

Trabajo de Fin de Máster

**Ingeniería Industrial**

**Simulación MHD en el campo del plasma confinado magnéticamente para reactores de fusión nuclear**

**MEMORIA**

**Autor:** Gerard López Cabrera  
**Director:** Daniel Suarez Cambra  
**Convocatoria:** Enero 2020



Escola Tècnica Superior  
d'Enginyeria Industrial de Barcelona





## Resumen

El presente proyecto se basa en la aplicación y validación de un código de cálculo de magnetohidrodinámica (MHD) implementado en el entorno de OpenFOAM® para su posterior aplicación en el análisis del plasma que se confina magnéticamente en el reactor Tokamak, para conseguir la obtención de energía útil mediante fusión nuclear.

En el proyecto se realiza un estudio exhaustivo del comportamiento del plasma mediante el código mencionado en la representación de un cubo. Las diferentes simulaciones permiten estudiar tanto el comportamiento del plasma como la resolución de los resultados considerando diferentes mallados. Permiten también hacer análisis de parámetros importantes en el MHD, y así poder referenciar una validación del código según los resultados presentados por Morales en [1].

# ÍNDICE

<b>RESUMEN</b>	<b>3</b>
<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>6</b>
1.1. Objetivo y alcance.....	6
1.2. Glosario.....	7
1.3. Nomenclatura.....	8
<b>2. ANTECEDENTES</b>	<b>9</b>
2.1. Fusión nuclear .....	10
2.1.1. Plasma.....	11
2.2. Situación actual.....	12
<b>3. ASPECTOS FÍSICOS</b>	<b>14</b>
3.1. Hidrodinámica .....	14
3.2. Electromagnetismo .....	15
3.3. Magnetohidrodinámica.....	16
<b>4. ALGORITMOS</b>	<b>18</b>
4.1. Discretización.....	18
4.2. Acoplamiento P/U .....	22
4.3. Acoplamiento B/U .....	24
4.4. MHDFoam .....	26
<b>5. DESARROLLO</b>	<b>29</b>
5.1. Caso de estudio .....	29
5.1.1. Estado inicial.....	29
5.1.2. Parámetros de interés.....	30
5.1.3. Resultados.....	31
5.1.4. Convergencia de malla .....	36
5.1.5. Validación del código .....	40
5.1.6. Función de densidad de probabilidad (PDF).....	43
5.1.7. Transformada rápida de Fourier (FFT).....	45
<b>6. PROYECTO</b>	<b>49</b>
6.1. Planificación .....	49
6.2. Presupuesto.....	50
6.3. Impacto medioambiental.....	50

<b>7. CONCLUSIONES</b>	<b>51</b>
<b>8. AGRADECIMIENTOS</b>	<b>53</b>
<b>9. ÍNDICE DE TABLAS E ILUSTRACIONES</b>	<b>54</b>
9.1. Índice de ilustraciones .....	54
9.2. Índice de tablas .....	55
<b>10. BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>56</b>

# 1. Introducción

Desde la aparición del primer reactor de fusión nuclear desarrollado por Andrei Sakharov en 1950 [2], muchos han sido los avances que se han basado en este primer diseño para confinar el plasma mediante campos magnéticos toroidales, que da cabida a la fusión nuclear.

La experimentación con plasma para fusionar átomos de deuterio y tritio está teniendo mucho interés recientemente con la aparición del proyecto denominado ITER [2]. El gran reto al que se enfrenta este proyecto es encontrar una solución al excesivo consumo de energía que necesitaría una central nuclear de este tipo para poder generar plasma.

Dada la generación de energía mediante fusión nuclear y su complejidad, en este proyecto se estudia un fenómeno fundamental para la obtención de esta energía, concretamente el flujo de plasma y sus particularidades.

## 1.1. Objetivo y alcance

El objetivo principal de este trabajo es el de validar un código implementado en el paquete software OpenFOAM® en el que se pueda observar el comportamiento del campo de plasma generado a muy alta temperatura para la producción de fusión nuclear dentro de un reactor.

Asimismo, el trabajo tiene por finalidad explicar físicamente las particularidades que sufre el plasma en un cubo, como representación infinitesimal de un campo infinito de plasma. Se estudian diversos parámetros para comprobar si las simulaciones realizadas con el mencionado programa son válidas o no. Por su parte, también se estudia la obtención de la malla idónea valorando el tiempo de computación y resolución de los resultados, así como la realización de otros análisis para explicar con mayor detalle el comportamiento del plasma.

## 1.2. Glosario

**MHD:** Fluido magnetohidrodinámico. Propiedad de un fluido cuyo movimiento viene dado por un campo magnético.

**CFD:** Dinámica de fluidos computacional. Análisis de fluidos mediante algoritmos no calculables sin ayuda de un ordenador.

**Tokamak:** Cámara toroidal con bobinas magnéticas que permiten la contención del plasma.

**ITER:** Experimento científico cuya finalidad es la creación de un reactor termonuclear para la aplicación de la fusión nuclear como producción de energía.

**Moderador:** Elemento clave en los reactores de fisión nuclear cuya función es frenar los neutrones para una mayor probabilidad de fisión.

**Stellarator:** Dispositivo para confinar plasma mediante campos magnéticos para mantener reacciones de fusión nuclear de forma controlada.

**PISO:** Pressure Implicit with Splitting Operators. Algoritmo para el cálculo iterativo doble de problemas para dos incógnitas dependientes entre sí.

**SIMPLE:** Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations. Algoritmo para el cálculo iterativo de problemas para dos incógnitas dependientes entre sí.

**GCI:** Índice de convergencia de refinado de malla.

### 1.3. Nomenclatura

$B$	Componente campo magnético	$\mathbf{B}$	Vector campo magnético
$U$	Componente velocidad	$\mathbf{u}$	Vector campo velocidades
$E$	Energía	$\mathbf{fb}$	Fuerza de Lorentz
$V$	Volumen	$\mathbf{E}$	Campo eléctrico
$T$	Temperatura	$\boldsymbol{\omega}$	Vorticidad
$C$	Número de Courant	$\mathbf{j}$	Densidad de corriente
$n$	Número de átomos	$\mathbf{S}$	Fuente exterior
$p$	Caída de presión	$\rho$	Densidad
$t$	Tiempo	$\varepsilon$	Disipación magnética
$e$	Error relativo	$\Gamma$	Coefficiente de difusión
$r$	Valor residual	$\sigma$	Conductividad
$F$	Flujo másico convectivo	$\beta$	Constante inicialización
$P$	Presión	$\phi$	Variable conocida paso anterior
$D$	Conducción difusiva	$\mu$	Permeabilidad
		$\lambda$	Difusividad magnética
		$\nu$	Viscosidad cinemática



## 2. Antecedentes

Desde la observación científica llevada a cabo por Albert Einstein en cuanto a la relación existente entre la energía y la masa de un átomo, se ha intentado sacar partido durante décadas de la energía desprendida por la fisión o fusión nuclear de un átomo [2].

En sí, tanto el fenómeno de fisión como el de fusión constatan que la conservación de masa de los átomos utilizados no se conserva entre antes y después de su práctica, por lo que el resto se convierte, finalmente, en energía de radiación y posteriormente en térmica. Esta energía es evacuada por un refrigerante que permite a través de un ciclo termodinámico, como por ejemplo Rankine o Brayton, impulsar unas turbinas que generen electricidad.

La fisión nuclear, cuyo potencial se descubrió por los investigadores Otto Hahn y Fritz Strassman en 1938 [3] se ha estado utilizando desde 1954 como fuente de energía. Sin embargo, los productos generados en la fisión nuclear pueden llegar a desintegrarse en millones de años. Esto resulta una gran problemática que ha hecho replantearse esta obtención de energía como fuente de energía a nivel comercial.

Por su parte, la fusión nuclear cuyo objetivo es el de fusionar núcleos ligeros para generar un nuevo elemento y consigo una gran generación de calor permite obtener energía de forma más limpia que la fisión nuclear dado el corto tiempo que tienen los productos de ésta para semidesintegrarse en comparación con los de fisión.

Su gran problemática a día de hoy, es que para poder utilizarse se debe disponer de temperaturas muy altas para generar plasma. Actualmente se está estudiando la mejor manera de poder desarrollar la tecnología como fuente de energía en unas décadas.

## 2.1. Fusión nuclear

La fusión nuclear es una forma de generación de energía aún en modo experimental. Se desconoce cuál es la forma más factible de realizar fusión nuclear para la generación de energía de carácter comercial. Sin embargo, se sabe que los dos núcleos que fusionen tienen que ser ligeros para así obtener un átomo más estable [4].

Su estudio proviene de la observación de las fusiones de He que se producen en el Sol a millones de grados de temperatura [5].

Para conseguir este tipo de fusiones en la Tierra se debe llegar a temperaturas similares e incluso superiores a las generadas por el Sol, dado que éste ejerce presión en su núcleo para crear las fusiones. Estas presiones son imposibles de alcanzar en la Tierra y por ello se debe trabajar a mayores temperaturas.

Para obtener esta temperatura es necesario crear un campo magnético alrededor de un reactor, el que se estudia en este proyecto se denomina Tokamak y forma parte del proyecto ITER que posteriormente se detallará. En este reactor, se consigue generar el campo magnético con una serie de electro-imanés refrigerados cerca del cero absoluto con helio líquido para poder evacuar toda la energía térmica posible.

De esta manera y consiguiendo unas temperaturas de alrededor de 150 millones de grados Celsius se genera el desprendimiento de los electrones por parte de los núcleos de las dos sustancias a fusionar, generando así un estado de plasma.

La alta temperatura permite que los núcleos empiecen a vibrar obteniendo así una mayor energía cinética. Con dicha energía cinética se pueden llegar a neutralizar las fuerzas colombianas existentes entre los diferentes núcleos y así permitir la fusión de los dos núcleos ligeros.

En cuanto a tipos de fusiones existen múltiples, pero en el presente proyecto solo se mencionarán dos.

La primera es la de deuterio ( $^2\text{H}$ ) con deuterio. Su ventaja es que el deuterio se encuentra en abundancia en la naturaleza y de forma ilimitada. Sin embargo, su inconveniente es aún mayor dado que la probabilidad de fusión es muy baja, y costaría mucho poder conseguir las fusiones necesarias para generar energía.



La otra manera, más viable que la anterior, sería la de utilizar deuterio en fusión con el isotopo del hidrógeno  $^3\text{H}$  llamado Tritio. Las desventajas, por su parte, son la falta de

abundancia del Tritio así como su radioactividad, 12 años de periodo de semi-desintegración. La fusión de estos elementos tiene la ventaja de que la sección eficaz es la más grande posible y por ello se puede fusionar más fácilmente, teniendo en cuenta la ley de Boltzmann-Maxwell [6]. Por consiguiente, esta es la que tiene un mayor avance en la comunidad científica.



Por último, cabe destacar que el gran problema de la fusión nuclear está en la generación y el control del plasma. Se debe disponer de un sistema tal que permita producir plasma de modo que se puedan generar fusiones nucleares.

Si la potencia obtenida de las fusiones nucleares no es superior a la introducida para generar el plasma, entonces el sistema no es rentable.

### 2.1.1. Plasma

Tal y como se ha mencionado en los apartados anteriores, dentro del Tokamak es necesaria la formación de plasma para servir como medio de los átomos y propiciar las fusiones nucleares entre los átomos utilizados.

El plasma se genera a altas temperaturas o alta presión cuando la energía cinética de los átomos obliga a que estos se tengan que desprender de sus electrones como se ha mencionado anteriormente. Cualquier gas se puede convertir en plasma mediante el proceso descrito, también llamado ionización.

De esta manera se obtiene un estado de partículas cargadas positivamente o negativamente. Dado un volumen de plasma existe una carga casi neutra, es decir, las cargas en cada porción de volumen están totalmente balanceadas y un campo eléctrico no puede crearse en plasma dada su neutralidad [7].

Por último, para confinar el plasma en un determinado volumen se debe aplicar un campo magnético, que según como se induzca puede inducir una determinada dinámica u otra al propio plasma. Por lo que es de suma importancia poder confinarlo de modo que propicie adecuadamente las reacciones de fusión nuclear.

## 2.2. Situación actual

Desde el descubrimiento del confinamiento del plasma dentro de un campo magnético se han intentado desarrollar múltiples reactores para testear la tecnología que permita una fusión nuclear limpia. A día de hoy este desarrollo sigue estando vigente y la investigación en este ámbito ha cogido más fuerza.

Actualmente existe un consorcio llamado EUROfusion con quien colabora la UPC que trata de recoger y promover investigaciones destinadas a la aplicación de la fusión nuclear como fuente de energía y del que forman parte un total de 26 países para su desarrollo. Dentro de las actividades del consorcio está la de apoyar al proyecto ITER en el campo de la ingeniería y de la física.

La finalidad del proyecto ITER es la construcción del reactor Tokamak más grande jamás construido, con el objetivo de obtener la primera experimentación con plasma a gran escala en 2025 y las primeras operaciones con tritio y deuterio en 2035 [8].

El reactor experimental del programa ITER tendrá 6.2 m de radio para albergar un volumen de plasma de 840 m<sup>3</sup> a 150 millones de grados Celsius.

Véase en la siguiente figura como será el mencionado reactor del programa ITER.

