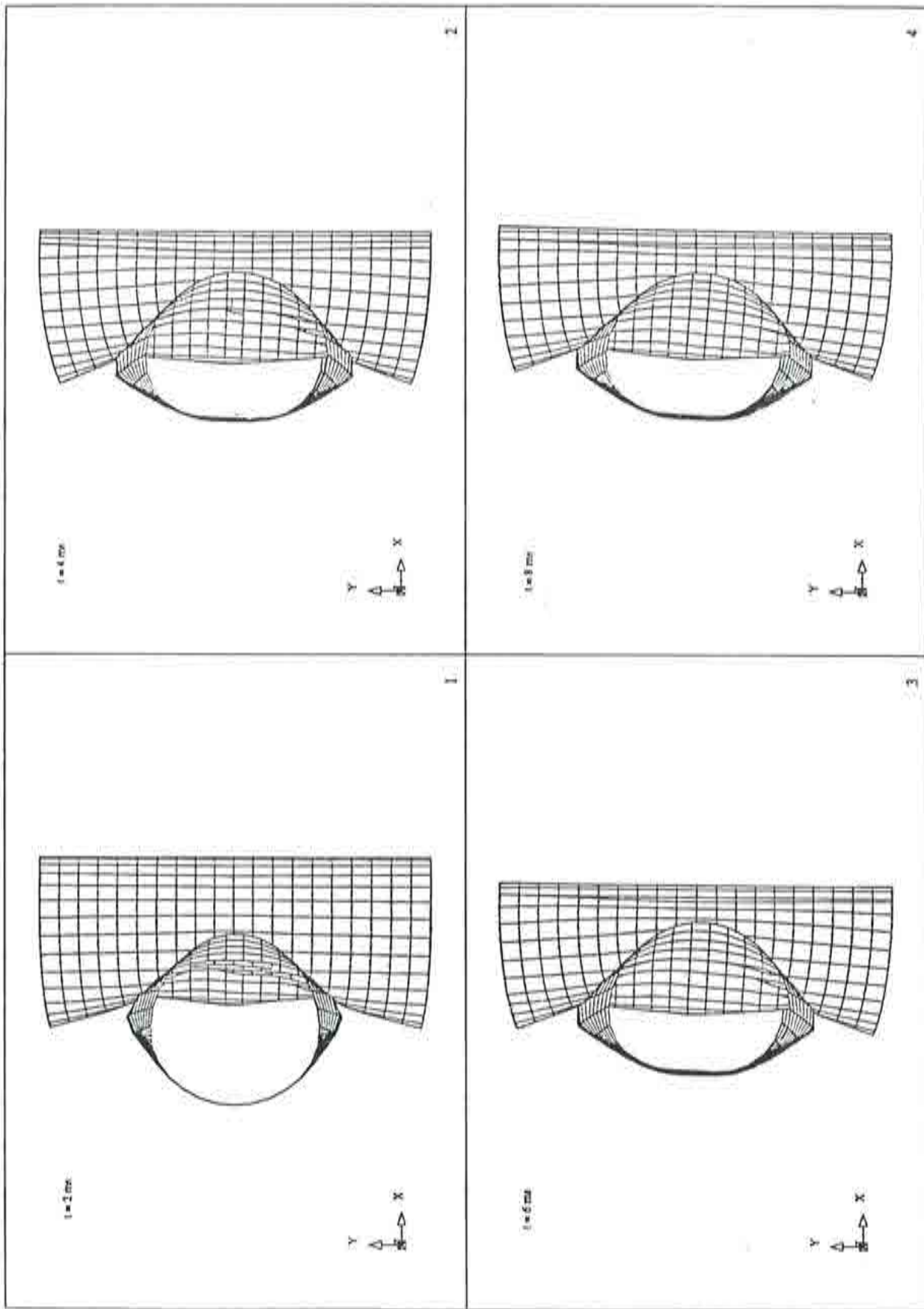


Figura 7.33 Impacto entre dos tubos: diferentes estados de la deformación

2 tubes, displacements of the node on the backside

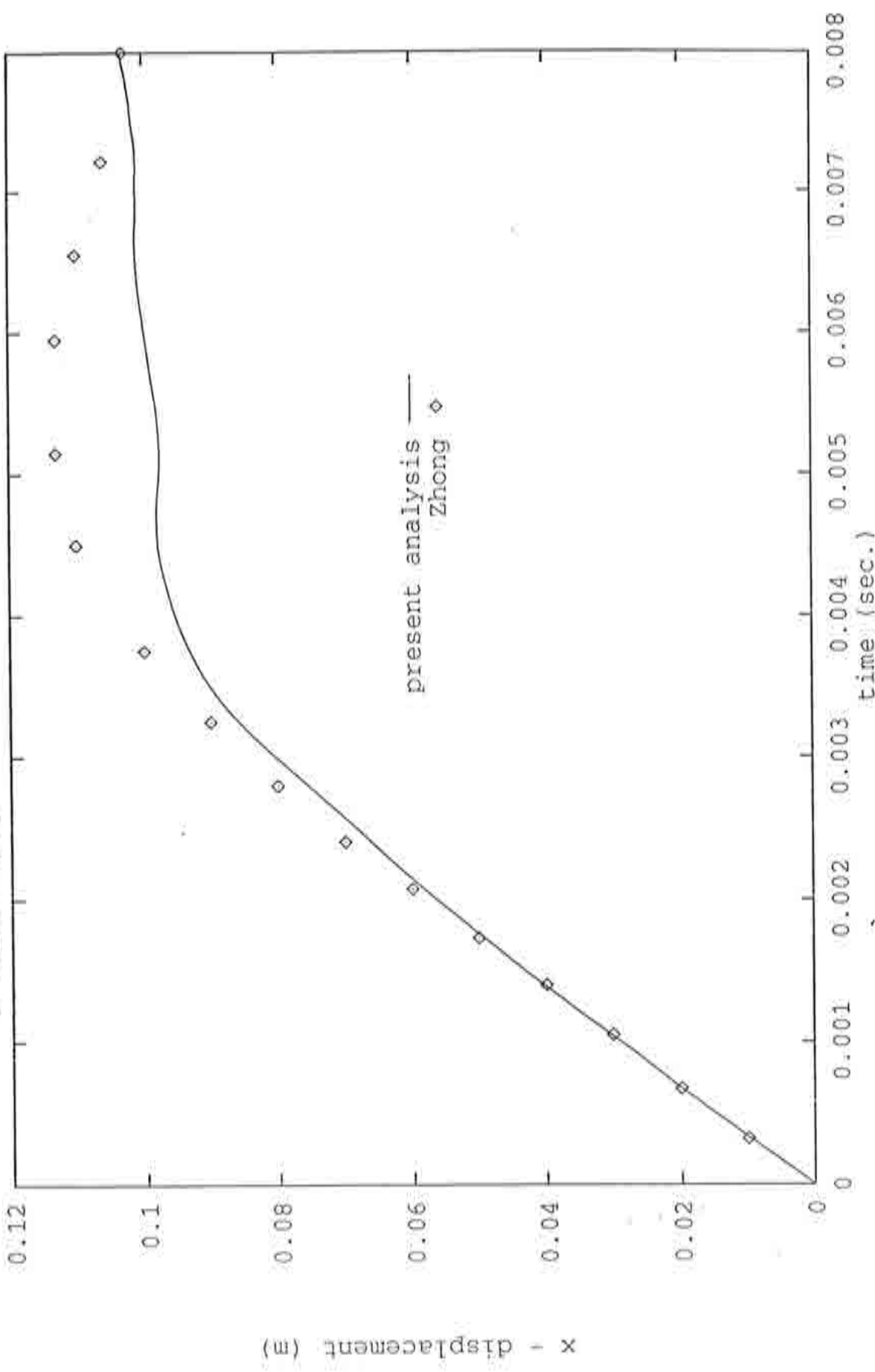


Figura 7.34 Impacto entre dos tubos: desplazamiento del nodo diametralmente al nodo de contacto inicial



## 7.8 ESTRUCTURA RETICULADA EN FORMA DE ESTRELLA

Se ha analizado la estructura reticulada en forma de estrella de la Fig.7.35 sometida a una carga vertical  $P$  situada en el nodo central de valor  $P = 68.8 \text{ sen } (41.88 \text{ t}) \text{ MN}$ .

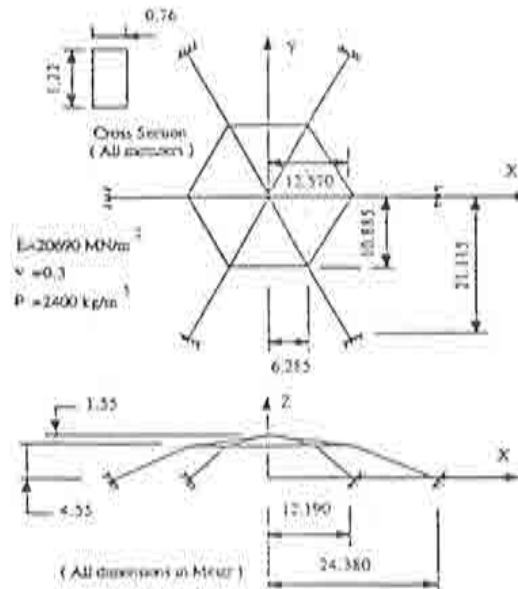


Figura 7.35 Cúpula reticulada sometida a una carga vertical  $P$

### 7.8.1 Resultados obtenidos

El ejemplo se ha discretizado mediante 44 elementos de 2 nodos y mediante 44 elementos de 3 nodos.

En la Fig. 7.36 puede verse el desplazamiento vertical del nodo central en función del tiempo. Asimismo en la Fig. 7.37 se representa la deformada de la estructura.

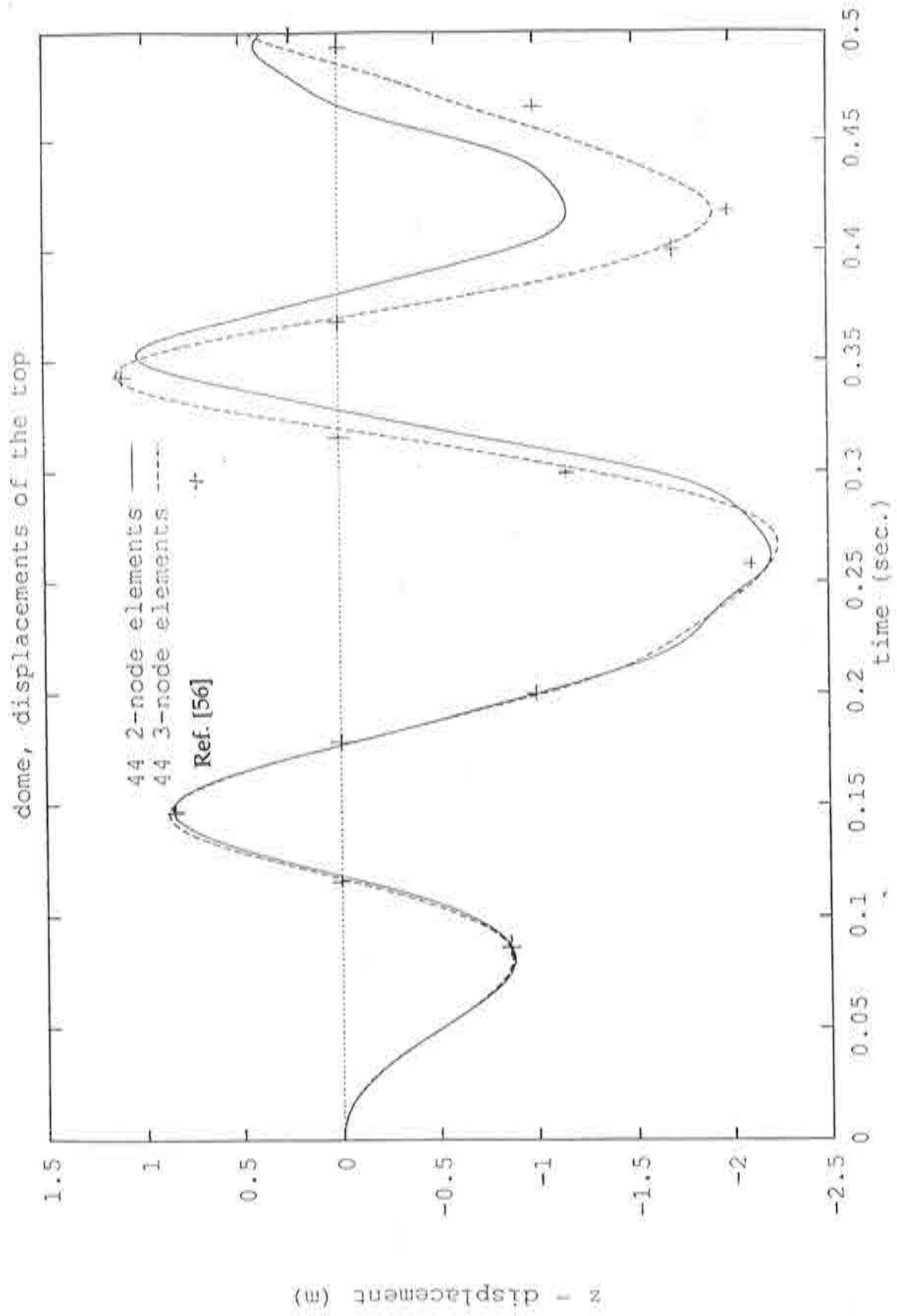


Figura 7.36 Estructura reticulada: desplazamiento vertical del nodo central

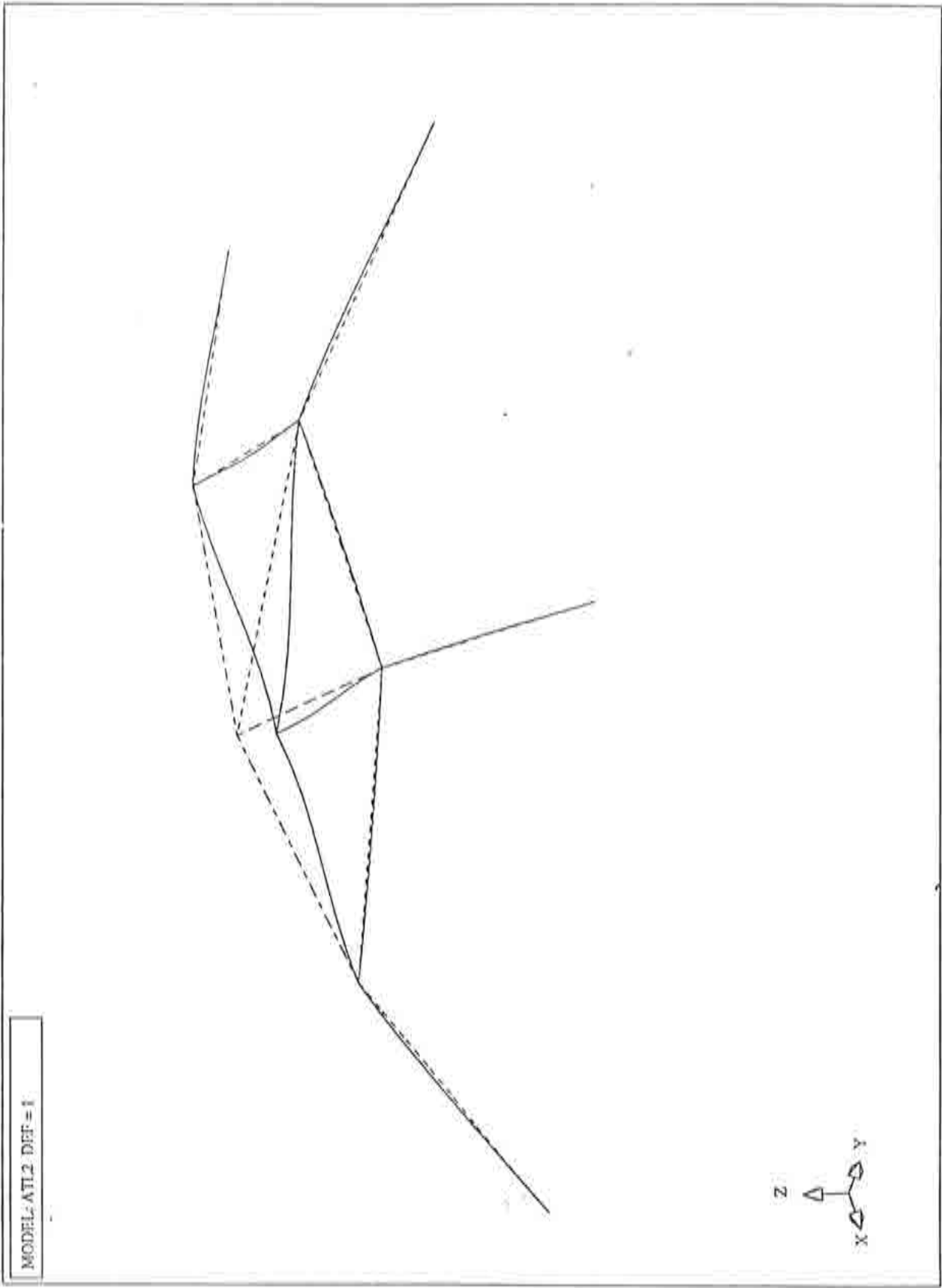


Figura 7.37 Estructura reticulada: deformada de la estructura



Las características del material son las siguientes

$$E = 2.13279 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$\sigma_y = 2.21 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$$

$$H^t = 0.01$$

$$Q = 7850 \text{ kg/m}^3$$

Las piezas que forman la estructura tienen sección rectangular maciza.