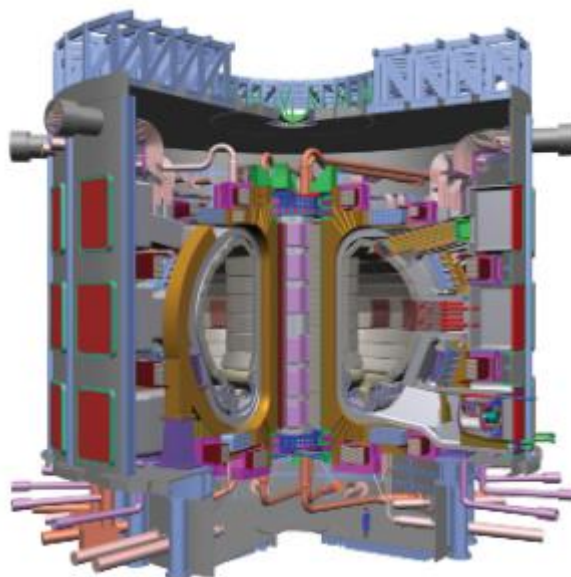


Figura nº 1. Proyecto experimental ITER. Fuente: [9].

El programa no pretende culminar con la construcción de un reactor comercial, pues su finalidad es la de poder experimentar primero con ITER para seguir con el proyecto que envergará la primera central nuclear de fusión, la DEMO.

Como se puede ver a continuación existen una serie de fases que ambos proyectos deberán solventar hasta su final ejecución.

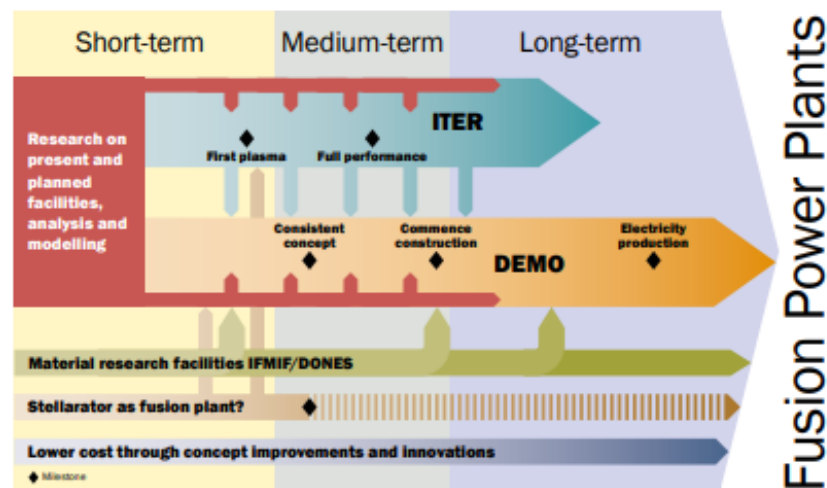


Figura nº 2. Futuro de los proyectos ITER y DEMO. Fuente: [8].

La finalidad de la construcción de la DEMO es poder demostrar que la tecnología, dados los avances tecnológicos acontecidos, es capaz o no de generar electricidad en el orden de magnitud que se prevé, entre 300 y 500 MW de electricidad neta.

No solo pretende ser, por lo tanto, una demostración de obtención de energía limpia mediante fusión nuclear sino también una demostración de que la industria es capaz de asistir en cuanto a ingeniería y mantenimiento con los estándares necesarios en la comercialización de la central como fuente de energía segura.

### 3. Aspectos físicos

#### 3.1. Hidrodinámica

Partiendo de que el presente proyecto pretende simular plasma en diversas situaciones, y que este se comporta como un fluido cuando se confina dentro de un campo magnético, es preciso poder desarrollar y resolver las ecuaciones de Navier-Stokes basadas en las leyes de la conservación.

Para obtener una solución aproximada de estas ecuaciones es necesario recurrir a métodos numéricos integrados de forma computacional.

A continuación se muestra una de las utilizadas en este proyecto, la ecuación de conservación de cantidad de movimiento.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}_b \quad (3.1)$$

- Siendo el primer término el que permite constatar si se trata de un estado estacionario o transitorio.
- El segundo término antes de la igualdad es el convectivo, que permite observar el transporte por cantidad de movimiento del fluido.
- El tercer término es el gradiente de presión.
- El cuarto término corresponde al término difusivo debido a la viscosidad y agitación molecular del fluido.
- Mientras que el término  $\mathbf{f}_b$  representa todas las fuerzas de diferente naturaleza que pueden afectar en el movimiento del fluido como inerciales, electromagnéticas o gravitacionales.

También será necesario poder resolver la ecuación de continuidad, que al considerar el flujo como incompresible, queda expresada de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.2)$$

## 3.2. Electromagnetismo

En el electromagnetismo básico son muchas las leyes que se han escrito de acuerdo con los fenómenos resultantes de la inducción de un campo magnético.

Para poder describir el comportamiento MHD es preciso tener en cuenta varias leyes que conjuntamente con las descritas en el apartado anterior conformarán las ecuaciones a resolver de MHD.

En primer lugar la ley de inducción electromagnética de Faraday, establece que la variación temporal de un campo magnético implica la existencia de un campo eléctrico no lineal. El rotacional del campo eléctrico es la derivada de la inducción electromagnética respecto el tiempo con signo contrario. Este cambio de signo implica que la corriente inducida sea de sentido inverso al flujo magnético que la ha provocado, cumpliendo así con la ley de Lenz.

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} \quad (3.3)$$

La ley de Ampère-Maxwell establece que la intensidad de un campo magnético en un contorno cerrado es proporcional a la corriente que recorre en ese contorno, donde  $\mu$  es la permeabilidad magnética y  $\mathbf{j}$  es la densidad de corriente, parámetros muy importantes en el estudio de fluidos MHD como se verá más adelante.

$$\mu \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (3.4)$$

De acuerdo con la tercera ecuación de Maxwell [10] la divergencia del campo magnético es 0. Las líneas de un campo magnético a diferencia de las del eléctrico se cierran, evitando así la existencia de monopolos magnéticos.

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (3.5)$$

### 3.3. Magnetohidrodinámica

Una vez desarrolladas todas las formulaciones necesarias en cuanto a mecánica de fluidos y electromagnetismo, se presentan las ecuaciones de MHD esencialmente necesarias para caracterizar el plasma en las simulaciones llevadas a cabo en el trabajo.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \quad (3.6)$$

- Siendo el primer término nuevamente el que permite constatar si se trata de un estado estacionario o transitorio.
- El segundo término hace referencia al convectivo tal y como se ha descrito en la ecuación (3.1).
- El siguiente término después de la igualdad es la caída de presión.
- El segundo término después de la igualdad es el difusivo, como en la ecuación de la conservación de cantidad de movimiento (3.1).
- Por último, el producto vectorial de la densidad de corriente con el campo magnético, permite incorporar a la ecuación la fuerza de Lorentz. La influencia de esta fuerza permite hacer rotar las partículas cargadas del plasma y confinarlas en un contorno, siendo también la densidad de corriente definida como el rotacional de  $\mathbf{B}$ , y que se define de la siguiente manera de acuerdo con la ley de Ampère-Maxwell [10].

$$\mathbf{j} = \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \left( \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right) \quad (3.7)$$

La otra ecuación que se resuelve en problemas de MHD es la que relaciona la interacción entre el campo magnético y la velocidad.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \lambda \nabla^2 \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (3.8)$$

- Siendo el primer término de nuevo el que permite constatar si se trata de un estado estacionario o transitorio.
- El segundo término antes de la igualdad permite conocer la difusividad del campo magnético. Esta expresión proviene del rotacional del rotacional de  $\mathbf{B}$ , es decir:



$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B} \quad (3.9)$$

- El término después de la igualdad representa la fuerza magnética obtenida por la interacción de la velocidad y el campo magnético. Esta representa la tendencia a que la fuerza generada rote entorno a un punto. La identidad de este término es la siguiente.

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) &= ((\nabla \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla))\mathbf{u} - ((\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla))\mathbf{B} \\ &= (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{B} \end{aligned} \quad (3.10)$$

## 4. Algoritmos

El presente capítulo presenta los diferentes medios con los que se ha podido desarrollar el proyecto utilizando OpenFOAM®. En cuanto al entorno mencionado, se podría explicar múltiples características. Sin embargo, solo se detallará aquello estrictamente necesario para llevar a cabo las simulaciones realizadas en el proyecto.

### 4.1. Discretización

Para poder realizar los cálculos computacionales necesarios y poder resolver las ecuaciones mostradas en los apartados anteriores, se requiere de una discretización del volumen de estudio.

La discretización es el resultado de convertir las ecuaciones continuas vistas en los apartados anteriores en un sistema de ecuaciones con la forma  $Ax=b$ .

Para poder llegar a dicha solución, es preciso explicar este apartado de una manera resumida y simplificada ya que las simulaciones se llevan a cabo tridimensionalmente y explicarlo de esta manera, complicaría mucho su entendimiento. Por consiguiente, se utiliza un caso de una dimensión para ejemplificar lo que realiza OpenFOAM®.

Según Versteeg [11], para problemas de difusión pura, en la que no interactúa el término de convección y en un volumen de control 1-D, la diferencia entre el flujo entrante y saliente, es igual a un término fuente (4.1). Siendo este término igual a todo aquello que actúa sobre el fluido externamente como podrían ser fuerzas electromagnéticas o la propia gravedad.

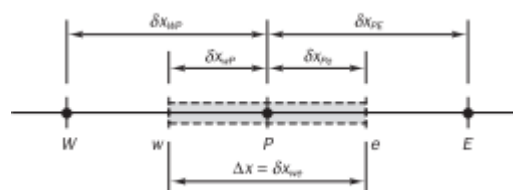


Figura nº 3. Discretización difusión. Fuente: [11].

A continuación se muestra la integral volumétrica a resolver. Para proceder con la discretización en el caso 1-D así como de cualquier otro caso de más dimensiones, se utiliza el método de Gauss para pasar de dicha integral volumétrica a otra más sencilla, una superficial [12]. Una vez realizado este paso, se evalúa dicha integral en las caras e y w de cada elemento finito.

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV + \int_{\Delta V} S dV = \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (4.1)$$

Donde  $\Gamma$  es el coeficiente de difusión,  $\phi$  es el valor de una variable en un nodo, y  $S$  es el conjunto de todos los términos fuente.

Esta evaluación de la integral en las caras  $e$  y  $w$  permite poder calcular el flujo entrante y saliente de cada elemento finito. Asimismo, la evaluación en las caras se puede realizar de múltiples maneras, pero en este proyecto únicamente se explicará el esquema denominado central diferencial.

Este esquema se basa en la interpolación simple de los nodos centrales, como se muestra a continuación.

$$\Gamma_w = \frac{\Gamma_W + \Gamma_P}{2} \quad \Gamma_e = \frac{\Gamma_E + \Gamma_P}{2} \quad (4.2)$$

Volviendo a escribir la ecuación (4.1) juntamente con la (4.2) se obtienen los coeficientes que se utilizan en la matriz  $A$  y que conforman el sistema  $Ax=b$ , donde  $x$  es un vector de incógnitas y  $b$  otro compuesto de todas las fuentes o valores conocidos.

$$\left( \frac{\Gamma_e A_e}{dx} + \frac{\Gamma_w A_w}{dx} - S_p \right) \phi_P = \left( \frac{\Gamma_w A_w}{dx} \right) \phi_W + \left( \frac{\Gamma_e A_e}{dx} \right) \phi_E + S_u \quad (4.3)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{P1} & -a_{E1} & 0 \\ -a_{W2} & a_{P2} & -a_{E2} \\ 0 & -a_{W3} & a_{P3} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_E \\ \phi_P \\ \phi_W \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} S_{uE} \\ S_{uP} \\ S_{uW} \end{pmatrix}}_b \quad (4.4)$$

Obtenida esta expresión para 1-D también se puede obtener otra que engloba las demás dimensiones. Si se tienen en cuenta todos los nodos vecinos (con subíndice  $nb$ ) a la celda en cuestión según su dimensión, se define así:

$$a_P \phi_P = a_{nb} \phi_{nb} + S_u \quad (4.5)$$

Ahora bien, el problema que se va a tratar en este trabajo también incorpora un término de convección como se ha observado, por lo que hay que realizar algunas modificaciones al sistema ya que no es únicamente un problema de difusión pura.

La convección en un fluido sigue el flujo de éste mientras que la difusión se emite en todas direcciones. Por ello, la discretización es un poco diferente.

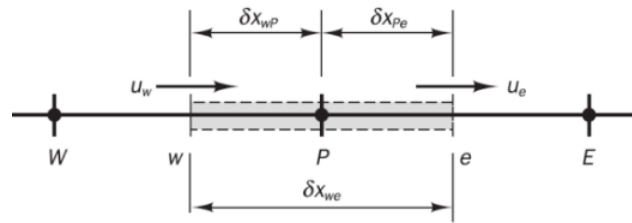


Figura nº 4. Discretización convección-difusión. Fuente: [13]

En este caso, complementariamente a la formulación vista, también se debe cumplir con la ecuación de continuidad como se muestra a continuación.

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0 \quad (4.6)$$

Análogamente a lo mostrado para la difusión pura, se realiza la discretización y se obtiene una expresión similar a la (4.3).

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + S_u \quad (4.7)$$

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2} \quad a_E = D_e + \frac{F_e}{2} \quad a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_p$$

$$F_w = (\rho u)_w \quad F_e = (\rho u)_e \quad D_w = \frac{\Gamma_w}{dx} \quad D_e = \frac{\Gamma_e}{dx}$$

Donde  $D$  y  $F$  son la conducción difusiva y el flujo másico convectivo por unidad de masa respectivamente.

El problema de hacer uso del esquema central diferencial es que es una aproximación de Taylor de segundo orden por lo que tiene un error de truncamiento bastante alto. Para saber si es factible su aplicación, el número de Peclet ( $D/F$ ) siempre debería mantenerse inferior a 2.

En su defecto, también se puede hacer uso del resto de esquemas. A continuación se enumeran algunos de ellos.

**Linear**, es el esquema utilizado por OpenFOAM® para realizar una interpolación simple entre dos nodos centrales de celdas.

**Gauss linear**, es un esquema de segundo orden que permite asumir que las derivaciones en las caras del volumen de control son lineales.

**Gauss linear corregido** se basa en el anterior. En éste se asume que existen caras en el volumen de control que no son ortogonales con el nodo central. Éste aplica una corrección para determinar el punto central real entre las dos caras.

**Euler**, por su parte, es un esquema de segundo orden que se utiliza para realizar derivadas de variables con respecto al tiempo.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi - \phi^0}{\Delta t} \quad (4.8)$$

Cabe destacar también, que de aquí en adelante, para poder referirse a la discretización utilizada en cada caso, se hará una distinción entre *fv* y *fvm*.

Por un lado, la generación de la matriz A se puede hacer siguiendo dos metodologías de discretización: metodología *fv* (*finite volume calculus*) y metodología *fvm* (*finite volume method*)

La metodología *fv* o explícita se denomina así por su capacidad de utilizar los resultados obtenidos en el paso anterior para poder calcular el siguiente paso. De esta forma los resultados de usar este método se ubican en el vector de términos fuente b. En el código se utiliza este método de discretización para obtener un campo magnético a partir de otro anterior.

Por otro lado, la metodología implícita o *fvm* es la que se ha detallado paso a paso en este apartado. Aplicando *fvm* se consigue que los coeficientes de la variable independiente se ubiquen en la matriz A, dejando así un sistema de ecuaciones listo para ser resuelto mediante algebra lineal.

## 4.2. Acoplamiento P/U

En el código utilizado, presión y velocidad son dos variables dependientes entre sí para un mismo instante de tiempo.

Ambos parámetros, tal y como se han mostrado en la ecuación de Navier-Stokes (3.1) pueden ser incógnitas o variables conocidas.

La velocidad o movimiento de un fluido intuitivamente se puede conceptualizar si se imagina una fuerza o presión provocando dicho movimiento. Esta presión puede ser desconocida como se ha mencionado, por lo que será necesario suponer un valor e iterar hasta obtener un resultado correcto.

En sí, OpenFOAM® tiene diferentes maneras de procesar este acoplamiento de las dos variables. El código MHDFOam utilizado dispone del algoritmo PISO.

Este algoritmo parte de un campo de presiones iniciales supuestas llamado  $p^*$ . Este campo de presiones se utiliza para resolver las ecuaciones de momento y así obtener una primera aproximación del campo de velocidades  $u^*$ . Se muestra a continuación el algoritmo SIMPLE para un caso de 2-D, ya que es más sencillo de explicar para posteriormente poder referirse al PISO utilizado cuyo única diferencia entre los dos es un paso de iteración más.

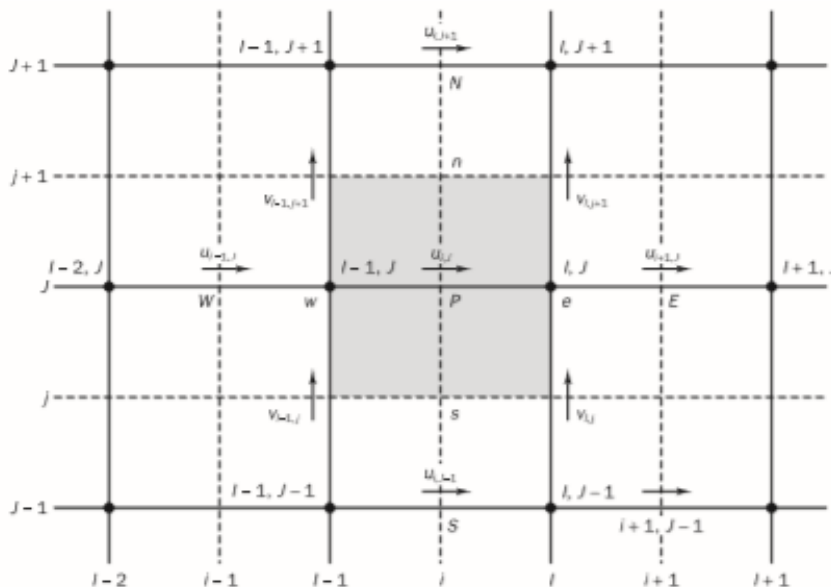


Figura nº 5. Algoritmo PISO, discretización de  $u$ . Fuente: [11].

Asumiendo una malla como la observada en la figura, se obtienen las siguientes ecuaciones de momento. Obsérvese que las expresiones son muy similares a las obtenidas en el subcapítulo anterior para la discretización.

$$a_{ij}u_{ij}^* = \sum a_{nb}u_{nb}^* + (p_{l-1,j}^* - p_{l,j}^*)A_{ij} + b_{ij} \quad (4.9)$$

$$a_{ij}v_{ij}^* = \sum a_{nb}v_{nb}^* + (p_{l,l-1}^* - p_{l,j}^*)A_{ij} + b_{ij}$$

$$b_{ij} = \bar{S}\Delta V u \quad b_{ij} = \bar{S}\Delta V v$$

Donde  $l$  y  $J$  indican los nodos de la malla,  $i$  y  $j$  indican los puntos medios entre dos nodos y  $p^*$  indica la presión supuesta.

Se calcula por lo tanto un campo de velocidades debido a estas presiones. Una vez se ha obtenido dicho campo, se pueden utilizar los resultados de la ecuación de momento para construir la corrección de la presión ( $p'$ ) y de las velocidades ( $u'$ ) ( $v'$ ).

$$p_{lJ} = p_{l,j}^* + p_{l,j}' \quad u_{ij} = u_{i,j}^* + u_{i,j}' \quad v_{ij} = v_{i,j}^* + v_{i,j}' \quad (4.10)$$

Despreciando los coeficientes de los nodos con subíndice  $nb$ , (simplificación del algoritmo SIMPLE) dado que no influye en el cálculo iterativo, también se obtienen las expresiones para las velocidades correctas.

$$u_{ij} = u_{i,j}^* + \frac{A_{ij}}{a_{ij}}(p_{l-1,j}' - p_{l,j}') \quad (4.11)$$

$$v_{ij} = v_{i,j}^* + \frac{A_{ij}}{a_{ij}}(p_{l,j-1}' - p_{l,j}')$$

Una vez obtenidas estas ecuaciones se precisa resolver la expresión de la continuidad vista anteriormente (4.6), tal y como se muestra a continuación en función de la corrección de la presión obtenida.

$$(\rho dA)_{i+1,j}p_{i+1,j}' + (\rho dA)_{i,j}p_{l-1,j}' + (\rho dA)_{l,j+1}p_{l,j+1}' + (\rho dA)_{l,j+1}p_{l,j-1}' \quad (4.12)$$

$$+ [(\rho u^*A)_{i,j} - (\rho u^*A)_{i+1,j} + (\rho v^*A)_{l,j} - (\rho v^*A)_{l,j+1}] = 0$$

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} \quad d_{l,j} = \frac{A_{l,j}}{a_{l,j}} \quad d_{i+1,j} = \frac{A_{i+1,j}}{a_{i+1,j}}$$

Por último, una vez desarrollado esto se obtiene la presión corregida y se aplica en la formulación (4.10). Si las variables supuestas coinciden con las obtenidas en este punto, entonces son correctas, sino será necesario iterar hasta que coincidan con una tolerancia especificada.

Una vez explicado el SIMPLE, se puede explicar el algoritmo PISO simplemente mencionando que entre la formulación (4.9) y (4.10) existe una segunda corrección que da lugar a estas ecuaciones.

$$u_{ij}^{***} = u_{i,j}^{**} + \frac{\sum a_{nb}(u_{nb}^{**} - u_{nb}^*)}{a_{ij}} + \frac{A_{ij}}{a_{ij}}(p_{I-1,J}'' - p_{I,J}'') \quad (4.13)$$

$$v_{ij}^{***} = v_{i,j}^{**} + \frac{\sum a_{nb}(v_{nb}^{**} - v_{nb}^*)}{a_{ij}} + \frac{A_{ij}}{a_{ij}}(p_{I,J-1}'' - p_{I,J}'')$$

La ecuación de la continuidad del PISO, análogamente a lo descrito en el SIMPLE es como se muestra a continuación.

$$[(\rho u^{**}A)_{i+1,j} - (\rho u^{**}A)_{i,j}] + [(\rho v^{**}A)_{i,j+1} - (\rho v^{**}A)_{i,j}] = 0 \quad (4.14)$$

### 4.3. Acoplamiento B/U

Según Versteeg [11], cuando existe un acoplamiento diferente al observado en el apartado anterior entre presión y velocidad, como sucede con el flujo magnético y la velocidad del fluido MHD, se dan cabida a otras ecuaciones complementarias que satisfacen todas las variables acopladas.

En este caso, el flujo magnético también se supone en una primera instancia. Dado que la velocidad obtenida en el PISO descrito para el acoplamiento de la presión y la velocidad es correcta, simplemente habrá que incorporar la condición de que la divergencia del campo magnético es nula e iterar si el supuesto campo magnético no coincide con el valor obtenido al final del algoritmo.

A modo de resumen, los pasos a seguir por el algoritmo vienen representados en el siguiente diagrama.



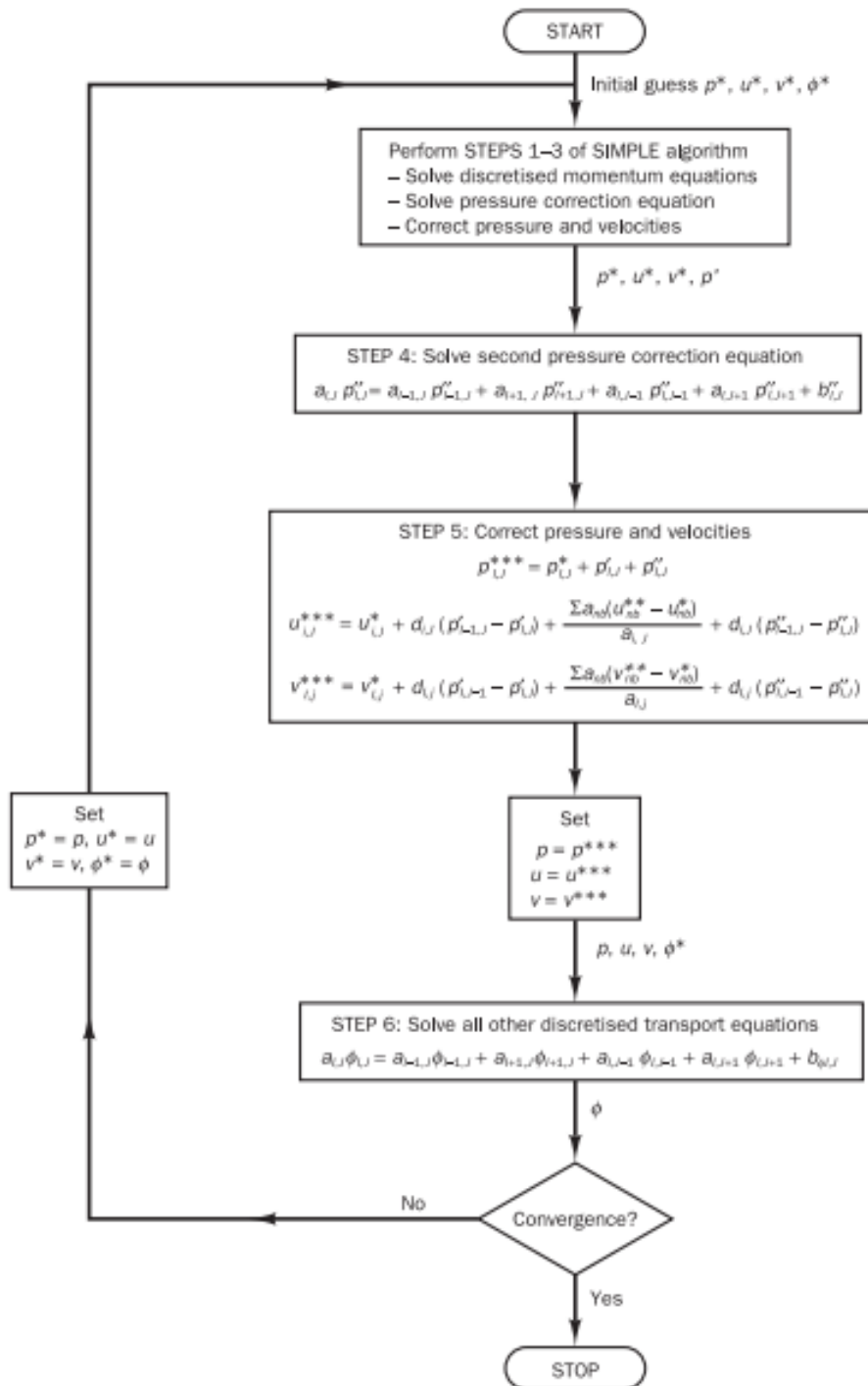


Figura nº 6. Algoritmo PISO. Fuente: [14].

## 4.4. MHDFoam

En el presente proyecto, como ya se ha ido anunciando en los apartados previos se ha utilizado el código MHDFoam del software OpenFOAM®. Este permite poder resolver problemas de magnetohidrodinámica. A continuación se detalla paso a paso el recorrido que realiza el *solver* para iterar y calcular los resultados.