Existen dos masas concentradas de 1.408 kg cada una de ellas tal como puede apreciarse en la figura.

La estructura se ha discretizado en elementos de 3 nodos cada uno con un total 73 de nodos.

### 7.9.1 Resultados obtenidos

En la Fig. 7.39 puede verse la estructura discretizada antes de la deformación. Asimismo en las Fig. 7.40 a 7.44 pueden verse diferentes estados de la deformación.

Los resultados se han comparado con los obtenidos utilizando el código ABAQUS, existiendo muy buena concordancia entre ellos.

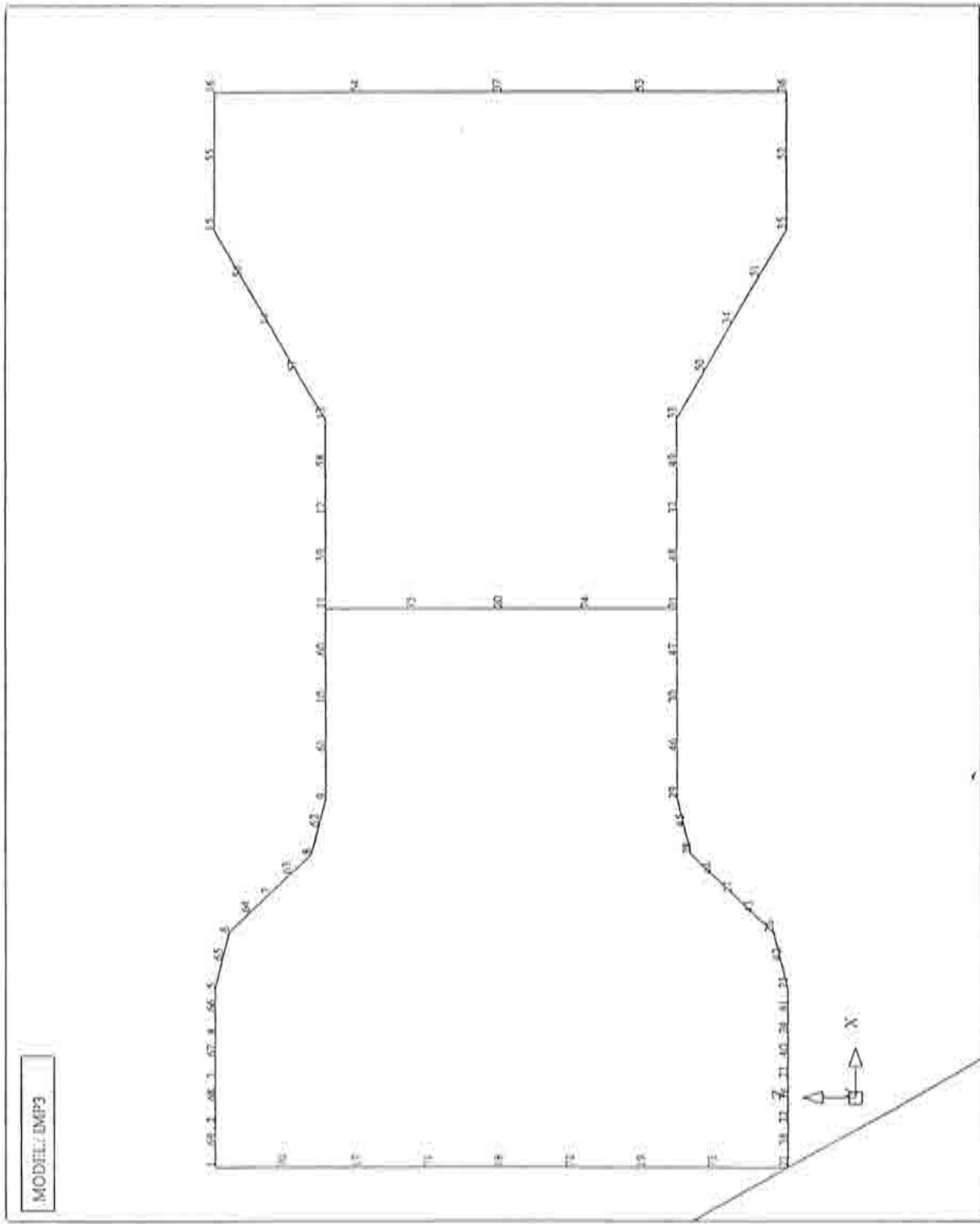


Figura 7.39 Impacto de un motor: geometría inicial y malla del cálculo

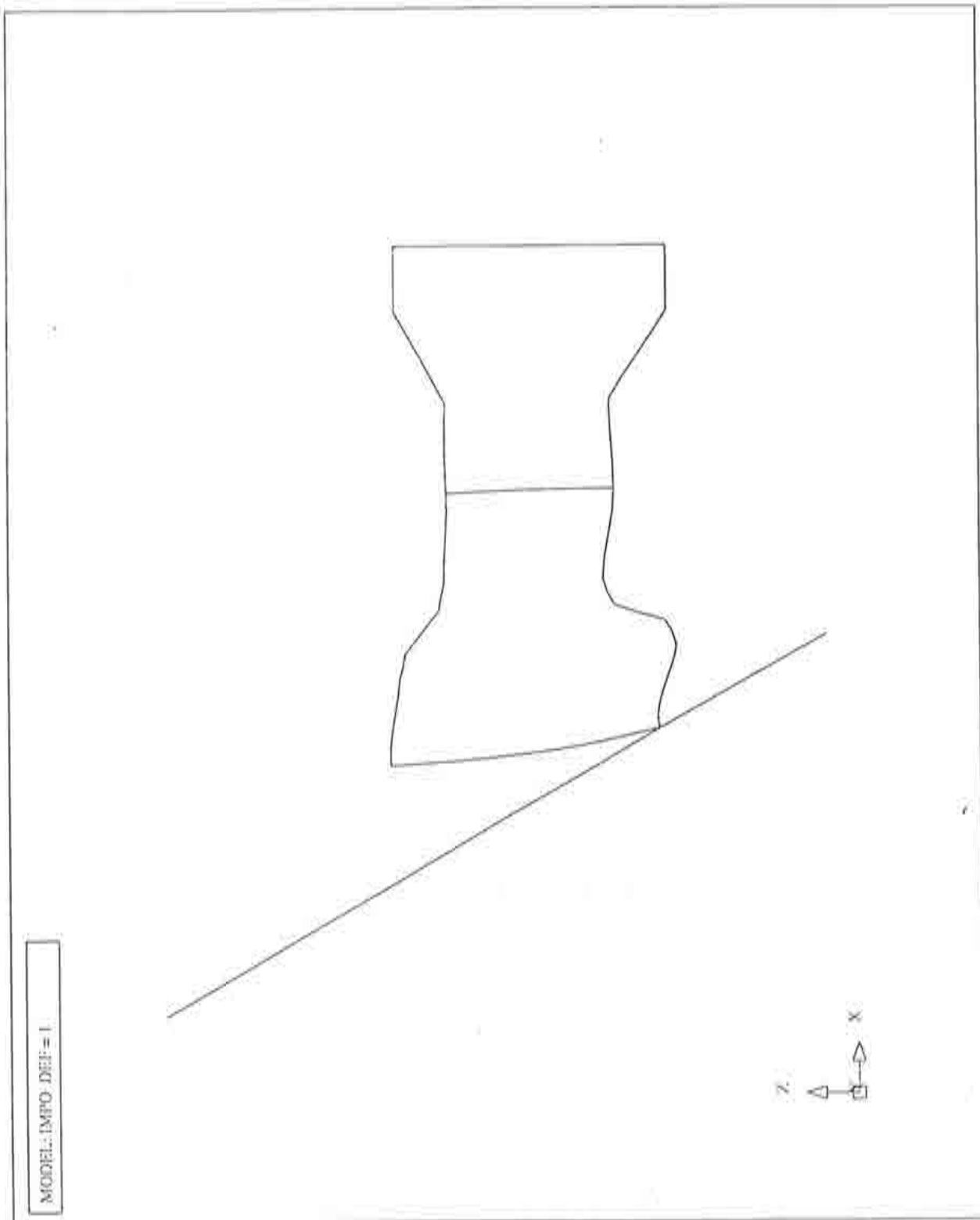


Figura 7.40 Impacto de un motor: deformada para  $t = 2,5$ ms

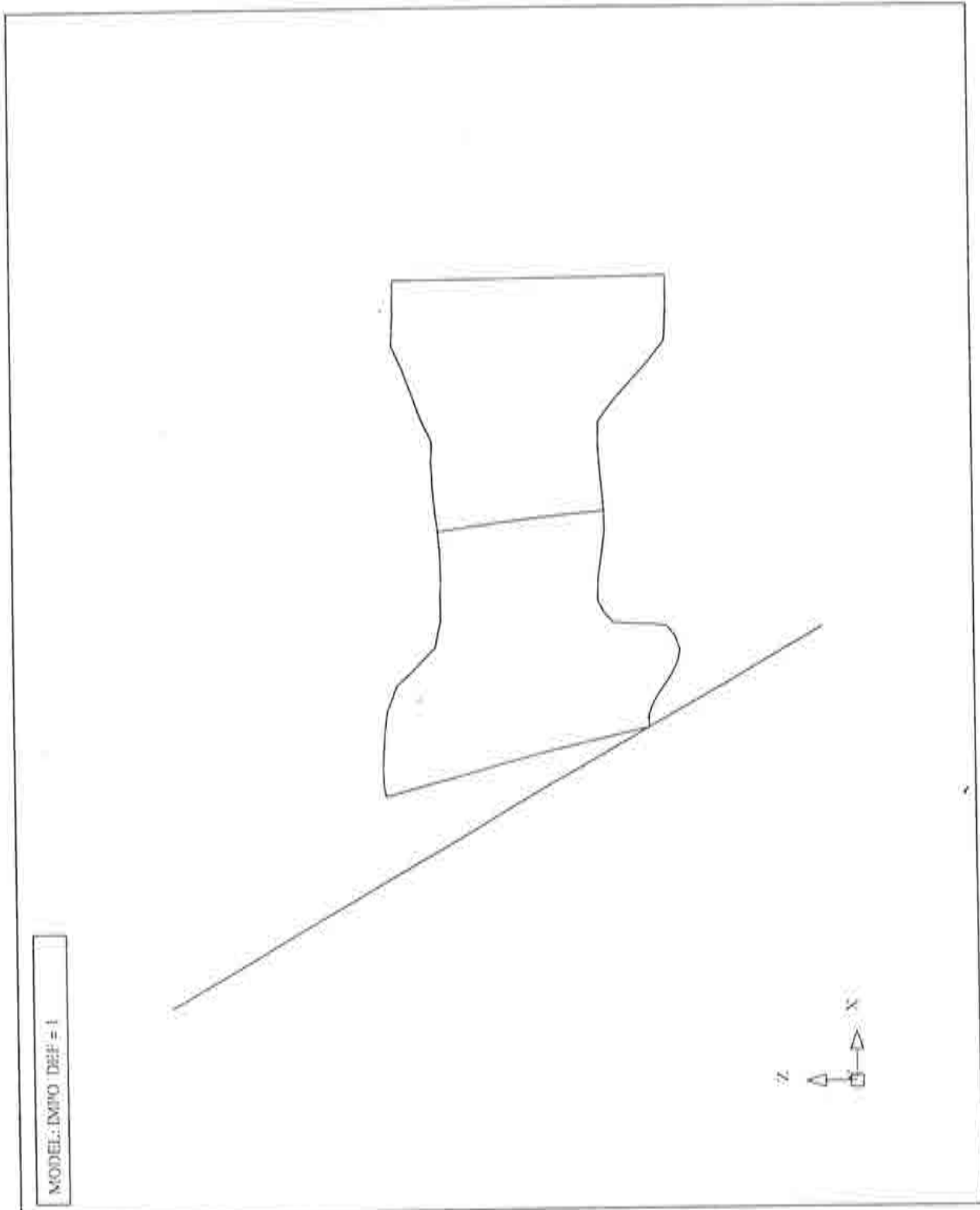


Figura 7.41 Impacto de un motor. deformada para  $t = 5\text{ms}$



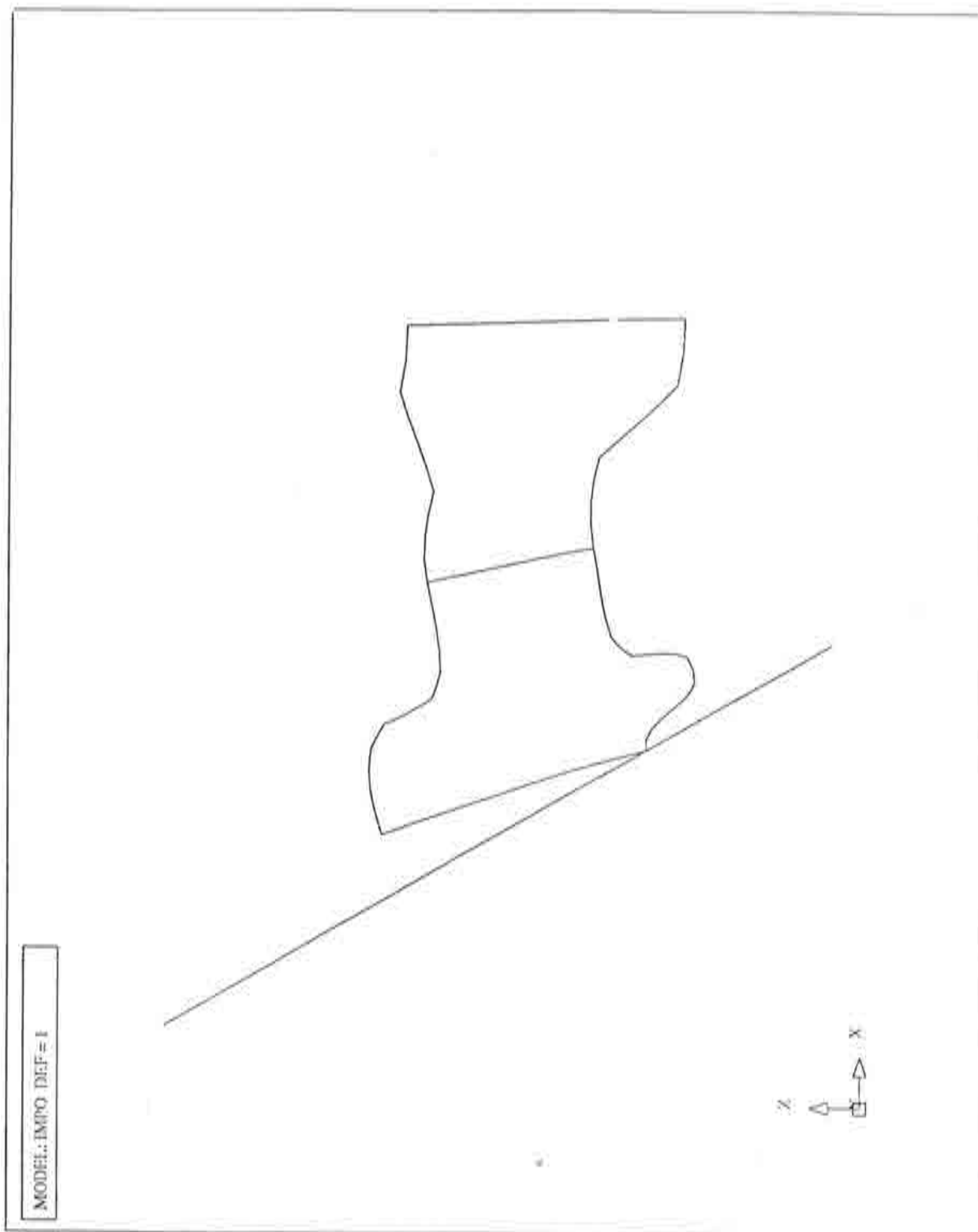


Figura 7.42 Impacto de un motor. deformada para  $t = 7,5$ ms

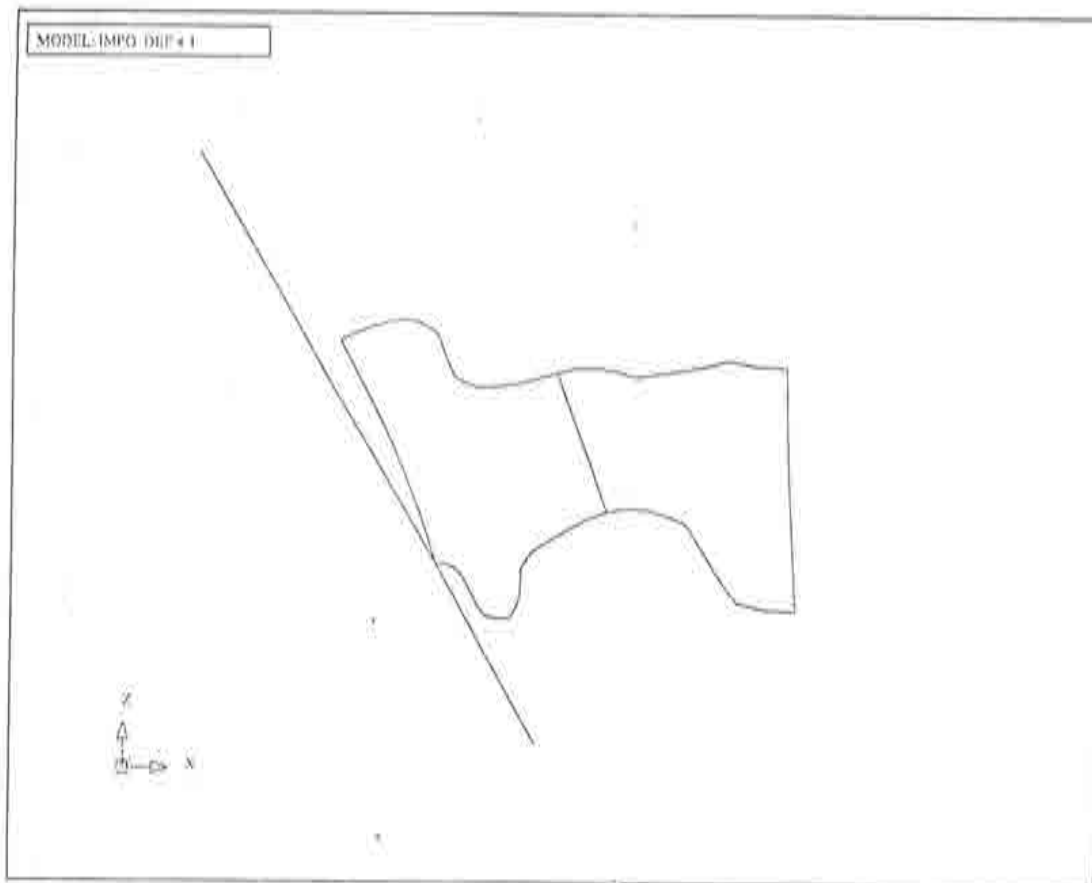


Figura 7.43 Impacto de un motor: deformada para  $t = 10\text{ms}$

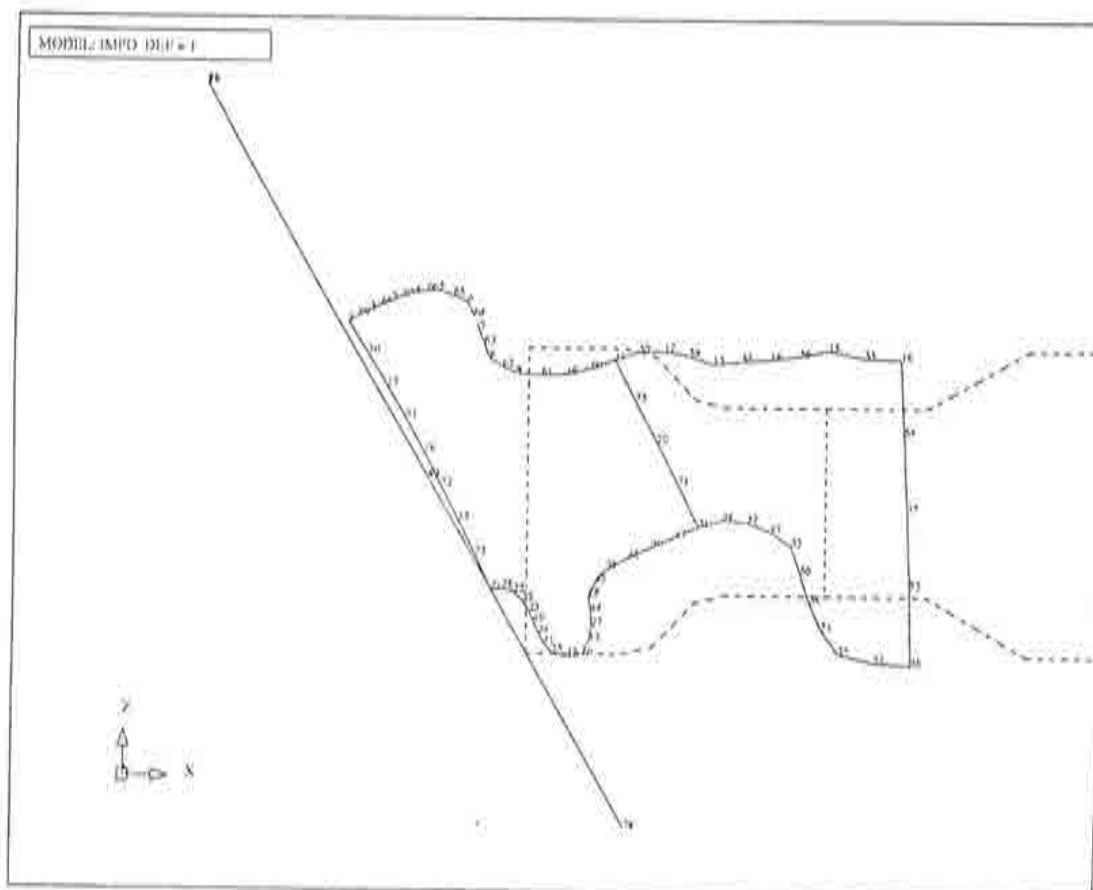


Figura 7.44 Impacto de un motor: deformada para  $t = 12,5\text{ms}$