En primer lugar, se habilitan todos los archivos necesarios para poder leer o escribir datos y configurar el código para cada caso en cuestión. En esta explicación se muestra la formulación para una única componente (*i*) aunque en realidad existen tres componentes ya que en el proyecto se estudia un caso tridimensional.

La formulación física implementada en MHDFoam es la siguiente:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}U) = -\nabla p + \nu \nabla^2 U + \frac{1}{\rho} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_i \quad (4.15)$$

$$fvm(ddt(U)) + fvm(div(\phi, U)) - fvc(div(\phi_B, B)) - fvm(laplacian(\nu, U)) \\ + fvc(grad(0,5 \cdot B^2)) = -fvc(grad(p))$$

Como se puede observar, hay una diferencia entre la formulación observada y la implementación en MHDFoam. La fuerza de Lorentz no se implementa en un único término, sino en dos. A continuación, mediante el uso de la ley de Ampere-Maxwell y considerando que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , se desarrolla la expresión.

$$(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_i = \frac{1}{\mu} ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B})_i = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B}) - \frac{1}{2\mu} \nabla B^2 \quad (4.16)$$

Se aplica entonces, el término de la velocidad de Alféen  $\left(\frac{1}{\sqrt{\mu\rho}}\right)$  en la implementación de MHDFoam tanto en los términos de  $\mathbf{B}$  como en los de  $\phi_B$ . De este modo se obtiene un campo magnético con las mismas unidades que la velocidad y se evita el uso de la permeabilidad y la densidad en la ecuación, tal y como realiza Morales en [1].

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}U) - \nabla^2(\nu U) = \nabla(\phi_B B) - \frac{1}{2} \nabla \phi_B^2 - \nabla p \quad (4.17)$$

Donde la caída de presión  $\nabla p = \frac{p}{\rho}$ .

Se realiza la discretización tal y como se ha descrito para las variables de velocidad y presión en los subcapítulos anteriores.

En la forma  $Ax=b$ , los términos acompañados de  $fv_c$  van a la parte fuente ( $b$ ), dado que son conocidos en un paso anterior. Fíjese que estos son justamente los términos de la fuerza de Lorentz. Los acompañados por  $fv_m$ , por su parte, conforman la matriz de coeficientes  $A$  que se obtienen de la discretización.

$$\bar{A} \cdot \mathbf{U} = -\mathbf{S}_\phi - \nabla \mathbf{p} \quad (4.18)$$

Se resuelve el sistema y se obtiene el resultado del vector de incógnitas  $U$  que cumple con esta expresión. A este paso del algoritmo de PISO se le denomina predictor.

Sin embargo, el campo de velocidades puede que llegado este punto no cumpla con la divergencia cero de la velocidad y es necesario corregirlo.

MHDFoam separa la matriz  $A$  en una matriz con los términos de la diagonal ( $A_d$ ) y otra matriz ( $R$ ) con el resto de los términos fuera de la diagonal. Esta última se agrupa con el vector fuente en un vector denominado ( $H$ ), como se muestra.

$$\mathbf{H} = -\bar{R}\mathbf{U} - \mathbf{S}_\phi \quad (4.19)$$

Incorporando (4.19) en (4.18) y realizando la inversa de  $A_d$  se aísla la velocidad  $U$ :

$$\mathbf{U} = \overline{A_d^{-1}}\mathbf{H} - \overline{A_d^{-1}}\nabla \mathbf{p} \quad (4.20)$$

El término  $\overline{A_d^{-1}}\mathbf{H}$  se proyecta en las caras de cada una de las celdas como la interpolación entre los valores obtenidos en el predictor y que residen en los centros de las celdas.

Posteriormente, se consigue corregir el campo de velocidades de acuerdo con el flujo en las caras y conseguir que su divergencia sea cero.

Por último, se evalúa la velocidad en el centro de las celdas de nuevo y se ajusta acorde con las condiciones de contorno especificadas.

Una vez calculadas las velocidades corregidas y la presión correspondientes para el paso en cuestión, es preciso resolver la siguiente ecuación para determinar el campo magnético.

Análogamente al desarrollo anterior, se muestra la expresión para solo una componente ( $i$ ).

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_i + \lambda \nabla^2 \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{B}) - \nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{U}) + \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \cdot (\phi \mathbf{B}) - \nabla \cdot (\phi_B \mathbf{U}) + \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}$$

$$fvm(ddt(B)) - fvm(div(\phi, B)) + fvc(div(\phi_B, U)) - fvm(laplacian(\lambda, B)) = 0$$

Donde  $\lambda$  tiene también las unidades de  $\nu$  y evita el uso de la conductividad y permeabilidad, siendo  $\lambda = \frac{1}{\mu\sigma}$ .

Nuevamente, se evalúa la expresión de acuerdo también con la divergencia cero del campo magnético mediante otro algoritmo llamado BPISO.

Se introduce la nueva variable  $\phi_B$  que acompañada de  $fvc$  se sabe que es conocida del paso anterior. Esta variable se obtiene de la interpolación del campo magnético entre los centros de cada una de las celdas y se almacena en las caras de éstas.

Al haber obtenido la velocidad mediante el algoritmo PISO, el campo magnético se puede resolver simplemente mediante la discretización del BPISO.

## 5. Desarrollo

### 5.1. Caso de estudio

Para poder validar el código de MHD en el plasma confinado magnéticamente se ha simulado el caso de un cubo como en el trabajo de Morales [1] siguiendo las mismas condiciones y analizando la física que explica su simulación.

El cubo representa una parte infinitesimal hexaédrica de un campo de plasma infinito. Se ha conseguido este efecto mediante contornos cíclicos entre las caras. Este contorno implica que la información que sale del fluido por una de las caras entra por la cara opuesta. Las dimensiones del cubo son de  $2\pi$  por arista.

#### 5.1.1. Estado inicial

Para poder validar el comportamiento del plasma se han establecido unas condiciones iniciales de velocidad y campo magnético predefinidas que se describen a continuación.

Estas condiciones se inicializaron de acuerdo con el trabajo de Morales [1], que a su vez está referenciado en la aproximación de Orszag-Tang [15].

$$\mathbf{u}(x, y, z, t = 0) = [-2 \sin(y), 2 \sin(x), 0] \quad (5.1)$$

$$\mathbf{B}(x, y, z, t = 0) = \beta[-2 \sin(2y) + \sin(z), 2 \sin(x) + \sin(z), \sin(x) + \sin(y)]$$

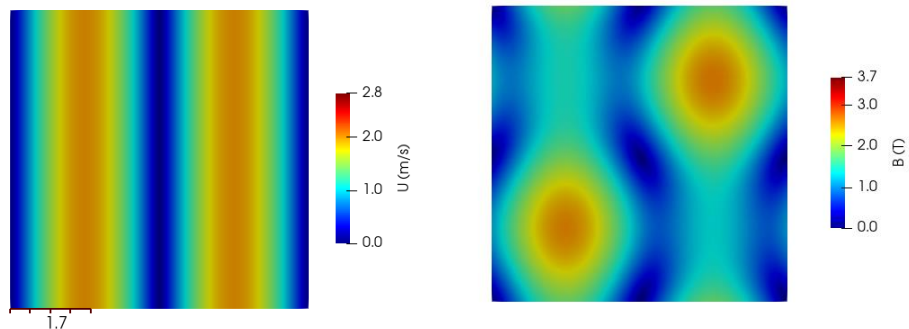


Figura nº 7. Campo de velocidades y magnético inicial para el caso cubo.

Como se puede observar en la figura, la velocidad en el instante 0 sigue una distribución sinusoidal con un máximo de 2m/s (situado en  $\frac{\pi}{2}$ ) para el plano XY, a la izquierda de la figura. Asimismo, el campo magnético, sigue una suma de distribuciones sinusoidales como se observa a la derecha de la figura para el plano XZ, con un máximo también situado en un cuarto de arista.

### 5.1.2. Parámetros de interés

Dado que de aquí en adelante se muestran los resultados de las simulaciones realizadas, se precisa mencionar cuáles son los parámetros característicos de estas y de donde se obtienen.

Tanto la difusividad magnética  $\lambda$  como la viscosidad cinemática  $\nu$  serán dos parámetros que identificarán el plasma en las diferentes simulaciones, siendo sus unidades de  $\text{m}^2/\text{s}$ .

Es importante saber cuál es la energía total teniendo en cuenta que ésta se constituye de dos energías complementarias, magnética ( $E_m$ ) y cinética ( $E_k$ ).

$$E_k = \frac{\bar{u}^2}{2} \quad E_m = \frac{\bar{B}^2}{2} \quad (5.2)$$

Donde, el cuadrado de la magnitud de un vector  $\bar{u}^2 = |\mathbf{u}|^2 = \left(\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}\right)^2$ .

También es interesante observar cuál es la densidad de corriente ( $j$ ) obtenida, correspondiente a la corriente generada por el propio plasma o la disipación magnética con la que se puede cuantificar el ritmo de desaparición el campo magnético.

$$J_{max} = \max|\nabla \times \mathbf{B}| \quad (5.3)$$

$$\varepsilon = \lambda|\nabla \times \mathbf{B}|^2 + \nu|\nabla \times \mathbf{U}|^2$$

También será interesante poder observar y graficar la vorticidad del plasma, siendo ésta como:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{U} = \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \quad (5.4)$$

### 5.1.3. Resultados

Este apartado pretende dar una explicación física a la simulación obtenida del cubo, apoyándose en los resultados obtenidos de las simulaciones y lo descrito en cuanto a la física MHD en apartados anteriores.

Los resultados obtenidos se han realizado para una malla de  $64^3$ , valores de  $\lambda$  y  $\nu$  de  $0.01 \text{ m}^2/\text{s}$  y  $timeStep$  de  $0.001\text{s}$ . Se obtiene la siguiente figura.

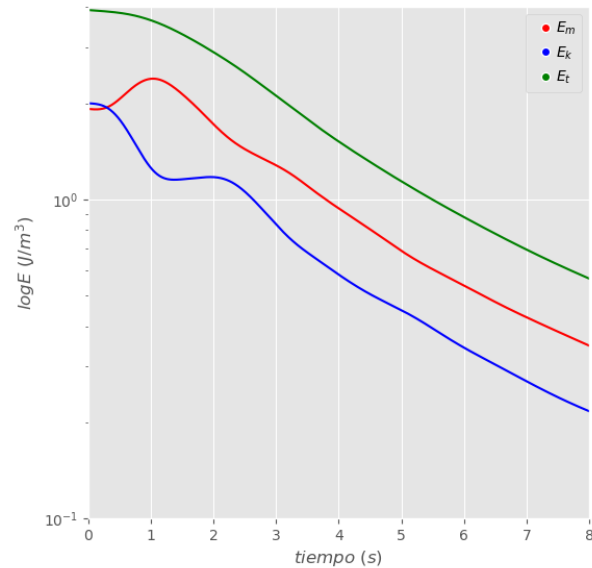


Figura nº 8. Energía en el caso cubo  $64^3$ .

Como se puede observar, dado que se han establecido convenientemente un campo magnético y otro de velocidad en el instante inicial, las energías tanto magnética como cinética no empiezan desde un valor nulo.

De esta gráfica se observa como en un inicio la energía cinética es superior a la energía magnética. Esta energía cinética consigue generar corrientes capaces a su vez de generar campos magnéticos internos, y que se denomina efecto dinamo.

Estos nuevos campos magnéticos conllevan un aumento de la energía magnética y una pérdida de energía cinética como se aprecia en la figura. Sin embargo, se puede observar como la energía total (la suma de ambas energías magnética y cinética) disminuye continuamente. Se explica a continuación mediante las figuras de densidad de corriente ( $j$ ) y disipación magnética ( $\varepsilon$ ) cuál es el desarrollo del plasma en el cubo.

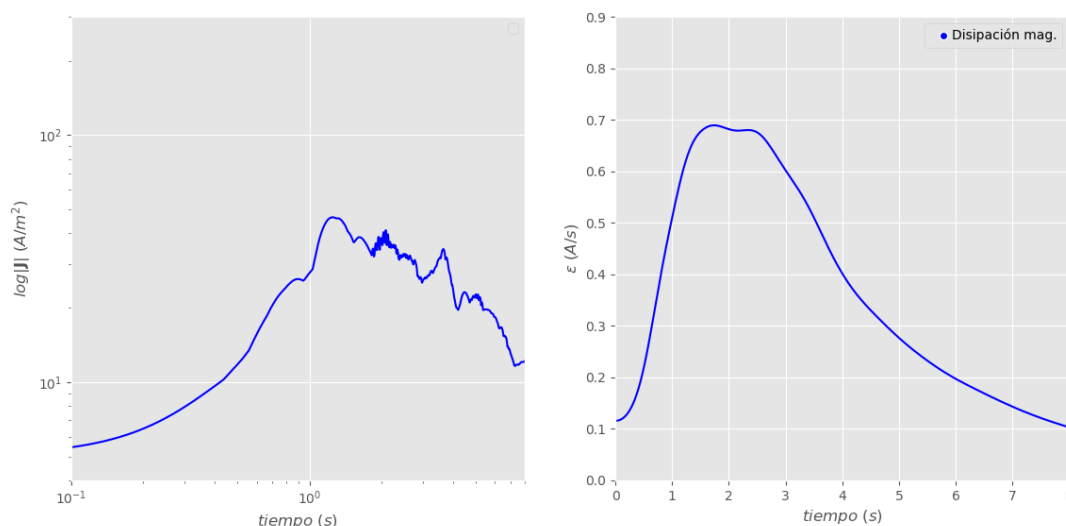


Figura nº 9. Densidad de corriente y disipación magnética en cubo  $64^3$ .

Una vez se han generado las corrientes, se genera más energía magnética y contrariamente disminuye la energía cinética como ya se ha mencionado, por lo que las partículas cargadas del plasma tienden a eliminar esta perturbación de campo magnético generada por las corrientes según la ley de Faraday.

Según esta ley, las propias partículas cargadas del plasma se contrapondrán a cualquier variación de campo magnético existente, con el fin de hacer prevalecer el principio de conservación de la energía.

En el instante 1.1s se puede observar que se consigue neutralizar la perturbación observándose también la saturación de la densidad de corriente. Coinciden los picos de ambas gráficas, energía magnética y densidad de corriente.

Posteriormente a este fenómeno, las partículas también habrán perdido energía cinética pero aun así serán nuevamente capaces de generar densidad de corriente como se puede observar en el instante 2s de la figura. Esta vez, sin embargo, lo hacen con tan poca fuerza que no podrán generar un nuevo campo magnético y ambas energías irán disminuyendo progresivamente.

Por su parte, la disipación magnética se observa que es alta cuando ambas energías llevan una dinámica con una pendiente pronunciada hacia su disipación. Esto se puede observar a partir del instante 1.5s. Por consiguiente, el valor máximo de disipación magnética es justamente después de la saturación de la mencionada densidad de corriente. Cuando la energía magnética cae conjuntamente con la cinética.

Es conveniente mencionar que toda la energía perdida se traduce en energía térmica.

Nuevamente, para poder explicar de forma más detallada el fenómeno observado se han



graficado cada uno de los parámetros de la formulación MHD de modo que se pueda observar su influencia relativa en el caso. Para ello se ha utilizado el promedio de peso volumétrico de cada una de las celdas para cada uno de los términos.

Estos términos son los que constituyen las dos ecuaciones MHD. Cada gráfica hace referencia a cada una de las ecuaciones, respectivamente.

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{fvm(ddt(U))}_{transitorio} + \underbrace{fvm(div(\phi, U))}_{convectivo} - \underbrace{fvm(laplacian(v, U))}_{difusivo} \\
 & - \underbrace{fvc(div(\phi_B, B)) + fvc(grad(0,5 \cdot B^2))}_{fuerza\ de\ Lorentz} = \underbrace{-fvc(grad(p))}_{presión} \\
 & \underbrace{fvm(ddt(B))}_{transitorio} - \underbrace{fvm(div(\phi, B)) + fvc(div(\phi_B, U))}_{fuerza\ magnética} - \underbrace{fvm(laplacian(\lambda, B))}_{difusivo} = 0
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

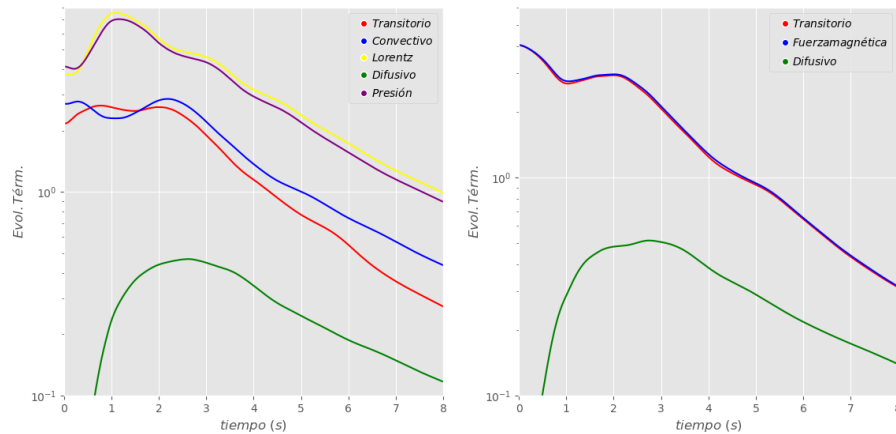


Figura nº 10. Evolución cubo 64<sup>3</sup> término a término.

En la figura se observan primeramente los dos términos transitorios que caracterizan cuanto se varia la velocidad (izquierda) y campo magnético (derecha) con respecto al tiempo. Se puede observar como el campo magnético al estar inducido solo en el instante inicial, su tendencia es siempre descendiente.

También en la figura, se observa que un parámetro que afecta mucho en la disipación de energía es la fuerza de Lorentz. Cuando un campo magnético interacciona con un fluido MHD a una cierta velocidad, se genera una fuerza a razón del producto vectorial de estas dos magnitudes que consigue frenar el avance del fluido. Como dicha fuerza depende del campo magnético generado por las corrientes, se observa su relación con el efecto dinamo ya mencionado.

Como se observa, dicha fuerza junto con la presión y la fuerza magnética son tres términos fuente que actúan en contra de flujo del propio fluido lo que conlleva a la pérdida tanto de

energía cinética como magnética en el plasma.

El término difusivo magnético y cinético siguen una misma trayectoria, al igual que la disipación magnética antes mostrada. Sin embargo, se observa también que su influencia no es tan remarcable como los términos fuente antes mencionados.

Por último en cuanto a la explicación física, dada la dependencia del término convectivo con el flujo del fluido, éste sigue una trayectoria muy similar a la observada por la energía cinética y resulta más destacable su papel que el término difusivo en relación a la ecuación del momento.

A continuación se muestran algunas las simulaciones obtenidas del cubo tanto para el parámetro velocidad como para el parámetro del campo magnético.

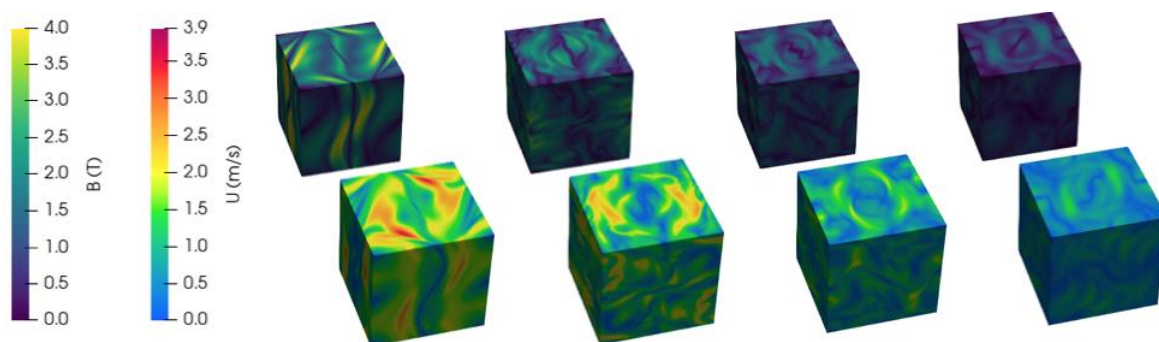


Figura nº 11. Evolución del campo magnético y la velocidad en el cubo.

Esta simulación se ha dado por finalizada cuando el valor residual ha tendido a estabilizarse asintóticamente en el cero. Se han graficado estos residuales como se muestran.

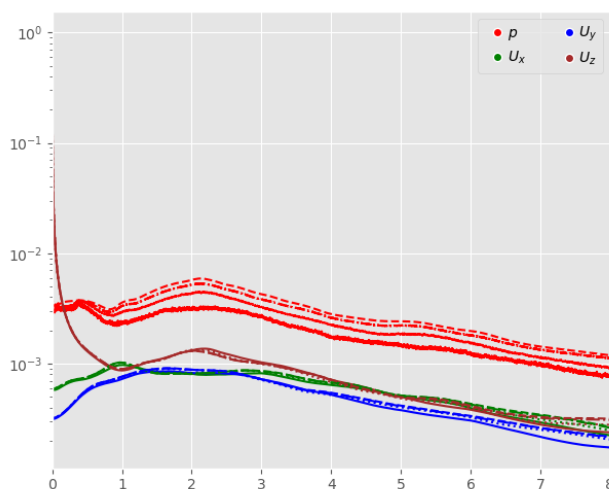


Figura nº 12. Residuales de la simulación del cubo.

Estos valores son una característica del software que permiten observar el valor del error arrastrado en las diferentes iteraciones según la tolerancia especificada [13], es decir, es la diferencia entre el valor esperado y el valor de la iteración anterior.

$$r = \frac{1}{n} \sum |b - Ax| \quad n = \sum (|Ax - A\bar{x}| + |b - A\bar{x}|) \quad (5.6)$$

Donde  $r$  es el valor residual,  $A$  es la matriz diagonal de coeficientes y  $\bar{x}$  el vector promedio de la solución.

### 5.1.4. Convergencia de malla

Para analizar la convergencia de malla, se han realizado una serie de simulaciones como estudio de *benchmark* para determinar que malla es lo suficientemente refinada como para proporcionar buenos resultados.

Partiendo de un *timeStep* de 1ms y considerando que ambos parámetros  $\nu$  y  $\lambda$  son de valor 0,01 como se establece en el trabajo de Morales [1], se han obtenido las siguientes simulaciones doblando el número de celdas en cada refinamiento.

Simulación	$N^3$	$N_{total}$	Línea	Tiempo (h)	CPUs
1ª simulación	$32^3$	32.768	_____	3	3
2ª simulación	$64^3$	262.144	-.-.-.-.-	45	3
3ª simulación	$128^3$	2.097.152	.....	264	7
4ª simulación	$256^3$	16.777.216	-----	816	8

Tabla nº 1. Simulaciones de benchmark.

En cuanto a los términos de energías, disipación magnética y densidad de corriente se han obtenido los siguientes resultados y considerando los parámetros mostrados en la tabla anterior hasta 8s.

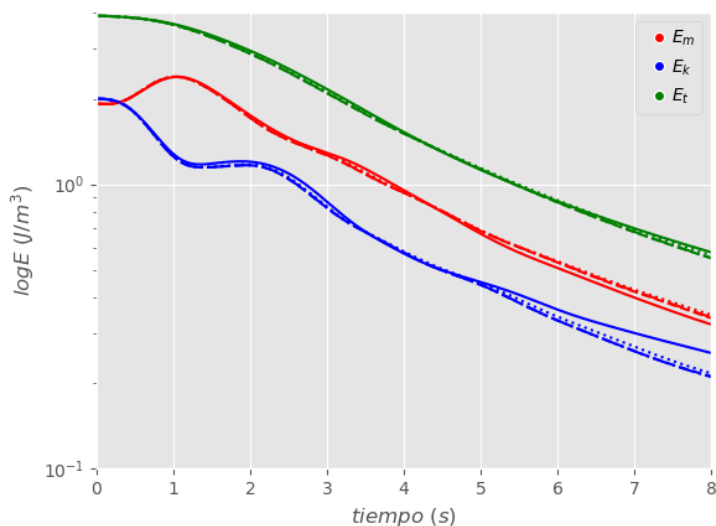


Figura nº 13. Resultados de refinado del caso cubo, energía.

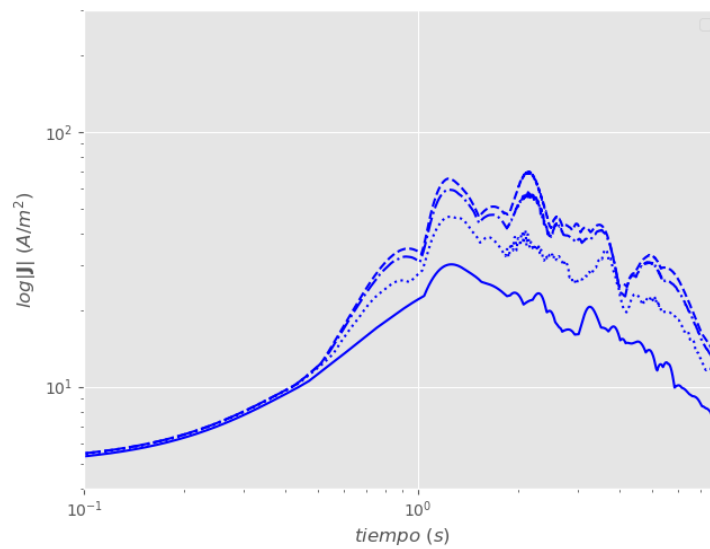


Figura nº 14. Resultados de refinado del caso cubo, densidad de corriente.

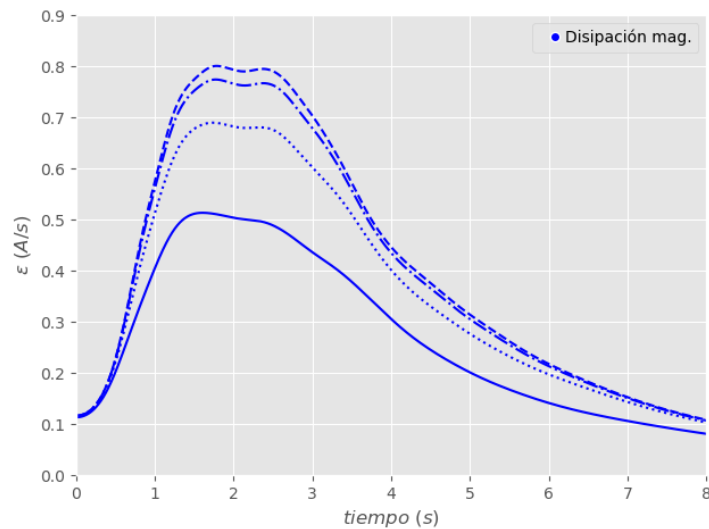


Figura nº 15. Resultados de refinado del caso cubo, disipación magnética.

Se observa como el refinado va convergiendo a un valor determinado. Valorando cualitativamente las gráficas se observa también que la diferencia entre la simulación de  $128^3$  y  $256^3$  es mínima. Dado que la diferencia en cuanto a tiempo de simulación entre ambas fue de veintitrés días, se concluye cualitativamente que con la de  $128^3$  es suficiente para obtener una buena resolución de resultados.