## 7.10 VUELCO DE UNA CABINA DE AUTOBUS

Se ha sometido a vuelco libre la cabina de un autobús propuesta por IDIADA. La cabina está formada por vigas metálicas de sección hueca según la cabina pivota alrededor de un punto tal como puede verse en las figuras que siguen. El conjunto ( Fig. 7.45 ) se ha discretizado en un total de 621 elementos de viga de 2 nodos y 56 elementos lámina de 4 nodos. Existe una masa concentrada en el centro.

### 7.10.1 Resultados obtenidos

En las Figs. 7.46 y 7.47 pueden verse las velocidades iniciales. En las Figs. 7.48 a 7.51 se observa la deformada en diferentes instantes de tiempo.

Asimismo en las Figs. 7.52 y 7.53 puede verse la distribución de velocidades.

Igualmente, las Figs. 7.54 y 7.55 representan respectivamente la variación temporal de la energía cinética del conjunto y el desplazamiento vertical del nodo 307 ( nodo situado en el c.d.g. ).

En la Figs 7.56 y 7.57 están representadas las leyes de momentos flectores.

Finalmente en las Figs. 7.58 y 7.59 puede verse la deformación efectiva para diferentes instantes de tiempo.

Este ejemplo ha sido validado numéricamente en el programa ABAQUS obteniéndose muy buena concordancia.