Sin embargo, se ha seguido un procedimiento cuantitativo con los valores máximos de la variable de disipación magnética tal y como establece el procedimiento de Richardson [16].

El procedimiento es el que se muestra a continuación para dos conjuntos de mallas. Se relaciona la longitud característica de cada celda ( $h$ ) con la diferencia de resultados ( $\phi$ ) y se consigue obtener el resultado correcto mediante extrapolación de los resultados del conjunto de mallas.

$$h_i = \left(\frac{V_{cubo}}{N}\right)^{\frac{1}{3}} \quad r_{ji} = \left(\frac{h_j}{h_i}\right) \quad \varepsilon_{ji} = \phi_j - \phi_i \quad (5.7)$$

$$p = \frac{1}{\ln(r_{ji})} \cdot \left| \ln \left| \frac{\varepsilon_{kj}}{\varepsilon_{ji}} \right| + q(p) \right| \quad q(p) = \ln \left( \frac{r_{ji}^p - s}{r_{kj}^p - s} \right) \quad s = \text{signo} \left( \frac{\varepsilon_{kj}}{\varepsilon_{ji}} \right) \quad (5.8)$$

$$\phi_{ext}^{ij} = \frac{(r_{ij}^p \phi_j - \phi_i)}{(r_{ij}^p - 1)} \quad (5.9)$$

Al ser un refinamiento doble cada vez,  $r$  es constante por lo que  $q$  es nula y se facilitan los cálculos. El error relativo y el grado de convergencia, se obtiene como se describe.

$$GCI^{ij} = \frac{1.25 \cdot e_a^{ij}}{r_{ij}^p - 1} \quad e_a^{ij} = \left| \frac{\phi_j - \phi_i}{\phi_j} \right| \quad (5.10)$$

Parámetro	Mallas 32,64,128	Mallas 64,128,256
$h_1, h_2, h_3$	0.021, 0.042, 0.083	0.010, 0.021, 0.042
$\phi_1, \phi_2, \phi_3$	0.7669, 0.6897, 0.5134	0.8007, 0.7669, 0.6897
$r_{21}, r_{32}$	2, 2	2, 2
$\varepsilon_{21}, \varepsilon_{32}$	-0.077, -0.176	-0.034, -0.077
$p$	1.190	1.193
$\phi_{ext}$	0.827	0.827
$e_a^{21}, e_a^{32}$	0.101, 0.256	0.042, 0.101
$GCI^{21}, GCI^{32}$	0.098, 0.249	0.041, 0.098
$GCI^{32}/GCI^{21}$	2.537	2.387
$r_{21}^p$	2.282	2.286

Tabla nº 2. Resultados del índice de convergencia de malla.

Se ha realizado el procedimiento para dos agrupaciones de mallado como se observa, las menos y las más refinadas, dado que el procedimiento solo tiene en cuenta la convergencia de hasta tres mallas diferentes.

El valor extrapolado  $\phi_{ext}$  por ambos conjuntos de mallas es el mismo, por lo que la convergencia es buena tanto para un conjunto como para el otro. También el índice de grado de convergencia es muy próximo lo cual es un indicio de que la convergencia del procedimiento es excelente, y que los resultados reales pueden tomarse de la extrapolación del conjunto de mallas computacionalmente menos exigente.

De hecho, si se calcula el error relativo de las dos mallas más potentes, partiendo del valor extrapolado obtenido, se obtienen valores de 3,18% para la más potente y 7,26% para la segunda más potente. Por consiguiente, aun siendo la malla con el mayor refinamiento realizado, la desviación sigue siendo alta.

### 5.1.5. Validación del código

En este apartado se pretende validar el código mediante el trabajo realizado por Morales [1]. Se comprueba si el código utilizado de MHDFOam valida que OpenFOAM® puede ser utilizado para este tipo de simulaciones de acuerdo con los resultados obtenidos.

Simulación	$N^3$	$\nu$	$\lambda$	Línea
1ª simulación	$64^3$	0,01	0,01	_____
2ª simulación	$128^3$	0,005	0,005	- - - - -
3ª simulación	$256^3$	0,001	0,001	.....

Tabla nº 3. Simulaciones comparativas referente a [1].

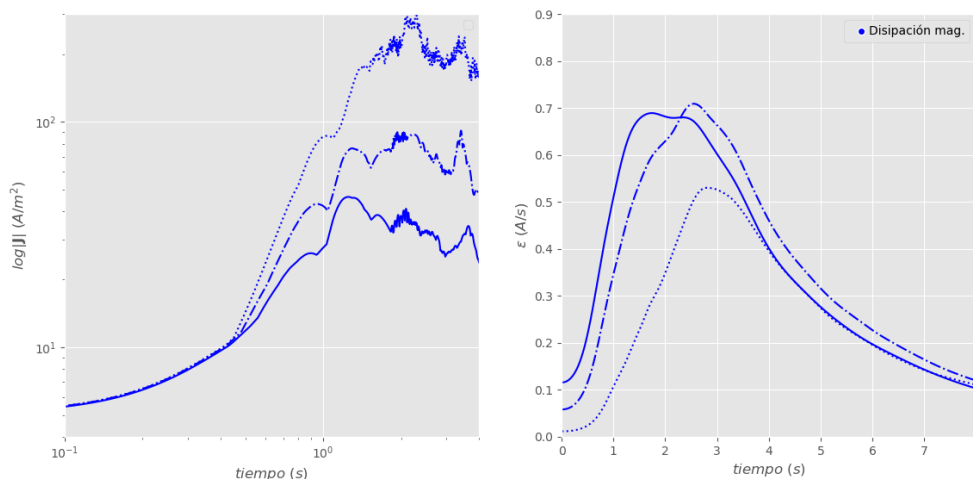


Figura nº 16. Validación del código OpenFOAM.

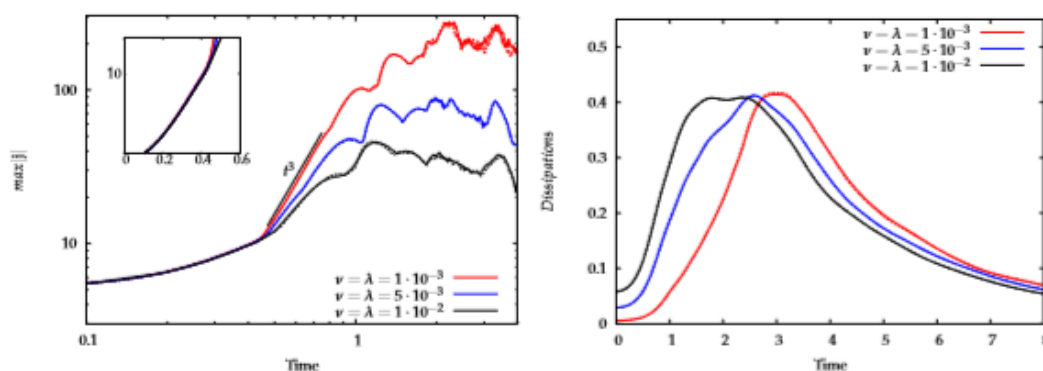


Figura nº 17. Validación del código, referencia. Fuente: [1].



Se puede observar como los valores de la gráfica de densidad de corriente son casi idénticos a los obtenidos por Morales [1]. De hecho, si se realiza una ampliación de la zona que indica Morales cuya pendiente es de  $t^3$ , se puede observar que también se obtiene dicha pendiente en los resultados del presente trabajo.

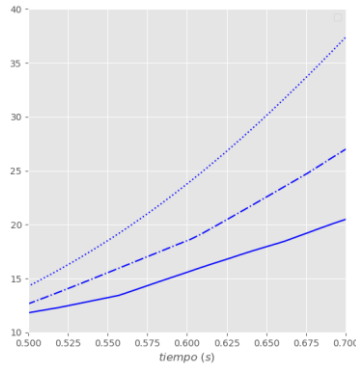


Figura nº 18. Validación densidad de corriente. Fuente: [1].

Por su parte, la gráfica de la disipación magnética no coincide en cuanto a los valores obtenidos, pero sí en la forma. El error relativo con respecto a los resultados de Morales [1] para las dos primeras simulaciones es de alrededor del 66% mientras que la última simulación tiene un error relativo aproximado del 25%.

Dado esta divergencia de resultados, se ha observado el artículo que utilizó Morales para la validación de su código, el artículo de Mininni [15]. Los valores no encajan con respecto al trabajo de Morales [1] en cuanto a disipación magnética con un error relativo del 29% aproximadamente pero la densidad de corriente sí que encaja. Por consiguiente, se concluye que la disipación magnética es un parámetro realmente sensible al código utilizado.

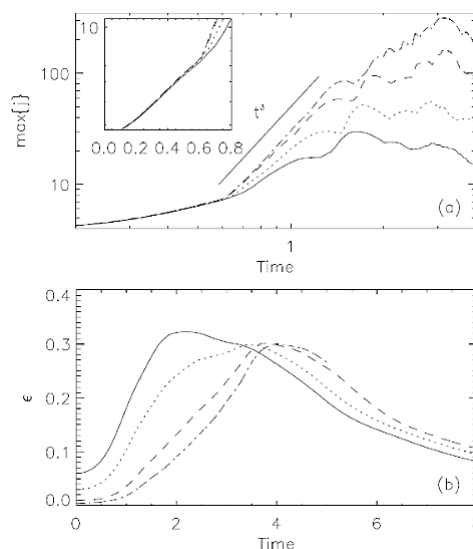


Figura nº 19. Validación de la disipación magnética. Fuente: [15].

El orden de magnitud de los errores antes indicados, demuestran que los resultados para las dos primeras simulaciones con respecto a los trabajos de referencia Morales [1] y Mininni [15] no son correctos en cuanto al parámetro de disipación magnética, mientras que la última simulación sí que parece tener un mismo orden de magnitud diferencial.

Cabe destacar que para dicha simulación se utilizó una opción para conseguir evitar la divergencia de resultados en la simulación.

Se decidió no hacer uso del *timeStep* de 1ms, sino de un *timeStep* que se pudiera adaptar al número de Courant establecido como máximo y así controlar su convergencia evitando un excesivo tiempo de cálculo. Esta opción se denomina *adjustTimeStep*. El número de Courant se expresa de la siguiente manera, estableciendo una relación entre el *timeStep* y el tiempo de residencia en un volumen finito.

$$\frac{u_x \cdot \Delta t}{\Delta x} + \frac{u_y \cdot \Delta t}{\Delta y} + \frac{u_z \cdot \Delta t}{\Delta z} < C \quad (5.11)$$

Dado que Morales en su trabajo consigue validar sus resultados alegando que obtiene la misma forma gráfica de las disipaciones magnéticas, con un retraso entre ellas característica en estos casos, se valida el código utilizado en el presente proyecto.

Se concluye también, que dados los resultados obtenidos, sería interesante (fuera del alcance de este proyecto), poder explicar porque el *adjustTimeStep* proporciona unos resultados más cercanos a los de Morales [1].

### 5.1.6. Función de densidad de probabilidad (PDF)

En el presente apartado, se realiza un postanálisis de un parámetro importante en las simulaciones, la vorticidad. El análisis consiste en estudiar la densidad de probabilidad de dicha variable. Para ello se estudia la vorticidad de todas las celdas de una simulación de  $64^3$ . El objetivo de este análisis es encontrar la probabilidad relativa según la cual la vorticidad se encuentra entre un rango de valores determinado.

Se han extraído todos los valores de cada una de las celdas para cada segundo de la simulación. Sabiendo el número de celdas ( $64^3$ ) se han dispuesto los resultados en forma porcentual. Se ha decidido solo estudiar el rango de  $[0,10] \text{ s}^{-1}$  dada la poca probabilidad ( $<0.8\%$ ) que había en los rangos de valores superiores a éste.