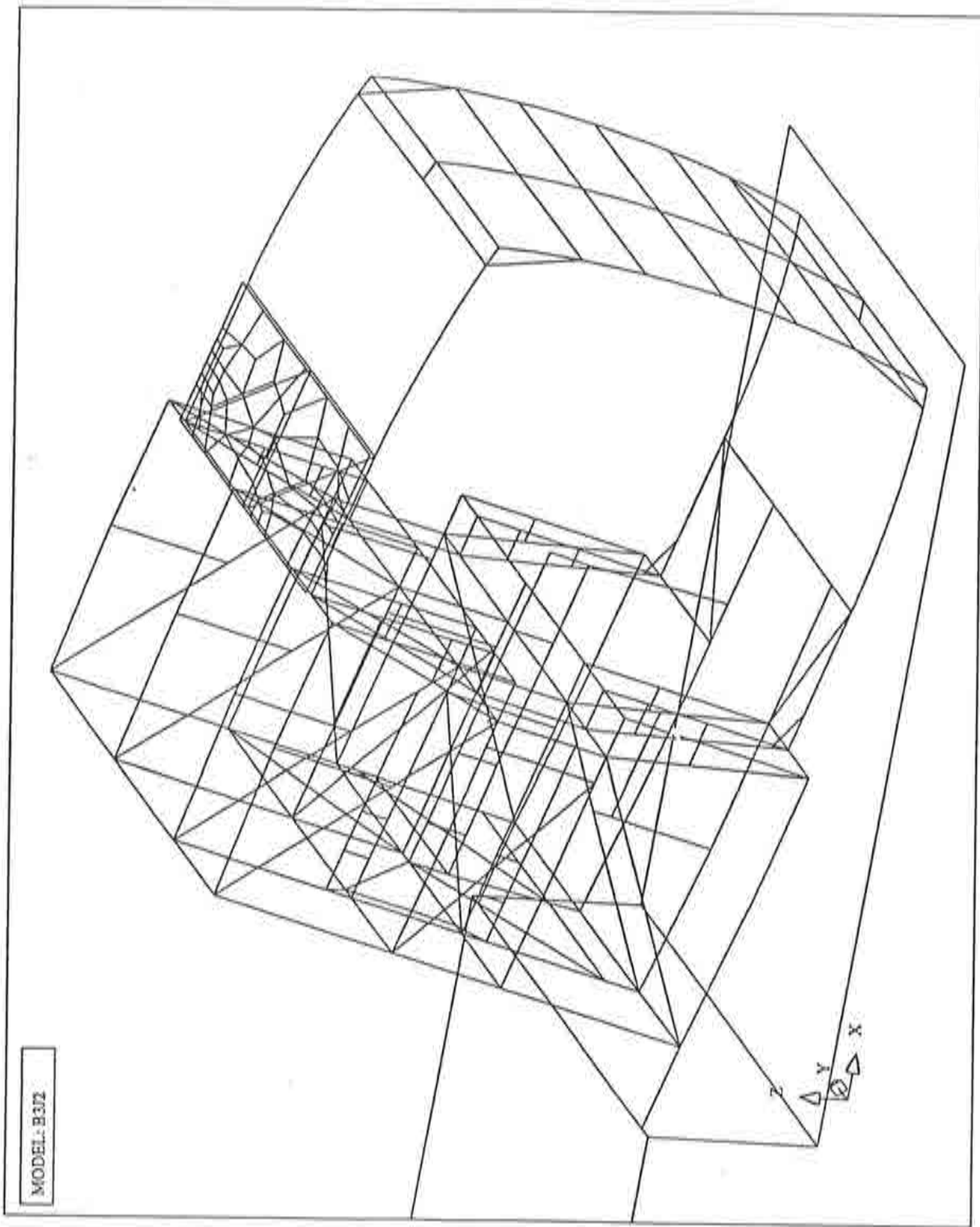


Figura 7.45 Vuelco de un autobús: geometría inicial

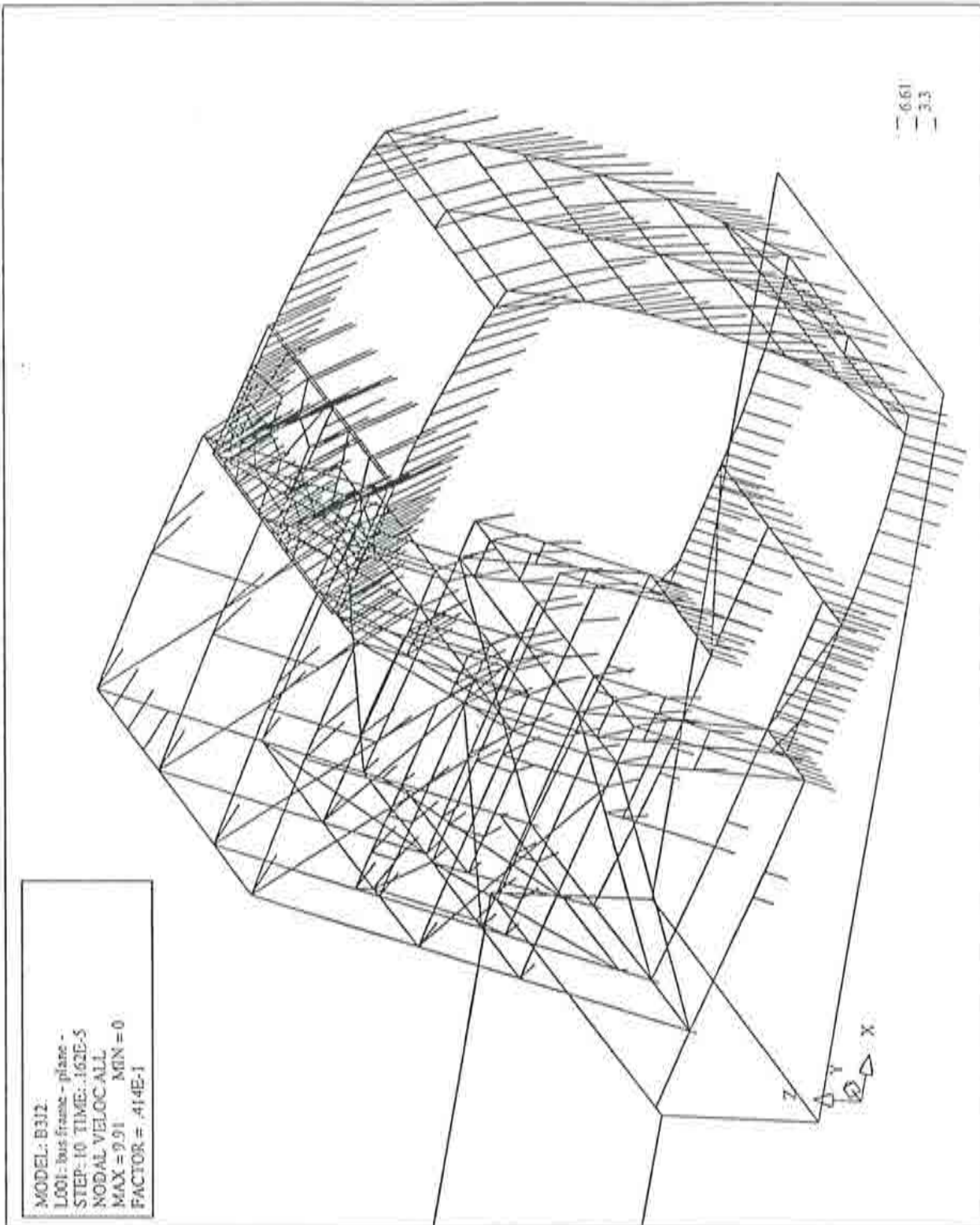


Figura 7.46 Vuelco de un autobús: velocidades iniciales

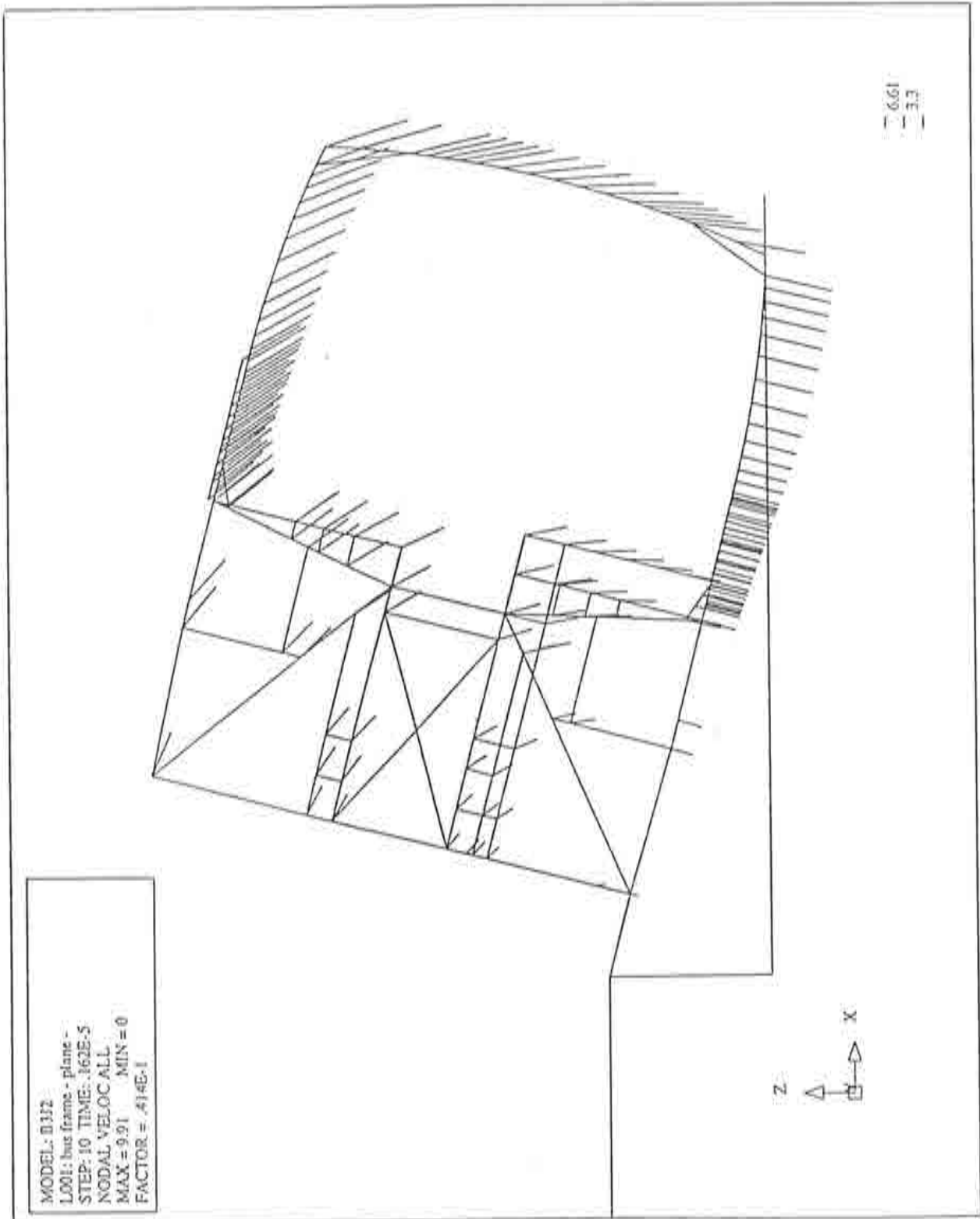


Figura 7.47 Vuelco de un autobús: velocidades iniciales

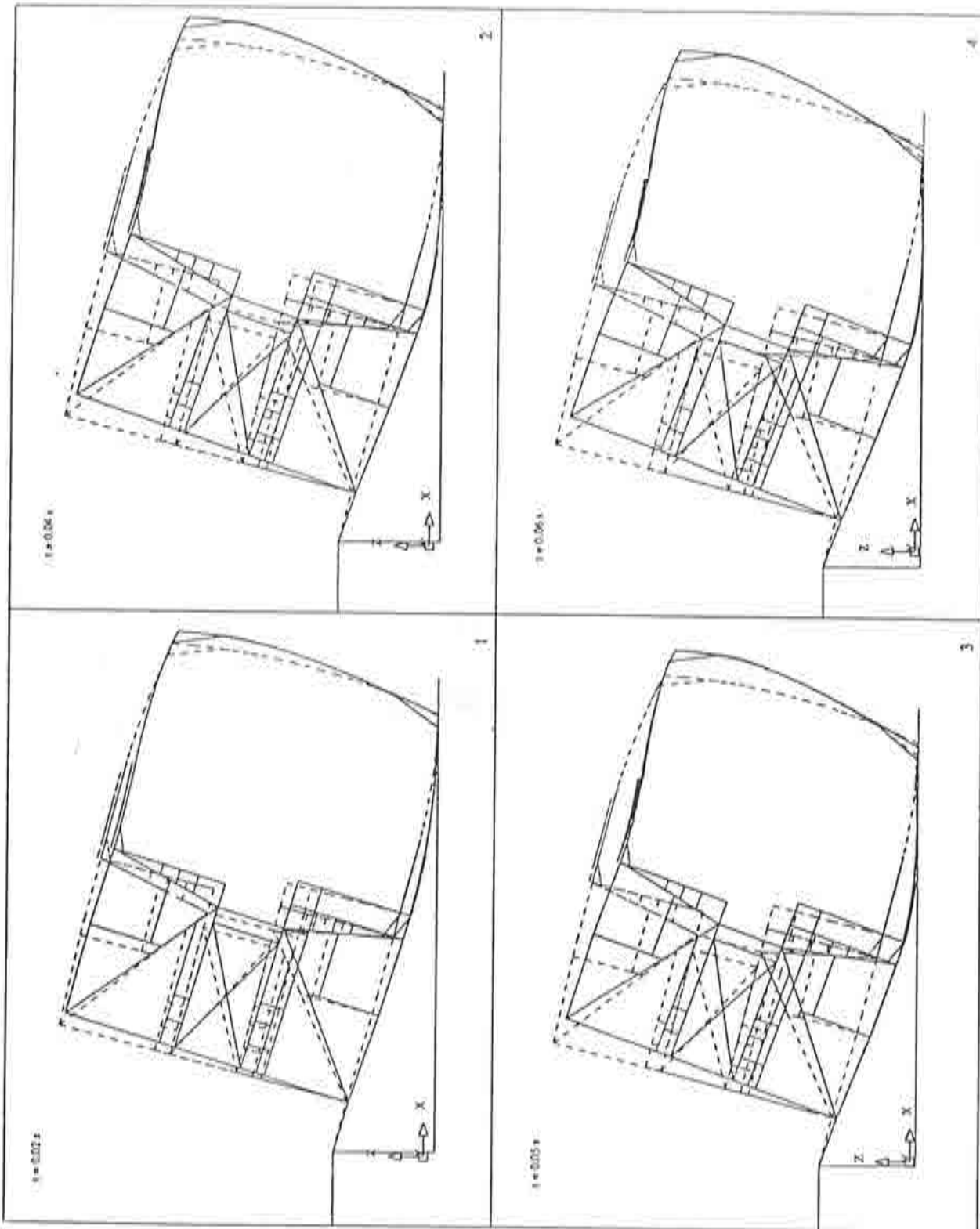


Figura 7.46 Vuelco de un autobús: deformada durante el impacto

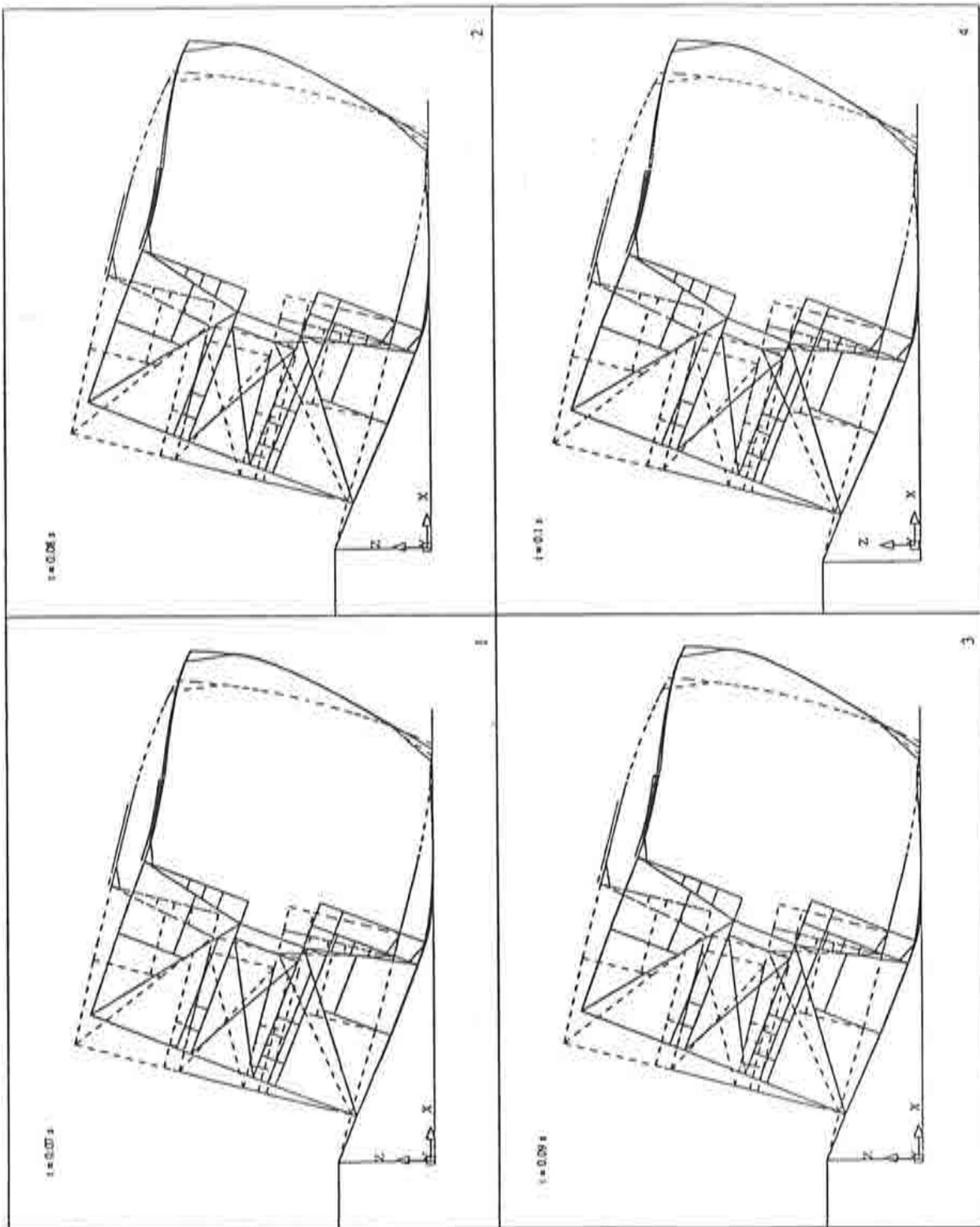


Figura 7.49 Vuelco de un autobús: deformada durante el impacto



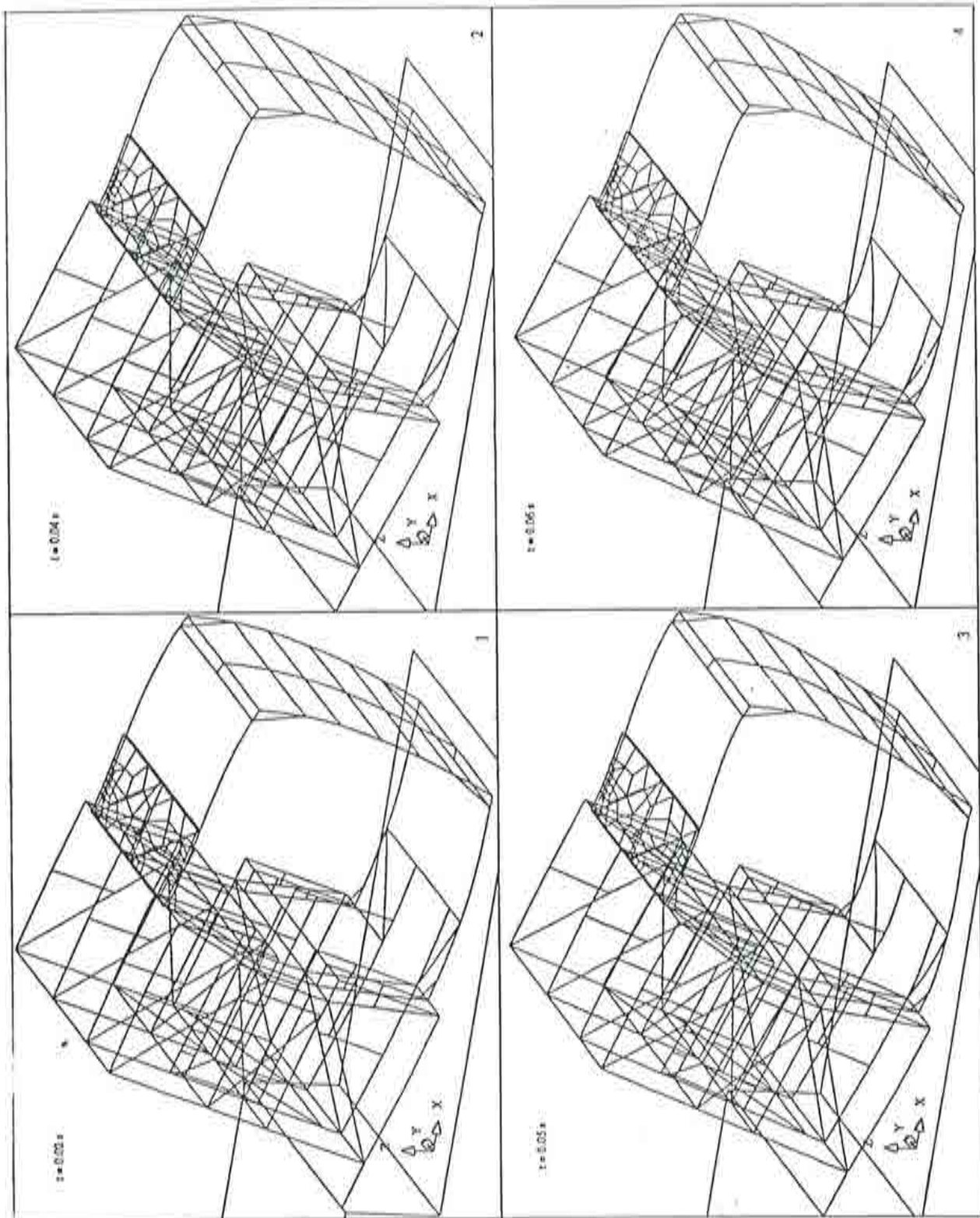


Figura 7.50 Vuelco de un autobús: deformada durante el impacto

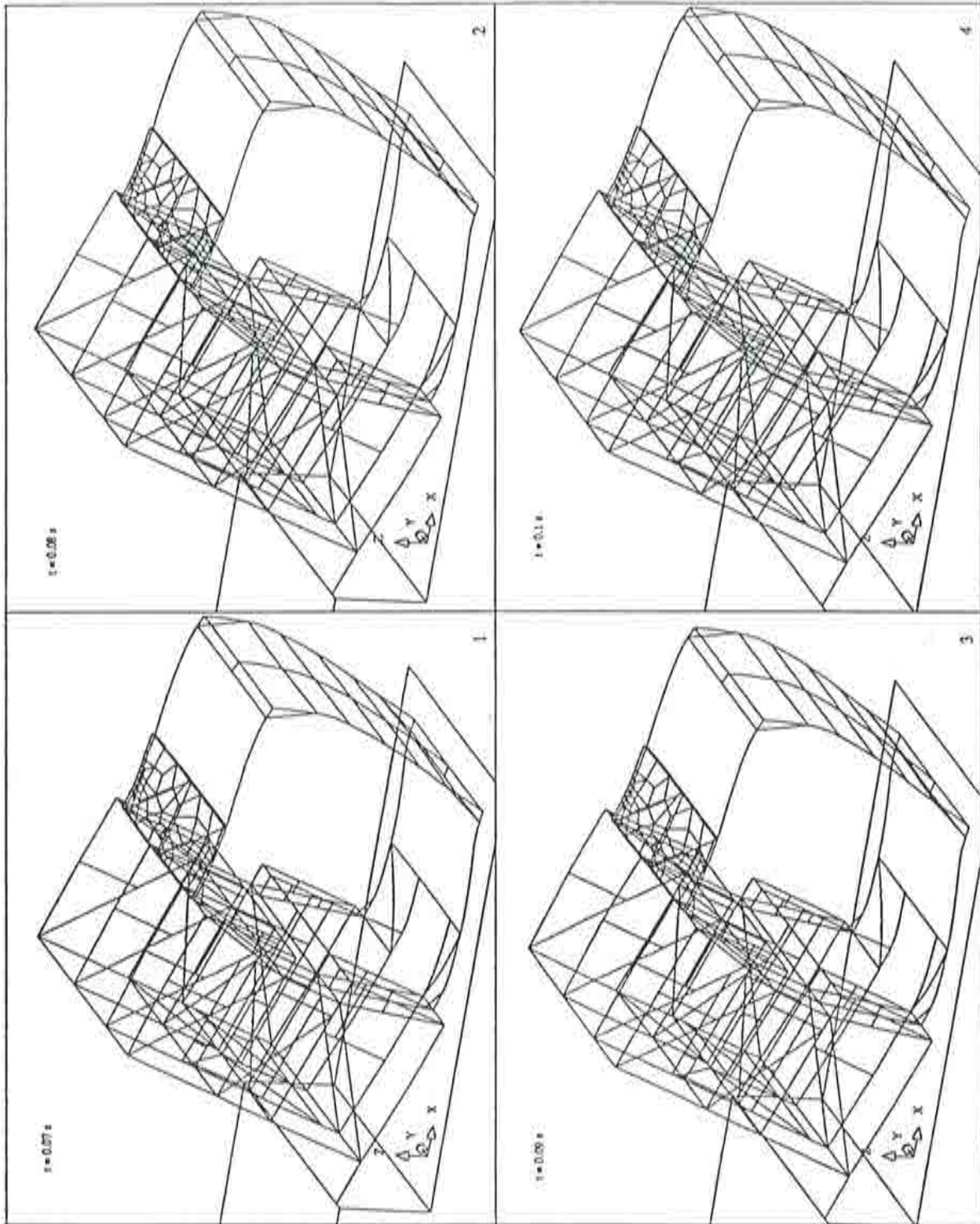


Figura 7.51 Vuelco de un autobús: deformada durante el impacto

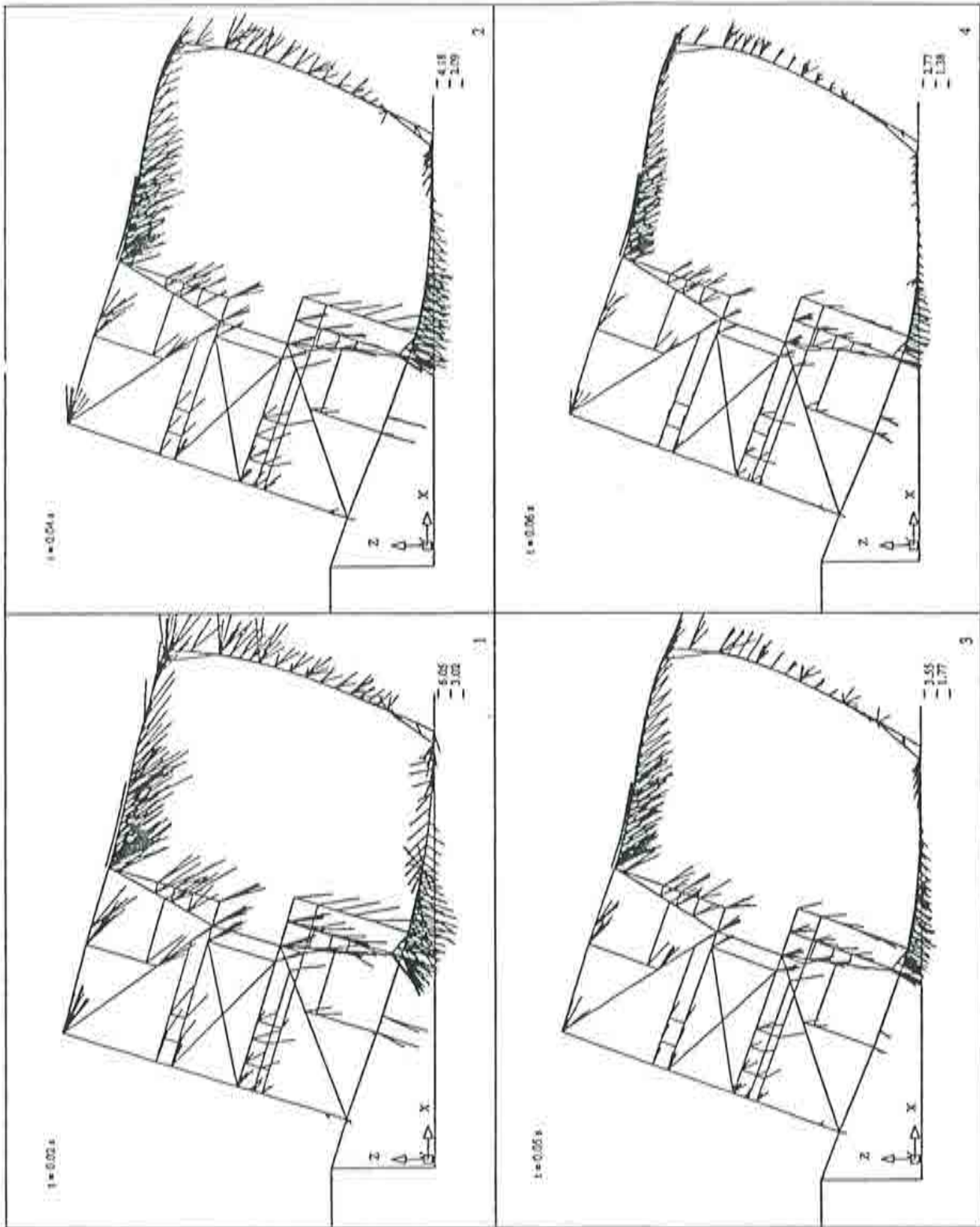


Figura 7.52 Vuelco de un autobús: distribución de velocidades durante el impacto

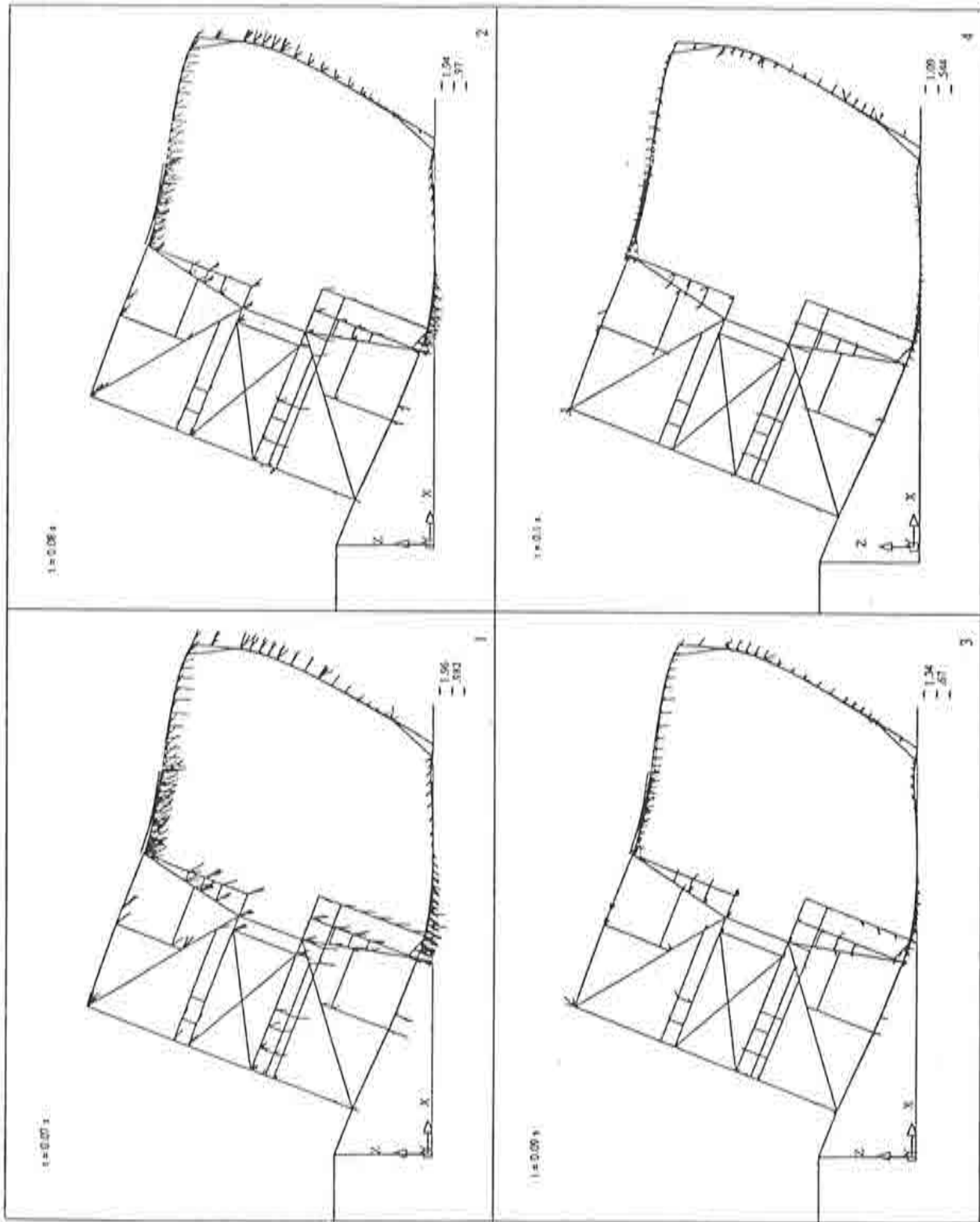


Figura 7.53 Vuelco de un autobús: distribución de velocidades durante el impacto

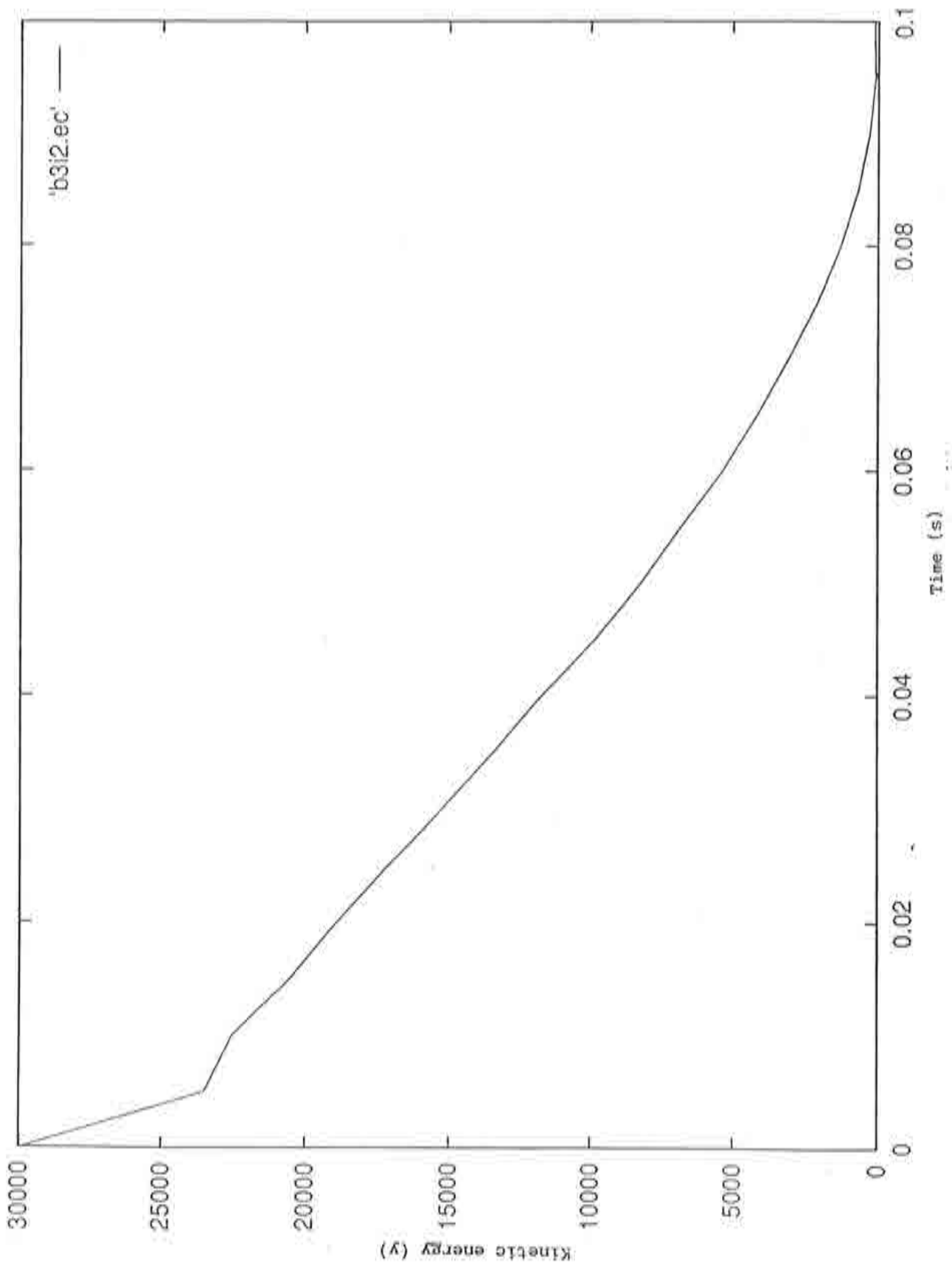


Figura: 7.54 Vuelco de un autobús: variación temporal de la energía cinética

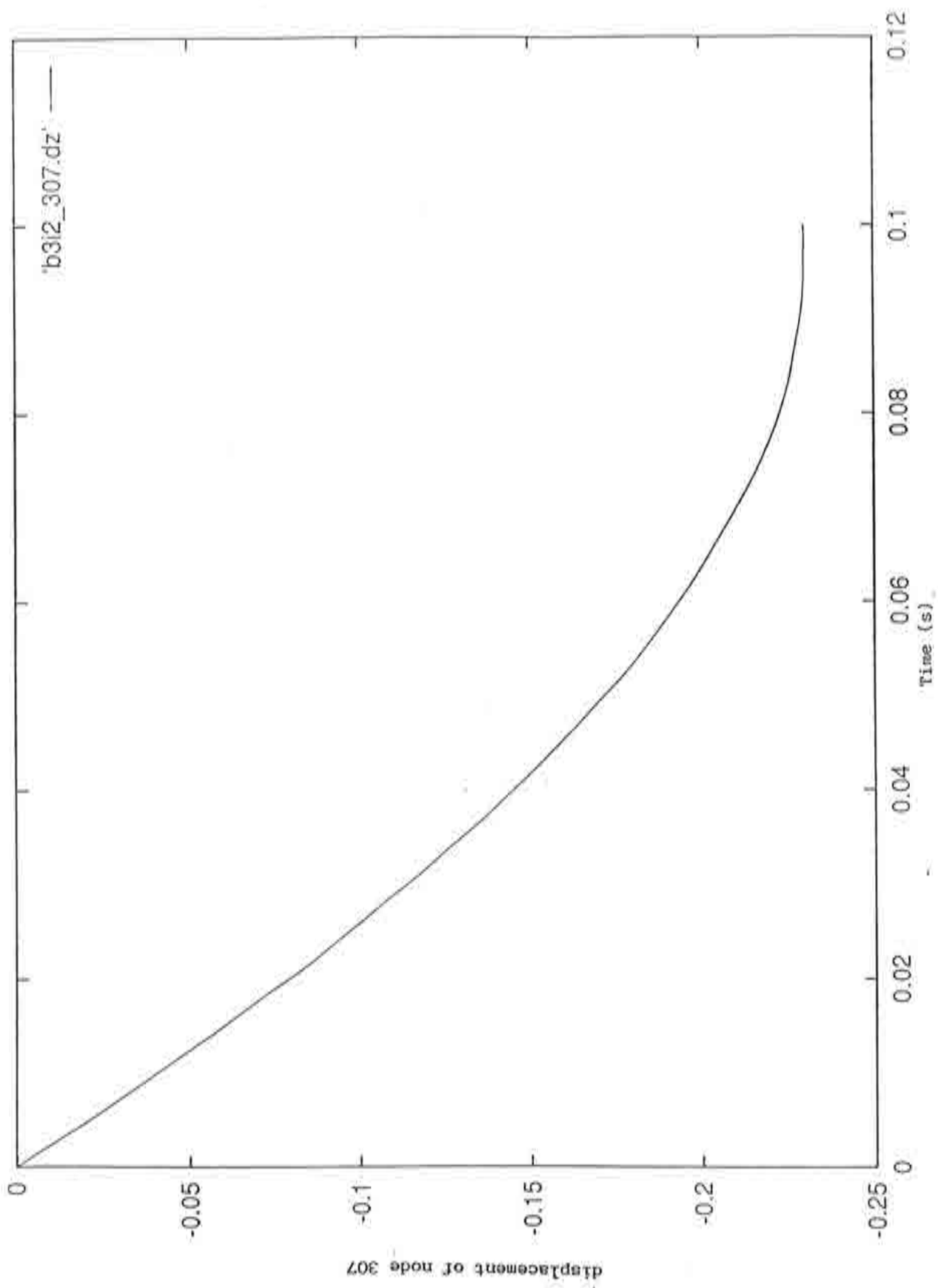


Figura 7.55 Vuelco de un autobús: desplazamiento vertical del centro de gravedad

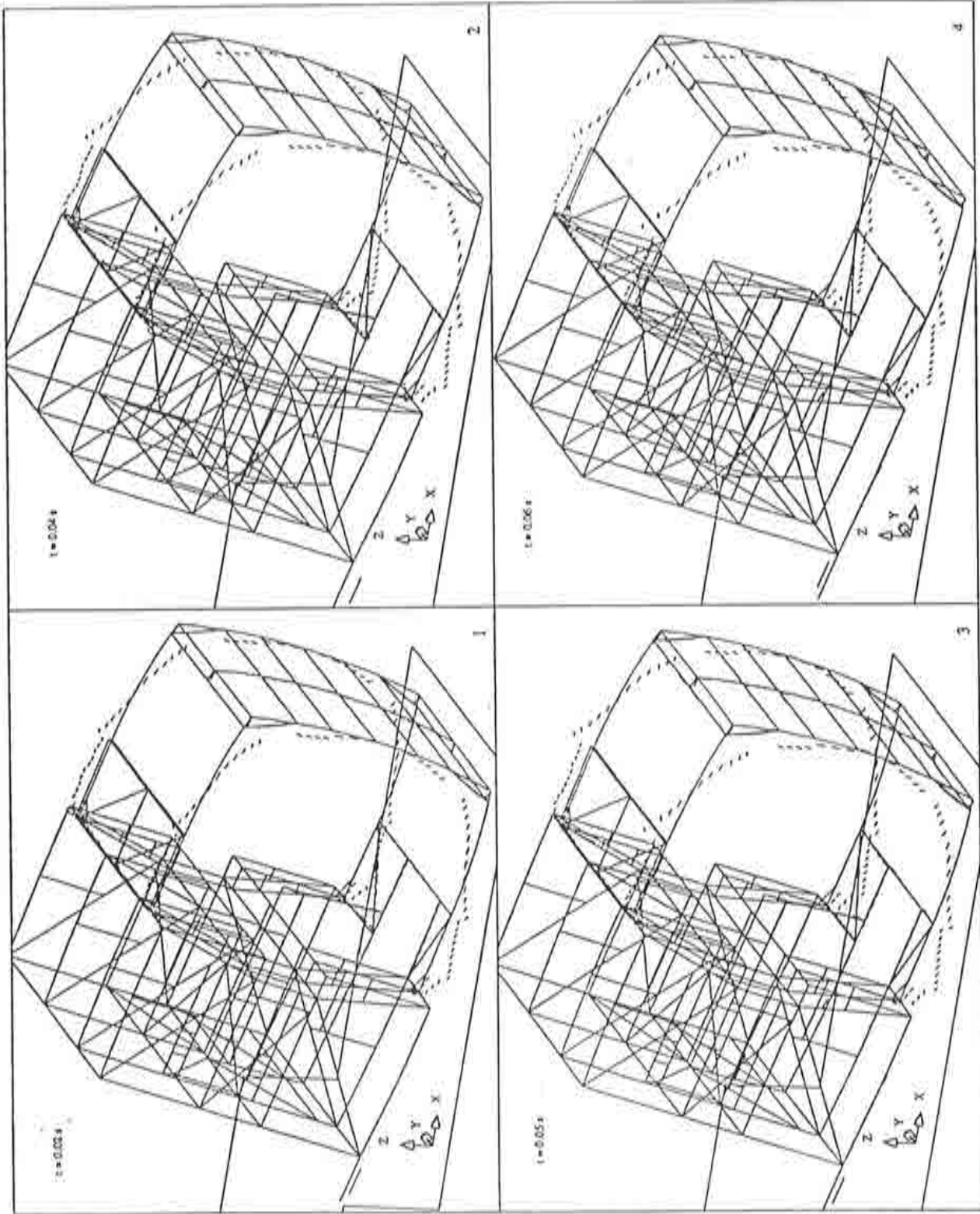


Figura 7.56 Vuelco de un autobús: leyes de momentos flectores

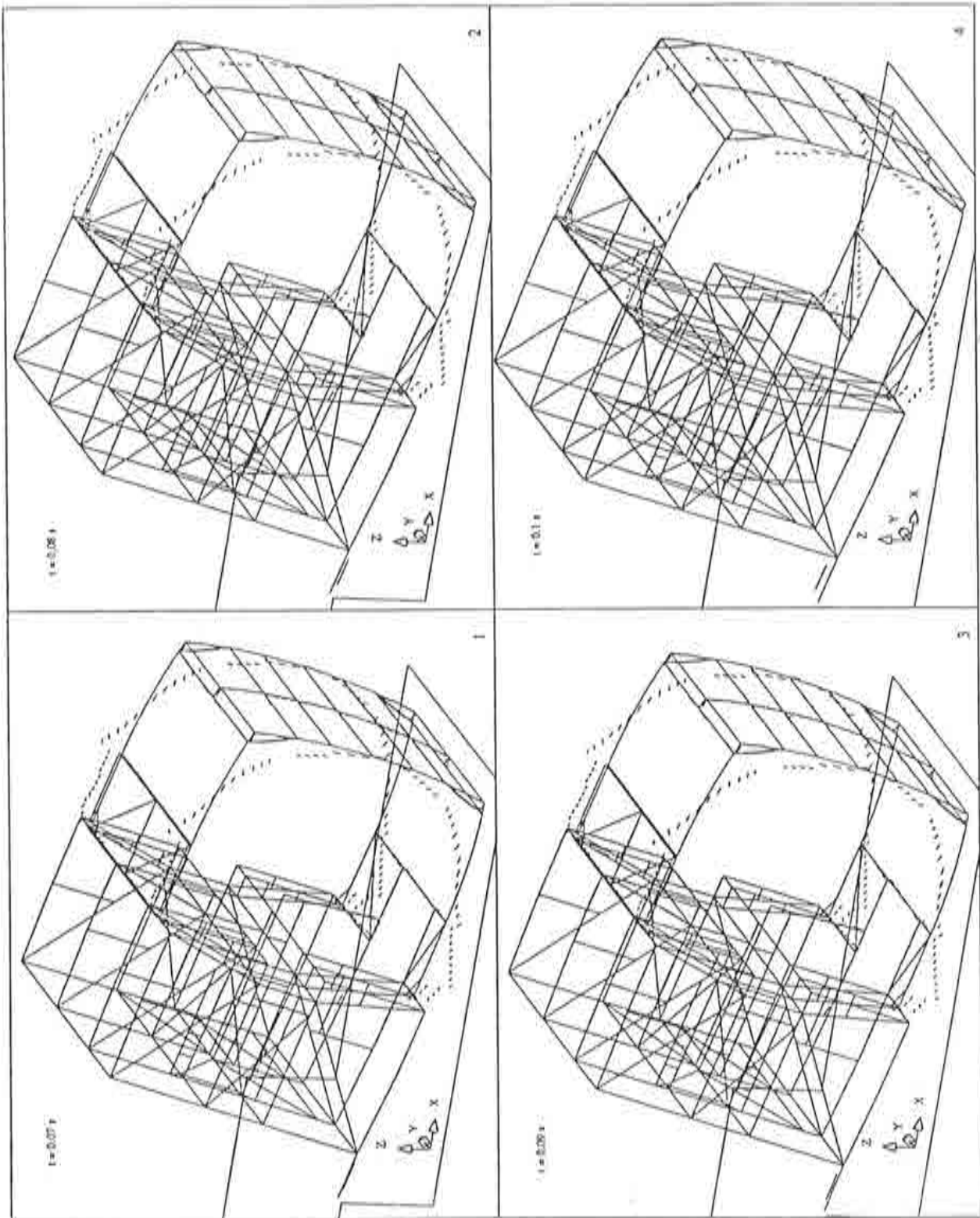


Figura 7.57 Vuelco de un autobús: leyes de momentos flectores



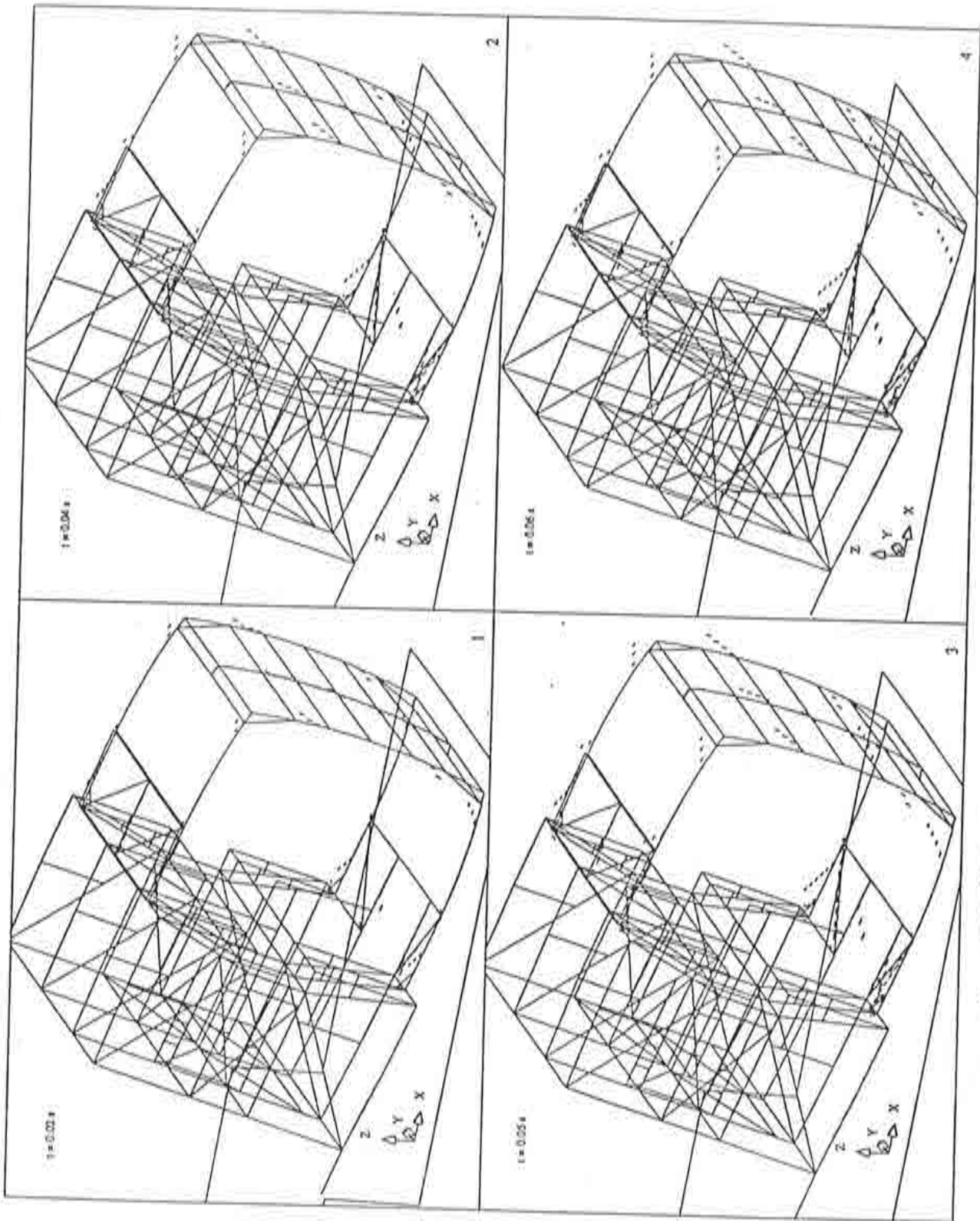


Figura 7.58 Vuelco de un autobús: deformación efectiva durante el impacto

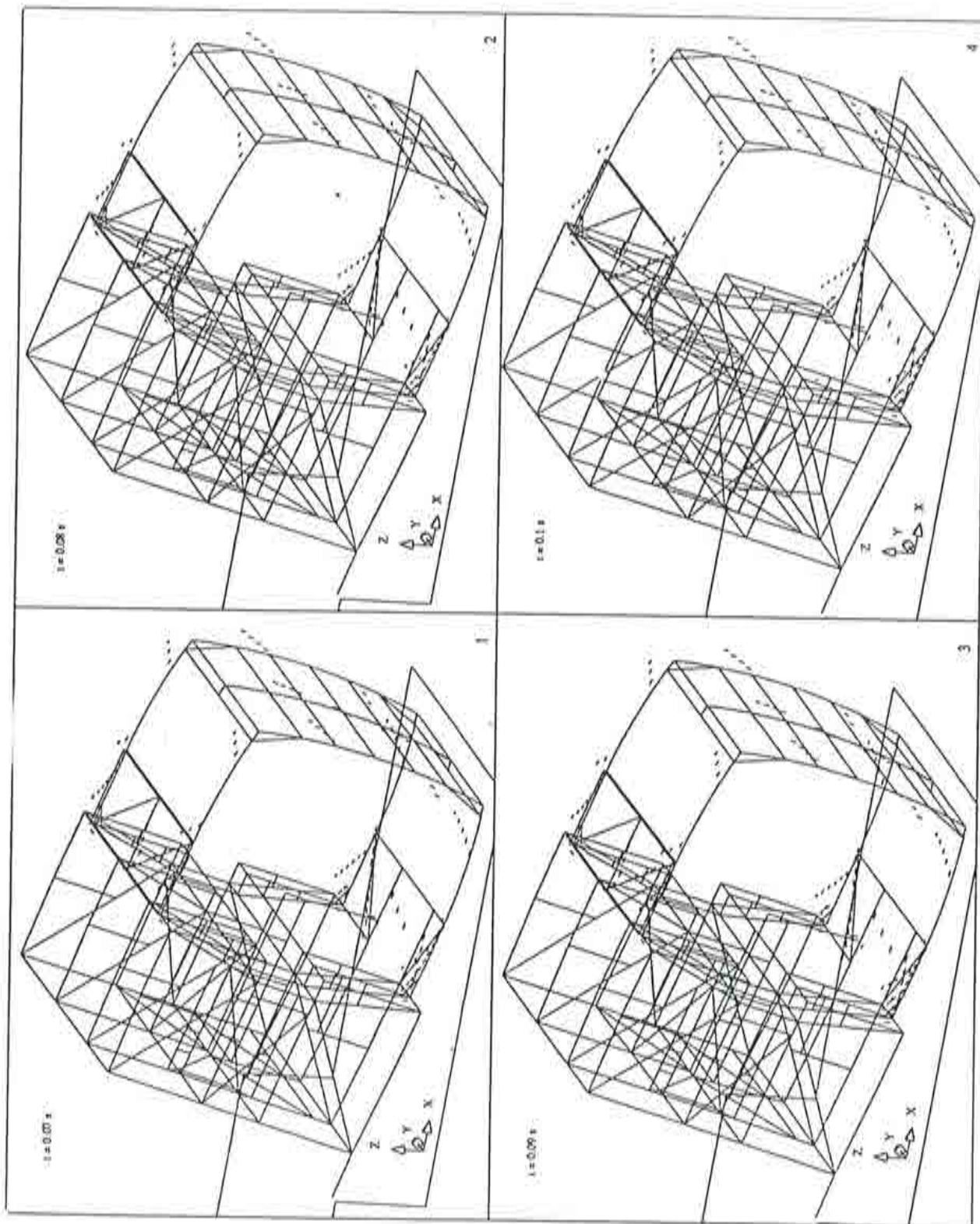


Figura 7.59 Vuelco de un autobús: deformación efectiva durante el impacto.



## Capítulo 8

### 8.1 CONCLUSIONES

A lo largo del trabajo expuesto en las páginas precedentes se han puesto de manifiesto una serie de aspectos relevantes del proyecto SIMPACT, entre los cuales destacan los siguientes:

1. Se ha desarrollado un programa de ordenador denominado SIMPACT basado en el método de los elementos finitos para cálculo de estructuras sometidas a efectos de choque. Dicho programa incluye tanto los grandes movimientos y grandes deformaciones como la plasticidad del material. El programa permite analizar los efectos energéticos, tensionales y de deformación de cualquier tipo de estructuras sometida a efectos de impacto.
2. El programa incorpora una librería de elementos finitos tanto para el análisis de estructuras en 2D como en 3D. De esta forma se incorporan elementos de sólido, elementos de lámina y elementos de viga. La combinación de estos elementos se ha demostrado de gran eficacia para el análisis de diversas tipologías estructurales.
3. La integración temporal se realiza mediante un algoritmo de tipo explícito, concretamente el de las diferencias centrales. Tal tipo de integración se ha demostrado extraordinariamente eficiente para analizar cualquier tipo de situaciones.
4. Para la correcta determinación de la solución con tiempos de CPU razonables se ha podido ver que resulta crítico tanto el algoritmo para la determinación de las fuerzas de contacto entre los cuerpos interactuantes. En este sentido, los algoritmos utilizados en este trabajo han demostrado su plena eficacia. En la actualidad los autores trabajan en el desarrollo del programa SIMPACT para que su aplicación a problemas industriales de choque e impacto en los sectores de automoción, ingeniería naval y conformado de metales resulte más efectiva.

## 8.2 AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren expresar su especial agradecimiento al Dr. Carlos Agelet de Saracibar por su valiosa colaboración prestada en el desarrollo e implementación de los algoritmos de contacto y rozamiento en el programa SIMPACT.

Los autores agradecen también la colaboración y apoyo económico prestado por el Instituto de Investigación Aplicada del Automovil (IDIADA) en el desarrollo del proyecto SIMPACT. Asimismo se agradece el apoyo económico recibido de la dirección General de Industria de la Conselleria de Industria i de la Generalitat de Catalunya y del Ministerio de Industria a través del programa PAUTA.

## Capítulo 9

### REFERENCIAS

- [1] WHAMS. An explicit 3D Finite Element Program, KBS2 INC, Willow Springs, Illinois.
- [2] Shantran, D., Owen, D.R.J. y Zienkiewicz, O.C., "Dynamic Transient Behaviour of Two and Three Dimensional Structures Including Plasticity, Large Deformations Effects y Fluid Interaction. Earthquake Engineering and Structural Dynamics", 4, 561-578, 1976.
- [3] Balmer, H.A. y Witmer, E.A., "Theoretical-Experimental of Large Dynamic and Permanent Deformation of Impulsively Loaded Simple Structures", Air Force Flight Dynamics Laboratory. Report FDP-TDR-64-108, 1964.
- [4] Bathe, K.S., Ramm, E. y Wilson, E.L., "Finite Element Formulation for Large Deformation Dynamic Analysis", *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, 9, 353-386, 1975.
- [5] Lubliner, J., "Plasticity Theory", Mc. Millan, 1990.
- [6] Oñate, E., "Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos", CIMNE, Barcelona, 1992.
- [7] Bathe, K.J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice Hall, 1982.
- [8] Hallquist, J., "Theoretical Manual for DYNA 3D", Lawrence Livermore Laboratory, 1982.
- [9] Simó, J.C. y Ortiz, M., "A Unified Approach to Finite Deformation Elastoplastic Analysis Based on the Use of Hyperelastic Constitutive Equations", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 49, 221-245, 1985.
- [10] Simó, J.C., "A Framework for Finite Strain Elastoplasticity Based on Maximum

Plastic Dissipation and the Multiplicative Decomposition: Part II Computational Aspects", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **68**, 1-31, 1988.

- [11] Marsden, J.E. y Hughes, T.J.R., "*Mathematical Foundations of Elasticity*", Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1983.
- [12] C. García Garino and J. Oliver. Use of a large strain elastoplastic model for simulation of metal forming processes. In J. L. Chenot, R. Wood, and O. C. Zienkiewicz, editors, *NUMIFORM '92*, Balkema, 1992.
- [13] Ponthot, J.P., "The Use of the Eulerian-Lagrangian Formulation Including Contact. Applications to Forming Simulation Via FEM.", 293-300, "*Proceedings of the NUMIFORM 92*", Chenot J.L *et al.* (eds), Balkema, 1992.
- [14] Simó, J.C. y Fox, D.D., "On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part I: Formulation and Optimal Parametrization", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engng.*, **72**, 267-303, 1989.
- [15] Simó, J.C., Fox, D.D. y Rifai, M.S., "On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part II: The Linear Theory, Computational Aspects", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engng.*, **73**, 53-92, 1989.
- [16] Simó, J.C., Fox, D.D. y Rifai, M.S., "On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part III: Computational Aspects of the Nonlinear Theory", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engng.*, **79**, 21-70, 1990.