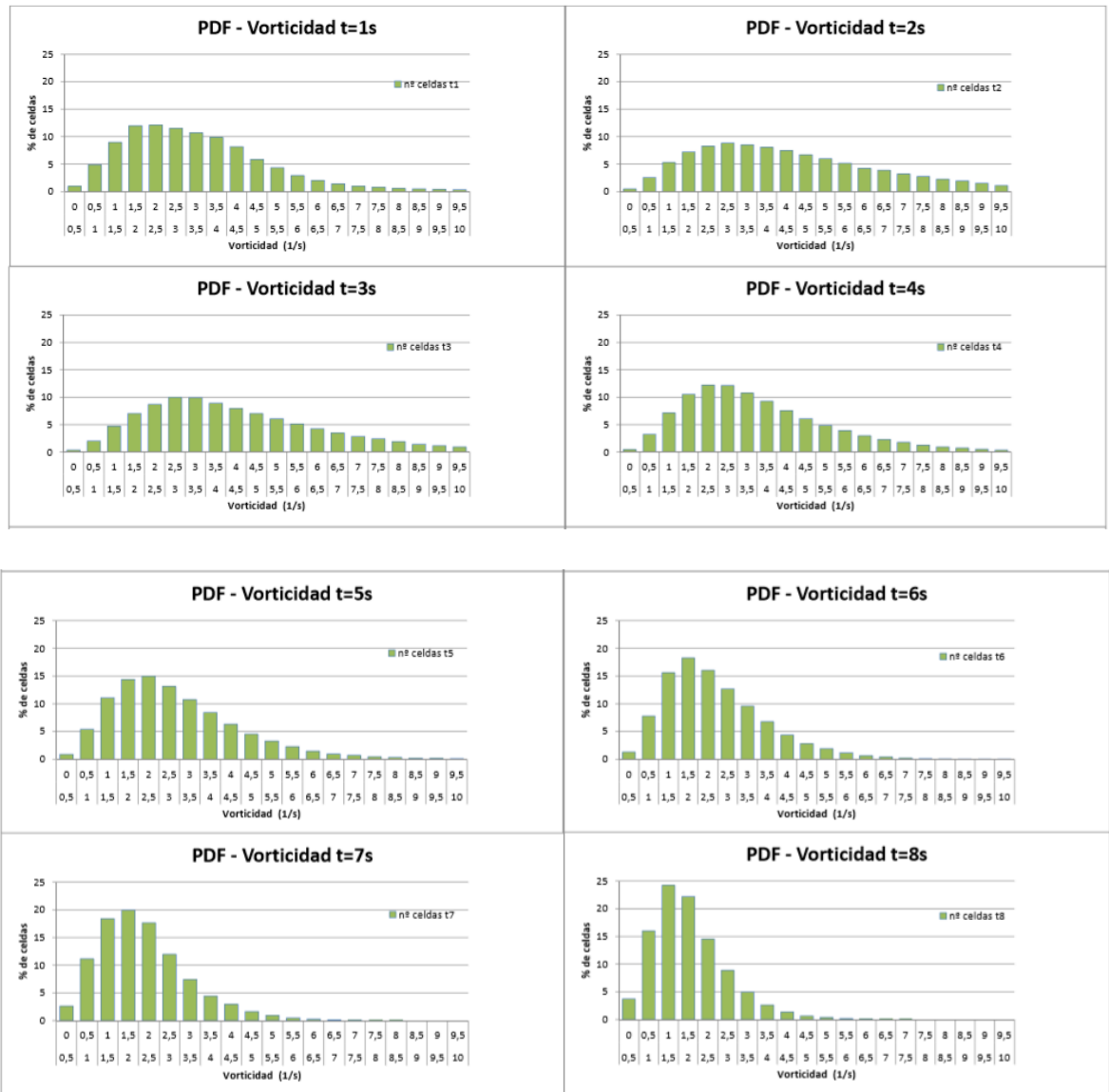


Figura nº 20. Funciones de densidad de probabilidad, PDF-vorticidad.

De este análisis se ha obtenido que el valor más alto de vorticidad encontrado es de  $33,715 \text{ s}^{-1}$  mientras que el más bajo es de  $0,015 \text{ s}^{-1}$ .

Se puede observar como la probabilidad de obtener vorticidades en una celda con valor de 0 a  $5 \text{ s}^{-1}$  es siempre alta en cada instante de tiempo.

Obsérvese que en el instante 2s la población del muestro está bastante repartida en todos los rangos de valores lo que significa que su probabilidad es bastante parecida. De hecho, el rango con un porcentaje de celdas más elevado tiene tan solo 8,8%.

Posteriormente a este instante las vorticidades empiezan a concentrarse en los rangos de 0 a  $5 \text{ s}^{-1}$ . En el instante 8s ya no existe ninguna celda con valor de  $7,5 \text{ s}^{-1}$  o superior y en un 24,2% de las celdas, la vorticidad está en el rango de 1 a  $1,5 \text{ s}^{-1}$  lo que constata que el fluido está perdiendo fuerza y se está frenando.

Nótese que la vorticidad depende de la velocidad, y la energía cinética también, por lo que no es de extrañar que cuando empieza a concentrarse la vorticidad cada vez a valores más bajos también se empieza a perder energía cinética, en la figura 13.

### 5.1.7. Transformada rápida de Fourier (FFT)

En este apartado se realiza un análisis del espectro de la vorticidad. En primer lugar, se ha postprocesado la información del caso anterior para obtener los valores de vorticidad en un muestreo lineal como se indica, a lo largo del eje Z y en el centro del plano XY.

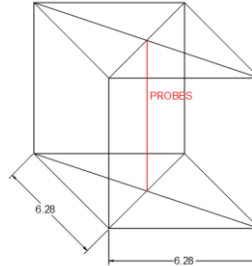


Figura nº 21. Localización de la línea de sondeo.

Se han obtenido los siguientes datos en cuanto a vorticidad, desde el instante 1s al 8s, a la izquierda de las figuras. Una vez obtenidos estos datos, se ha procesado esta información para hacer la transformada rápida de Fourier correspondiente a cada vorticidad de cada timeStep, a la derecha de las figuras.

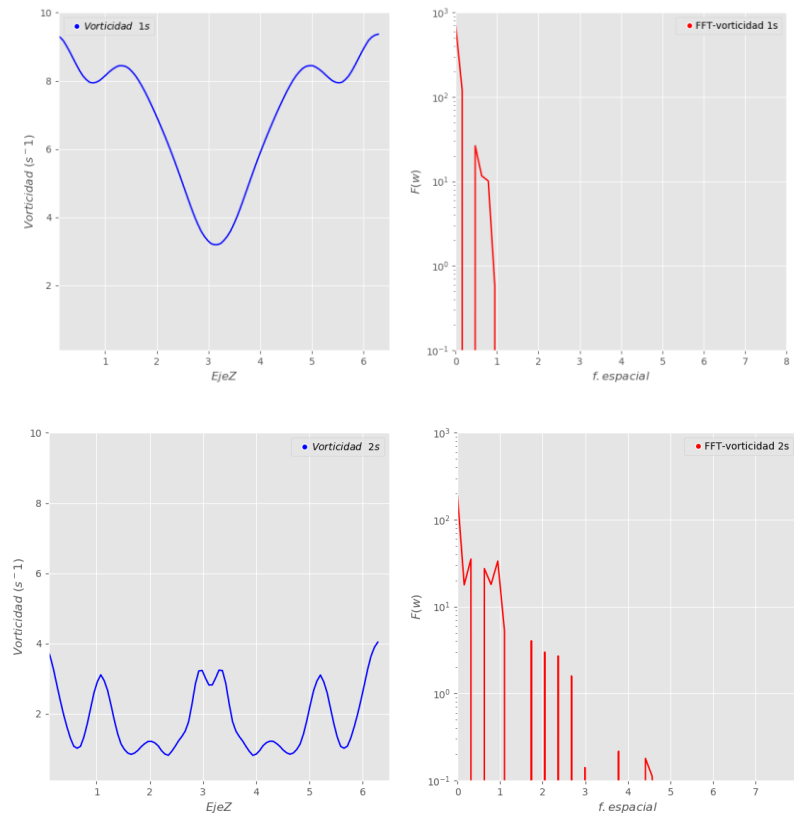


Figura nº 22. Transformadas rápidas de Fourier 1-2s de la vorticidad sobre el eje Z.

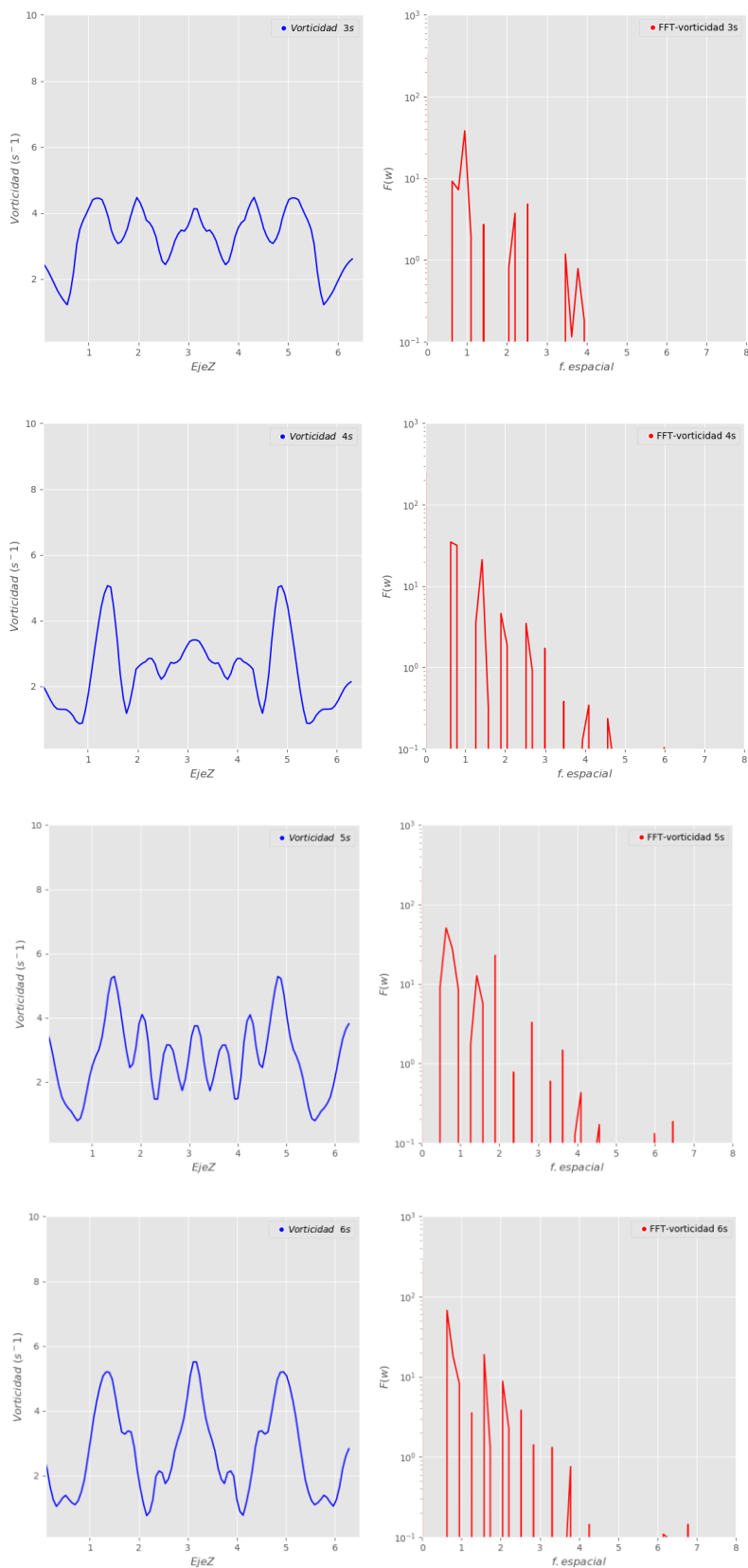


Figura nº 23. Transformadas rápidas de Fourier 3-6s de vorticidad sobre el eje Z.

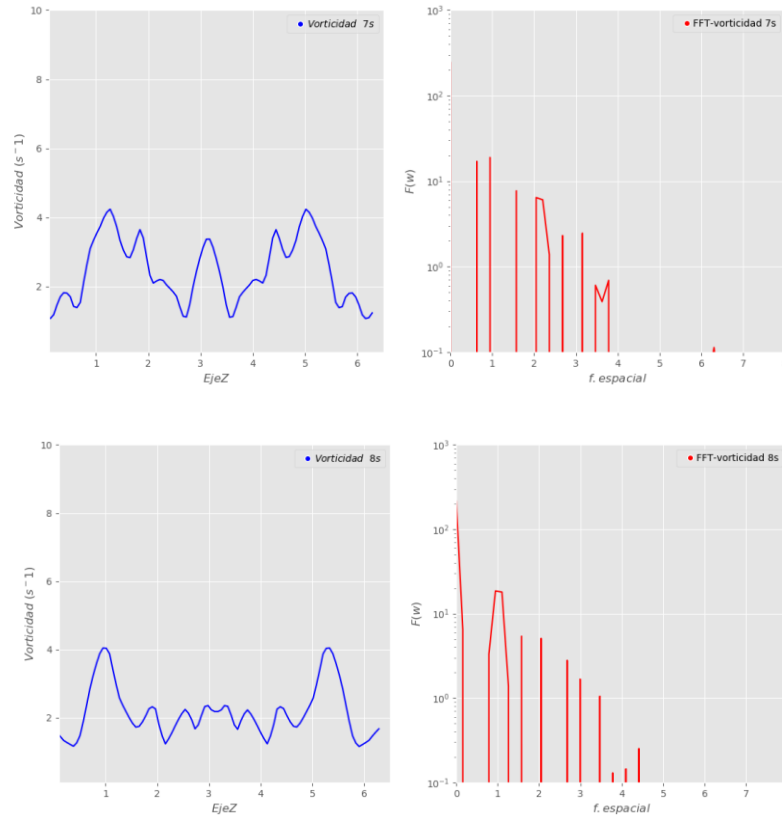


Figura nº 24. Transformadas rápidas de Fourier 7-8s de vorticidad sobre el eje Z.

El objetivo de realizar la transformada de Fourier de los valores de vorticidad encontrados en una línea del cubo, consiste en observar los espectros de la vorticidad. Es decir, mediante la transformada de Fourier se consigue pasar la señal obtenida de la vorticidad en el dominio espacial de un cubo al dominio de frecuencia y así obtener los picos del espectro de ésta cuando a simple vista en el primer dominio no son visibles.

La definición de la transformada de Fourier es la que se muestra a continuación.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \tag{5.12}$$

Donde  $f(t)$  es la función integrable en el dominio espacial que se ha obtenido del muestreo mencionado en el eje Z con punto en el centro del plano XY.

Observando las primeras gráficas se destaca como para cada instante de tiempo, se presentan altos cambios de vorticidad a lo largo del eje Z. Se puede ver como la forma de la vorticidad empieza muy suave y a lo largo de la simulación empieza a retorcerse en amplitudes cada vez más pequeñas. Esta señal de vorticidad parece sinusoidal pero con algunas distorsiones que impiden valorar a que frecuencia está proyectándose.