- [17] Simó, J.C., Rifai, M.S. y Fox, D.D., "On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part IV: Variable Thickness Shells with Through-the-Thickness Stretching", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engng.*, **81**, 91-126, 1990.
- [18] Simó, J.C. y Kennedy, J.G., "On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part V: Nonlinear Plasticity: Formulation and Integration Algorithms", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engng.*, **96**, 133-171, 1992.
- [19] Cervera, M., Fusco, A. y Galindo, M., "OMEGA Organized Moduli for Engineering General Analysis, CIMNE, 1991.
- [20] Oñate, E., Zienkiewicz, O.C., Suárez, B. y Taylor, R.L., "A General Methodology for Deriving Shear-Constrained Reissner-Mindlin Plate Elements", *Int. J. Num. Methods in Engng.*, 1992.
- [21] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Papadopoulos, P. y Oñate, E., "Plate Bending Elements with Discrete Constrains: New Triangular Elements", *Computers and Structures*, **35**, 505-522, 1990.
- [22] Ahmad, S., Irons, B. y Zienkiewicz, O.C., "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements", *Int. J. Num. Methods in Engng.*, **2**, 419-451, 1970.
- [23] Oñate, E., "*Análisis de estructuras por el Método de Elementos Finitos*", CIMNE, Barcelona, 1992.
- [24] Oñate, E., Zárate, F. y Flores, F., "A Simple Triangular Element for Thick and Thin Plate and Shell Analysis", *Second U.S. National Congress on Computational Mechanics, Int. J. Num. Methods in Engng.*, 1993.

- [25] Ramm, E. y Matzenmiller, A., "Computational Aspects of Elasto-Plasticity in Shell Analysis", *Computational Plasticity*, Pineridge Press, Swansea, 711-734.
- [26] Simó, J.C., "A Finite Strain Beam Formulation. The Three-Dimensional Dynamic Problem. Part I", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engng.*, **49**, 55-77, 1985.
- [27] Simó, J.C. y Vu-Quoc, L., "A Three Dimensional Finite Strein Rod Model. Part II: Computational Aspects", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engng.*, **58**, 79-116, 1986.
- [28] Simó, J.C. y Vu-Quoc, L., "On the Dynamic in Space of Rods Undergoing Large Motions - A Geometrically Exact Approach", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engng.*, **58**, 125-161, (1988).
- [29] Simó, J.C. y Vu-Quoc, L., "A Geometrically - Exact Rod Model Incorporating Shear ans Torsion- Warping Deformation", *Int. J. Solids and Structures*, **27**, no. 3, 371-393, 1991.
- [30] Bathe, K.J., Ramm, E. y Wilson, E.L., "Finite Element Formulation for Large Deformation Dynamic Analysis", *Int. J. Num. Methods in Engng.*, **9**, 353-386, (1975).
- [31] Balmer, H.A. y Witmer, E.A., "Theoretical-Experimental Correlation of Large Dynamic and Permanent Deformation of Impulsively Loaded Simple Structures", Air Force Flight Dynamic Laboratory, *Report FDP-TDR-64-108*, 1964.
- [32] Manual de usuario de WHAMS-3D, "*An Explicit 3D Finite Element Program*."
- [33] Hallet, N., "*Large Deflection Impulsive Loading of Plates*", Tesis de Doctorado, City University, Londres, (1987).
- [34] García Garino, C.G., "*Un modelo numérico para el análisis de sólidos elasto-plásticos sometidos a grandes deformaciones*", Tesis de Doctorado, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, 1993.
- [35] Zhong, Z.H., *Finite Element Procedures for Contact Impact Problemes*, Oxford University Press, Oxford, G.B., 1993.
- [36] Shi, G. y Atluri, S.N., "Elasto-Plastic Large Deformation Analysis of Space-Frames. A Plastic-Hinge and Stress-Based Explicit Derivation of Tangent Stiffness", *Int. J. Num. Methods in Engng.*, **26**, 589-615, 1988.
- [37] ADINA User's Manual, *Report AE 84-1*, ADINA Engineering, 1984.
- [38] ADINA Theory and Modeling Guide, *Report AE 84-4*, ADINA Engineering, 1984.
- [39] Agelet de Saracibar, C., "FEAP Manual teórico y manual de usuario", *Report interno*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, 1987.
- [40] Bathe, K.J. y Chaudary, A., "A Solution Method for Planar and Axisymmetric Contact Problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **21**, 65-88, 1985.
- [41] Bathe, K.J. y Mijailovich, S., "Finite Element Analysis of Frictional Contact Problems", *Numerical Methods in Mechanics of Contact Involving Friction*, *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Gauthier-Villars, 1988.
- [42] Baynham, J.M.W., "The Analysis of Extrusion and Deep-drawing Processes Using



- the Finite Element Method", *C/Ph/102/87*, Department of Civil Engineering, University College of Swansea, 1987.
- [43] Bellet, M., "Modelisation numerique du formage superelastique de toles", Ecole Nationale Superieure des Mines de Paris, Ph.D. Thesis, 1988.
- [44] Bonet, J., Wargadipura, A.H.S. y Wood, R.D., "A Pressure Control Algorithm for Superplastic Forming", *Comm. Appl. Num. Meth.*, **5**, 121-128, 1989.
- [45] Campos, L.T., Oden, J.T. y Kikuchi, N., "A Numerical Analisis of a Class of Contact Problems with Friction in Elastostatics", *Comp. Meth. Appl. Engng.*, **34**, 821-845, 1982.
- [46] Chabrand, P., Pinto, Y. y Raous, M., "Numerical Modelling of Friction for Metal Forming Processes", "Modelling of Metal Forming Processes", "*Proceedings of the Euromech Colloquium 233, Sophia-Antipolis, France, August 29-31, 1988*", J.L. Chenot y E. Oñate (eds), Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [47] Cabrand, P., Pinto, Y. y Raous, M., "A Numerical Model of Friction for the Blankholder Function Analysis", NUMIFORM 89, "Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, NUMIFORM 89, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, USA, June 26-30, 1989", E.G. Thompson *et al.* (eds), A.A. Balkema, 1989.
- [48] Chandra, N., "Analysis of Superplastic Metal Forming by a Finite Element Method", *Internal Report*, Florida State University, FL, USA.
- [49] Chandrasekaran, N., Haisler, W.E. y Goforth, R.E. , "A Finite Element Solution Method for Contact Problems with Friction", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **24**, 477-495, 1987.
- [50] Charlier, R. y Cescotto, S., "Modélisation du phénomène de contact unilatéral avec frottement dans un contexte de grandes déformations", *Numerical Methods in Mechanics of Contact Involving Friction, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Gauthier-Villars, 1988.
- [51] Chaudary, A. y Bathe, K.J., "A Solution Method for Static and Dynamic Analysis of Three-Dimensional Contact Problems with Friction", *Computers and Structures*, **24**, 6, 855-873, 1986.
- [52] Hallet, N., "Large Deflection Impulsive Loading of Plates", Tesis Doctoral. City University, London, 1987.
- [53] Benchmark, December 1992, p. 36.
- [54] Beltrán, F. y Goicolea, J., "Large Strain Plastic Collapse: A Comparison of Explicit and Implicit Solutions", *Computational Plasticity II*, D.R.J. Owen *et al.* (eds), Pineridge Press, **2**, 1125-1136, 1989.
- [55] Zhong, Z.H., "Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems", Oxford University Press, 1993.
- [56] Shi, G. y Atluri, S.N., "Elasto-plastic Large Deformation Analysis of Space-Frames: A Plastic Hinge and Stress-Based Explicit Derivation of Tangent Stiffness", *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, **26**, 589-615, 1988.