Aplicando la FFT se obtienen los espectros de la vorticidad. Puede observarse que a lo largo de la simulación, las señales convertidas en espectros van pareciéndose cada vez más a una tendencia exponencial, de acuerdo con la expresión que define la FFT.

Como se observa para las transformadas de Fourier observadas, en los instantes iniciales, a frecuencias espaciales muy bajas el espectro es más alto que en los instantes posteriores.

Posteriormente a este primer impulso, reaparece una segunda magnitud aún en frecuencias bajas. Este sigue siendo alto en los instantes iniciales, de acuerdo con la alta vorticidad del caso al principio de la simulación, pero en los últimos instantes su valor disminuye hasta la unidad. Cabe destacar que en otras frecuencias mayores también empiezan a resaltar otras amplitudes menos importantes y también cercanas a la unidad.

Por lo tanto, la mayor amplitud del espectro se encuentra siempre a bajas frecuencias aunque sea en instantes iniciales. En estos instantes mencionados incluso su amplitud es mayor y como ya se ha mencionado antes, va disminuyendo por lo que vuelve a constatarse que la vorticidad pierde fuerza a lo largo de la simulación. Esta vez se puede añadir mediante este análisis que su disminución, acorde con la energía cinética del cubo y la por tanto de la velocidad, siempre lo hace a una frecuencia predominante, alrededor de 1Hz.



## 6. Proyecto

En el presente apartado se detallan los diferentes costes requeridos para hacer el proyecto así como la planificación llevada a cabo para poder presentar el proyecto a tiempo y el impacto que este tiene en el medioambiente.

### 6.1. Planificación

La planificación del proyecto se ha realizado en base a las diferentes reuniones semanales con el tutor a cargo del proyecto.

Aunque en el diagrama que se muestra a continuación no se ve reflejado, las primeras reuniones empezaron en Julio de 2019 con el primer contacto con el tutor y las primeras tareas se realizaron a lo largo de los meses de Julio y Agosto con la búsqueda no intensiva de información relacionada con el proyecto. Sin embargo, en el esquema de Gantt las tareas empiezan con el principio del curso académico. Como se puede apreciar y dado que las simulaciones ocupan la mayor parte del trabajo pero no requieren de un control constante, otras tareas más dedicadas a la indagación e interpretación de resultados se vieron solapadas con estas.

La guía principal del trabajo como se ha mencionado anteriormente fueron las reuniones semanales con la finalidad de chequear continuamente el transcurso del proyecto.

Destacar que, la mayor dedicación del proyecto desde el punto de vista de confección fue el aprendizaje del software ya que está presente en cada una de las tareas realizadas.

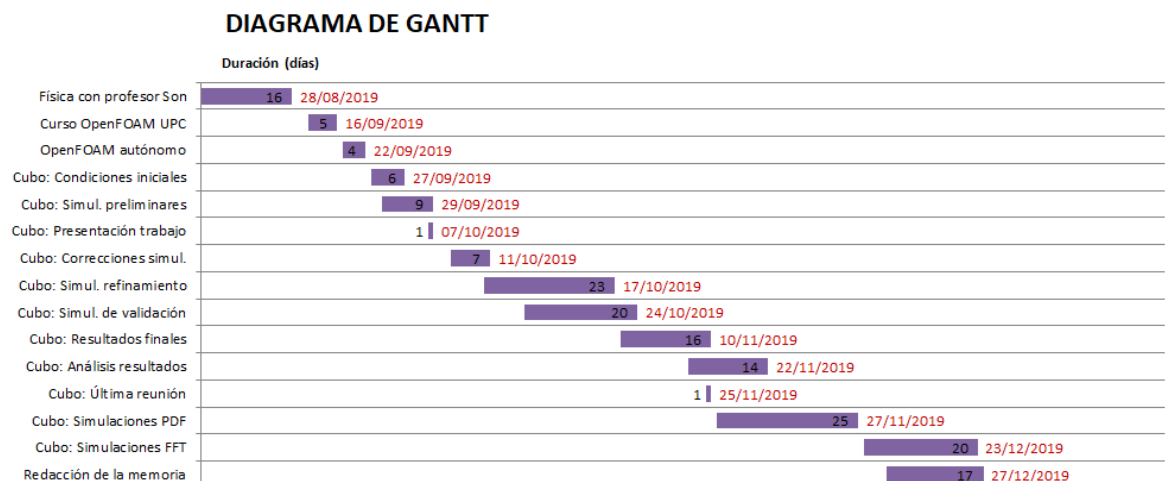


Figura nº 25. Diagrama de Gantt del proyecto.

## 6.2. Presupuesto

En esta sección se detallan los costes que han sido necesarios para la confección del presente proyecto. Se establecen dos tipos de recursos, teniendo en cuenta que el equipamiento no ha sido comprado expresamente para el proyecto, existe el recurso humano y el energético, en forma de electricidad para ejecutar las simulaciones necesarias.

Para la realización del proyecto se han utilizado un total de dos ordenadores tanto para la redacción de la memoria como para el lanzamiento de los casos en paralelo y un tercer equipo prestado por la escuela con un mayor número de subdominios.

Recurso	Potencia (kW)	Tiempo (h)	Precio unit. (€)	TOTAL (€)
Humano	--	980	18	17.640
Curso OpenFOAM	--	35	600	600
Electricidad	0,33	1785,6	0,11	64,8
IVA (21%)				3.844
<b>TOTAL</b>				<b>22.149</b>

Tabla nº 4. Presupuesto para el desarrollo del proyecto.

## 6.3. Impacto medioambiental

Desde el punto de vista medioambiental y dado que el consumo energético necesario tal y como se ha mencionado anteriormente para la realización del proyecto es únicamente de electricidad para la alimentación de los ordenadores, se consiguen las emisiones de CO<sub>2</sub> generadas mediante el factor de conversión establecido por la Orden FOM 1635 [17].

$$Emisiones_{CO_2} = 589,25kWh \cdot 0,357 \text{ kg} \frac{CO_2}{kWh} = 210,36 \text{ kg}CO_2 \quad (6.1)$$

## 7. Conclusiones

En el presente trabajo se ha dado cabida a un campo científico en completa investigación a día de hoy como lo es la fusión nuclear. Más específicamente se han realizado simulaciones en el campo del plasma para verificar que el código MHDFoam en el entorno OpenFOAM® en la investigación es fiable y válido.

Uno de los objetivos de este proyecto consistía en indagar sobre magnetohidrodinámica para su aplicación en el campo del plasma. Se han podido explicar los fenómenos físicos que aparecen en las diferentes simulaciones de acuerdo con los resultados obtenidos y la teoría detallada.

Posteriormente, se han hecho una serie de análisis de convergencia de malla para obtener aquella con mayor resolución posible sin un exceso de tiempo de computación. También se han realizado otros tipos de análisis según los resultados de vorticidad obtenidos.

Se ha realizado una validación del código, que ha contrastado los resultados obtenidos en el proyecto con los publicados en el trabajo de Morales [1]. Se ha concluido que el código es válido.

Por último, se ha realizado un análisis del parámetro de la vorticidad mediante la función de densidad de probabilidad de esta variable y la transformada rápida de Fourier con el objetivo de analizar cuantitativamente los resultados cualitativos iniciales.



## 8. Agradecimientos

Yo, Gerard López Cabrera, quisiera agradecer a Daniel, por su dedicación en este trabajo, ya que sin su ayuda, la confección de este trabajo, no hubiese sido posible. Gracias a su conocimiento y entrega, he podido desarrollar un proyecto para un campo totalmente diferente al que me dedico profesionalmente y agradezco que me lo propusiese en su día, porque ha sido una gran experiencia.

También me gustaría agradecer a mi compañero David, su ayuda insaciable e incondicional en los días en los que sobretodo costaba entender algunos conceptos o las simulaciones no iban como uno esperaba. Ha sido un placer trabajar con David y le deseo lo mejor en su carrera profesional.

## 9. Índice de tablas e ilustraciones

### 9.1. Índice de ilustraciones

<i>Figura nº 1. Proyecto experimental ITER. Fuente: [9].</i>	12
<i>Figura nº 2. Futuro de los proyectos ITER y DEMO. Fuente: [8].</i>	13
<i>Figura nº 3. Discretización difusión. Fuente: [11].</i>	18
<i>Figura nº 4. Discretización convección-difusión. Fuente: [13].</i>	20
<i>Figura nº 5. Algoritmo PISO, discretización de <math>u</math>. Fuente: [11].</i>	22
<i>Figura nº 6. Algoritmo PISO. Fuente: [14].</i>	25
<i>Figura nº 7. Campo de velocidades y magnético inicial para el caso cubo.</i>	29
<i>Figura nº 8. Energía en el caso cubo <math>64^3</math>.</i>	31
<i>Figura nº 9. Densidad de corriente y disipación magnética en cubo <math>64^3</math>.</i>	32
<i>Figura nº 10. Evolución cubo <math>64^3</math> término a término.</i>	33
<i>Figura nº 11. Evolución del campo magnético y la velocidad en el cubo.</i>	34
<i>Figura nº 12. Residuales de la simulación del cubo.</i>	34
<i>Figura nº 13. Resultados de refinado del caso cubo, energía.</i>	36
<i>Figura nº 14. Resultados de refinado del caso cubo, densidad de corriente.</i>	37
<i>Figura nº 15. Resultados de refinado del caso cubo, disipación magnética.</i>	37
<i>Figura nº 16. Validación del código OpenFOAM.</i>	40
<i>Figura nº 17. Validación del código, referencia. Fuente: [1].</i>	40
<i>Figura nº 18. Validación densidad de corriente. Fuente: [1].</i>	41
<i>Figura nº 19. Validación de la disipación magnética. Fuente: [15].</i>	41

<i>Figura nº 20. Funciones de densidad de probabilidad, PDF-vorticidad. ....</i>	<i>43</i>
<i>Figura nº 21. Localización de la línea de sondeo. ....</i>	<i>45</i>
<i>Figura nº 22. Transformadas rápidas de Fourier 1-2s de la vorticidad sobre el eje Z. ....</i>	<i>45</i>
<i>Figura nº 23. Transformadas rápidas de Fourier 3-6s de vorticidad sobre el eje Z. ....</i>	<i>46</i>
<i>Figura nº 24. Transformadas rápidas de Fourier 7-8s de vorticidad sobre el eje Z. ....</i>	<i>47</i>
<i>Figura nº 25. Diagrama de Gantt del proyecto. ....</i>	<i>49</i>

## 9.2. Índice de tablas

<i>Tabla nº 1. Simulaciones de benchmark. ....</i>	<i>36</i>
<i>Tabla nº 2. Resultados del índice de convergencia de malla. ....</i>	<i>38</i>
<i>Tabla nº 3. Simulaciones comparativas referente a [1]. ....</i>	<i>40</i>
<i>Tabla nº 4. Presupuesto para el desarrollo del proyecto. ....</i>	<i>50</i>

## 10. Bibliografía

- [1] J. MORALES, Magnétohydrodynamique confinée appliquée aux plasmas de fusion magnétiques, Lyon, 2013.
- [2] WIKIPEDIA, «Historia Fusión Nuclear,» 24 Diciembre 2019. [En línea]. Available: [http://www.wikipedia.org/wiki/Historia\\_de\\_la\\_fusión\\_nuclear](http://www.wikipedia.org/wiki/Historia_de_la_fusión_nuclear).
- [3] WIKIPEDIA, «Fisión Nuclear,» [En línea]. Available: [http://www.wikipedia.org/wiki/Fisión\\_nuclear](http://www.wikipedia.org/wiki/Fisión_nuclear). [Último acceso: 24 Diciembre 2019].
- [4] UPC PHYSICS DPT., «Nuclear power plants,» Barcelona, 2018.
- [5] M. FUSTER, Application of the edge-based finite element method for fusion plasma simulations, Barcelona, 2018.
- [6] SCIENCEDIRECT, «Boltzmann Distribution,» [En línea]. Available: <http://www.sciencedirect.com/topics/earth-and-planetary-sciences/boltzmann-distribution>. [Último acceso: 16 Noviembre 2019].
- [7] ECURED, «Plasma,» [En línea]. Available: <http://www.ecured.cu/Plasma>. [Último acceso: 16 Noviembre 2019].
- [8] EUROFUSION, «The road to fusion electricity,» [En línea]. Available: <http://www.eurofusion.org/eurofusion/roadmap>. [Último acceso: 11 Noviembre 2019].
- [9] E. MAS DE LES VALLS, Development of a simulation tool for MHD flows under nuclear fusion conditions, Barcelona, 2011.
- [10] D. FLEISCH, A student's guide to Maxwell's equation, Cambridge, 2008.
- [11] H. VERSTEEG y W. MALALASEKERA, An introduction to computational Fluid Dynamics, Londres, 1995.
- [12] L. MANGANI y F. MOUKALLED, The finite volume in computational fluid dynamics, Suiza, 2016.
- [13] D. SUAREZ, «Hands on OpenFOAM CFD simulations for heat and mass transfer in



industrial processes,» Barcelona, 2019.

- [14] E. IRAOLA y C. LAMPÓN, «MHD applied to nuclear fusion reactors,» de *Parametric study of tritium transference in liquid metal channels under magnetic fields in nuclear fusion reactors*, Barcelona, 2019.
- [15] P. MININNI y D. MONTGOMERY, Small scale structures in three-dimensional magnetohydrodynamic turbulence, Hanover, 2008.
- [16] I. CELIK, «Procedure for estimation and reporting of discretization error in CFD,» Virginia.
- [17] IDAE, «Factores de emisión de CO<sub>2</sub> y coeficientes de paso a energía primaria de diferentes fuentes de energía final consumidas en el sector de edificios de España,» Madrid, 2016.