- [57] Dalin, J.B. y Oñate, E., "An Automatic Algorithm for Contact Problems: Application to Sheet Metal Forming Problems", NUMIFORM 89, "*Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, NUMIFORM'89, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, USA, June 26-30, 1989*", E.G. Thompson *et al.* (eds), A.A. Balkema, 1989.
- [58] Doltsinis, I.S., Loginsland, J. y Nolting, S., "Some Developments in the Numerical Simulation of Metal Forming Processes", "*Computational Plasticity II*", "*Proceedings of the International Conference on Computational Plasticity: Models, Software and Applications, Barcelona, Spain, April 6-11, 1987*", R.D.J. Owen, E. Hinton y E. Oñate (eds), Pineridge Press, Swansea, 1987.
- [59] Doltsinis, I.S., Loginsland, J. y Nolting, "Some Developments in the Numerical Simulation of Metal Forming Processes", *Engineering Computations*, 4, 266-280, 1987.
- [60] Doltsinis, I.S., "Progress in the Development of Computer Methods in Engineering Supercomputing in Engineering Structures", IBM Europe Institute, Oberlech, Austria, July 11-15, 1988.
- [61] Doltsinis, I.S., "Nonlinear Concepts in the Analysis of Solids and Structures", *Advances in Computational Nonlinear Mechanics*, I.S. Doltsinis (Ed), Springer-Verlag, 1989.
- [62] Doltsinis, I.S., "Aspects of Modelling and Computation in the "Analysis of Metal Forming", NUMIFORM 89, Proceeding of the Third International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, NUMIFORM'89, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, USA, June 26-30, 1989, E.G. Thompson *et al.* (eds), A.A. Blkema, 1989.
- [63] Fortin, M. y Glowinsky, R., "Augmented Lagrangian Methods", Nort-Holland, Amsterdam, 1983.
- [64] Francavilla, A. y Zienkiewicz, O.C., "A Note on Numerical Computation of Elastic Contact Problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 9, 913-924, 1975.
- [65] Franchomme, P. Ricard, A., Oudin, J. y Ravalard, Y, "Optimized Finite Element Formulation for Contact and Friction Conditions", NUMIFORM 89, "*Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, NUMIFORM'89, Colorado State University, Fort Collins, Colorado USA, June 26-30, 1989*", E.G. Thompson *et al.* (eds), A.A. Balkema, 1989.
- [66] Germain, Y, Chung, K. y Wagoner, R.H., "A Rigid Visco-plastic Finite Element Program for Sheet Metal Forming Analysis", *Int. J. Mech. Sci.*, ( a aparecer)
- [67] Grober, H., Charlier, R. y Cescotto, S., "On the Modelling of the Three-Dimensional Contact Problem in the Numerical Simulation of Rolling", NUMIFORM 89, "*Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, NUMIFORM'89, Colorado State University, Fort Collins, Colorado USA, June 26-30, 1989*", E.G. Thompson *et al.* (eds), A.A. Balkema, 1989.

- [68] Hallquist, J.O., "Theoretical Manual for DYNA 3D", Lawrence Livermore National Laboratories, 1983.
- [69] Hallquist, J.O., "NIKE 2D: An Implicit, Finite-Deformation, Finite Element Code for Analyzing the Static and Dynamic Response of Two-Dimensional Solids", *Report UCRL-53678*, University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, 1979.
- [70] Hazet, B. y Guiraud, M., "Some Applications of Crash Simulation in Car Manufacturing Industry", *Supercomputer Applications in Automotive Research and Engineering Development*, "Proceedings of the Second International Conference on Supercomputing Applications in the Automotive Industry, Sevilla, Spain, October 1988", C. Marino (Ed), Cray Research, Inc., USA, 1988.
- [71] Heyliger, P.R. y Reddy, J.N., "A Mixed Computational Algorithm for Plane Elastic Contact Problems- I. Formulation", *Computers and Structures*, 26, 4, 621-643, 1987.
- [72] Heyliger, P.R. y Reddy, J.N., "A Mixed Computational Algorithm for Plane Elastic Contact Problems-II. Numerical Examples", *Computers and Structures*, 26, 4, 635-653, 1987.
- [73] Honnor, M.E., "Nonlinear Finite Element Analysis of Axisymmetric Shells Applied to Sheet Metal Forming", *C/Ph/83/5*, Department of Civil Engineering, University College of Swansea, 1983.
- [74] Horkay, F., Jean, M. y Mehrez, F., "Unilateral Contact and Dry Friction in Numerical Simulation of Deep Drawing", NUMIFORM 89, "Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, NUMIFORM'89, Colorado State University, Fort Collins, Colorado USA, June 26-30, 1989", E.G. Thompson et al. (eds), A.A. Balkema, 1989.
- [75] Huetink, J., Lugt, J. van der y Vreede, P.T., "A Mixed Eulerian-Lagrangian FEM for Simulation of Thermo-Mechanical Forming Processes", *Modelling of Metal Forming Processes*, "Proceedings of the Euromech Colloquium 233, Sophia-Antipolis, France, August 29-31, 1988", J.L. Chenot y E. Oñate (eds), Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [76] Huetink, J., Vreede, P.T y Lugt, J. van der, "The Simulation of Contact Problems in Forming Processes Using a Mixed Eulerian-Lagrangian Finite Element Method", NUMIFORM 89, "Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, NUMIFORM'89, Colorado State University, Fort Collins, Colorado USA, June 26-30, 1989", E.G. Thompson et al. (eds), A.A. Balkema, 1989.
- [77] Hughes, T.R.J., Taylor, R.L., Sackman, J.L., Curnier, A. y Kanoknukulchai, W., "A Finite Element Method for a Class of Contact-Impact Problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 8, 249-276. 1976.
- [78] Ishinabe, M., "An Algorithm of Contact Problems for Forming Process of Thin Plates-A Numerical Analysis for the Seaming Process of a Can", *Computers and*

- Structures*, 27, 1, 23-26, 1987.
- [79] Jean, M. y Touzot, G., "Implementation of Unilateral Contact and Dry Friction in Computer Codes Dealing with Large Deformations Problems", *Numerical Methods in Mechanics of Contact Involving Friction, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Gauthier-Villars, 1988.
- [80] Ju, J.W. y Taylor, R.L., "A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite Element Solution of Non-linear Frictional Contact Problems", *Numerical Methods in Mechanics of Contact Involving Friction, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Gauthier-Villars, 1988.
- [81] Keum, Y.T., Nakamachi, E., Wagoner, R.H. y Lee, J.K., "Compatible Description of Tool Surfaces and FEM Meshes for Analyzing Sheet Forming Operations", NUMIFORM 89, "Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, NUMIFORM'89, Colorado State University, Fort Collins, Colorado USA, June 26-30, 1989", E.G. Thompson et al. (eds), A.A. Balkema, 1989.
- [82] Kikuchi, N. y Oden, J.T., "Contact Problems in Elastostatics", *Finite Elements: Special Problems in Solid Mechanics IV*, Oden y Carey (eds), Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- [83] Klarbring, A. y Björkman, G., "The Treatment of Problems in Contact Mechanics by Mathematical Programming", *Numerical Methods in Mechanics of Contact Involving Friction, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Gauthier-Villars, 1988.
- [84] Makinouchi, A. y Liu, S.D., "Finite Element Analysis of Contact Problems at Finite Elasto-plastic Deformation", NUMIFORM 89, "Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, NUMIFORM'89, Colorado State University, Fort Collins, Colorado USA, June 26-30, 1989", E.G. Thompson et al. (eds), A.A. Balkema, 1989.
- [85] Marino, C. (Ed), "Supercomputer Applications in Automotive Research and Engineering Development", "Proceedings of the Second International Conference on Supercomputing Applications in the Automotive Industry, Sevilla, Spain, October 1988", Cray Research, Inc., USA, 1988.
- [86] Massoni, E., "Modélisation numérique par éléments finis de l'emboutissage", Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Ph.D. Thesis, 1987.
- [87] Montmitonnet, P., Germain, Y. y Chenot, J.L., "Application of the Finite Element Methods to Contact, Friction and Lubrication in Metal Forming", *Numerical Methods in Mechanics of Contact Involving Friction, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Gauthier-Villars, 1988.
- [88] Nakamachi, E., Germain, Y. y Wagoner, R.H., "Comparison between Rigid Visco-plastic and Elasto-plastic Finite Element Programs for Sheet Metal Forming Analysis", *Advances and Trends in Automotive Sheet Steel Stampings*, Society of Automotive Engineers, 1988.

- [89] Nour-Omid, B. y Wriggers, P., "A Two-level Iteration Method for Solution of Contact Problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **54**, 131-144, 1986.
- [90] Oden, J.T., "Exterior Penalty Methods for Contact Problems in Elasticity", *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Europe-U.S. Workshop Proceedings, Bathe, Stein y Wunderlich (eds), Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [91] Oden, J.T., "New Models of Friction for Nonlinear Elastodynamics Problems", *Numerical Methods in Mechanics of Contact Involving Friction*, *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Gauthier-Villars, 1988.
- [92] Oden, J.T. y Lin, T.L., "On the General Rolling Contact Problem for Finite Deformations of a Viscoelastic Cylinder", *Comp. Meth. Appl. Engng.*, **57**, 297-367, 1986.
- [93] Oden, J.T. y Pires, E.B., "Nonlocal and Nonlinear Friction Laws and Variational Principles for Contact Problems in Elasticity", *J. Appl. Mech.*, **50**, 67-76, 1983.
- [94] Okamoto, N. y Nakazawa, M., "Finite Element Incremental Contact Analysis with Various Frictional Conditions", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **14**, 337-357, 1979.
- [95] Oñate, E., *Plastic Flow in Metals. I Thermal Coupling Behaviour. II. Thin Sheet Forming*, C/Ph/51/78, Department of Civil Engineering, University College of Swansea, 1978.
- [96] Oñate, E. y Zienkiewicz, O.C., "A Viscous Shell Formulation for the Analysis of Thin Sheet Metal Forming", *Int. J. Mech. Sci.*, **25**, 305-335, 1983.
- [97] Oñate, E., Kleiber, M., Agelet de Saracibar, C., "Plastic and Viscoplastic Flow of Void Containing Metals. Applications to Axisymmetric Sheet Forming Problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **25**, 225-251, 1988.
- [98] Oñate, E. y Agelet de Saracibar, C., "Finite Element Analysis of Sheet Metal Forming Problems Using a Viscous Voided Shell Formulation", "Modelling of Metal Forming Processes", *Proceedings of the Euromech Colloquium 233, Sophia-Antipolis, France, August 29-31, 1988*, J.L. Chenot y E. Oñate (eds), Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [99] Oñate, E., Agelet de Saracibar, C. y Dalin, J.B., "Finite Element Analysis of Sheet Metal Forming Problems Using a Selective Voided Viscous Shell Membrane Formulation", NUMIFORM 89, *Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, NUMIFORM'89, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, USA, June 26-30, 1989*, E.G. Thompson et al. (eds), A.A. Balkema, 1989.
- [100] Pillinger, I., Hartley, P. y Sturgess, C.E.N., "Modelling of Frictional Tool Surfaces in Finite Element Metal Forming Analysis", "Modelling of Metal Forming Processes", *Proceedings of the Euromech Colloquium 233, Sophia-Antipolis, France, August 29-31, 1988*, J.L. Chenot y E. Oñate (eds), Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [101] Robelo, N., "Development of Contact Algorithms for a General Purpose Finite

- Element Program", *Numerical Methods in Mechanics of Contact Involving Friction, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Gauthier-Villars, 1988.
- [102] Rebelo, N., Nagtegaal, J.C. y Hibbitt, H.D., "Practical Aspects of Modelling Sheet Forming Processes", NUMIFORM 89, "Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, NUMIFORM'89, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, USA, June 26-30, 1989", E.G. Thompson *et al.* (eds), A.A. Balkema, 1989.
- [103] Simó, J.C., Wriggers, P., Schweizerhof, K.H. y Taylor, R.L., "Finite Deformation Post-buckling Analysis Involving Inelasticity and Contact Constraints", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **23**, 779-800, 1986.
- [104] Simó, J.C., Wriggers, P. y Taylor, R.L., "A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite Element Solution of Contact Problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **50**, 163-180, 1985.
- [105] Stanger, J., Ng, P., Hatch, T. y Du Bois, P., "A Numerical Simulation of the Proposed European Side Impact Test Procedure", *Supercomputer Applications in Automotive Research and Engineering Development*, "Proceedings of the Second International Conference on Supercomputing Applications in the Automotive Industry, Sevilla, Spain, October 1988", G. Marino (Ed), Cray Research, Inc., USA, 1988.
- [106] Thompson, E.G., Wood, R.D., Zienkiewicz, O.C. y Samuelsson, A. (eds), NUMIFORM 89, "Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, NUMIFORM'89, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, USA, June 26-30, 1989", A.A. Balkema, 1989.
- [107] Wagoner, R.H., Nakamachi, E. y Germain, Y., "Analysis of Sheet Forming Operations Using the Finite Element Method", "Proceedings of the IDDRG Working Groups, Toronto, Canada, April 29", 1988.
- [108] Wagoner, R.H., Nakamachi, E. y Germain, Y., "Experience with Explicit and Implicit Finite Element Programs for Sheet Forming Analysis", "Modelling of Metal Forming Processes", "Proceedings of the Euromech Colloquium 233, Sophia-Antipolis, France, August 29-31, 1988", J.L. Chenot y E. Oñate (eds), Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [109] Wagoner, R.H., Nakamachi, E. y Lee, J.K., "A Benchmark Test for Sheet Forming Analysis", 1988.
- [110] Woo, D.M., "The Stretch Forming Test", *The Engineer*, **220**, 876-889, 1965.
- [111] Woo, D.M., "On the Complete Solution of the Deep-drawing Problem", *Int. J. Mech. Sci.*, **10**, 83-94, 1968.
- [112] Woo, R.D., Bonet, J. y Wargadipura, H.S., "Simulation of the Superplastic Forming of Thin Sheet Components Using the Finite Element Method", NUMIFORM 89, "Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, NUMIFORM'89, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, USA, June 26-30, 1989", E.G. Thompson

- et al. (eds), A.A. Balkema, 1989.
- [113] Wriggers, P. y Nour-Omid, B., "Solution Methods for Contact Problems", *Report UCB/SESM 84/09*, Dept. Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1984.
  - [114] Wriggers, P. y Simó, J.C., "A Note on Tangent Stiffness for Fully Nonlinear Contact Problems", *Comm. Appl. Num. Meth.*, **1**, 199-203, 1985.
  - [115] Wriggers, P., Simó, J.C. y Taylor, R.L., "Penalty and Augmented Lagrangian Formulations for Contact Problems", NUMETA 85, "*Proceedings of the NUMETA '85 Swansea, January 7-11, 1985*", J. Middleton et al. (eds), A.A. Balkema, 1985.
  - [116] Zhong, Z.H., "Contact Problems with Friction", NUMIFORM 89, "*Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, NUMIFORM '89, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, USA, June 26-30, 1989*", E.G. Thompson et al. (eds), A.A. Balkema, 1989.
  - [117] Zhong, Z.H. y Nilsson, L., "Implementation of a Contact-Impact Interface Algorithm and a Contact Searching Algorithm in 3-D Dynamic FEM Analysis on Cray Supercomputer", *Supercomputer Applications in Automotive Research and Engineering Development*, "*Proceedings of the Second International Conference on Supercomputing Applications in the Automotive Industry, Sevilla, Spain, October 1988*", C. Marino (Ed), Cray Research, Inc., USA, 1988.
  - [118] Zienkiewicz, O.C., *The Finite Element Method*, third Edition, McGraw-Hill, London, 1977.
  - [119] Zienkiewicz, O.C., "Flow Formulation for Numerical Solution of Forming Processes", *Numerical Analysis of Forming Processes*, J.F.T. Pittman, O.C. Zienkiewicz, R.D. Wood y J.M. Alexander (eds), John Wiley & Sons Ltd., 1984.
  - [120] Hughes, T.J.R., "*The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Analysis*", Prentice Hall, 1987.